Μαθηματική Ανάλυση Ι

Ενότητα 5: Όρια και Συνέχεια

Επίκ. Καθηγητής Θ. Ζυγκιρίδης

e-mail: *tzygiridis@uowm.gr*

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

- Σημεία συσσώρευσης, μεμονωμένα σημεία.
- Ορισμοί και ιδιότητες ορίων, κριτήριο παρεμβολής.
- Πλευρικά όρια, όρια στο $\pm\infty$, μη πεπερασμένα όρια.
- Ορισμός συνέχειας.
- Συνεχείς συναρτήσεις.
- Ιδιότητες και θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων.

Στόχοι

Στο τέλος της ενότητας, οι φοιτητές:

- θα έχουν κατανοήσει τις έννοιες των ορίων και της συνέχειας,
- θα μπορούν να υπολογίζουν όρια,
- θα είναι σε θέση να ελέγχουν τη συνέχεια μιας συνάρτησης,
- θα μπορούν να αξιοποιούν, όταν αυτό χρειαστεί, τα αντίστοιχα θεωρήματα.

Σημεία συσσώρευσης (1/2)

Ονομάζουμε ανοιχτή ***ε*-περιοχή** ή **ανοιχτή περιοχή ακτίνας *ε* > 0** ενός σημείου $x_0 \in \mathbb{R}$ το διάστημα $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$:

$$\pi_\varepsilon(x_0) = \left\{x \in \mathbb{R} : x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\right\}$$

- περιοχή του $+\infty$: $(\varepsilon, +\infty)$
- περιοχή του $-\infty$: $(-\infty, -\varepsilon)$

Το σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ αποτελεί **σημείο συσσώρευσης** ενός συνόλου A, αν σε κάθε ανοιχτή *ε*-περιοχή του x_0 υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $x \in A$, με $x \neq x_0$:

$$A \cap \left(\pi_\varepsilon(x_0) - \{x_0\}\right) \neq \varnothing$$

Το σημείο x_0 δεν είναι απαραίτητο να ανήκει στο A.

Σημεία συσσώρευσης (2/2)

Το $+\infty$ αποτελεί **σημείο συσσώρευσης** ενός συνόλου Α, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ με $x > \varepsilon$:

$$(\varepsilon, +\infty) \cap A \neq \varnothing$$

Το $-\infty$ αποτελεί **σημείο συσσώρευσης** ενός συνόλου Α, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ με $x < -\varepsilon$:

$$(-\infty, -\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$$

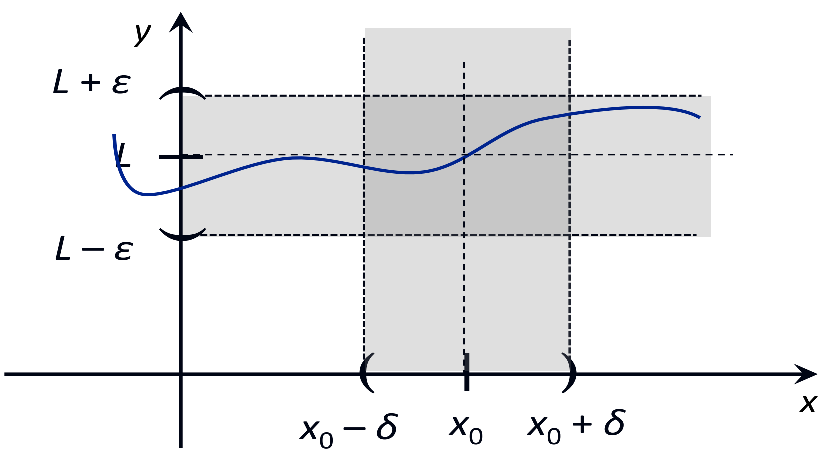
Ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ αποτελεί **μεμονωμένο σημείο** ενός συνόλου Α, αν $x_0 \in A$ και το x_0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης του Α.

Ορισμός ορίου (1/2)

Έστω η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A.

Η συνάρτηση f **συγκλίνει** στον $L \in \mathbb{R}$ (ή έχει όριο τον $L \in \mathbb{R}$) όταν το x τείνει στο x_0, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιος ώστε να ισχύει $|f(x) - L| < \varepsilon$ για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \left(\text{ή} \quad f(x) \to L, \text{ όταν } x \to x_0\right)$$



- Δηλ. για κάθε $\varepsilon > 0$ πρέπει να υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$, έτσι ώστε $f(x) \in \pi_\varepsilon(L)$ για κάθε $x \in A$ με $x \neq x_0$ και $x \in \pi_\delta(x_0)$.
- Αν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, αυτό είναι μοναδικό.

Ορισμός ορίου (2/2)

Έστω η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A.
Η συνάρτηση f **συγκλίνει** στον $L \in \mathbb{R}$ (ή έχει **όριο** τον $L \in \mathbb{R}$) όταν το x τείνει στο x_0, αν για κάθε ακολουθία (a_n) με $\lim a_n = x_0$ και $a_n \in A$, ισχύει και $\lim f(a_n) = L$.

Αν βρεθούν δύο ακολουθίες (a_n), (b_n), με $\lim a_n = \lim b_n = x_0$ και $\lim f(a_n) \neq \lim f(b_n)$, τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

- Παράδειγμα

Να δειχτεί ότι το όριο

$$\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

δεν υπάρχει.

Ιδιότητες ορίων (1/2)

Έστω ότι υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f, g στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχουν και τα ακόλουθα όρια και υπολογίζονται ως εξής:

- $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x) \right] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \left[\kappa \cdot f(x) \right] = \kappa \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \quad \left(\kappa \in \mathbb{R} \right)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \quad \left(\text{με} \quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0 \right)$

Ιδιότητες ορίων (2/2)

- $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \right]^n = \left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right]^n, \quad n \in \mathbb{N}$

- $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}, \quad n \in \mathbb{N}$

  $\left(\text{αν } n \text{ άρτιος, πρέπει } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \pi_\varepsilon(x_0),\ x \neq x_0 \right)$

- $\lim\limits_{x \to x_0} \left| f(x) \right| = \left| \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \right|$

- Αν $f: \mathrm{A} \to \mathbb{R}$, $g: f(\mathrm{A}) \to \mathbb{R}$, x_0 σημείο συσσώρευσης του Α, y_0 σημείο συσσώρευσης του $f(\mathrm{A})$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ και $f(x) \neq y_0$ σε περιοχή του x_0 με $x \neq x_0$, τότε

$$\lim_{x \to x_0} \left(g \circ f \right)(x) = \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y)$$

Βασικά όρια (1/2)

$$\lim_{x\to x_0} c = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\left(x_0 \geq 0 \text{ αν } n \text{ άρτιος}\right)$$

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- Αν $p(x)$ πολυωνυμική συνάρτηση του x, τότε

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)$$

- Αν $p(x)$, $q(x)$ πολυωνυμικές συναρτήσεις του x, με $q(x_0) \neq 0$, τότε

$$\lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}$$

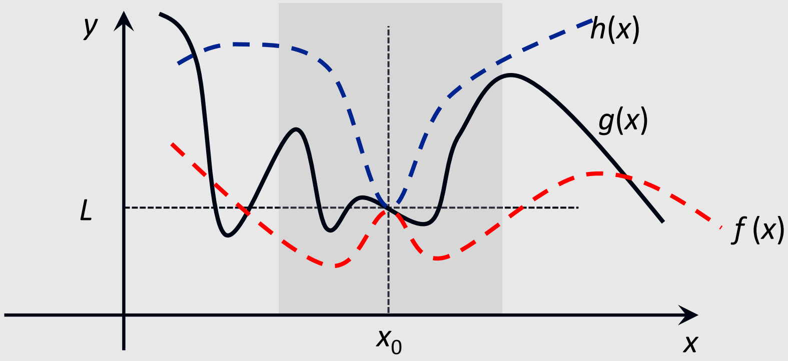
-10-

Κριτήριο παρεμβολής

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h: Α → $\mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του Α. Αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} h(x)$ και ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

- $f(x) \le g(x) \le h(x)$ σε μια ε-περιοχή του x_0 με $x \neq x_0$,
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$,

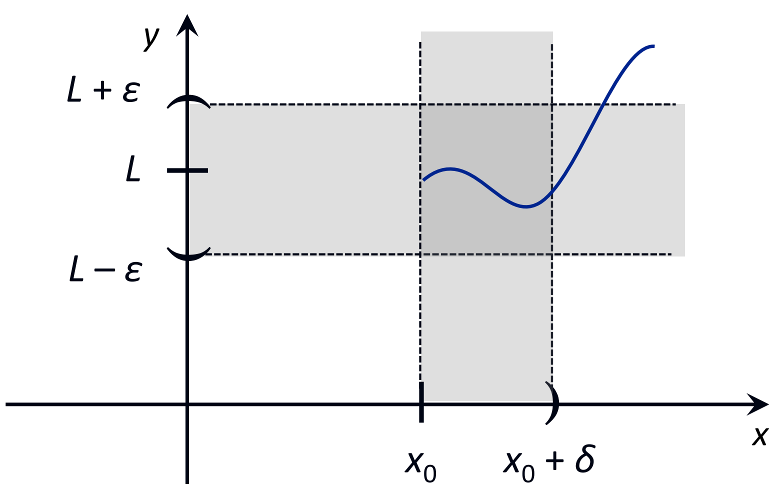
τότε και $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$



Πλευρικά όρια (1/2)

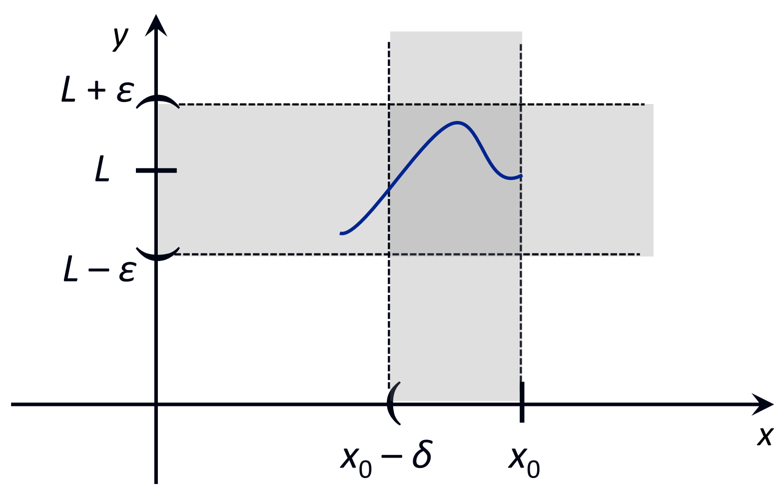
Η συνάρτηση f έχει **όριο** τον $L \in \mathbb{R}$ όταν το x τείνει στο x_0 **από δεξιά**, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιος ώστε να ισχύει $|f(x) - L| < \varepsilon$ για κάθε $x \in A$ με $x_0 < x < x_0 + \delta$:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$



Η συνάρτηση f έχει **όριο** τον $L \in \mathbb{R}$ όταν το x τείνει στο x_0 **από αριστερά**, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιος ώστε να ισχύει $|f(x) - L| < \varepsilon$ για κάθε $x \in A$ με $x_0 - \delta < x < x_0$:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$



Πλευρικά όρια (2/2)

Έστω συνάρτηση f: A → $\mathbb{R}$, x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A και $L \in \mathbb{R}$. Αν η f ορίζεται σε ένα διάστημα $(a, x_0) \cup (x_0, b)$, τότε ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

- Αν μια συνάρτηση f ορίζεται στο (a, x_0), αλλά όχι στο (x_0, b), τότε θεωρούμε
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$
- Αν μια συνάρτηση f ορίζεται στο (x_0, b), αλλά όχι στο (a, x_0), τότε θεωρούμε
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Μη πεπερασμένα όρια

- Έστω η συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$, με x_0 σημείο συσσώρευσης του A.

Η συνάρτηση f έχει **όριο** το $+\infty$ ή **απειρίζεται θετικά** όταν το x τείνει στο x_0, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x) > \varepsilon$ για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Η συνάρτηση f έχει **όριο** το $-\infty$ ή **απειρίζεται αρνητικά** όταν το x τείνει στο x_0, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x) < -\varepsilon$ για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Ιδιότητες

- $$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\left[-f(x)\right] = -\infty$$
- $$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0$$
- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = +\infty$
- Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = -\infty$
- Αν $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\begin{cases} \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty \\ \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \end{cases}$

Όρια στο $\pm\infty$

Έστω η συνάρτηση f: Α → $\mathbb{R}$, με τα $+\infty$, $-\infty$ να αποτελούν σημεία συσσώρευσης του Α.

Η συνάρτηση f **συγκλίνει** στον $L \in \mathbb{R}$ (ή έχει **όριο** τον $L \in \mathbb{R}$) όταν το x τείνει στο $+\infty$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιος ώστε να ισχύει $|f(x) - L| < \varepsilon$ για κάθε $x \in$ Α με $x > \delta$:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = L$$

Η συνάρτηση f **συγκλίνει** στον $L \in \mathbb{R}$ (ή έχει **όριο** τον $L \in \mathbb{R}$) όταν το x τείνει στο $-\infty$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιος ώστε να ισχύει $|f(x) - L| < \varepsilon$ για κάθε $x \in$ Α με $x < -\delta$:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = L$$

Βασικά όρια (2/2)

- $$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty, \quad n \in \mathbb{N}$$
- $$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$
- $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$
- $$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$
- Αν $a > 1$, τότε $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$
- Αν $0 < a < 1$, τότε $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

Ορισμός συνέχειας

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathrm{P}$ είναι **συνεχής** στο $x_0 \in A$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ όταν $|x - x_0| < \delta$ με $x \in A$.

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathrm{P}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$, όπου x_0 σημείο συσσώρευσης του A, αν ισχύει

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

*Αν το x_0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης (δηλ. μεμονωμένο σημείο), η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0.

Πλευρική συνέχεια

Μια συνάρτηση $f: \mathrm{A} \to \mathrm{P}$ είναι **συνεχής** στο $x_0 \in \mathrm{A}$ **από δεξιά**, αν ισχύει

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Μια συνάρτηση $f: \mathrm{A} \to \mathrm{P}$ είναι **συνεχής** στο $x_0 \in \mathrm{A}$ **από αριστερά**, αν ισχύει

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Απόδειξη συνέχειας μέσω ακολουθιών (1/2)

Μια συνάρτηση f: Α → P είναι **συνεχής** στο $x_0 \in$ Α, αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) του Α που συγκλίνει στο x_0, η ακολουθία $(f(x_n))$ **συγκλίνει** στο $f(x_0)$.

Βρίσκοντας δύο ακολουθίες (a_n), (b_n), με

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_0$$

και

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

αποδεικνύεται πως η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη συνέχειας μέσω ακολουθιών (2/2)

Παράδειγμα

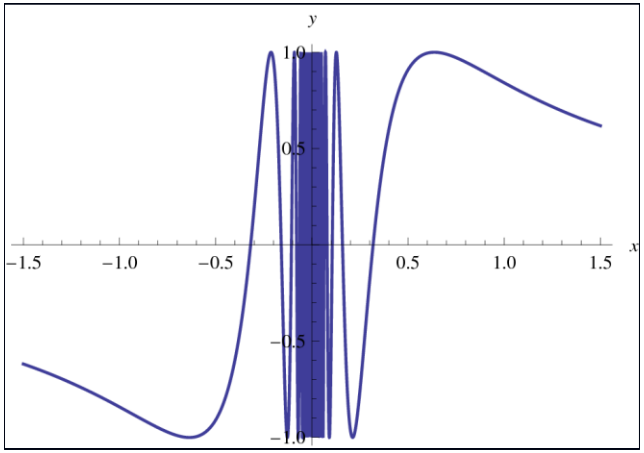
Η παρακάτω συνάρτηση

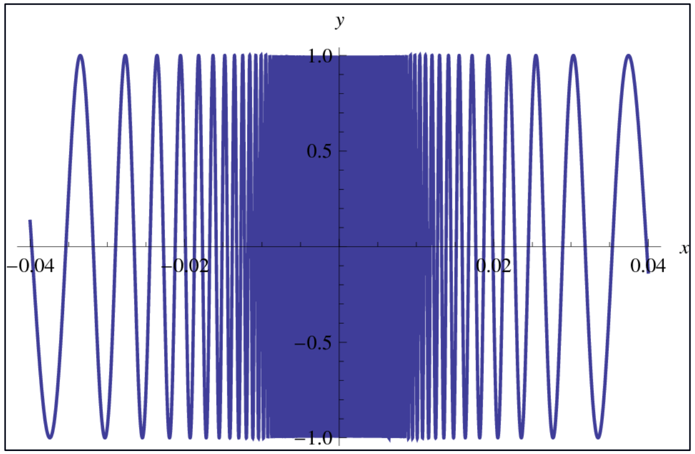
δεν είναι συνεχής στο $x = 0$:

Με τη βοήθεια ακολουθιών, έχει δειχτεί ότι δεν υπάρχει το

$$f(x)=\begin{cases}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$





Περιπτώσεις συνεχών συναρτήσεων

Οι ακόλουθες κατηγορίες συναρτήσεων είναι συνεχείς στα πεδία ορισμού τους:

- Πολυωνυμικές,
- Ρητές,
- Τριγωνομετρικές,
- Εκθετικές-λογαριθμικές.

Αν οι συναρτήσεις f, g: A $\rightarrow$ P είναι συνεχείς, τότε θα είναι συνεχείς και οι συναρτήσεις

- $f + g$
- $f \cdot g$
- $\lambda \cdot f, \lambda \in \mathrm{P}$
- $f / g, g(x) \neq 0$

Σύνθεση συναρτήσεων/αντίστροφη

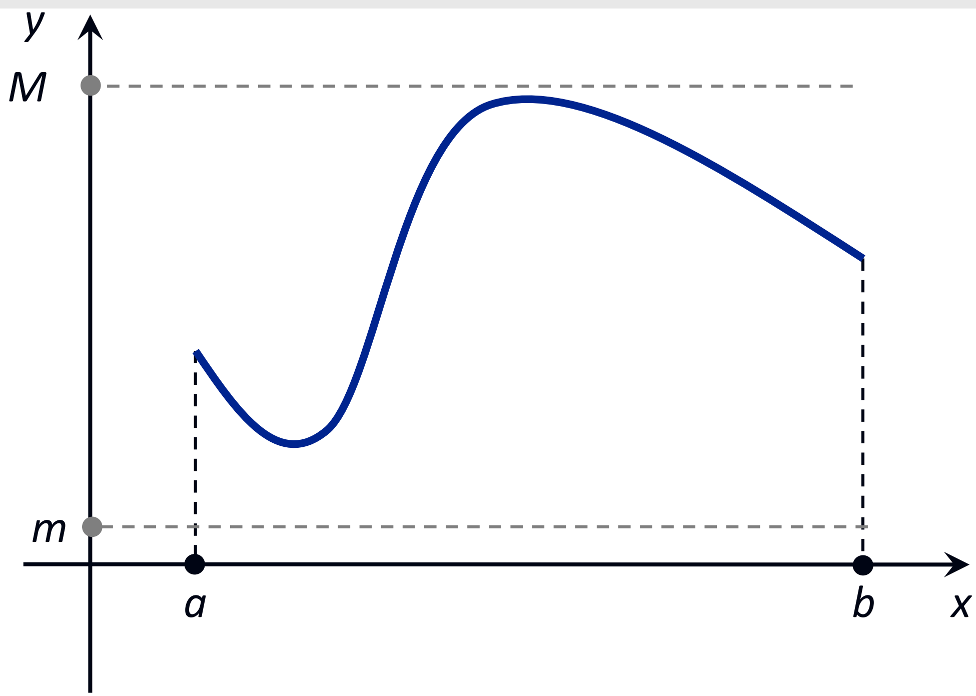
Έστω οι συναρτήσεις f: Α $\to$ Ρ και g: Β $\to$ Ρ, με f(Α) $\subseteq$ Β. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in$ Α και η g συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεση $g \circ f$ θα είναι συνεχής στο x_0.

Έστω η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: [a, b] \to$ Ρ με $f([a, b]) = [c, d]$. Τότε η αντίστροφή της $f^{-1}: [c, d] \to [a, b]$ είναι και αυτή συνεχής και γνησίως μονότονη.

Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων (1/2)

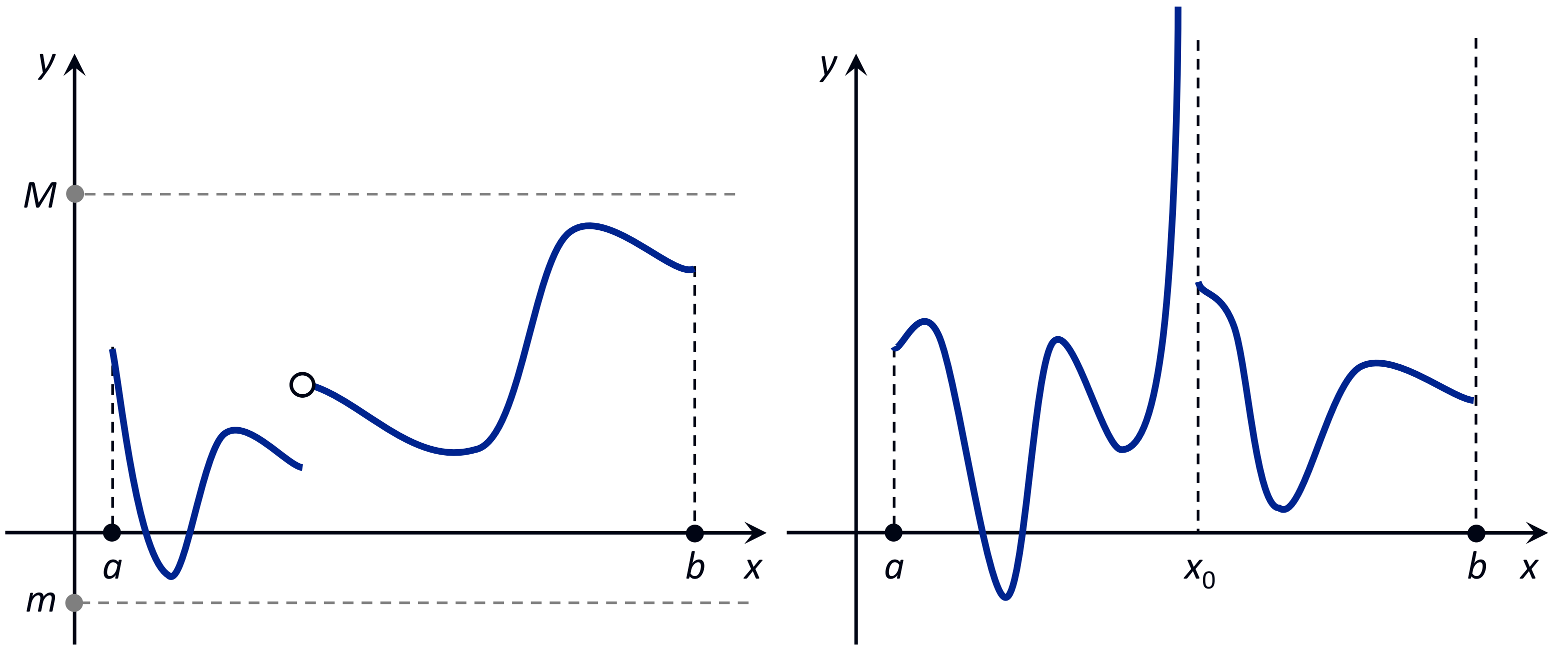
Αν μια συνάρτηση $f: [a, b] \to \mathrm{P}$ είναι **συνεχής**, τότε είναι και **φραγμένη**, δηλ. υπάρχουν m, $M \in \mathrm{P}$, τέτοιοι ώστε να ισχύει

$m \leq f(x) \leq M$.



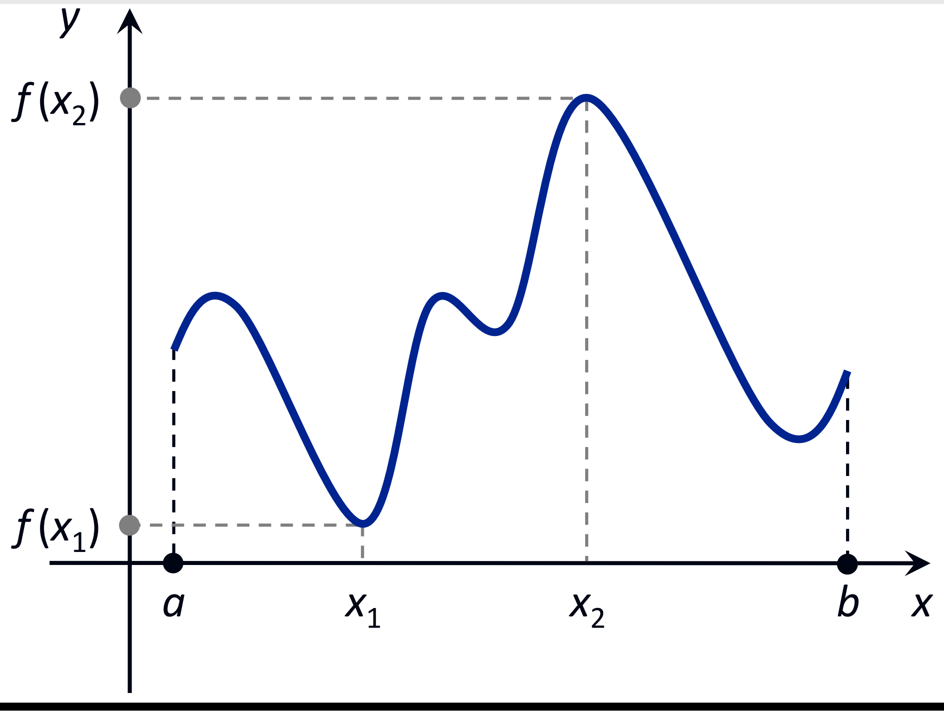
Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων (2/2)

Αν δεν ικανοποιούνται οι συνθήκες του προηγούμενου θεωρήματος, τα συμπεράσματά του μπορούν είτε να ισχύουν, είτε όχι.



Θεώρημα μέγιστης /ελάχιστης τιμής

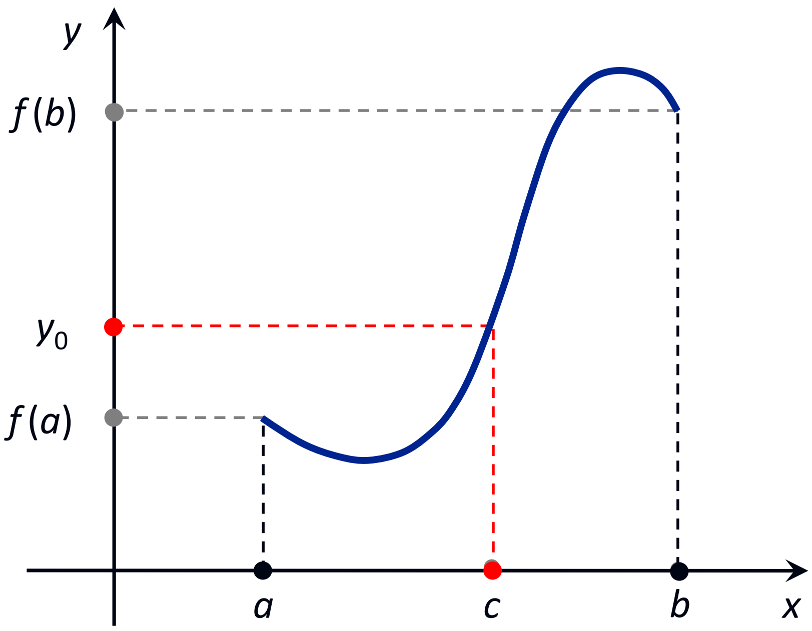
Αν μια συνάρτηση $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, b]$, τέτοια ώστε για κάθε $x \in [a, b]$ να ισχύει $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.



Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής

Αν μια συνάρτηση $f: [a, b] \to$ Ρ είναι συνεχής, τότε για κάθε τιμή y_0 μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ θα υπάρχει $c \in [a, b]$, τέτοιο ώστε $f(c) = y_0$.

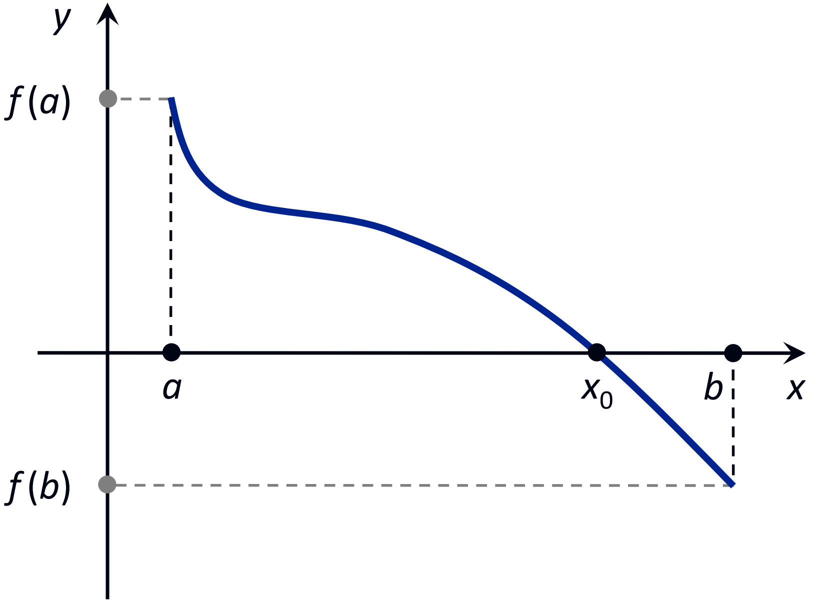
Ισοδύναμα, εξασφαλίζεται ότι η εξίσωση $f(x) = y_0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $[a, b]$.



Θεώρημα Bolzano (1/2)

Αν μια συνάρτηση $f: [a, b] \to$ Ρ είναι συνεχής και ισχύει

$f(a) \cdot f(b) < 0$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, b)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

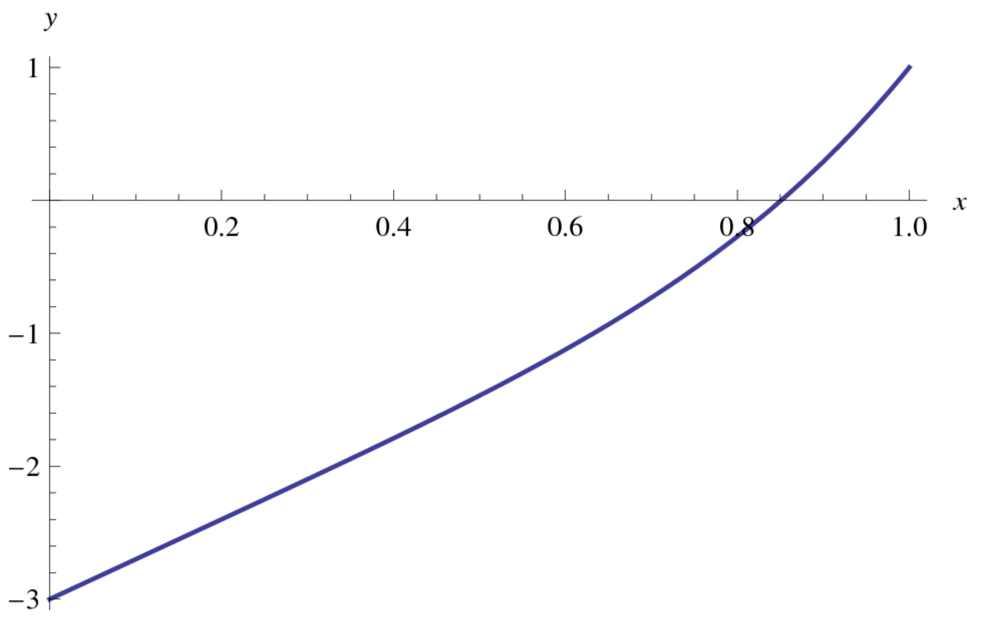


Θεώρημα Bolzano (2/2)

Παράδειγμα:

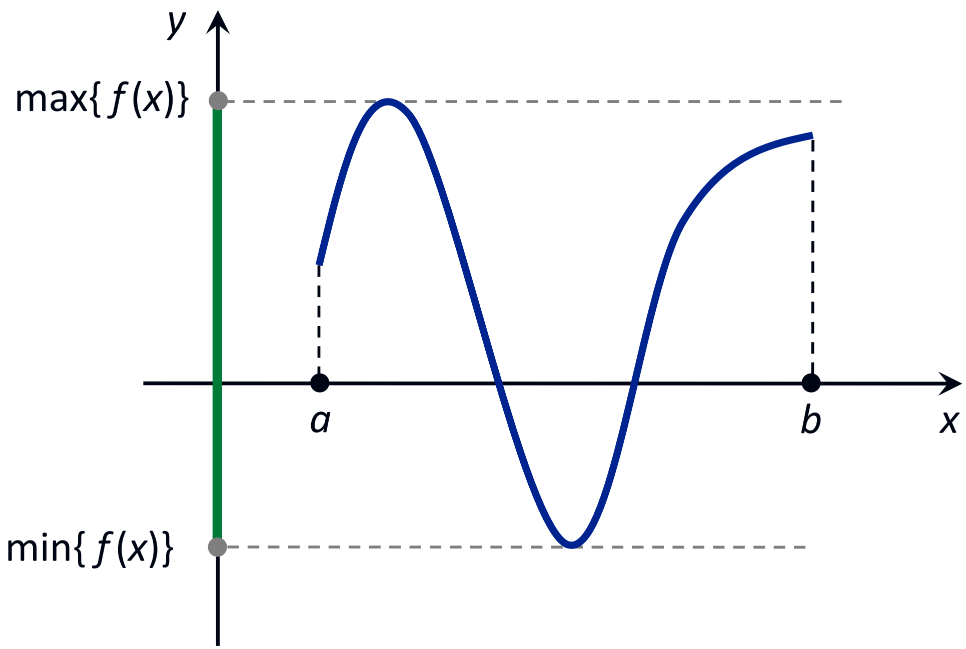
Να δειχτεί ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$x_0^5 + 3x_0 = 3$$



Ιδιότητες (σύνολο τιμών) (1/5)

Αν μια συνάρτηση $f: [a, b] \to \mathrm{P}$ είναι συνεχής, τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[\min\{f(x)\}, \max\{f(x)\}]$.



Παράδειγμα

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = x^4,$$

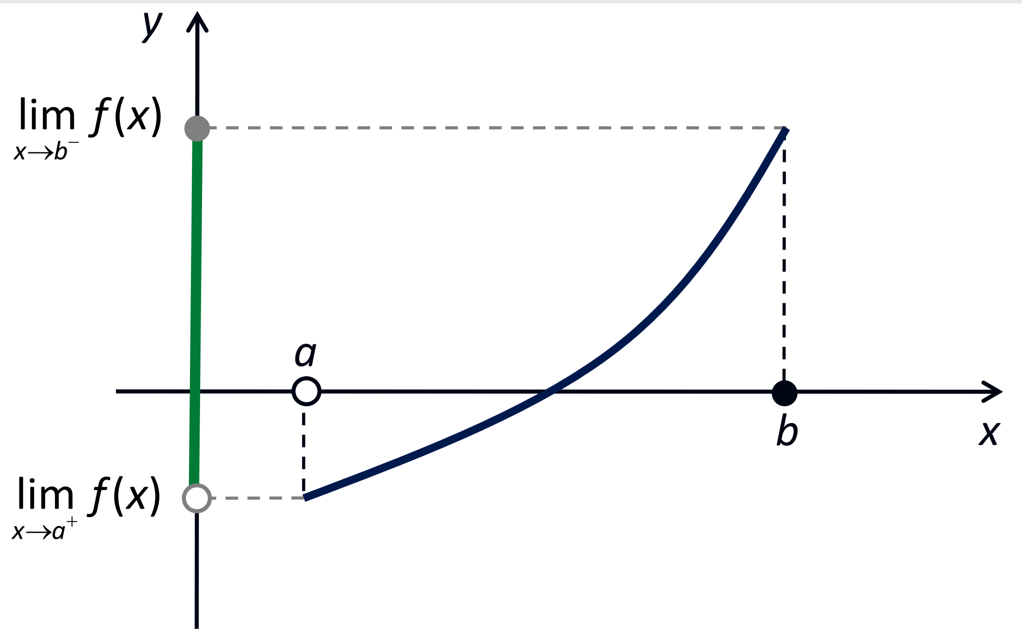
με πεδίο ορισμού το

$$[1, 2].$$

Ιδιότητες (σύνολο τιμών) (2/5)

- Αν μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού με άκρα τα a, b, ($a < b$), είναι συνεχής και **γνησίως αύξουσα**, τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα με άκρα τα

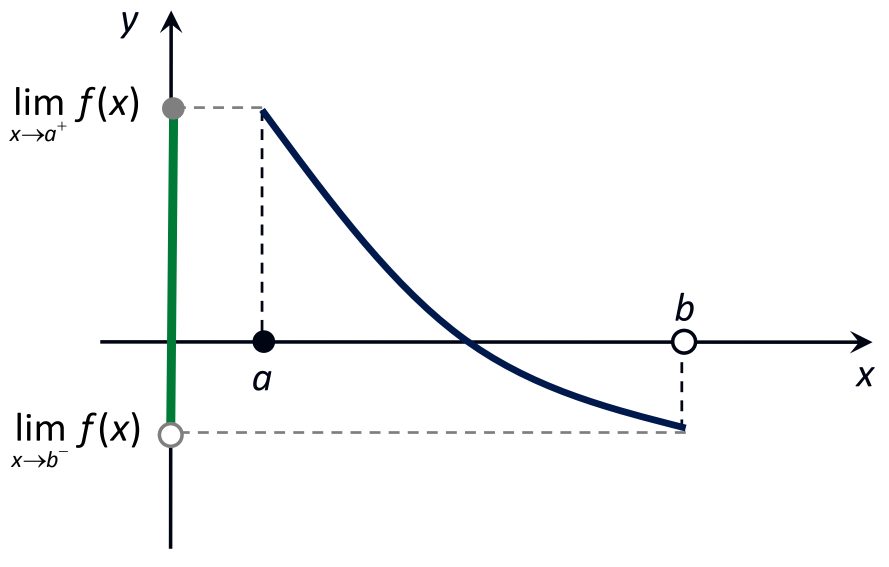
$$\lim_{x\to a^+} f(x),\ \lim_{x\to b^-} f(x)$$



Ιδιότητες (σύνολο τιμών) (3/5)

Αν μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού με άκρα τα a, b, ($a < b$), είναι συνεχής και **γνησίως φθίνουσα**, τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα με άκρα τα

$$\lim_{x \to b^-} f(x), \lim_{x \to a^+} f(x)$$



Ιδιότητες (σύνολο τιμών) (4/5)

Αν μια συνάρτηση $f : (a, b) \to \mathrm{P}$ είναι συνεχής, τότε κάθε αριθμός μεταξύ των

$$\lim_{x \to a^+} f(x), \lim_{x \to b^-} f(x)$$

περιέχεται στο σύνολο τιμών της f.

Αν μια συνάρτηση $f : [a, b) \to \mathrm{P}$ είναι συνεχής, τότε κάθε αριθμός μεταξύ των

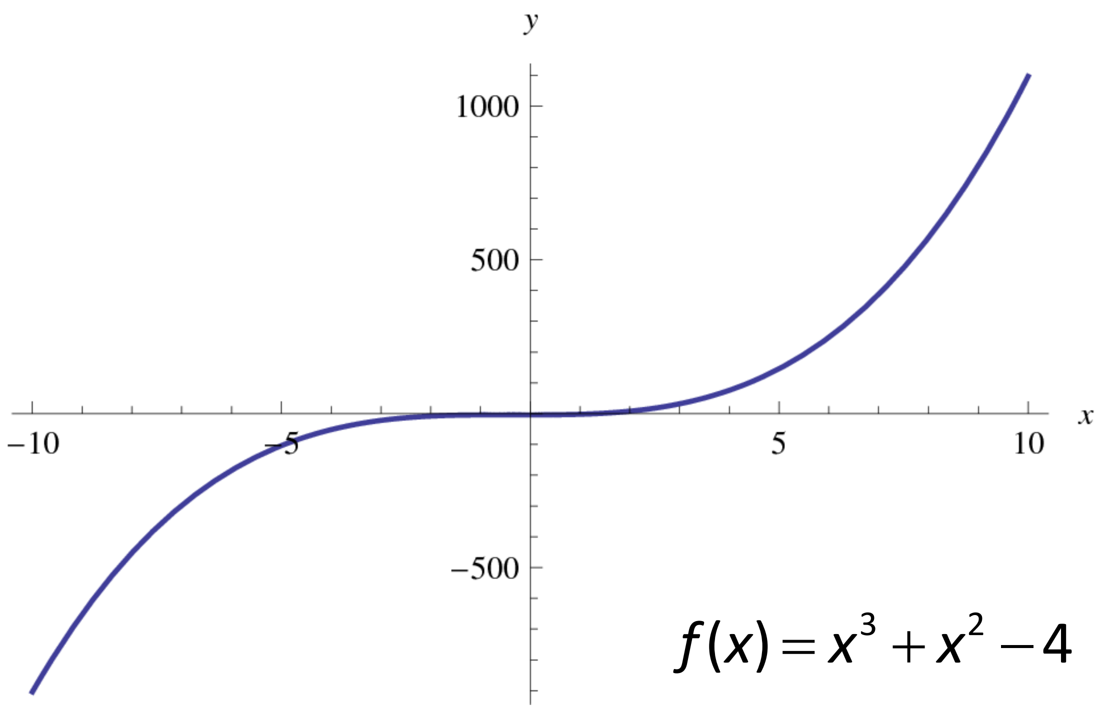
$$f(a), \lim_{x \to b^-} f(x)$$

περιέχεται στο σύνολο τιμών της f.

Ιδιότητες (σύνολο τιμών) (5/5)

Παράδειγμα

Να δειχτεί ότι κάθε πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού έχει ως σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.



Τέλος Ενότητας

Σημείωμα Αναφοράς

- Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Ζυγκιρίδης Θεόδωρος. «Μαθηματική Ανάλυση Ι». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

  https: //eclass.uowm.gr/courses/ICTE259/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

– το Σημείωμα Αναφοράς
– το Σημείωμα Αδειοδότησης
– τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
– το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.