Μαθηματική Ανάλυση Ι

Ενότητα 10: Δυναμοσειρές

Επίκουρος Καθηγητής Θ. Ζυγκιρίδης

e-mail: *tzygiridis@uowm.gr*

Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

- Ορισμός.
- Σύγκλιση.
- Παραγώγιση/ολοκλήρωση.
- Σειρές Taylor και Maclaurin.

Στόχοι

Μέσα από αυτήν την ενότητα, οι φοιτητές

- θα μπορούν να εξετάζουν τη σύγκλιση δυναμοσειρών,
- θα μάθουν να παραγωγίζουν και να ολοκληρώνουν δυναμοσειρές,
- θα είναι σε θέση να προσεγγίζουν συναρτήσεις με πολυωνυμικές εκφράσεις.

Δυναμοσειρές

Δυναμοσειρά της μεταβλητής x με κέντρο το $x_0 \in \mathrm{P}$ καλείται μια σειρά της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$$

όπου οι αριθμοί $a_n \in \mathrm{P}$, $n \in \mathrm{N}$, αποτελούν τους **συντελεστές** της δυναμοσειράς.

τα μερικά αθροίσματα της σειράς είναι πολυώνυμα του *x*

Δυναμοσειρά με κέντρο το $x = 0$ καλείται μια σειρά της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Σύγκλιση (1/3)

Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **συγκλίνει** για $x = x_0$, όταν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ είναι συγκλίνουσα.

- Κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για $x = 0$, αφού

$$x = 0: \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0 + a_1 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0^n + \ldots = a_0$$

Παράδειγμα

Για ποιες τιμές του x συγκλίνει η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$;

Σύγκλιση (2/3)

- Αν μια δυναμοσειρά **συγκλίνει** για κάποιο $x = x_0 \neq 0$, τότε **συγκλίνει απολύτως** για κάθε x με $|x| < |x_0|$.
- Αν μια δυναμοσειρά **δε συγκλίνει** για κάποιο $x = x_0 \neq 0$, τότε θα **δε συγκλίνει** για κανένα x με $|x| > |x_0|$.

Για μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ θα ισχύει μία από τις περιπτώσεις:

- συγκλίνει μόνο για $x = 0$,
- συγκλίνει για κάθε $x \in \mathrm{P}$,
- υπάρχει $R > 0$, για τον οποίο η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως όταν $|x| < R$ και αποκλίνει όταν $|x| > R$.

ακτίνα σύγκλισης

Σύγκλιση (3/3)

Για μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, αν

τότε: $$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{ή} \quad R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (R \geq 0 \text{ ή } R = +\infty)$$

α) αν $R = 0$, η δυναμοσειρά **συγκλίνει** μόνο για $x = 0$,

β) αν $R = +\infty$, η δυναμοσειρά **συγκλίνει** για κάθε $x \in \mathrm{P}$,

γ) αν $R \in (0, +\infty)$, η δυναμοσειρά **συγκλίνει** όταν $|x| < R$ και δε συγκλίνει όταν $|x| > R$.

δεν εξάγεται συμπέρασμα για $|x| = R$, οπότε οι περιπτώσεις όπου $x = \pm R$ εξετάζονται ξεχωριστά

Παραγώγιση /ολοκλήρωση δυναμοσειράς

Αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R > 0$, τότε η συνάρτηση που ορίζεται ως

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

στο διάστημα $(x_0 - R, x_0 + R)$ είναι **παραγωγίσιμη**, με

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

και **ολοκληρώσιμη**, με

$$\int f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} + c$$

Σειρές Taylor και Maclaurin

Αν μια συνάρτηση f μπορεί να αναπαρασταθεί με μια δυναμοσειρά, δηλ. αν

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

τότε αυτή θα είναι της μορφής

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

που αποτελεί τη **σειρά Taylor** της συνάρτησης f γύρω από το x_0.

*Για $x_0 = 0$, η σειρά ονομάζεται **σειρά Maclaurin**.

- Μια συνάρτηση δεν ισούται πάντα με τη σειρά Taylor/Maclaurin που προκύπτει από τη συνάρτηση.

Θεώρημα Taylor

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, με $n+1$ συνεχείς παραγώγους στο διάστημα $[a, b]$. Αν $x \in [a, b]$ με $x \neq x_0$, τότε υπάρχει ξ μεταξύ των x και x_0, τέτοιος ώστε

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

Όπου $\underbrace{T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{\text{πολυώνυμο Taylor της } f \text{ γύρω από το } x_0}$, $\underbrace{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{\text{υπόλοιπο}}$

πολυώνυμο Taylor της *f* γύρω από το x_0

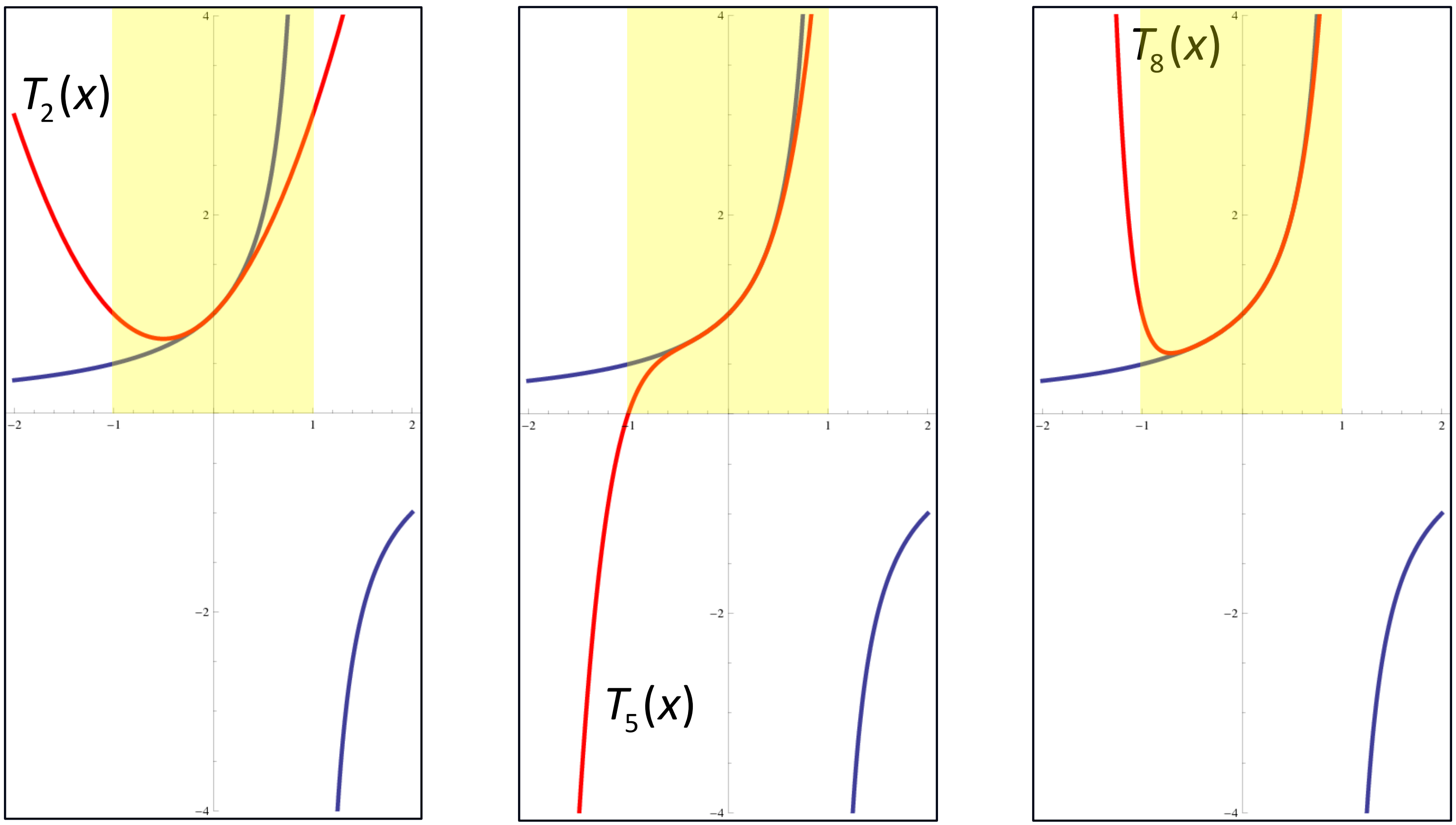
υπόλοιπο

Αν για κάποιο x είναι $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$, τότε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Πολυώνυμα Taylor

$$f(x)=\frac{1}{1-x}$$



Τέλος Ενότητας

Σημείωμα Αναφοράς

- Copyright Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Ζυγκιρίδης Θεόδωρος. «Μαθηματική Ανάλυση Ι». Έκδοση: 1.0. Κοζάνη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

  https: //eclass.uowm.gr/courses/ICTE259/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.