Πανεπιστημιο Δυτικης Μακεδονιας

τμ. Μηχανικών Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών

Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΗΜΑΤΑ

Να προσδιοριστεί η θεμελιώδης περίοδος του σήματος $x(t) = 4\cos(10t + 3) - 3\cos(4t + 5)$.

Απάντηση

Το σήμα αποτελεί άθροισμα δύο σημάτων, το ένα με περίοδο $T_1 = \frac{2\pi}{10}$ και το άλλο με $T_2 = \frac{2\pi}{4}$. Παίρνοντας το πηλίκο τους, έχουμε:

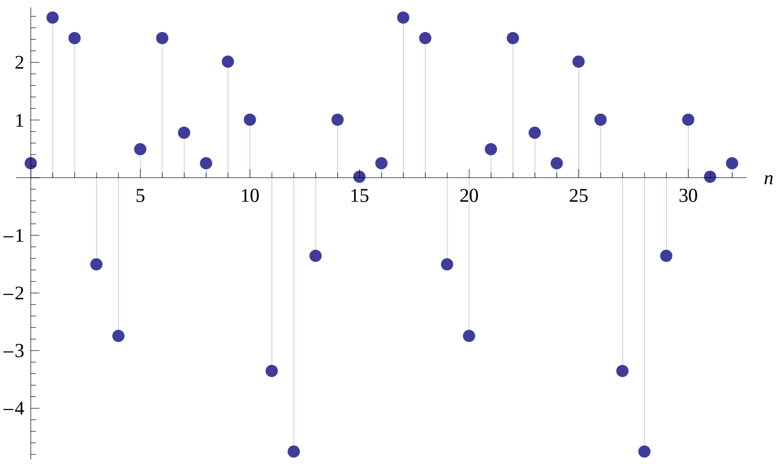
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5T_1 = 2T_2 = \pi$$

Άρα η θεμελιώδης περίοδος του σήματος είναι ίση με π.

Να ελεγχθεί αν το σήμα $x[n] = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{6}\right)$ είναι περιοδικό και, αν ναι, να βρεθεί η θεμελιώδης περίοδός του.

Απάντηση

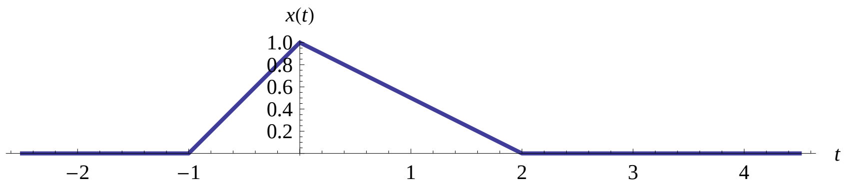
Για τα τρία επιμέρους σήματα, οι αντίστοιχες περίοδοι είναι $N_1 = 8$, $N_2 = 16$ και $N_3 = 4$. Συνεπώς, η θεμελιώδης περίοδος του αθροίσματός τους είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους, δηλαδή $N = 16$ (σχήμα 1).



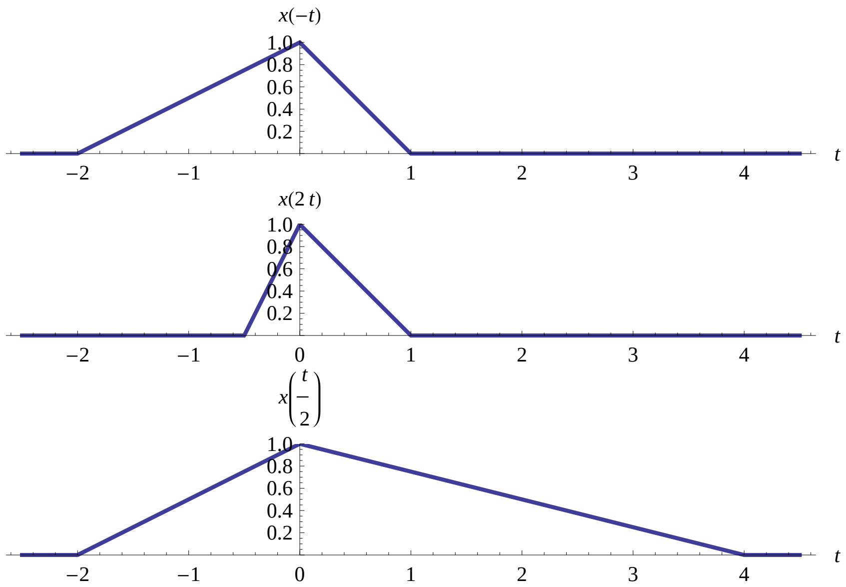
Σχήμα 1

Αν $x(t)$ είναι το σήμα του σχήματος 2, να σχεδιαστούν τα σήματα $x(-t)$, $x(2t)$, $x(t/2)$.

Απάντηση



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Να δειχτεί ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e^2(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_o^2(t)\,dt$, όπου $x_e(t)$ και $x_o(t)$ το άρτιο και το περιττό τμήμα του $x(t)$, αντίστοιχα.

Απάντηση

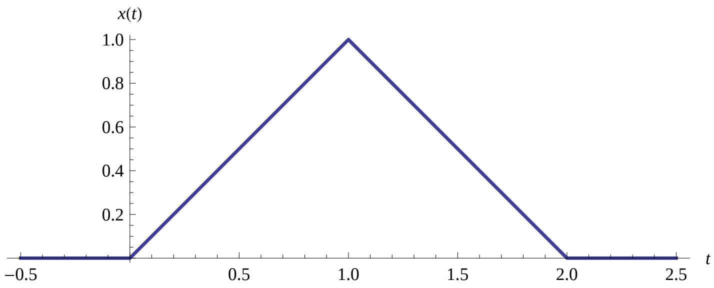
Είναι $x_e(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$ και $x_o(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$, οπότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_e^2(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(-t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(-t)\,dt$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_o^2(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(-t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(-t)\,dt$$

με αποτέλεσμα

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x_e^2(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_o^2(t)dt &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(-t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{+\infty}^{-\infty} x^2(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt\end{aligned}$$

Να βρεθούν το άρτιο και το περιττό τμήμα του σήματος που απεικονίζεται στο σχήμα 4.



Σχήμα 4

Απάντηση

Είναι

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 2 - t, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

οπότε

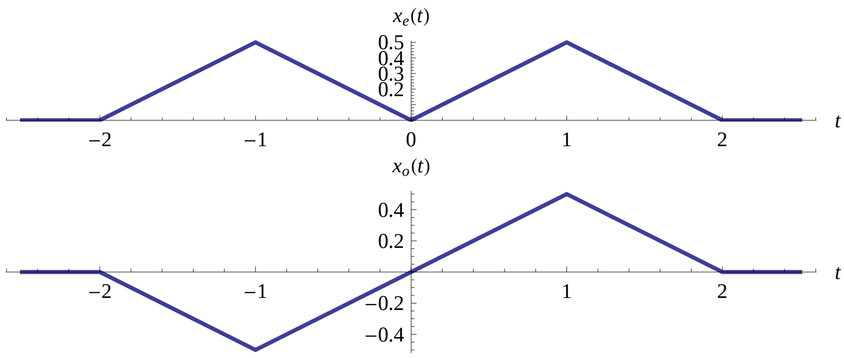
$$x(-t) = \begin{cases} -t, & -1 < t \leq 0 \\ 2 + t, & -2 \leq t \leq -1 \end{cases}$$

και

$$x_e(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) + x(-t)\right] = \begin{cases} 1 + t/2, & -2 < t \leq -1 \\ -t/2, & -1 < t \leq 0 \\ t/2, & 0 < t \leq 1 \\ 1 - t/2, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}\left[x(t) - x(-t)\right] = \begin{cases} -1 - t/2, & -2 \leq t < -1 \\ t/2, & -1 \leq t < 0 \\ t/2, & 0 \leq t < 1 \\ 1 - t/2, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

τα οποία φαίνονται στο σχήμα 5.

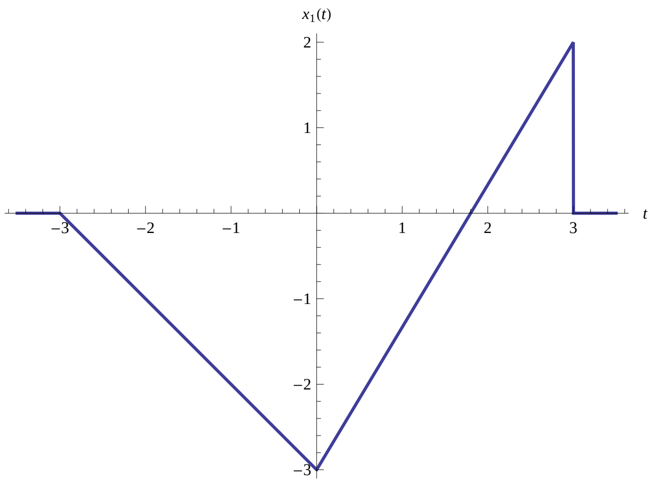


Σχήμα 5

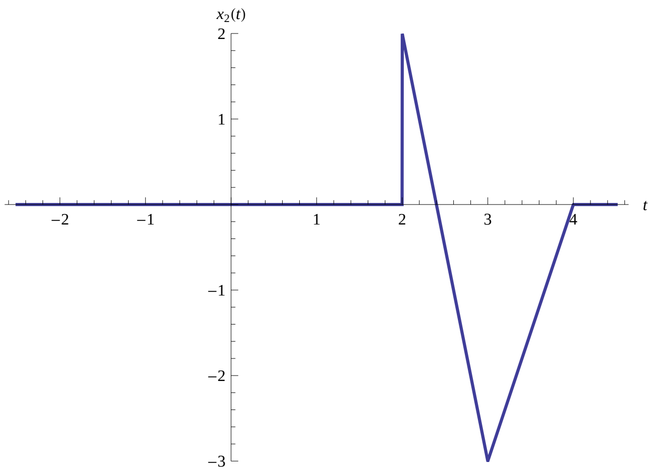
Δίνεται το σήμα $x_1(t)$ του σχήματος 6. α) Να σχεδιαστεί το $x_2(t) = x_1(9 - 3t)$. β) Να υπολογιστεί η ενέργεια των δύο σημάτων.

Απάντηση

α) Σχήμα 7.



Σχήμα 6



Σχήμα 7

β) Είναι

$$x_1(t) = \begin{cases} -t-3, & -3 \leq t < 0 \\ \frac{5}{3}t-3, & 0 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

και

$$x_2(t) = \begin{cases} 3t-12, & 4 \geq t \geq 3 \\ -5t+12, & 3 > t \geq 2 \end{cases}$$

με αποτέλεσμα

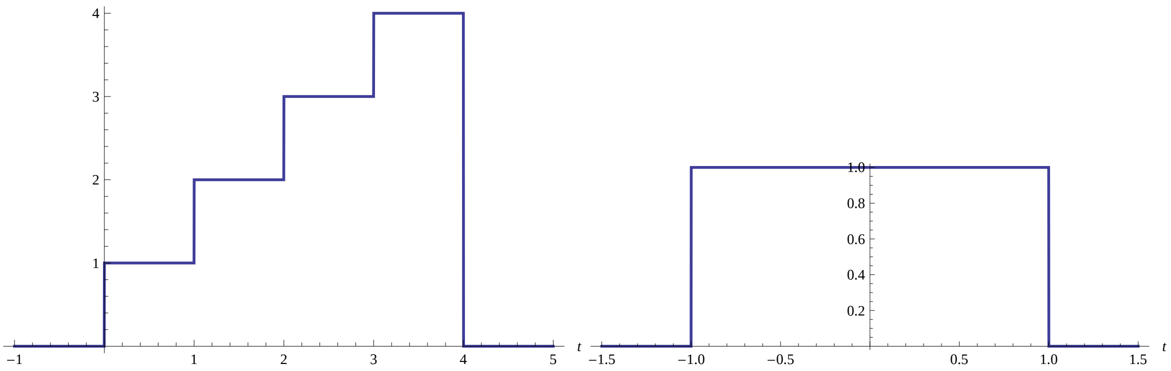
$$E_1 = \int_{-3}^{0} (-t-3)^2 \, dt + \int_{0}^{3} \left(\frac{5}{3}t-3\right)^2 dt = 16$$
$$E_2 = \int_{2}^{3} (-5t+12)^2 \, dt + \int_{3}^{4} (3t-12)^2 \, dt = \frac{16}{3}$$

Δίνεται το σήμα $x(t)$ του σχήματος 8(α). Να εκφραστεί συναρτήσει του σήματος $g(t)$ που απεικονίζεται στο σχήμα 8(β).

Απάντηση

Αν $h(t) = g(2t)$, τότε

$$x(t) = h(t-1/2) + 2h(t-3/2) + 3h(t-5/2) + 4h(t-7/2)$$



(α) (β)

Σχήμα 8

$$= g(2t-1) + 2g(2t-3) + 3g(2t-5) + 4g(2t-7)$$

Για τα σήματα α) $x(t) = e^{-at}\,u(t)$, $a > 0$ και β) $x(t) = t\,u(t)$ να βρεθεί αν είναι σήματα ενέργειας ή ισχύος.

Απάντηση

α) Είναι

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-2at}\,dt = \frac{1}{2a} < +\infty$$

άρα είναι σήμα ενέργειας.

β) Είναι

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{0}^{+\infty} t^2\,dt = +\infty$$

και

$$P = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} t^2\,dt = +\infty$$

άρα το σήμα δεν είναι ούτε ενέργειας, ούτε ισχύος.

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα α) $\int_{-\infty}^{t} \cos\tau\,u(\tau)\,d\tau$, β) $\int_{-\infty}^{t} \cos\tau\,\delta(\tau)\,d\tau$, γ) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\tau\,u(\tau-1)\,\delta(\tau)\,d\tau$, δ) $\int_{0}^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}\delta(\pi - t)\,dt$.

Απάντηση

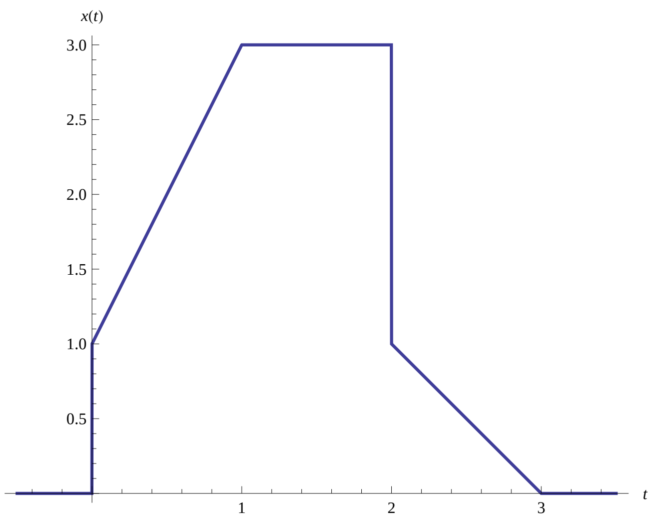
α) $$\int_{-\infty}^{t} \cos\tau\,u(\tau)\,d\tau = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \int_0^t \cos\tau\,d\tau, & t>0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \sin t, & t>0 \end{cases} = \sin t\,u(t)$$

β) $$\int_{-\infty}^{t} \cos\tau\,\delta(\tau)\,d\tau = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \cos 0, & t>0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t>0 \end{cases} = u(t)$$

γ) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\tau\,u(\tau-1)\,\delta(\tau)\,d\tau = \cos 0\,u(-1) = 1\cdot 0 = 0$$

δ) $\displaystyle\int_0^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}\,\delta(\pi-t)\,dt = t\sin\frac{t}{2}\Big|_{t=\pi} = \pi\sin\frac{\pi}{2} = \pi\cdot 1 = \pi$

Να εκφραστεί το σήμα του σχήματος 9 με τη βοήθεια βηματικών συναρτήσεων.



Σχήμα 9

Απάντηση

Είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= (2t+1)\,[u(t)-u(t-1)] + 3\,[u(t-1)-u(t-2)] + (3-t)\,[u(t-2)-u(t-3)] \\ &= (2t+1)\,u(t) + (2-2t)\,u(t-1) - t\,u(t-2) + (t-3)\,u(t-3) \end{aligned}$$

Αν $x(t) = \delta(t+2) - \delta(t-2)$, να υπολογιστεί η συνολική ενέργεια του σήματος $y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$.

Απάντηση

Από τις ιδιότητες της $\delta(t)$ προκύπτει ότι

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t<-2 \\ 1, & -2<t<2 \\ 1-1, & t>2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t<-2 \\ 1, & -2<t<2 \\ 0, & t>2 \end{cases}$$

Άρα

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-2}^{2} 1\,dt = 4$$

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα: α) $\displaystyle\int_{-2}^{1} \left(3t^2+5\right)\delta(t)\,dt$, β) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}\,\delta(2t-2)\,dt$, γ) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}\,\delta'(t)\,dt$, δ) $\displaystyle\int_{1}^{2} \left(5t^3+2t^2\right)\delta(t)\,dt$.

Απάντηση

α) $\displaystyle\int_{-2}^{1} \left(3t^2+5\right)\delta(t)\,dt = \left(3t^2+5\right)\Big|_{t=0} = 5$

β) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}\,\delta(2t-2)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}\,\delta(2(t-1))\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}\frac{1}{2}\,\delta(t-1)\,dt = \frac{1}{2}\,e^{-t}\big|_{t=1} = \frac{1}{2e}$

γ) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}\,\delta'(t)\,dt = -\left(e^{-t}\right)'\Big|_{t=0} = e^{0} = 1$

δ) $\displaystyle\int_{1}^{2} \left(5t^3+2t^2\right)\delta(t)\,dt = 0$

Να δειχτεί ότι $t\,\delta'(t) = -\delta(t)$.

Απάντηση

Είναι

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\left[t\delta'(t)\right]dt &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\phi(t)t\right]\delta'(t)dt = -\left[\phi(t)t\right]'\Big|_{t=0} = -\left[\phi(t)+t\phi'(t)\right]\Big|_{t=0}\\ &= -\phi(0) = -\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\left[-\delta(t)\right]dt\end{aligned}$$

Άρα $t\,\delta'(t) = \delta(t)$.

Έστω ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο $T=2$, το οποίο σε μια περίοδο έχει τη μορφή

$$x_T(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ -2, & 1 \le t < 2 \end{cases}$$

Αν $g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-2k)$, να δειχτεί ότι $x'(t) = A_1\,g(t-t_1) + A_2\,g(t-t_2)$ για κατάλληλες τιμές των A_1, A_2, t_1, t_2.

Απάντηση

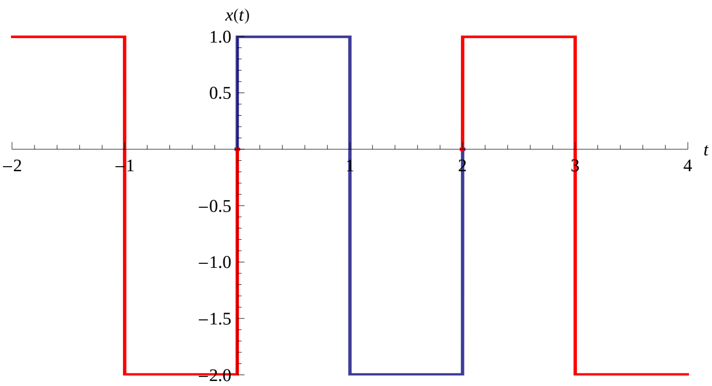
Είναι

$$\begin{aligned}x(t)+2 &= \ldots + 3u(t) - 3u(t-1) + 3u(t-2) - 3u(t) - 3 + \ldots\\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 3\left[u(t-2k) - u(t-2k-1)\right]\end{aligned}$$

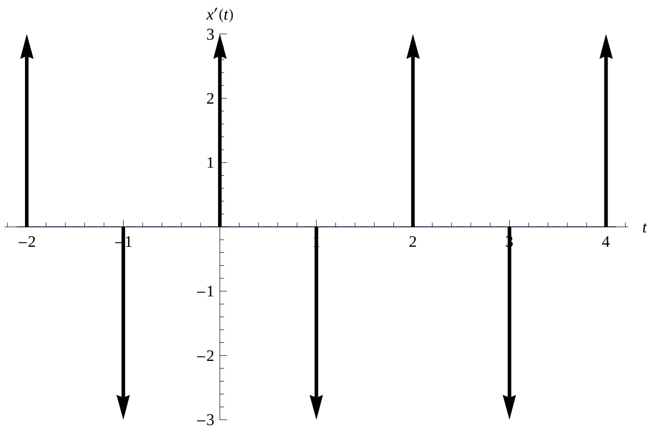
(σχήμα 10) οπότε

$$\begin{aligned}x'(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 3\left[\delta(t-2k) - \delta(t-2k-1)\right]\\ &= 3g(t) - 3g(t-1)\end{aligned}$$

(σχήμα 11).



Σχήμα 10



Σχήμα 11