



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας  
Τμήμα Μηχ. Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών  
Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων

Επιμέλεια: Δημήτρης Γ. Τσαλικάκης

### Ασκήσεις Συνέλιξης

*Παρακαλώ οι απαντήσεις σας να είναι αναλυτικές, σε ηλεκτρονική μορφή και εκτυπωμένες, καθώς και επιστημονικά τεκμηριωμένες.*

Άσκηση 1. Να βρεθεί η συνέλιξη των παρακάτω σημάτων

$$x(t) = u(t-1) - u(t-3) \quad \text{και} \quad h(t) = u(t) - u(t-4)$$

Άσκηση 2. Να βρεθεί η συνέλιξη των παρακάτω σημάτων με αναλυτικό τρόπο

$$x(t) = e^{-\alpha|t|} \quad \text{και} \quad h(t) = e^{-2a(t-1)}u(t-1), \text{ όπου } \alpha > 0.$$

Άσκηση 3. Να βρεθεί η συνέλιξη των παρακάτω σημάτων με αναλυτικό τρόπο

$$1. x(t) = \begin{cases} 3, & 0 \leq t < 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad h(t) = 2u(t-1) - 2u(t-3)$$

$$2. x(t) = \begin{cases} 3, & 1 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad h(t) = u(t) - u(t-3)$$

$$3. x(t) = \begin{cases} 3, & 2 \leq t \leq 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad h(t) = \cos(2t)$$

$$4. x(t) = e^{-t^2} \quad \text{και} \quad h(t) = u(-t)$$

$$5. x(t) = e^{-t^2} \quad \text{και} \quad h(t) = t, \text{ δίνεται ότι } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

$$6. x(t) = \sin(t) \quad \text{και} \quad h(t) = 2u(t) - 2u(t-2)$$

$$7. x(t) = tu(t) \quad \text{και} \quad h(t) = 2u(t-2) - 2u(t-4)$$

$$8. x(t) = e^{-t}u(t) \quad \text{και} \quad h(t) = u(t-1)$$

$$9. x(t) = e^t \quad \text{και} \quad h(t) = u(t)$$

Άσκηση 4. Να βρεθεί η συνέλιξη των παρακάτω σημάτων με αναλυτικό τρόπο και σχήμα

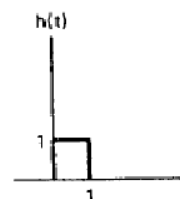
1.  $x(t) = e^{\alpha t}u(t)$  με  $\alpha > 0$  και  $h(t) = u(t)$

Άσκηση 5. Να βρεθεί η συνέλιξη των παρακάτω σημάτων και να σχεδιάσετε τα αποτελέσματα

(i)  $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$

$h(t) = e^{-\beta t}u(t)$

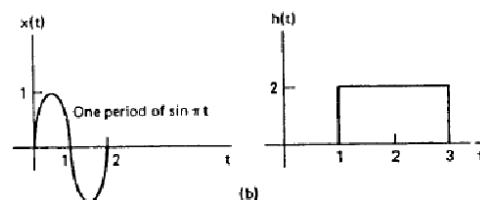
Υπολογίστε το για  $\alpha \neq \beta$  και για  $\alpha = \beta$



(a)

(ii)  $x(t) = u(t) - 2u(t - 2) + u(t - 5)$

$h(t) = e^{2t}u(1 - t)$



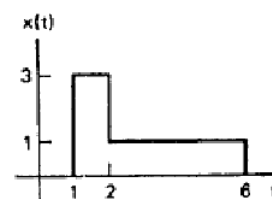
(b)

(iii)  $x(t) = e^{-3t}u(t)$

$h(t) = u(t - 1)$

(iv)  $x(t) = e^{-2t}u(t + 2) + e^{3t}u(-t + 2)$

$h(t) = e^t u(t - 1)$



(c)

(v)  $x(t) = \begin{cases} e^t, & t < 0 \\ e^{5t} - 2e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$

$h(t)$  όπως στο Σχήμα 4(a)

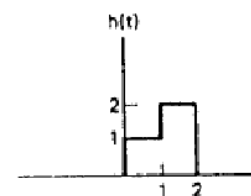
(vi)  $x(t)$  και  $h(t)$  όπως στο Σχήμα 4(b)

(vii)  $x(t)$  όπως στο Σχήμα 4(c)

$h(t) = u(-t - 1)$

$h(t)$  όπως στο Σχήμα 4(d)

(ix)  $x(t)$  και  $h(t)$  όπως στο Σχήμα 4(e)



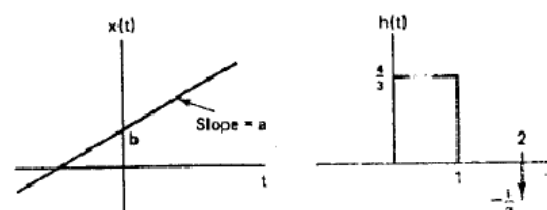
(d)

(x)  $x(t)$  και  $h(t)$  όπως στο Σχήμα 4(f)

(xi)  $x(t)$  και  $h(t)$  όπως στο Σχήμα 4(g)

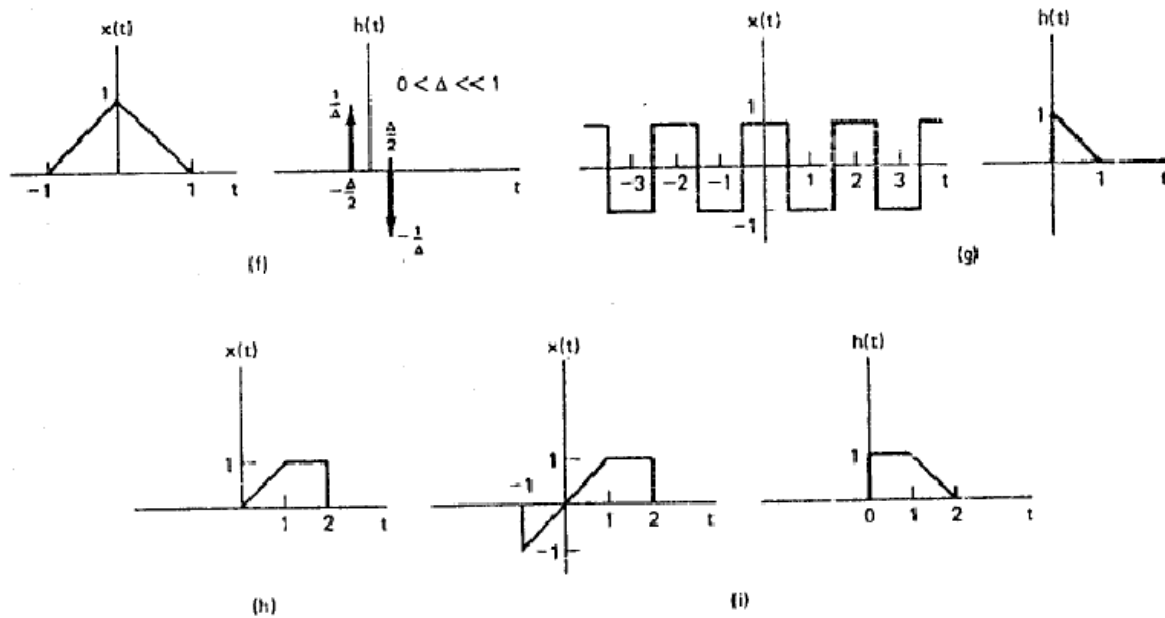
(xii)  $x(t)$  όπως στο Σχήμα 4(h)

$h(t) = e^{-t}[u(t - 1) - u(t - 2)]$



(e)

(xiii)  $x(t)$  και  $h(t)$  όπως στο Σχήμα 4(i)

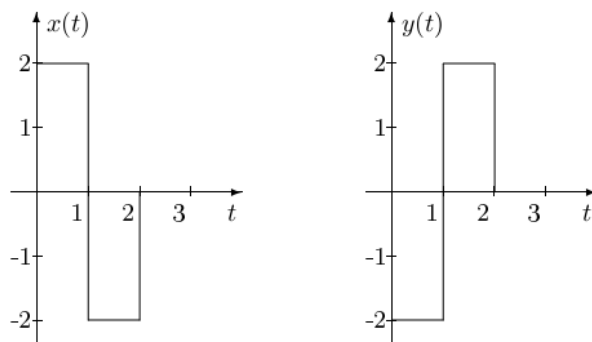


Άσκηση 6. Έστω ένα γραμμικό σύστημα με την ακόλουθη απόκριση στο  $\delta(t - \tau)$

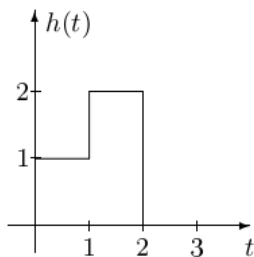
$$h_\tau(t) = 2u(t - \tau) - u(t - 2\tau)$$

1. Είναι το σύστημα χρονικά αμετάβλητο;
2. Είναι αιτιατό;
3. Υπολογίστε την απόκριση του συστήματος σε κάθε μια από τις εισόδους
  - i.  $x_1(t) = u(t - 1) - u(t - 3)$
  - ii.  $x_2(t) = e^{-t}u(t)$

Άσκηση 7. Να υπολογιστεί η παρακάτω συνέλιξη  $h(t) = x(t) * y(t)$



Άσκηση 8. Αν  $x(t) = \delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2)$  και  $h(t)$  η συνάρτηση του σχήματος να υπολογιστεί η  $x(t) * h(t)$



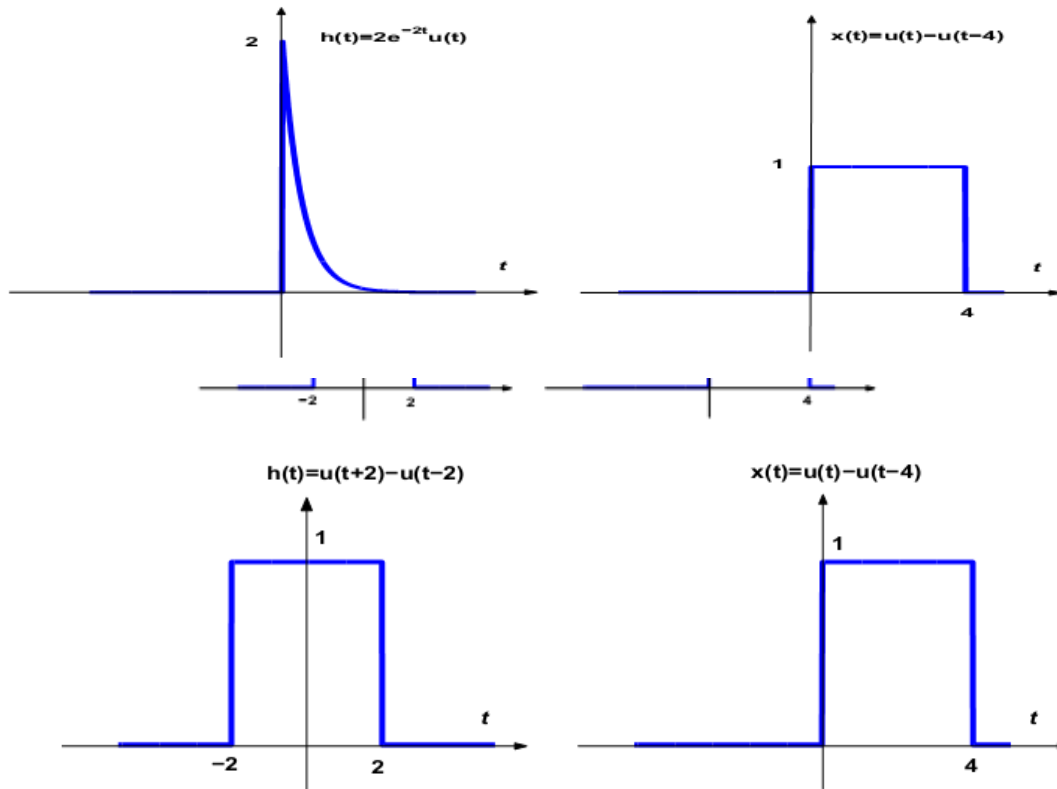
Άσκηση 9. Χρησιμοποιώντας τον τύπο της συνέλιξης  $x(t) * h(t)$  υπολογίστε την έξοδο του συστήματος για τα παρακάτω ζεύγη

α)  $x(t) = u(t-1)$ ,  $h(t) = u(t) + \frac{d\delta(t-1)}{dt}$

β)  $x(t) = e^{\alpha t}u(t)$ ,  $h(t) = e^{\beta t}u(t)$ . Εξετάστε τις περιπτώσεις  $\alpha \neq \beta$  και  $\alpha = \beta$ .

γ)  $x(t) = e^{2t}u(t)$ ,  $h(t) = e^{-3t}u(t)$ . Στην περίπτωση αυτή δείξτε ότι το σύστημα είναι αιτιατό και BIBO ευσταθές.

Άσκηση 10. Υπολογίστε και σχεδιάστε την έξοδο  $y(t)$  του συστήματος με απόκριση  $h(t)$  για την είσοδο  $x(t)$  όπως αυτές φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



Άσκηση 11. Να υπολογίσετε την συνέλιξη των σημάτων

$$x(t) = \sin\pi t [u(t-1) - u(t-3)] \quad \text{και} \quad h(t) = u(t-1) - u(t-3)$$

Άσκηση 12. Για ένα σύστημα ΓΧΑ, ποια είναι η έξοδος του συστήματος για το παρακάτω ζεύγος κρουστικής και εισόδου

$$h(t) = e^{-(t-2)}u(t-2) \quad \text{όταν} \quad \text{είσοδος είναι ο παλμός } u(t+1) - u(t-2)$$

Άσκηση 13. Να βρεθούν οι τιμές  $\omega_0$  για τις οποίες είναι  $y(0)=0$ , όπου  $y(t) = x(t) * h(t)$

$$h(t) = e^{i\omega_0 t} \quad \text{και} \quad x(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

Άσκηση 14. Να υπολογιστεί η συνέλιξη των παρακάτω σημάτων

$$x(t) = e^{-t}u(t) \quad \text{και} \quad h(t) = e^{-2t}u(t)$$

Άσκηση 15. Έστω δυο περιοδικά σήματα,  $x_1(t)$  και  $x_2(t)$  τα οποία ακολουθούν παρακάτω. ΝΔΟ η περιοδική συνέλιξη  $x_1(t) * x_2(t)$ , δίνεται από τη σχέση.

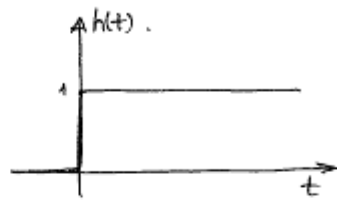
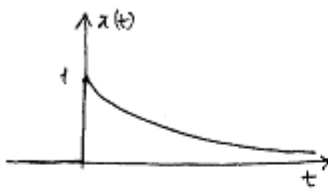
$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{j2\pi n t} \qquad x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{j2\pi n t}$$

$$x_1(t) * x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n b_n e^{j2\pi n t}$$

**Παράδειγμα**

$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t) \quad \alpha > 0$$

$$h(t) = u(t)$$

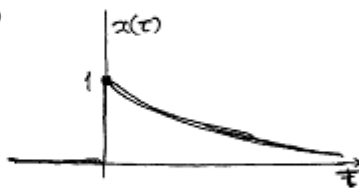


$$y(t) = x(t) * h(t) ?$$

$$y(t) = 0 \quad t < 0$$

Τι γίνεται για  $t > 0$ ;

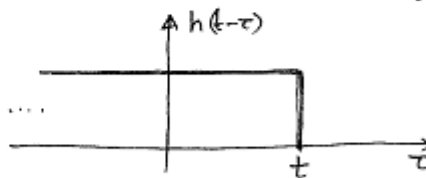
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$



$$= \int_0^t e^{-\alpha \tau} d\tau$$

$$= \frac{-1}{\alpha} e^{-\alpha \tau} \Big|_0^t$$

$$= \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$$



$$y(t) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) u(t)$$

(42)

