



Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Τμήμα Μηχ. Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων

Άσκησης περιοδικότητας και Euler

Παρακαλώ οι απαντήσεις σας να είναι αναλυτικές, σε ηλεκτρονική μορφή και εκτυπωμένες, καθώς και επιστημονικά τεκμηριωμένες.

Άσκηση 1. Ποια από τις παρακάτω ακολουθίες είναι περιοδικές.

1. $x_1(n) = \cos(2n)$

2. $x_2(n) = \cos(2\pi n)$

3. $x_3(t) = (-1)^n$

Άσκηση 2. Ποιο από τα σήματα είναι περιοδικά.

1. $x_1(t) = \cos^2(2\pi t)$

2. $x_2(t) = e^{-2t}\cos(2\pi t)$

Άσκηση 3. Να δειχθεί ότι το παρακάτω σήμα είναι περιοδικό και να βρεθεί η περίοδος του.

1. $x_1(t) = \sin^2\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$

Άσκηση 4. Να βρεθεί η βασική περίοδος για κάθε ένα από τα παρακάτω σήματα. Ποια είναι περιοδικά;

1. $x_1(t) = e^{i0.25t}$

2. $x_2(t) = \cos(0.5\pi t)$

3. $x_3(t) = 2\cos(0.1\pi t) + 2\sin(0.2\pi t)$

Άσκηση 5. Τα $x_1(t)$ και $x_2(t)$ είναι περιοδικά σήματα με T_1 και T_2 αντίστοιχα.

Ποια συνθήκη πρέπει να ισχύει ώστε το άθροισμα των $x_1(t) + x_2(t)$ να είναι περιοδικό σήμα και ποια η περίοδος που προκύπτει;

Άσκηση 6. Να προσδιοριστεί η θεμελιώδης περίοδος του σήματος

$$x(t) = 4 \cos(10t + 3) - 3 \cos(4t + 5)$$

Άσκηση 7. Ναδειχθεί ότι το παρακάτω σήμα είναι περιοδικό και να βρεθεί η περίοδος του.

$$x[n] = 2 \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{8}\right) - 2 \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$$

Άσκηση 8. Ναδειχθεί ότι ισχύει η παρακάτω ισότητα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_e^2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t) dt, \text{ όπου το } x_e \text{ και το } x_o \text{ το άρτιο και το περιττό τμήμα του } x(t) \text{ αντίστοιχα}$$

Άσκηση 9. Ναδειχθεί ότι ισχύει η παρακάτω ισότητα:

$$t\delta(\tau) = -\delta(t)$$

Άσκηση 10. Να εξεταστεί ποιο από τα παρακάτω είναι περιοδικά και να βρεθεί η περίοδος όταν υπάρχει.

1. $x_1(t) = \cos^2(t)$

2. $x_2(t) = \cos^3(t)$

3. $x_3(t) = e^{-3t} \cos(2t)$

4. $x_4(t) = 3 \sin(4t) + 4 \cos(3t)$

5. $x_5(t) = \delta(t) \cos(4t)$

$$6. x_6(t) = e^{i2\pi t}$$

Άσκηση 11. Να εξεταστεί ποιο από τα παρακάτω είναι περιοδικά και να βρεθεί η περίοδος όταν υπάρχει.

$$1. x_1(t) = e^{i\pi t - 1}$$

$$2. x_2(t) = \sin(t) + \cos(\sqrt{2}t)$$

$$3. x_3(t) = 2 \cos\left(120\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 6\cos(377t)$$

$$4. x_4(t) = \cos^2\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$$

Άσκηση 12. Να υπολογιστεί η βασική περίοδος των σημάτων

$$1. x_1(t) = \sin(12\pi t) + \cos(5\pi t)$$

$$2. x_2(t) = \sin(3\pi t) \cos(4\pi t)$$

Άσκηση 13. Να υπολογιστεί η βασική περίοδος του παρακάτω σήματος $x(t)y(t)$ και ναδειχθεί ότι είναι περιοδικό. Τα $x(t)$ και $y(t)$ είναι τα εξής

$$x(t) = 2\sin\left(\frac{16\pi}{3}t\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) \quad \text{και} \quad y(t) = \sin(\pi t)$$

Άσκηση 14. Έστω $x(n) = \cos\left(\frac{2\pi k}{m}n\right)$ όπου k και m πρώτοι μεταξύ τους. Να βρεθεί η περίοδος του σήματος.

Άσκηση 15. Να εξεταστεί ποιο από τα παρακάτω είναι περιοδικά και να βρεθεί η θεμελιώδης περίοδος όταν υπάρχει.

$$1. x_1(t) = e^{i(\pi t - 1)}$$

$$2. x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t-3n)^2}$$

$$3. x_3(t) = 2 \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$4. x_4(t) = \left[\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\right]^2$$

Άσκηση 16. Χρησιμοποιώντας τους τύπους του Euler να αποδείξετε τις παρακάτω σχέσεις.

$$(i) \quad \cos \theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$$

$$(ii) \quad \sin \theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$$

$$(iii) \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$(iv) \quad (\sin \theta)(\sin \phi) = \frac{1}{2} \cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2} \cos(\theta + \phi)$$

$$(v) \quad \sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi$$