Επαγγελματική Ανάπτυξη για Διδασκαλία
Εαρινό 2021

Μαριάννα Τζεκάκη

Τι σημαίνει ΕΑ για διδασκαλία;

«... Οι εκπαιδευτικοί χρειάζονται διαφορετικά είδη γνώσης:

- *μαθηματική γνώση* για το σύνολο των θεμάτων που διδάσκουν,
- βαθιά ευέλικτη γνώση σχετικά με τους στόχους του *προγράμματος σπουδών* και
- για τις *σημαντικές ιδέες* που είναι κεντρικής σημασίας στο επίπεδο που διδάσκουν,
- γνώση για το πώς οι μαθητές τις κατανοούν
- γνώση σχετικά με το πώς μπορούν αυτές οι ιδέες να παρασταθούν *για να διδαχθούν* αποτελεσματικά, και
- ..»

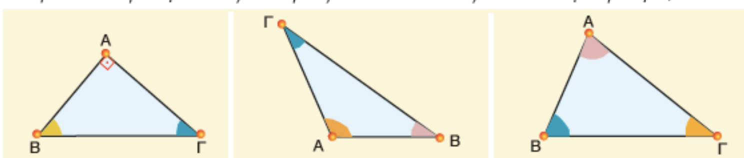
(Al Cuoco, 2001)

Ξεκινώντας από το αθροίσμα γωνιών

Β.3.2. Άθροισμα γωνιών τριγώνου - Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Σχεδίασε διάφορα τυχαία ορθογώνια, αμβλυγώνια και οξυγώνια τρίγωνα, όπως π.χ. αυτά που φαίνονται πιο κάτω. Μέτρησε τις γωνίες τους με το μοιρογνωμόνιο και υπολόγισε το άθροισμά τους. Μπορείς να διατυπώσεις κάποιο συμπέρασμα;



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

Προσπάθησε να διαπιστώσεις ποια διάμεσος ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι άξονας συμμετρίας του και γιατί.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

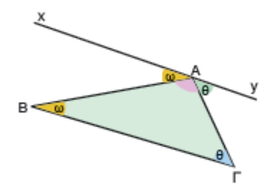
Σχεδίασε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τις διαμέσους του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Δικαιολόγησε γιατί οι διάμεσοι του ισόπλευρου είναι διχοτόμοι και ύψη του.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να δικαιολογηθεί με λογικά επιχειρήματα ότι το άθροισμα των τριών γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180°.*

Λύση

Σχεδιάζουμε το τρίγωνο **ΑΒΓ** και μία ευθεία **xAy**, που διέρχεται από το **Α** και είναι παράλληλη προς την ευθεία **ΒΓ**.



Παρατηρούμε ότι:

$\widehat{xAB} = \hat{\omega} = \hat{B}$ γιατί είναι γωνίες εντός εναλλάξ, των παράλληλων ευθειών **xAy** και **ΒΓ**, που τέμνονται από την **ΑΒ**.

$\widehat{yA\Gamma} = \hat{\theta} = \hat{\Gamma}$ γιατί είναι γωνίες εντός εναλλάξ των παράλληλων ευθειών **xAy** και **ΒΓ**, που τέμνονται από την **ΑΓ**.

Οι γωνίες $\hat{\omega}$, $\hat{A}$ και $\hat{\theta}$ σχηματίζουν μια ευθεία γωνία.
Επομένως θα είναι: $\hat{\omega} + \hat{A} + \hat{\theta} = 180°$.
Επειδή όμως είναι: $\hat{\omega} = \hat{B}$ και $\hat{\theta} = \hat{\Gamma}$, θα έχουμε: $\hat{B} + \hat{A} + \hat{\Gamma} = 180°$.

Η σημασία του αθροίσματος γωνιών

Η σημασία του αθροίσματος των γωνιών

- Αποτελεί ένα θεώρημα (ή ακόμα και αξίωμα) *συνέπεια* του **5^{ου} αξιώματος** της ευκλείδεια γεωμετρίας:

  Αν μια ευθεία τέμνει δύο άλλες και σχηματίζει με αυτές ένα ζεύγος εντός και επί τα αυτά γωνίες με άθροισμα μικρότερο από τις δύο ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος των γωνιών

- Η αναίρεση του οδηγεί σε άλλες γεωμετρίες:

- Υπερβολική: *Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο των δύο ορθών*
- Ελλειπτική: *Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι είναι μεγαλύτερο των δύο ορθών*

Διδακτικές προτάσεις στη βάση τ

ΤΙ

1. … το μαθηματικό περιεχόμενο

ΠΟΙΟΣ

… ο διδακτικός στόχος;

3. Ποιέ… είναι οι προηγούμενες γνώσεις των μαθητώ…;
4. Ποιά είναι τα πιθανά εμπόδια και λάθη;
5. Ποιές πιθανές δράσεις οδηγούν στο διδακτικό στόχο;
6. Πώς να οργανώσουμε … «μαθηματικές δραστηριότητες»;

ΠΩΣ

Τι σημαίνει ΕΑ για διδασκαλία Μαθηματικών;

- Η διδασκαλία ενός αντικειμένου απαιτεί από τον εκπαιδευτικό:
  - να κατανοεί το *μαθηματικό περιεχόμενο*,
  - να γνωρίζει τις *προηγούμενες γνώσεις των μαθητών*,
  - να *ερμηνεύει τα λάθη* τους,
  - να το *παρουσιάζει κατάλληλα*,
  - να χρησιμοποιεί τις *σχετικές αναπαραστάσεις*,
  - να βρίσκεις τις *κατάλληλες δράσεις* ....

Ball et al. (2005)

Κλασσικές διδακτικές προτάσεις

Στις συναρτήσεις

- Δίνω πρόβλημα και πίνακα τιμών πχ. πινακίδα με κλίση του δρόμου είναι 6%. .. Ή
- Βόλτα με τα ποδήλατά … 10km. Η μέση ταχύτητα του ενός είναι u_1 ενώ του άλλου u_2. Ο ένας θα χρειαστεί χρόνο t_1 για να διανύσει την απόσταση και ο άλλος t_2 … κλπ.
- Δίνονται οι συναρτήσεις και οι μαθητές να υπολογίσουν τις τιμές, να συνειδητοποιήσουν …

Ποια η σημαντική ιδέα, τι ξέρω για τη συνάρτηση;

Τα Μαθηματικά είναι ιδεατές οντότητες

- Κατασκευάζονται μέσα από εμπειρικές καταστάσεις που οι ίδιοι επεξεργαζόμαστε, αλλά στην πορεία οδηγούν σε αφαιρέσεις, γενικεύσεις και συμβολισμό σε μεγάλο βάθος χρόνου.
- Η έννοια της συνάρτησης;
- *Σε πόσο χρόνο θα τις 'διδάξουμε' εμείς?*

- *Σε πόσο χρόνο μαθαίνουμε στους μαθητές να λύνουν ένα πρόβλημα;*
- Η εικασία του Goldbach (1742) και η Υπόθεση του Riemann (1859) παραμένουν άλυτα για αιώνες.

Η συνάρτηση ($17^{ος}$ αιώνας)

- Η ανθρωπότητα από την αρχαιότητα «.. *Η ιδέα της συναρτησιακής σχέσης δεν εμφανίζεται ρητά αλλά διακρίνεται στις αντιστοιχήσεις των μαθηματικών της εποχής..*»
- Κατά το Μεσαίωνα, 1350, ορισμένοι μαθηματικοί εμφανίζουν ιδέες σχετικά με την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή.
- Το 1650 η αναλυτική γεωμετρία οδηγεί σε μεταβλητές και αλγεβρικές παραστάσεις.
- Η ορολογία της «συνάρτησης» προήλθε από τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ του Leibniz και Bernoulli, προς το τέλος του $17^{ου}$ αιώνα (1673..).
- Το 1734 ο Euler εισάγει το συμβολισμό f(x) .
- Ο Fourier συνεχίζει το 18ο αι. κι ο Cauchy to $19^{ο}$, Lobachevsky (1834), O Dirichlet (1837), Dedekind (1888), Hardy (1908)…

Μαθηματική Επιστήμη: Ιστορική εξέλιξη

Προ-ελληνικά

Ελληνικά

Ινδο-αραβικά

Δυτικά

Σύγχρονα

600 — 0 — 500 — 1000 — 1500 — 2000

Αριθμοί
Γεωμετρία
Αξιωματική Θεμελίωση
Θεμελίωση σύγχρονων εννοιών
Θαλής – Πυθαγόρας- Πλάτωνας-
Ευκλείδης- Απολλώνιος - Διόφαντος

Άλγεβρα
Μελέτη Αριθμών
Αριθμητικά Συστήματα
Αλ-Χουαρίσμι
Pascal
Fibonnaci

Άλγεβρα
Ανάλυση
Άλλες Γεωμετρίες
Τριγωνομετρία
Αν. Γεωμετρία
Γαλιλλαίος
Κέπλερ
Gaulois
Newton
Laplace
Fourrier
…….

Κυρίαρχες πεποιθήσεις για τη διδασκαλία;

- Δεδομένο περιεχόμενο
- Επίπεδη προσέγγιση, όλα τα στοιχεία είναι ίδια
- Δράσεις μέσα από εφαρμογές και ασκήσεις
- Δασκαλοκεντρική - μετωπική παρουσίαση
- Μελλοντική μάθηση
- Έλλειψη κάθετης σύνδ
- ....

- Η άσκηση είναι δράση
- Μη Ρεαλιστικό πρόβλημα
- *Μια δράση και μετά στο τυπικό*
- *Απώλεια της μεγάλης ιδέας*

(Al Cuoco, 2001)

Κυρίαρχες αντιλήψεις στη διδασκαλία

- Παρουσιάζονται τα προϊόντα αντί για τα ίδια τα Μαθηματικά,

  Πχ. οι πράξεις ως η επίλυση του προβλήματος.

- Το διδακτικό περιεχόμενο επίπεδο (όλα τα στοιχεία ίδια, σε κάθε ένα από τους δύο κύκλους με διαφορετικό τρόπο),

  Πχ. γλώσσα, σύμβολα ή συμβάσεις αντιμετωπίζονται ως εξίσου σημαντικά με την επίλυση προβλήματος ή την αποδεικτική διαδικασία.

- Το περιεχόμενο διδασκαλίας στις τάξεις είναι ασύνδετο.

Καθ: Τι είχαμε πει στα προηγούμενα…

Μαθ: Είχαμε για τις κλασματικές αριθμητικές παραστάσεις

Καθ.: Και τι θα πει κλασματική αλγεβρική παράσταση; Να μας πει η Α.

Α: Είναι μια παράσταση που έχει παρονομαστή μεταβλητή.

Καθ.: Πολύ ωραία, είναι μια παράσταση που έχει παρονομαστή μεταβλητή. Έτσι; Να σηκωθεί τώρα η Β να μας γράψει μια τέτοια κλασματική αριθμητική παράσταση και να μου πει η Γ τι ακριβώς είχαμε. [Η Β γράφει 1/χ]

Καθ.: Ωραία, 1/χ. Το χ είναι μεταβλητή Χ; … Και δεν μου λες παίρνει όλες τις τιμές;

Μαθ: Εκτός από το μηδέν.

Καθ.: Εκτός από το 0, πολύ ωραία. Γιατί δεν παίρνει την τιμή μηδέν;

Χ: Γιατί μηδενίζεται ο παρονομαστής.

Καθ.: Δεν κατάλαβα τίποτα.

Χ: Μηδενίζεται ο παρονομαστής.

Καθ.: Ε; και τι πειράζει;

Χ: Δεν τον θέλουμε μηδέν.

Καθ.: Δεν τον θέλουμε μηδέν γιατί;

Χρ: Δεν υπάρχει κλάσμα με παρονομαστή μηδέν.

Καθ.: Δεν υπάρχει κλάσμα με παρονομαστή μηδέν, και πως το λέγαμε στο δημοτικό;

Γ: Διαίρεση με το μηδέν.

Καθ.: Διαίρεση με το 0. … Θα σας δώσω εγώ μια αλγεβρική κλασματική παράσταση, να μου πείτε για ποια τιμή της μεταβλητής της ορίζεται, έτσι; α-5/α^2-1. Να μου πείτε για ποια τιμή του α ορίζεται αυτό το κλάσμα, δηλαδή να έχει νόημα, ή ποια τιμή του α θέλουμε.

Οργανώνοντας μια διδασκαλία

- Στην ανάπτυξη κάθε έννοιας εμπλέκονται,
  - τα μαθηματικά νοήματα και οι καταστάσεις που την παρουσιάζουν
  - η χρήση παραδειγμάτων και υλικού, αναπαραστάσεων
  - η χρήση λόγου,
  - ο προσανατολισμός στο μαθηματικό περιεχόμενο, η προσοχή στην ανάδειξη των μεγάλων ιδεών, κλπ.

- Ο Brousseau υποστηρίζει ότι για κάθε κομμάτι μαθηματικής γνώσης χρειάζεται να εκπονηθεί ένα ολοκληρωμένο σχέδιο με τα κατάλληλα έργα.

Κυρίαρχες αντιλήψεις στη διδασκαλία

- Κεντρική τάση ότι τα Μαθηματικά αφορούν τις μεγάλες τάξεις του Β΄ κύκλου σπουδών είναι (ακόμα) κυρίαρχη.
- Οι διδακτικές πρακτικές είναι επικεντρωμένες στις επιλύσεις ασκήσεων και εργασιών στο χαρτί και κυριαρχεί η παιδαγωγική «κάνε ότι βλέπεις» (Cuoco, 2001).

Γνώσεις και πρακτικές

- Σημαντικός αριθμός ερευνών μελετά
  - τις γνώσεις των εκπαιδευτικών, τόσο σε μαθηματικό όσο και σε παιδαγωγικό επίπεδο, όπως και
  - τις πεποιθήσεις τους, τόσο για τα Μαθηματικά όσο και για τη διδασκαλία (Ponte, & Chapman, 2006).
- Αποδεικνύονται συνέπειες στις επιδόσεις των μαθητών (Campbell, et al., 2014).

Παιδαγωγική γνώση περιεχομένου

- Ο Shulman με την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου (1986, Pedagogical Content Knowledge) δοκίμασε να να συνδέσει περιεχόμενο και παιδαγωγική.

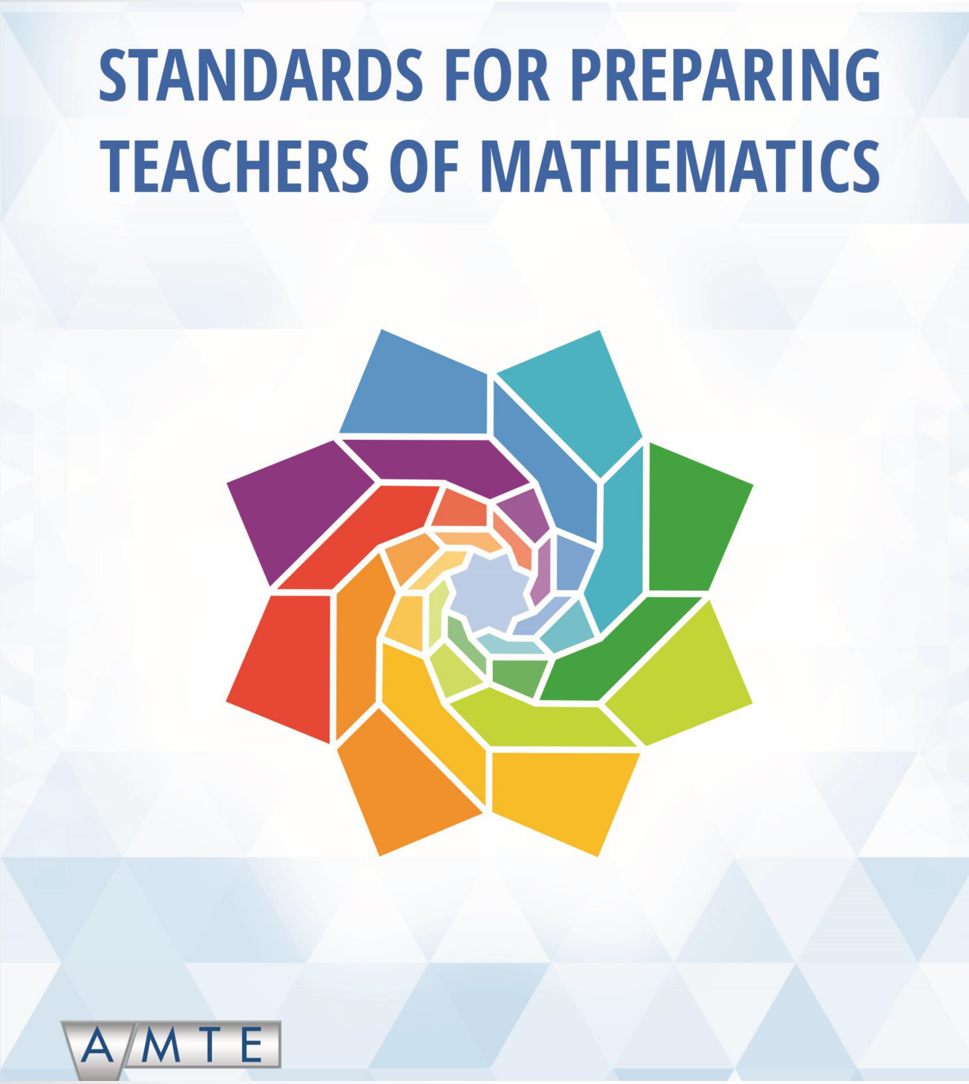
- Ποιές γνώσεις για την επαγγελματική κατάρτιση;
  - γνώση περιεχομένου,
  - γενική παιδαγωγική γνώση,
  - γνώση προγραμμάτων σπουδών,
  - γνώση μαθητών και των χαρακτηριστικών τους,
  - γνώση εκπαιδευτικών στόχων, σκοπών και αξιών
  - γνώση ιστορικών και φιλοσοφικών θεμελίων.

Κυρίαρχες απαιτήσεις για διδασκαλία;

- Ο Shulman (1986) τεκμηρίωσε ότι, αν δεν προηγηθεί μια ιδιαίτερη εκπαίδευση, οι αρχικές γνώσεις των εκπαιδευτικών είναι εμπειρικές.
- Οι εμπειρικές αυτές γνώσεις καταλήγουν σε διδακτικές πρακτικές που ακολουθούν τους διδάσκοντες σε όλες τις μορφές υλοποίησης της διδασκαλίας, ακόμα κι αν πρόκειται για αναμορφώσεις ή άλλες αλλαγές.

Κυρίαρχες απαιτήσεις για διδασκαλία;

- Για την αξιολόγηση της επαγγελματικής γνώσης των εκπαιδευτικών και τα Μαθηματικά η Ball et al. (2005 και μετά) προτείνουν τη Μαθηματική Γνώση για Διδασκαλία (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT)
- Η προσέγγιση αυτή ενσωματώνει πολλά από τα στοιχεία της PCK του Schulman.
- Στην πορεία οδηγεί σε ένα αξιολογικό πλαίσιο.



- Η Ένωση των Δασκάλων των Μαθηματικών (Association of Mathematics Teacher Educators, AMTE) το 2017, έθεσε σε κυκλοφορία το έργο αυτό ως ένα εθνικό οδηγό για την προετοιμασία όσων διδάσκουν Μαθηματικά από το Νηπιαγωγείο ως το τέλος της Α'βαθμιας και Β'βάθμιας Εκπαίδευσης.

https://amte.net/standards

4 βασικοί πυλώνες γνώσεων

- Μαθηματικές έννοιες και ΠΣ (γνώση του μαθηματικού περιεχομένου, με ιστορικά και φιλοσοφικά θεμέλια, όπως γνώση των στόχων στο πρόγραμμα σπουδών)
- Παιδαγωγική Γνώση και Διδακτικές Πρακτικές για τη διδασκαλία των Μαθηματικών (γνώση διδακτικών προσεγγίσεων)
- Γνώση των μαθητών ως εκπαιδευομένων στα Μαθηματικά (γνώση των αντιλήψεων των μαθητών για τη σχετική γνώση)
- Κοινωνικά πλαίσια διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών (γενική κοινωνική γνώση)

Απαραίτητες γνώσεις για τη διδασκαλία

Ο Brousseau (1997) (στη θεωρία των ΔΚ) συμφωνεί με τα προηγούμενα στοιχεία, προσθέτοντας:

- Το εννοιολογικό πλαίσιο των εννοιών, και
- κατάλληλες μαθηματικές δραστηριότητες για το σχετικό εννοιολογικό πλαίσιο (*ποια διαδοχή, ποιές προσεγγίσεις, ποια τροχιά* στη συνέχεια της ανάπτυξη της στους μαθητές (Hill, et al., 2005).

Επεκτάσεις στο ΜΓΠ

- Κοινή γνώση περιεχομένου (Common Content Knowledge, CCK) – απλή γενική μαθηματική γνώση
- Ειδική γνώση περιεχομένου (Specialized Content Knowledge SCK) - των εκπαιδευτικών όταν εξετάζουν τη γνώση των μαθητών
- Γνώση του περιεχομένου στο πρόγραμμα σπουδών (Knowledge of Content and Curriculum, KCC)

(Depaepe, et al., 2013)

Επεκτάσεις στο ΜΓΠ

- Γνώση του Ορίζοντα Περιεχομένου (Horizon Content Knowledge, HCK, - κατανόηση των διαστάσεων του θέματος, της πορείας εξέλιξης του και την μελλοντική ανάπτυξη)
- Γνώση του γενικότερου περιεχομένου και των σπουδαστών (Knowledge for Content and Students, KCS – επιλογές για την παρουσίαση της γνώσης στην τάξη)

(Zazkis & Mamolo, 2011)

Μαθηματικά νοήματα στην τάξη

- Ανάγκη μελέτης των εννοιών (concept study, Davis & Simmt, 2006).
- Κοινωνικό περιεχόμενο κατανόησης των Μαθηματικών και
- Ανάπτυξης μαθηματικών νοημάτων μέσα στην τάξη (Proulx & Bednarz, 2009; Kaldrimidou, Sakonidis, & Tzekaki, 2008).
- Κοινωνικο- μαθηματικές νόρμες (Yackel & Cobb, 1996) ή διδακτικό συμβόλαιο (Brousseau, 1997).

(σύστημα εξισώσεων)

Ειδικές διαστάσεις ΜΓΠ

- Ειδική γνώση για την επίλυση προβλήματος (Mathematical Problem Solving Knowledge for Teaching, MPSKT, Chapman, 2012), που αφορά τη διαδικασία επίλυσης, τα σχετικά προβλήματα, τους μαθητές με τα προβλήματα και τις αντίστοιχες διδακτικές πρακτικές, κλπ.
- Εδική γνώση για την χρήση της τεχνολογίας (Specialized Technological and Mathematics Pedagogical Content Knowledge, STAMPCK, Mishra & Koehler, 2006).
- Ειδική γνώση για την μορφή μαθηματικού λόγου (Mathematics Discourse for Teaching, MDT, Cooper, 2014).

Αποτελέσματα ερευνών Γερμανία

- Σημαντικές συσχετίσεις των επιδόσεων των μαθητών τόσο με τη μαθηματική γνώση των δασκάλων τους όσο και με την παιδαγωγική.
- Ιδιαίτερα σημασία η επιλογή έργων με υψηλές γνωστικές απαιτήσεις αλλά αξιολογήσεις γνωστικού αποτελέσματος.
- Ισχυρός παράγοντας πρόβλεψης της μάθησης των μαθητών η παιδαγωγική γνώση, με την προϋπόθεση της επαρκούς μαθηματικής γνώσης των εκπαιδευτικών.

(Baumert et al., 2010).

Αποτελέσματα ερευνών 16 χώρες

- Για τη μαθηματική και παιδαγωγική γνώση των εκπαιδευτικών όπως και τις πεποιθήσεις και τις πρακτικές.
- Η ικανότητα των εκπαιδευτικών να κατανοούν τις καταστάσεις που αναπτύσσονται στην τάξη με επάρκεια και να τη διαπραγματευτούν αποτελεσματικά σε μαθησιακό επίπεδο συνδέεται στενά και με τη μαθηματική και με την παιδαγωγική γνώση.
- Η αναγνώριση των λαθών και η διαχείριση τους περισσότερο στη γνώση του περιεχομένου.

- (Teacher Education and Development Study, TEDS_M, Kaiser, 2014).

Οργανώνοντας μια διδασκαλία

Ιδιαιτερότητα μαθηματικών εννοιών

- Οι μαθηματικές έννοιες αποτελούν αφηρημένες κατασκευές που συγκροτούνται
  - μέσω της αντιμετώπισης καταστάσεων της πραγματικότητας αλλά στη συνέχεια
  - ολοκληρώνονται μέσω της μαθηματικής πραγματικότητας (Fisbein, 1996; Brun, 1996).
- Η επιστήμη των Μαθηματικών δημιουργεί έννοιες για να αντιμετωπίσει καταστάσεις, αλλά στη συνέχεια τις γενικεύει ώστε να αφορούν, να προσδιορίζονται και να λειτουργούν έξω από αυτές.

Παράδειγμα μαθηματικής γενίκευσης

Λύση σε ένα (ειδικό) πρόβλημα: 10 άτομα ανταλλάσουν χειραψίες, πόσες χειραψίες στο σύνολο;

10.9/2=45

Γενίκευση του κανόνα για ν άτομα; ν.(ν-1)/2

Γενίκευση σε άλλο πρόβλημα: ν σημεία, ανά δύο σχηματίζουν μια ευθεία, πόσες ευθείες στο σύνολο;

ν.(ν-1)/2

Γενίκευση του τρόπου λύσης: ποιος είναι ο αριθμός των διαγωνίων ενός ν-γώνου;

ν.(ν-3)/2

Προσέγγιση μαθηματικού τύπου: το άθροισμα 9+8+… +1=ν.(ν-1)/2

ν + (ν-1)+… +2+1 =(ν+1).ν/2

Προσέγγιση μιας αποδεικτικής διαδικασίας:

πώς ξέρουμε ότι ισχύουν για κάθε ν; Μαθηματική επαγωγή

Ιδιαιτερότητα μαθηματικών εννοιών

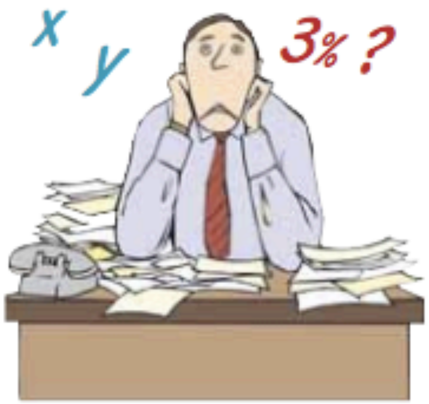
- Οι μαθητικές έννοιες έχουν πολλές όψεις,
  - εμφανίζονται σε διαφορετικούς ρόλους,
  - έχουν διαφορετικές χρήσεις, γενονός που κάνει
  - τη φύση τους να διαφοροποιείται επιστημολογικά,
  - και τις προσεγγίσεις που προτείνονται να αλλάζουν οπτική γωνία.

Πχ. Είναι μια παράσταση ή ένα σύμβολο (σχήμα ή αριθμός), είναι μια διαδικασία (μιά πράξη, μια μέτρηση), είναι ένας κανόνας ή μία ιδιότητα, μια σχέση (μια κανονικότητα) κλπ;

Οργανώνοντας μια διδασκαλία

- Οι μαθηματικές έννοιες έχουν μια μακρόχρονη ανάπτυξη.
- Η διδακτική τους κατασκευή είναι επίσης μακρόχρονη με πολλές όψεις (επιστημολογικές, ψυχολογικές, κοινωνικές, Serpinska & Lerman, 1996).
- Άρα οργανώνοντας μια διδασκαλία, χρειάζεται να ξέρουμε:
  - Πώς αναπτύσσουμε μαθηματικές δραστηριότητες;
  - Πώς ενθαρρύνουμε μαθηματικές δράσεις;
  - Με τι κριτήρια αξιολογούμε τις δράσεις ως μαθηματικές;
  - Ποιες ερωτήσεις, προβλήματα, έργα ή καταστάσεις οδηγούν στην ανάπτυξη μαθηματικής δραστηριότητας;

Παράδειγμα εισαγωγή στη συνάρτηση



Κατά καιρούς ακούμε στην τηλεόραση για τις αυξήσεις στους μισθούς των εργαζομένων. Αυτή τη χρονιά ανακοινώθηκε αύξηση 3%.

α) Δύο εργαζόμενοι έχουν μισθούς 800 € και 1100 € το μήνα. Πόση είναι η αύξηση που θα πάρει ο καθένας;

β) Ένας εργαζόμενος έχει μισθό x €. Ποια είναι η αύξηση y που θα πάρει εφέτος;

Λύση

α) Η αύξηση θα είναι:

για τον πρώτο εργαζόμενο: $\frac{3}{100} \cdot 800 = 3 \cdot 8 = 24$ €,

για τον δεύτερο εργαζόμενο: $\frac{3}{100} \cdot 1100 = 3 \cdot 11 = 33$ €.

β) Η αύξηση θα είναι: $\frac{3}{100} \cdot x = 0{,}03x$ δηλαδή $y = 0{,}03x$.

Παρατήρηση:

Η σχέση $y = 0{,}03x$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για άλλες τιμές της μεταβλητής x. Αν, για παράδειγμα, ένας εργαζόμενος έχει μισθό $x = 700$ €, η αύξηση που θα πάρει θα είναι $y = 0{,}03 \cdot 700 = 21$ €. Ομοίως, για $x = 1500$ βρίσκουμε αύξηση $y = 0{,}03 \cdot 1500 = 45$ €.

Παράδειγμα εισαγωγή στη συνάρτηση

1. Ποιο είναι το μαθηματικό περιεχόμενο;
2. Ποιος είναι ο διδακτικός στόχος; Θέση στο πρόγραμμα;
3. Ποιες είναι οι προηγούμενες γνώσεις των μαθητών;
4. Ποια είναι τα πιθανά εμπόδια και λάθη;
5. Ποιες πιθανές δράσεις οδηγούν στο διδακτικό στόχο;
6. Πώς να οργανώσουμε μια σειρά από «μαθηματικές δραστηριότητες»;

Παράδειγμα εισαγωγή στη συνάρτηση

1. Ποιο είναι το μαθηματικό περιεχόμενο;
2. Ποιος είναι ο διδακτικός στόχος; Θέση στο πρόγραμμα;

- Σχέση – απεικόνιση - μετασχηματισμός - αντικείμενο μελέτης
- Τρεις μορφές αναπαράστασης (πίνακας τιμών, τύπος, γράφ. παράσταση)
- Από την λιγότερη τυπική, οργάνωση δεδομένων, στην κατανόηση σχέσεων και συμμεταβολής συστήματος μεγεθών, στην προσέγγιση του μαθηματικού αντικειμένου, συναρτησιακές σχέσεις (πολλαπλασιασμός, αναλογίες, ποσοστά, κλπ.) στο Δημοτικό,
- στην τυπική εμφάνιση της έννοιας στο Γυμνάσιο με μελέτη κάποιων συναρτησιακών σχέσεων και γενίκευση στο Λύκειο

Παράδειγμα εισαγωγή στη συνάρτηση

1. Ποιό είναι το μαθηματικό περιεχόμενο;
2. Ποιός είναι ο διδακτικός στόχος; Θέση στο πρόγραμμα;

Να κάνει τους μαθητές σταδιακά ικανούς:

- να παρατηρούν και να μελετούν συσχετίσεις μεγεθών και να τις οργανώνουν σε πίνακες τιμών, τύπου και γραφικές παραστάσεις,
- Να ελέγχουν τα τρία είδη παράστασης και να μεταβαίνουν από τη μία στον άλλη,
- Να διακρίνουν την αναλογία, τη γραμμική συνάρτηση και την αντίστροφη αναλογία.

Παράδειγμα εισαγωγή στη συνάρτηση

3. Ποιες είναι οι προηγούμενες γνώσεις των μαθητών;
4. Ποια είναι τα πιθανά εμπόδια και λάθη;

- Λανθασμένες αντιλήψεις για μεταβλητή/άγνωστο, αριθμό/ποσότητα, συναρτησιακές και αιτιώδεις σχέσεις (σύνδεση με την αναλογία).
- Εστίαση στην εξαρτημένη ή στην ανεξάρτητη μεταβλητή, εστίαση στον τύπο ή στην καμπύλη.
- Δυσκολίες ανάγνωσης και μετάβασης από τη μια παράσταση στην άλλη.
- Περιορισμός εννοιολογικού πεδίου και στον σύστημα συντεταγμένων, ...

Παράδειγμα εισαγωγή στη συνάρτηση

3. Ποιες είναι οι προηγούμενες γνώσεις των μαθητών;
4. Ποια είναι τα πιθανά εμπόδια και λάθη;

- Μεγάλος αριθμός εμποδίων και λαθών:
  - ανάγκη τύπου, διάκριση συνάρτησης με βάση τον τύπο (και όχι πχ. το πεδίο ορισμού),
  - κανονικός τρόπος αναπαράστασης,
  - υποχρεωτική μεταβολή στην ανεξάρτητη μεταβλητή,
  - περιορισμός στο α΄ τεταρτημόριο, μη επέκταση των καμπυλών,
  - αναγκαστική χρήση χ και ψ,
  - ολική προσέγγιση, σημειακή προσέγγιση, κλπ.

Παράδειγμα εισαγωγή στη συνάρτηση

5. Ποιες πιθανές δράσεις οδηγούν στο διδακτικό στόχο;
6. Πώς να οργανώσουμε μια σειρά από «μαθηματικές δραστηριότητες»;

- Εύρεση σχέσεων και έκφραση με τύπο (από πραγματικά προβλήματα)
- Πέρασμα από τη μία μορφή στην άλλη (διαφορετικές αναγνώσεις)
- Ειδικές συναρτήσεις (ψ=αx, ψ=αx + β και ψ=α/x) μέσα από πραγματικές καταστάσεις και γενικεύσεις.

Παράδειγμα εισαγωγή στη συνάρτηση

Μια πορεία

- Πραγματικά προβλήματα που γενικεύουν και μαθηματικοποιούν,
- Μαθηματικοποιημένα προβλήματα που συστηματοποιούν,
- Μαθηματικές ασκήσεις
- Πραγματικά προβλήματα για τη χρήση μαθηματικών εργαλείων.

Παράδειγμα εισαγωγή στη συνάρτηση

- Παράδειγμα δραστηριότητα εύρεσης σχέσης από σειρά δεδομένων: παρατήρηση χρόνου.

Χρόνος σε sec	1	2	3	4
Αριθ. μικροβίων	1	4	9	16

- Πέρασμα από το λεκτικό στο συμβολικό, σε σύνδεση με πίνακα τιμών:

Αριθμός μικροβίων είναι χρόνος στο τετράγωνο

Αρ. Μικ. = χρ. στο τετράγωνο

$AM = \chi^2$

Αξιολόγηση εισαγωγής στη συνάρτηση

Τεστ αξιολόγησης

1. Λύσης πραγματικών: επιτυχία στην απλή εφαρμογή (86%)
2. Λύσης μαθηματικοποιημένων προβλημάτων: 50% για τη γραμμική, και 46,5% για την αναλογία (και 46,5% χρήση της αναλογίας στη θέση της αντίστροφης)
3. Λύση μαθηματικών ασκήσεων: 60% στη χάραξη και εύρεση γραφικών παραστάσεων από την αρχή των αξόνων, αλλά 11% όταν δεν περνάει. 50% των λαθών δεν μπορούν να βρουν τις τιμές α και β.
4. Πραγματικά προβλήματα με χρήση συναρτήσεων: 20% και 30%

Μαθηματική δραστηριότητα και μαθηματικά έργα

Μαθηματική Εκπαίδευση

- Η διδασκαλία των Μαθηματικών δεν περιορίζεται στη απλή γνώση μαθηματικών όρων, διαδικασιών και μεθόδων.
- Η ουσία βρίσκεται στο:
  - να αποκτήσουν οι μαθητές επίγνωση του τρόπου με τον οποίο λειτουργεί η μαθηματική επιστήμη και
  - με αφετηρία την ίδια τη μαθηματική γνώση, να είναι σε θέση να αντιμετωπίζει πρακτικά τα πιθανά καθημερινά προβλήματα που ανακύπτουν.

Μαθηματική Δραστηριότητα

Μαθηματική είναι μια δραστηριότητα που ενθαρρύνει σημαντικές μαθηματικές δράσεις όπως:

- Αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων,
- Αντίληψη κανονικοτήτων και κοινών δομών,
- Ανάλυση και σύνθεση στοιχείων, μερών και μοναδιαίων τμημάτων,
- Δημιουργία συνδέσεων,
- Σημειωτική δράση και σύνδεση με παραστάσεις, σήματα και σύμβολα,
- Εξήγηση/δικαιολόγηση,
- Αναστοχαστική δράση και δράση γενίκευσης.
- …………….

Ο κατάλογος χρειάζεται να ολοκληρωθεί

Μαθηματικά έργα

- Η διδασκαλία κάθε ξεχωριστής έννοιας συνοδεύεται από ένα μεγάλο αριθμό ειδικών γνώσεων και διδακτικών στρατηγικών που χρειάζεται να χρησιμοποιηθούν.
- Παιδαγωγικές ή ψυχολογικές διαστάσεις που δεν βρίσκονται σε αντιστοιχία με το συγκεκριμένο περιεχόμενο δεν υποστηρίζουν τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών.

Μαθηματικά έργα

- Συχνά οι μαθητές εμπλέκονται σε πλούσιες και ενδιαφέρουσες δραστηριότητες, αλλά δεν είναι σίγουρο ότι θα κάνουν τις απαραίτητες συνδέσεις και γενικεύσεις προς την κατεύθυνση της ανάπτυξης μαθηματικής γνώσης.

- Τα έργα μπορούν να θεωρηθούν κατάλληλα, αν:
    - Επικεντρώνονται στις μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών και τα αντίστοιχα μαθηματικά νοήματα
    - Επιτρέπουν τις μαθηματικές δράσεις που αναφέρθηκαν προηγούμενα, και
    - Ενθαρρύνουν αναστοχασμό πάνω στη δράση και μεταγνωστική επεξεργασία, για γενίκευση.

Έχει μαθηματική δράση;

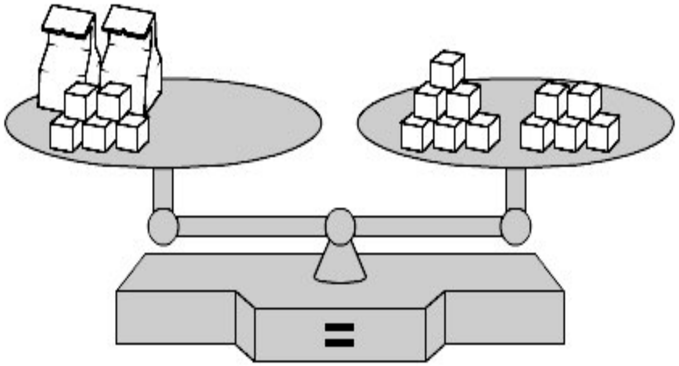
Πώς θα χειριστεί ο εκπαιδευτικός τις δράσεις, θα τις ενθαρρύνει, συγκρίνει, επεξεργαστεί;

- Συχνά οι εκπαιδευτικοί μένουν ικανοποιημένοι που οι μαθητές ανέπτυξαν πολλές προσεγγίσεις, άσχετα αν κάποιες είναι κιναισθητικές, πρακτικές ή αξιοποιούν καθημερινές εμπειρίες και δεν οδηγούν σε ουσιαστικότερες μαθηματικές ιδέες .

(το παράδειγμα με την εξίσωση)

Παραδείγματα – κριτήρια επιλογής

- Οι τσάντες έχουν το ίδιο βάρος και κάθε κυβάκι ζυγίζει 50 g. Η ζυγαριά ισορροπεί. Υπολογίστε πόσο ζυγίζει κάθε τσάντα.

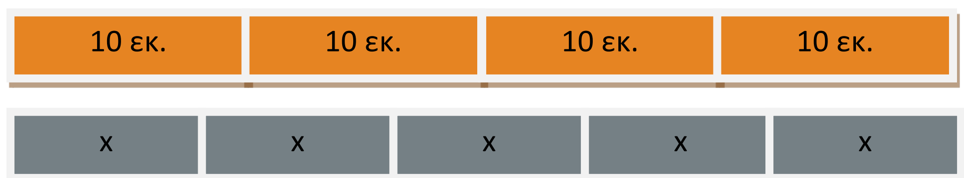


- *Τι περιεχόμενο, ποιες πηγές και ποια εργαλεία, ποια κίνητρα, ποιες μαθηματικές δράσεις και ποιες γνωστικές απαιτήσεις.*

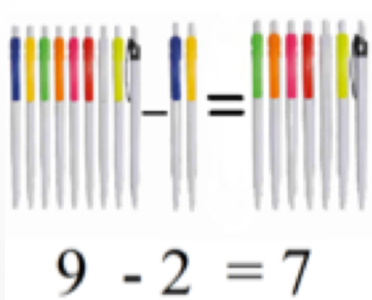
Κλασσικές διδακτικές προτάσεις

Στις εξισώσεις

- Δίνονται στους μαθητές 9 ράβδοι και, το μόνο στοιχείο που έχουν είναι ότι το μήκος της κάθε πράσινης είναι 10 εκατοστά. ζητείται από τους μαθητές να συμβολίσουν με ένα γράμμα το μήκος της πορτοκαλί ράβδου.



- το x γενικά αναπαριστά το φαγητό που θα τρώει η Μαρία κάθε μεσημέρι



Εξίσωση (14ος αιώνας)

- Μέχρι την αρχαιότητα και στη συνέχεια: Η ιδέα της επίλυσης προβλημάτων στηρίζεται σε σχέσεις και αριθμούς χωρίς εξισώσεις (βαβυλωνικά, κινέζικα, αιγυπτιακά προβλήματα, και λύσεις).
- Τον 7ο αιώνα, οι Ινδοί Βράχμα αναπτύσσουν μαθηματικές ταυτότητες και τύπους.
- Τον 9ο αιώνα, ο Πέρσης Αλ Χουαρίζμι έγραψε αρκετά σημαντικά βιβλία για την μέθοδο επίλυσης εξισώσεων.
- Το 13ο αιώνα (κινεζική δυναστεία Sung) διαπραγματεύεται την επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων.
- Το 12ο αιώνα, Ευρωπαίοι μελετητές αναζήτησαν και μετέφρασαν τα επιστημονικά Αραβικά κείμενα.
- *Η Άλγεβρα αναπτύσσεται από δω και ύστερα…*

Εξισώσεις – συναρτήσεις παρανοήσεις μαθητών

- Διαδικασία και αντικείμενο: με εκκίνηση από αριθμούς και πράξεις βλέπουν την εξίσωση όπως και τη συνάρτηση διαδικασίες, αναζήτηση αγνώστου ή παραγωγή τιμών (σε πίνακα).
- Η ισότητα: όμοια το αποτέλεσμα μιας διαδικασίας (και όχι σχέση ισοδυναμίας συμμετρικότητας και συνεπαγωγής)
- Η μεταβλητή: όμοια από τους αριθμούς, η μεταβλητή είναι ενδεικτική μιας ποσότητας και όχι μιας μεταβολής.
- Η συνάρτηση: Διαδικασία βάζω και βγάζω τιμές, εξαρτημένη και ανεξάρτητη (και όχι αντικείμενο με την κατανόηση διατεταγμένων ζευγών)
- Οι αναπαραστάσεις: πολλές παρανοήσεις στην αντιστοίχιση σημασιολογικών χώρων, σύνδεσης σημείων, συνέχειας, κυρίαρχων τεταρτημόριων και αριθμητικών τιμών

Παραδείγματα – κριτήρια επιλογής

Γ Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

Η **τετραγωνική ρίζα** ενός θετικού αριθμού x συμβολίζεται με $\sqrt{x}$ και είναι ο θετικός αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό x. Π.χ. $\sqrt{25} = 5$, αφού $5^2 = 25$
Ορίζουμε ακόμη $\sqrt{0} = 0$.
Όμως και $(-5)^2 = 25$, οπότε έχουμε $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$.

Άρα, για κάθε **πραγματικό αριθμό x** ισχύει:

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$$

$\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7, \quad \sqrt{7^2} = 7$

Δεν ορίζεται τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικός αριθμός.
Παρατηρούμε ακόμη ότι: $(\sqrt{9})^2 = 3^2 = 9$, δηλαδή $(\sqrt{9})^2 = 9$. Γενικά

$$\boxed{\text{Αν } x \geq 0, \text{ τότε } (\sqrt{x})^2 = x}$$

Γενίκευση γνώσης και επισημοποίηση

Αργή διαδικασία

Στο ειδικό πρόβλημα ➔ προσωπική γνώση
Από προσωπική γνώση ➔ συλλογική γνώση
Από συλλογική γνώση ➔ επισημοποίηση α΄ βαθμού
…… ➔ επισημοποίηση β΄ βαθμού
……

Κατάλληλα μαθηματικά έργα

Μαθηματικά έργα - είδη

- ΟΧΙ απαντήσεις σε ερωτήματα, αντιμετώπιση, επιλογή, κ.ά.
- ΟΧΙ απλές ασκήσεις εφαρμογών
- πραγματικές καταστάσεις και καθημερινές διαδικασίες
- παιχνίδια
- προβλήματα διαφόρων ειδών
- μελέτη καταστάσεων ή φαινομένων,
- κατασκευές,
- επεξεργασία δεδομένων,
- project, διερευνήσεις ή πειραματισμοί,
- έργα μοντελοποίησης, παραστασιοποίησης
- ....

Μαθηματικά έργα – δράσεις

Κατηγοριοποιούνται ως προς:

- το είδος της δράσης που υποκινούν (προβλήματα, καταστάσεις, κλπ.)
- τη χρήση εργαλείων που προτείνουν (χειραπτικό υλικό, άλλα μέσα, τεχνουργήματα)
- την οργάνωση που απαιτούν (ατομικά, ομαδικά ή έργα ένα προς ένα).

Κριτήρια σχεδιασμού ή επιλογής

- Σημαντικές είναι οι γνωστικές απαιτήσεις ενός έργου , δηλαδή *το είδος των διαδικασιών σκέψης που απαιτούνται στην αντιμετώπιση τους:*
  - Αφορούν από απομνημόνευση και εφαρμογή διαδικασιών και αλγορίθμων χωρίς κατανόηση ως
  - Κατανόηση, ανάλυση και σύνθεση, αξιολόγηση, κριτική και δημιουργία κ. ά (Hennigsen & Stein, 1997);

Κριτήρια σχεδιασμού ή επιλογής

- Σημαντικά ακόμα χαρακτηριστικά (Henningsen, & Stein, 1997):
  - ‘η αυθεντικότητα’ (σύνδεση με την πραγματικότητα και εμπειρία),
  - η ‘συνθετότητα’ (ως προς τα εννοιολογικά, νοητικά και νοηματικά χαρακτηριστικά, Williams, 2002),
  - η ποικιλία στην ανάπτυξη και χρήση λύσεων, χρήσεων, στρατηγικών, δημιουργία αναπαραστάσεων, ερμηνειών, κλπ.)

  - ‘Πλούσιο’ χαρακτηρίζεται ένα μαθηματικό έργο όταν: επιτρέπει τη χρήση πολλών προσεγγίσεων, στρατηγικών, τη δημιουργία πολλών αναπαραστάσεων, την δυνατότητα εύρεσης πολλών λύσεων, την απαίτηση εξηγήσεων και τεκμηριώσεων κ.ά.

Κριτήρια σχεδιασμού ή επιλογής

- Οι εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι όταν ένα έργο εμπλέκει ή καλεί τους μαθητές να ασχοληθούν με κάποια μαθηματικά αντικείμενα αυτό εξασφαλίζει ότι οι μαθητές ‘κάνουν μαθηματικά’, κάτι που στην πραγματικότητα δεν ισχύει.
- Για παράδειγμα, όταν οι μαθητές κάνουν πράξεις με θετικούς κι αρνητικούς αριθμούς με τη χρήση μοντέλων ή μόνο αριθμητικών συμβόλων, ποιες από τις αναφερθείσες δράσεις ή κριτήρια καλύπτουν;

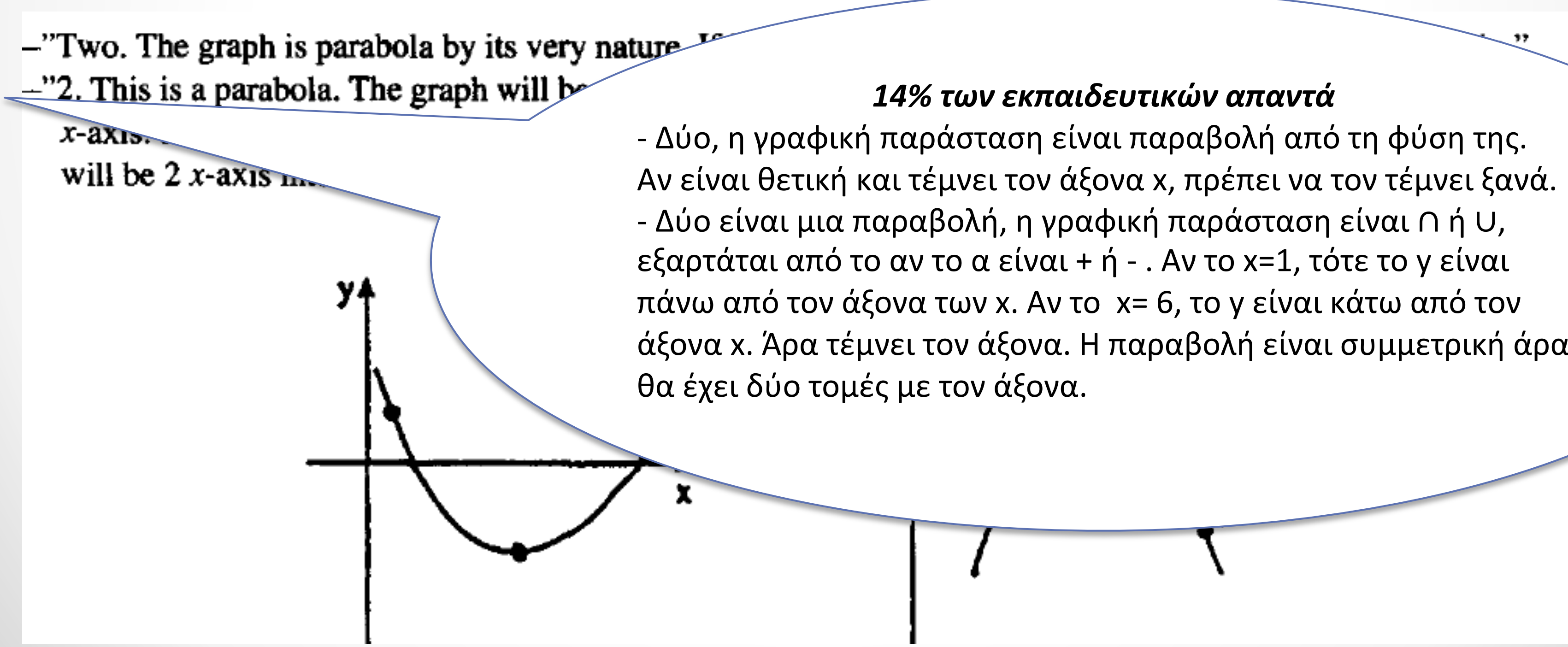
$$\frac{2}{5}\cdot 10-3\cdot(-2)-\frac{1}{2}(-3+7-2)$$

Ποιες διδακτικές προτάσεις;

Περιεχόμενο	Μαθηματική γνώση / νόημα
Έργο	Είδος έργου
Εργαλεία	Αναπαράσταση και άλλα μέσα
Δράσεις	Μαθηματικές δράσεις
Κίνητρα	Εμπλοκή των μαθητών
Επεξεργασία	Γνωστικές απαιτήσεις

Παραδείγματα – κριτήρια επιλογής

- Μία συνάρτηση της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει θετική τιμή για $x = 1$ και αρνητική για $x = 6$. Πόσες πραγματικές λύσεις έχει η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$;



14% των εκπαιδευτικών απαντά

- Δύο, η γραφική παράσταση είναι παραβολή από τη φύση της. Αν είναι θετική και τέμνει τον άξονα x, πρέπει να τον τέμνει ξανά.
- Δύο είναι μια παραβολή, η γραφική παράσταση είναι ∩ ή ∪, εξαρτάται από το αν το α είναι + ή - . Αν το x=1, τότε το y είναι πάνω από τον άξονα των x. Αν το x= 6, το y είναι κάτω από τον άξονα x. Άρα τέμνει τον άξονα. Η παραβολή είναι συμμετρική άρα θα έχει δύο τομές με τον άξονα.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Ball Loewenberg D., Heather C. Hill,C.H., & Bass, H.(2005). Knowing Mathematics for Teaching. American Educator, Fall 2005: 14-26

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? Journal of Teacher Education, 59: 389 -407

Brousseau, G. (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics. Kluwer Academic Publishers.

Brun, J. (1996). The Theory of Conceptual Fields and its Application to the Study of Systematic Errors, in Written Calculations. In H. Mansfield, Pateman, N.A. & Bednarz, N. (ed.), Mathematics for Tomorrow's Young Children , pp. 120-136. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Cuoco, A. (2001). Mathematics for Teaching. Notices of the AMS, Vol.48, No 2: 168- 174

Dossey, J. A. (1992). The Nature of Mathematics: its role and its influence. In D. Grouws (ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning , pp. 39-48. MacMillan Publisher Co .

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. V. Mammana, V. (ed.), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study, pp. 37-51. Kluwer Academic Publishers.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors That Support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and Reasoning. Journal for Research in Mathematics Education 28: 524-49.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. C. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. Journal for Research in Mathematics Education, 39: 372-400.

Howard, R.W. (1987). Concepts and Schemata. NY.: Dover.

Fischbein, E. (1996). The Psychological Nature of Concepts. In H. Mansfield, Pateman, N.A. & Bednarz, N. (ed.), Mathematics for Tomorrow's Young Children, pp. 102-136. Kluwer Academic Publishers.

Keitel, C. (2006). 'Setting a Task' in German Schools. Different Frames for Different Ambitions. In D. J. Clarke, C. Keitel, & Y. Shimizu (eds.), Mathematics Classrooms in Twelve Countries: The Insider's Perspective, pp. 37-57. Sense Publishers.

Τζεκάκη, Μ. (2011). Μαθηματική Δραστηριότητα και Μαθηματικά Έργα. Κεντρική Ομιλία. Στο Καλδρυμίδου, Μ. & Βαμβακούση, Ξ. (επιμ.). Πρακτικά 4ου Πανελλήνιου Συνέδριου της ΕΝΕΔΙΜ, σ. 51-66. Ιωάννινα: ΕΝΕΔΙΜ - Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15: 4_14.

Williams, G. (2002). Developing a shared understanding of task complexity. In L. Bazzini & C. Whybrow Inchley (ed.), Proceedings of CIEAEM53: Mathematical Literacy in the Digital Era, pp. 263-268.