Advanced mathematical thinking: Implications of various perspectives on advanced mathematical thinking for mathematics education reform.

M. Kathleen Heid

Guershon Harel

Joan Ferrini-Mundy

Karen Graham

Τρεις προσεγγίσεις για την "προηγμένη μαθηματική σκέψη"

Κάποιος μπορεί να σκεφτεί για την προχωρημένη μαθηματική σκέψη ως χαρακτηριστικό της σκέψης που εμφανίζεται κατά κύριο λόγο στη μελέτη των προηγμένων μαθηματικών στο συλλογικό ή μεταπτυχιακό επίπεδο. Η ομάδα Edwards θεώρησε ότι η προχωρημένη μαθηματική σκέψη προϋποθέτει δύο ταυτόχρονες συνθήκες: 1. η προχωρημένη μαθηματική σκέψη απαιτεί ακριβή συλλογιστική για τις μαθηματικές ιδέες και 2. αυτές οι μαθηματικές ιδέες δεν είναι πλήρως προσιτές στις πέντε αισθήσεις (Edwards et al., 2000 ). Οι συγγραφείς επισημαίνουν διάφορα παραδείγματα τρόπων με τους οποίους δεν υπάρχουν επαρκή στοιχεία για προχωρημένη μαθηματική σκέψη ότι πληρούνται και οι δύο προϋποθέσεις. Για παράδειγμα, οι συγγραφείς επισημαίνουν ότι αν και τα "όρια" είναι μια μαθηματική ιδέα που δεν είναι πλήρως προσιτή στις πέντε αισθήσεις, o "υπολογισμός των ορίων" πιθανότατα δεν είναι προχωρημένη μαθηματική σκέψη, αφού μπορεί να περιλαμβάνει μόνο την εφαρμογή μιας αυτοματοποιημένης ρουτίνας και όχι ακριβή συλλογιστική για μια μαθηματική ιδέα. Οι συγγραφείς αναπτύσσουν διάφορα άλλα παραδείγματα που ταιριάζουν με τον ορισμό της προηγμένης μαθηματικής σκέψης.

Μια δεύτερη προοπτική της προχωρημένης μαθηματικής σκέψης που προσφέρεται από τον Rasmussen και τους συναδέλφους του επικεντρώνεται στην «προηγμένη μαθηματική δραστηριότητα» (advanced mathematical activity) αφού οι συγγραφείς θεωρούν τη μάθηση των μαθηματικών ως συμμετοχή σε μια μαθηματική δραστηριότητα (Rasmussen et al., 2000). Αυτοί οι συγγραφείς δεν περιορίζουν την προχωρημένη μαθηματική σκέψη σε προπτυχιακά και μεταπτυχιακά μαθηματικά, αν και τα πρωταρχικά παραδείγματα που αναπτύσσουν στην εργασία τους αντλούνται από μαθήματα διαφορικών εξισώσεων και γεωμετρία κολλεγίων. Επικεντρώνουν τη συζήτηση σχετικά με την προχωρημένη μαθηματική σκέψη σχετικά με τα φαινόμενα της οριζόντιας και κατακόρυφης μαθηματικοποίησης (Treffers, 1987), των οποίων οι ορισμοί επεκτείνονται ώστε να επιτρέπουν την οριζόντια μαθηματικοποίηση και σε καθαρά μαθηματικά πλαίσια. Η ομάδα Rasmussen χαρακτηρίζει ως οριζόντια μαθηματικοποίηση το μετασχηματισμό ενός μαθηματικού ή πραγματικού προβλήματος με τέτοιο τρόπο ώστε να προσφέρεται για περαιτέρω μαθηματική ανάλυση. Η ομάδα αντιλαμβάνεται την κατακόρυφη μαθηματικοποίηση ως δραστηριότητες που βασίζονται στην οριζόντια μαθηματικοποίηση και κατασκευάζονται πάνω σ’ αυτή. Οι συγγραφείς διευκρινίζουν τη στάση τους σχετικά με την προχωρημένη μαθηματική σκέψη απεικονίζοντας την οριζόντια και την κάθετη μαθηματικοποίηση μέσω των δραστηριοτήτων συμβολισμού, αλγοριθμοποίησης και ορισμού. Για παράδειγμα, οι συγγραφείς περιγράφουν την οριζόντια μαθηματικοποίηση χρησιμοποιώντας τα σύμβολα για καταγραφή και επικοινωνία της μαθηματικής σκέψης και την κατακόρυφη μαθηματικοποίηση με τη χρήση των συμβολισμών που αναπτύχθηκαν ως εισροές για ευρύτερο μαθηματικό συλλογισμό.

Η τρίτη προοπτική της προηγμένης μαθηματικής σκέψης, αναπτύχθηκε από τον Harel, χαρακτηρίζει τη μαθηματική σκέψη ως προχωρημένη αν η έρευνα στον τομέα των μαθηματικών μπορεί να τεκμηριώσει ότι "η ανάπτυξή της συνεπάγεται απαραίτητα επιστημολογικά εμπόδια." Harel υποστηρίζει ότι η εξελιγμένη μαθηματική σκέψη αναπτύσσεται σε μεγάλες περιόδους εντατικής προσπάθειας. Δίνει παραδείγματα "τρόπων μαθηματικής σκέψης (α) που είναι απαραίτητοι για την εκμάθηση προηγμένου μαθηματικού περιεχομένου και (β) η ανάπτυξη των οποίων πρέπει να ξεκινήσει σε νεαρή ηλικία όταν διδάσκονται στοιχειώδη μαθηματικά περιεχόμενα" (Harel, 2000).

Κάθε μία από τις τρεις προσεγγίσεις της προηγμένης μαθηματικής σκέψης δημιουργεί τον δικό της κατάλογο ερωτήσεων που θα μπορούσαν να διερευνηθούν μέσω της περαιτέρω βελτίωσης των θεωριών ή μέσω της εμπειρικής έρευνας.

Η ομάδα Edwards θέτει το ζήτημα των μαθηματικών που δεν είναι πλήρως προσιτά στις πέντε αισθήσεις. Σε ποιο βαθμό οι προϋποθέσεις των περιπτώσεων μαθηματικής σκέψης ταξινομούνται ως "μη πλήρως προσιτές στις πέντε αισθήσεις"; Σε ποιο βαθμό αυτό το χαρακτηριστικό αναφέρεται στη μαθηματική σκέψη στην οποία εμπλέκονται ερευνητές μαθηματικοί; Είναι η βιωσιμότητα του ορισμού σε μεγάλο βαθμό μια συνάρτηση του τύπου των μαθηματικών που εξετάζονται; Εάν, όπως υποστηρίζει η ομάδα του Edwards, αυτός ο ορισμός της προηγμένης μαθηματικής σκέψης βρίσκεται στο ένα άκρο του φάσματος «μαθηματικής σκέψης», αυτό χαρακτηρίζει το ρόλο της «προσβασιμότητας στις πέντε αισθήσεις» στα ενδιάμεσα στάδια μεταξύ της προχωρημένης μαθηματικής σκέψης και της στοιχειώδους μαθηματικής σκέψης (τη σκέψη στο άλλο άκρο του φάσματος). Αν ένας από τους στόχους των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης είναι να προετοιμάσουν τους μαθητές για αργότερα προχωρημένη μαθηματική σκέψη, τι θα προετοιμάσει τους μαθητές να αναπτύξουν μαθηματική σκέψη για μαθηματικές ιδέες που είναι λιγότερο προσιτές στις αισθήσεις;

Η ομάδα Rasmussen επικεντρώνει τη συζήτησή της για την προχωρημένη μαθηματική σκέψη στον οριζόντιο και κάθετη μαθηματικοποίηση. Η περαιτέρω ανάπτυξη αυτού του ορισμού θα οδηγήσει σε επιπρόσθετη βελτίωση των τρόπων χαρακτηρισμού και προσδιορισμού κάθετων μαθηματικών. Ενδιαφέρον θα ήταν η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ κάθετης μαθηματικοποίησης και επίλυσης προβλημάτων. Είναι ένα υποσύνολο του άλλου; Είναι η κάθετη μαθηματικοποίηση ένα απαραίτητο συστατικό της επιτυχούς επίλυσης προβλημάτων. Εάν ναι, ποια είναι τα άλλα συστατικά; Οι συγγραφείς υποστηρίζουν ότι η προχωρημένη μαθηματική σκέψη δεν περιορίζεται στα κολλεγιακά μαθηματικά. Είναι παραδείγματα κάθετης μαθηματικοποίησης στο δευτεροβάθμιο επίπεδο θεμελιωδώς διαφορετικά από αυτά που αντιπροσωπεύουν το συλλογικό επίπεδο;