

Απομαγνητοφώση και σημειώσεις μαθήματος Α' Λυκείου για την κλίση ευθείας και τη συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$.

Σημειώσεις

1) Το μάθημα έγινε την Τετάρτη 15/03/2017 σε Λύκειο της Αττικής και συμμετείχαν 25 μαθητές, 2 φοιτήτριες του μαθηματικού του ΕΚΠΑ και ένας μεταπτυχιακός φοιτητής της Διδακτικής των Μαθηματικών. [REDACTED]

2) Οι συντομογραφίες K, M συμβολίζουν τα λόγια του καθηγητή και των μαθητών αντίστοιχα. Έχουν αφαιρεθεί προσφωνήσεις με ονόματα μαθητών.

3) Τα σχήματα και όσα γράφονται από τον καθηγητή στον πίνακα φαίνονται στις σημειώσεις του μαθήματος στο 2ο μέρος.

...
Κ Να ρωτήσω τώρα εγώ ένα πραγματάκι... ρε παιδιά, λέει στον δρόμο ... (ο καθηγητής σχεδιάζει στον πίνακα ένα σχήμα, βλ. Σχήμα 1)... το έχετε δει αυτό το σήμα;

Μ Ναι!

Κ Τι πάει να πει; Λέγει!

Μ Ότι η κλίση του δρόμου αυξάνεται κατά 10%;

Κ Ότι η κλίση του δρόμου είναι 10%. Ωραία! Τι πάει να πει αυτό; Δηλαδή, τι εννοώ τι πάει να πει αυτό ... ρωτάω, τι λέει; Ποιος δρόμος έχει κλίση 100%;

Μ Ο κάθετος;

Κ Ο κάθετος... άλλος; Έχει άλλη γνώμη, άλλη άποψη ή ιδέα;

Μ Οο αυτός, ο οριζόντιος.

Κ Ο οριζόντιος έχει κλίση 100%;

... (επικρατεί ανησυχία στην τάξη, δεν ακούγονται καθαρά οι ομιλίες)

Κ Πας σε ένα δρόμο, και βλέπεις αυτό το σήμα (δείχνει το σχήμα στον πίνακα, βλ. Σχήμα 1).

Τι περιμένεις να γίνει μετά δηλαδή;

Μ Εξαρτάται, τον ανεβαίνω τον δρόμο ή τον κατεβαίνω;

Κ Μόλις δεις μπροστά σου αυτό το σήμα, μετά τι περιμένεις να γίνει;

Μ Ανηφόρα!

Κ Ανηφόρα. Άρα, όταν η κλίση είναι 100% τι περιμένεις να γίνει;

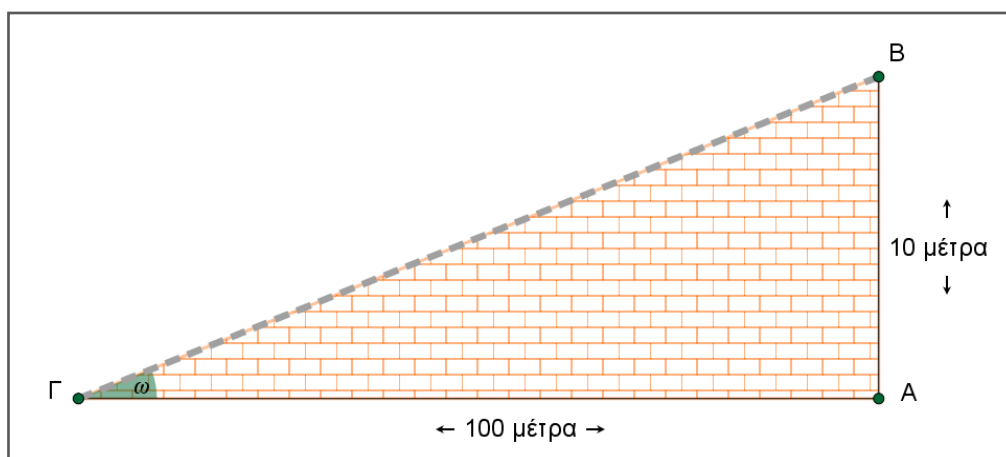
Μ Τίποτα!

Κ Μάλιστα!



Σχήμα 1

- M Αδιέξοδο;
- K Τι είπε; Λέγε, τι είπε;
- M Εεε.. 100% δεν είναι όμως, ξέρω 'γώ 360 μοίρες.
- K 360 μοίρες τι πάει να πει;
- M 180 είναι μία ευθεία.
- K Με ξαναγυρίζεις εκεί που ήμουν δηλαδή;
- M ... (η μαθήτρια απαντά, αλλά δεν ακούγεται καθαρά)
- K Ωραία! 10% τι σημαίνει;
- M 10 εκατοστά.
- K Δηλαδή; Ναι;
- M Ότι η κλίση του δρόμου...
- K Τι πάει να πει αυτό, θέλω να μου πεις.
- ... (παύση)
- K Ωραία! Για πάμε λίγο ρε παιδιά να δούμε τι είναι αυτό το πράγμα. 10% κλίση σημαίνει ότι σε 100 μέτρα που περπατάω οριζόντια, ανεβαίνω 10 μέτρα κατακόρυφα.
- ... (παύση)
- K Σε 100 μέτρα που περπατάω οριζόντια, ανεβαίνω κατακόρυφα 10 μέτρα. Αυτός ο δρόμος έχει κλίση 10% ... (ταυτόχρονα, ο καθηγητής σχεδιάζει στον πίνακα ένα σχήμα, βλ. Σχήμα 2.) ... Ποιο πράγμα άλλο είναι εδώ 10 εκατοστά; Το ξέρετε κι από το Γυμνάσιο, που το λέτε και κλίση αυτό το πράγμα...



Σχήμα 2

- M Εφαπτομένη.
- K Εφαπτομένη, ποιανού;
- M Της γωνίας.
- K Ποιας γωνίας;
- M Εεε... της Γ.
- K Της Γ! Η εφαπτομένη αυτής, ας την πούμε ω , η εφαπτομένη της γωνίας ω είναι 10 εκατοστά. Αυτό είναι η κλίση! Έτσι δεν λέγατε στο Γυμνάσιο; Κλίση είναι αυτό. Πάμε τώρα πάλι! Ποιος δρόμος έχει κλίση 100%;
- M Ο κάθετος;
- K Ποιος κάθετος;
- M ... (οι μαθητές μιλούν, αλλά δεν ακούγονται καθαρά οι απαντήσεις που δίνουν)
- K Άντε πάλι! Πάλι το ίδιο;
- M Κλίση 100% έχει ο δρόμος που για κάθε 100 μέτρα που διανύεις ανεβαίνεις 100.

Κ Τι γωνία σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο;

Μ 45.

Κ Μπράβο! Αυτό λοιπόν το τρίγωνο ... κλίση 100% θα είχε ο δρόμος που 100 προχωράς, 100 ανεβαίνεις. Δεν είναι κάθετος αυτός! Εντάξει; Αυτή ... αν αυτό συμβαίνει τότε επειδή η γωνία αυτή είναι ορθή, είναι ισοσκελές το τρίγωνο, άρα αυτή η γωνία εδώ θα είναι 45 μοίρες. 100% κλίση έχουν οι δρόμοι των 45 μοιρών. Αυτοί που λέτε εσείς, οι κάθετοι τι κλίση έχουν;

... (επικρατεί σιωπή)

Κ Καταλάβατε τι ρωτάω; Αν κάποιος είναι εδώ, και αρχίσει και ... αερόστατο, ανεβαίνει προς τα πάνω, έτσι;

Μ 200%;

Κ 200, αυτό θα είναι; 200; 200 είναι: 100 προχωράω, 200 ανεβαίνω. Αυτό δεν ανεβαίνεις με το αερόστατο, πας έτσι. Λέγε!

Μ Μηδέν.

Κ Τι; Μηδέν είναι να προχωράς 100 και να μην ανεβαίνεις καθόλου.

Μ ... (ο μαθητής συμπληρώνει κάτι χαμηλόφωνα, δεν ακούγεται καθαρά)

Κ $0 \div 100$ κάνει 0. Κλίση μηδέν έχει το οριζόντιο επίπεδο. Το ... η θάλασσα.

Μ $100 \div 0$;

Μ Δεν ορίζεται!

Κ Μη γελάτε καθόλου. Καθόλου μη γελάτε. Μη γελάτε καθόλου! Ναι;

Μ Νομίζω ότι δεν έχει κλίση.

Κ Έτσι μπράβο!

Μ Γιατί ...

Κ Γιατί αν αυτό είναι ... πώς να το πω; Δεν υπάρχει τρίγωνο τέτοιο ... Ναι, αν αυτή η γωνία είναι 90 μοίρες, αυτό λέμε εμείς πρακτικά εδώ. Αν αυτή η γωνία ήταν 90 μοίρες, τότε δεν υπάρχει κλίση. Δεν υπάρχει τρίγωνο. Δεν υπάρχει τρίγωνο με δυο ορθές. Καταλαβαίνετε; Δεν υπάρχει απέναντι, προσκείμενη. Εντάξει; Ωραία! Δηλαδή, ναι! Δεν ορίζεται, αλλά ... όσο ... ναι, προς τα πού πάει το πράγμα, όσο αυξάνεται η γωνία; Δηλαδή ... Ναι!

Μ Στο μηδέν.

Κ Που πάει η κλίση; Άσ' το πράγμα, γιατί δεν ήμουν και τόσο σαφής. Όσο αυξάνεται η γωνία αυτή, όταν το φ τείνει κοντά στο 90, η εφαπτομένη της που την βλέπετε να πηγαίνει;

... (επικρατεί σιωπή)

Κ Καταλαβαίνετε τι λέω; Κρατήσετε σταθερό αυτό και πάρτε γωνία που μεγαλώνει, μεγαλώνει ... (ο καθηγητής σχεδιάζει στον πίνακα ένα σχήμα, βλ. Σχήμα 3) ... Εντάξει; Σκεφτείτε τώρα ότι αυτή είναι η φ , και τείνει στις 90 μοίρες. Η εφαπτομένη φ που την βλέπετε να πάει; Μη φοβάσαι, λέγε!

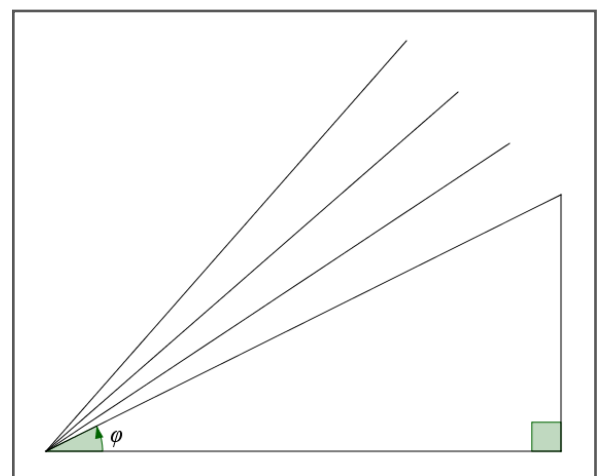
Μ Στο άπειρο;

Κ Σ' αυτό! Οπότε, ποιος το πέταξε αυτό το εκατό διά μηδέν; Δεν ήταν και τόσο χαζό. Κι' αυτό στο άπειρο πάει .. λέγε.

Μ Στο άπειρο κι ακόμα παραπέρα.

Κ Χα, κι ακόμα παραπέρα! Έλα!

Μ ... γιατί η φ μπορεί να πάει μέχρι 179, ... η εφαπτομένη μπορεί να πάει στο άπειρο;



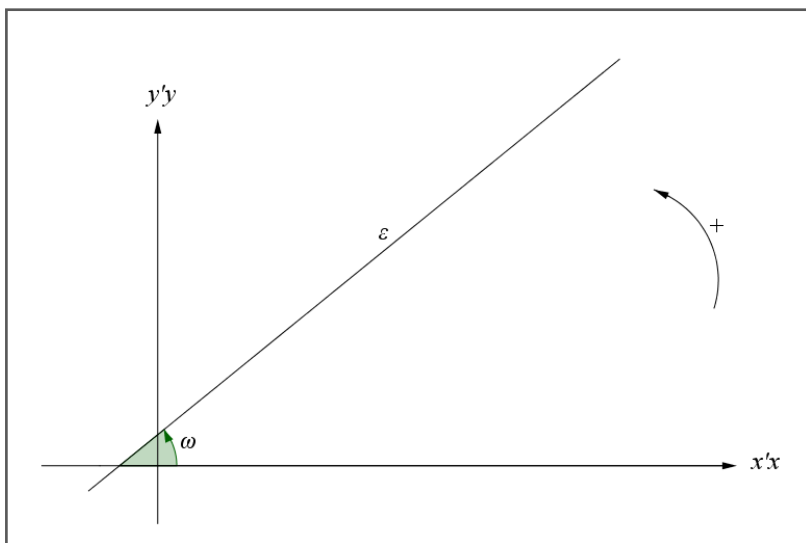
Σχήμα 3

... (επικρατεί σιωπή)

Κ Ναι, η εφαπτομένη, ακριβώς. Όταν η γωνία πάει στο 90 ... Δεν μπορεί να είναι πάνω από 90 αυτή, γιατί αυτή είναι ήδη μία 90 , δεν μπορούμε να έχουμε κι άλλη πάνω από 90 στο ίδιο τρίγωνο. Εντάξει;

... (παύση)

Κ Δηλαδή το πρώτο πράγμα που ήθελα να δούμε, όπως καταλάβατε εδώ, είναι το τι λέμε κλίση μιας ευθείας. Εντάξει; Καλά τώρα παίξαμε λίγο εκεί με τους δρόμους και τα λοιπά, αλλά θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε τι είναι η κλίση μιας ευθείας. Ας δούμε μία ευθεία ... (ο καθηγητής σχεδιάζει στον πίνακα ένα σχήμα, βλ. Σχήμα 4)



Σχήμα 4

Κ Ωραία! Έχουμε ένα σύστημα συντεταγμένων και έχουμε μία ευθεία. Η ευθεία αυτή ας υποθέσουμε ότι τέμνει τον

άξονα $x'x$. Ωραία; Αν στραφεί τώρα ο άξονας $x'x$ γύρω από το σημείο τομής, κατά την θετική φορά ... Ποια λέμε θετική φορά; Την αντίθετη, από την φορά που γυρνάνε οι δείκτες του ρολογιού, την λέμε θετική φορά. Δηλαδή, αυτή είναι η θετική φορά. Εντάξει; Αν στραφεί λοιπόν ο $x'x$ γύρω από το σημείο στο οποίο τέμνει η ευθεία αυτόν κατά τη θετική φορά, μέχρι να συμπέσει με την ευθεία μας, σχηματίζεται μία γωνία. Αυτή η γωνία λέγεται γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$. Εντάξει; Γωνία της ε με το $x'x$. Θέλω να μου πείτε ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η γωνία αυτή.

Μ ... 180 μοίρες; ... (δεν ακούγεται καθαρά όλη η πρόταση του μαθητή)

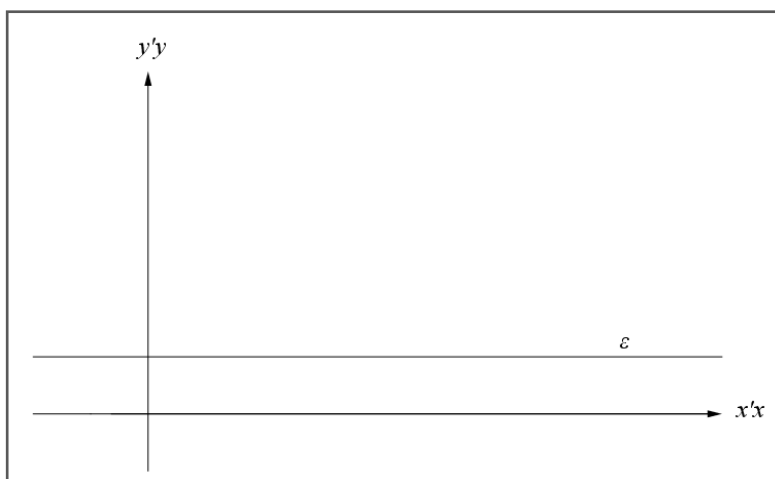
Κ Από και 0 μέχρι και 180 ;

Μ Ναι, νομίζω και.

Κ Ωραία! Λέμε λοιπόν κλίση της ευθείας ε , την εφαπτομένη της γωνίας που είπαμε πριν. Εντάξει; Ωραία! Αν δεν τέμνει τώρα η ευθεία ε τον άξονα $x'x$, δηλαδή, αν η ευθεία ε είναι κάπως έτσι, τότε η γωνία που σχηματίζει με τον $x'x$ θεωρούμε, ποια λέτε ότι είναι; ... (ο καθηγητής σχεδιάζει ταυτόχρονα στον πίνακα ένα σχήμα, βλ. Σχήμα 5) ...

... (επικρατεί σιωπή)

Κ Ε τι γωνία σχηματίζει μια παράλληλη στον $x'x$ με αυτόν;



Σχήμα 5

M ... (η μαθήτρια προτείνει κάτι χαμηλόφωνα, αλλά δεν ακούγεται καθαρά)

K Τι να βάλω εγώ; Δεν ορίζεται εννοείς;

M Μηδέν!

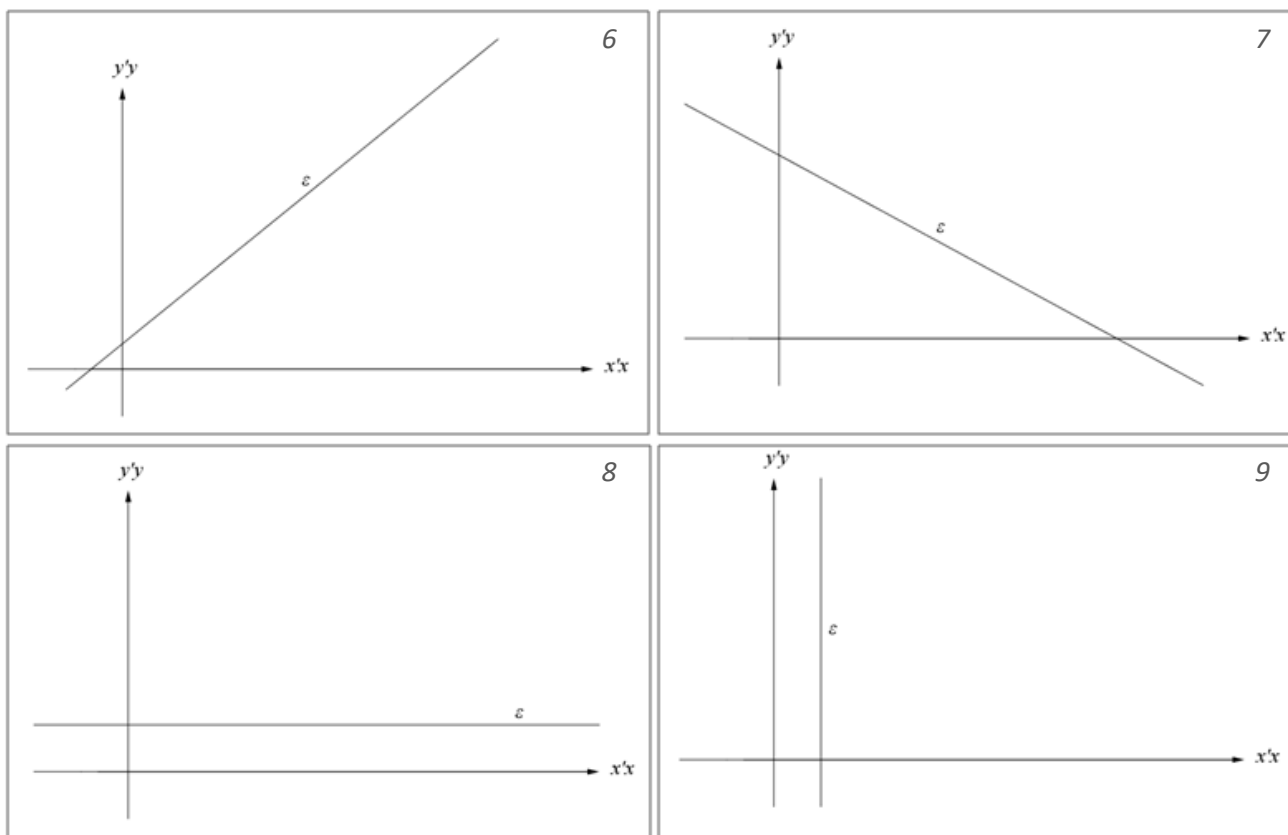
K Μηδέν! Ωραία, και αντίστοιχα η κλίση, η εφαπτομένη της γωνίας είναι μηδέν. Θέλω να μου πείτε κάτι εδώ πέρα τώρα, για ποια ω ορίζεται αυτό το εφαπτομένη ω ;

... (επικρατεί σιωπή)

K Κάπως το 'παμε λίγο απέξω – απέξω περίπου. Δηλαδή, το 'παμε κανονικά.

M Διάφορο του 90 ;

K Ωραία! Η γωνία ω πρέπει να μην είναι 90 μοίρες. Εντάξει; Ωραία! Τώρα, εε ... θέλω να δούμε κάποια σχηματάκια ... (ο καθηγητής σχεδιάζει στον πίνακα τέσσερα σχήματα, βλ. Σχήματα 6,7,8,9) ... Το ένα είναι αυτό. Άλλο ένα αυτό.... Ωραία! Οι ευθείες ... τώρα ξέρετε εσείς, ας το θεωρήσουμε δεδομένο! Ναι, να ρωτήσω κάτι ρε παιδιά; Μια ευθεία στο επίπεδο, θα έχει εξίσωση πάντα αυτήν³; Δηλαδή, υπάρχει ευθεία που δεν έχει αυτή την εξίσωση;



Σχήματα 6,7,8,9

M Η καμπύλη δεν είναι ευθεία!

M Η καμπύλη είναι γραμμή!

K Η καμπύλη είναι γραμμή.

M Την προηγούμενη φορά δεν λέγαμε ότι μία ευθεία παράλληλη στον $x'x$ έχει εξίσωση ... (δεν ακούγεται καθαρά όλη η πρόταση του μαθητή)

K Λέγαμε, ναι, πράγματι. Αυτή δηλαδή θεωρείς ότι δεν είναι της μορφής: $y=2$; Δηλαδή, για κατάλληλα α και β δεν μπορεί να γίνει $y=2$;

M Όχι!

³ σ.σ. Εννοεί την εξίσωση $y=\alpha x+\beta$.

Κ Για ποια α και β , πες μου για παράδειγμα;

... (επικρατεί σιωπή)

Κ Εύκολο! Βρες μου α και β τέτοια ώστε αυτή εδώ να γίνεται της μορφής, να γίνει $y=2$.

Μ Εεε ...

Κ α ίσον, β ίσον;

Μ Ναι, κατάλαβα.

Κ Εε μα είναι εύκολο!

Μ Δεν ξέρω, δεν ...

Μ Εε ... $\alpha=0$ και $\beta=2$;

Κ Για $\alpha=0$ και $\beta=2$, αυτή γίνεται $y=2$. Εντάξει; Άρα η $y=2$ είναι μία τέτοια. Αυτή που έκανα, εδώ ας πούμε (βλ. Σχήμα 8), τι εξίσωση, τι μορφή έχει η εξίσωσή της;

Μ $y=2$.

Κ $y=2$! Αυτή την έχουμε πει. Ωραία! Ξαναρωτάω πάλι σ' αυτό που ήμασταν, ας γυρίσουμε πίσω. Υπάρχει ευθεία στο επίπεδο, που δεν είναι της μορφής αυτής⁴;

Μ Αυτή η μορφή είναι μόνο για ευθείες που ικανοποιούν την συνάρτηση. Οπότε, η τελευταία δεν είναι συνάρτηση, άρα δεν ... ναι, γιατί ο κανονικός τύπος είναι $ax+\beta=0$.

Κ Ωραία! Και αλλιώς; Αυτή η ευθεία, να καταλάβουμε λίγο τι παριστάνουν τα α και β λίγο, αυτό θέλω να δούμε. Το α ...

Μ Είναι η κλίση, δεν είναι η κλίση;

Κ Μπράβο! Το α είναι η κλίση... Το α είναι η κλίση. Είναι η εφαπτομένη της γωνίας ω . Αυτή η τελευταία εδώ ευθεία, τι ω έχει; (βλ. Σχήμα 9) Τι γωνία σχηματίζει με το x' ;

Μ 90 .

Κ 90 ! Τι είπαμε εμείς για την ... Δεν ορίζεται. Άρα αυτή εδώ (βλ. Σχήμα 8), δεν είναι τέτοιας μορφής. Πες το!

Μ ... δεν έχουμε πει ότι ... είπατε πριν ... (ο μαθητής ρωτά κάτι χαμηλόφωνα, αλλά δεν ακούγεται καθαρά)

Κ Όχι, όχι ... ποιοι το 'χετε πει αυτό;

Μ ... (ο μαθητής συμπληρώνει χαμηλόφωνα κάτι, αλλά δεν ακούγεται καθαρά)

Κ Αα!

Μ Υπάρχει ημίτονο και ... συνημίτονο.

Κ Ναι, αλλά επειδή η εφαπτομένη ω ορίζεται ... ορίζεται, τέλος πάντων, ισούται με ημίτονο διά συνημίτονο, και το συνημίτονο των 90 μοιρών μάθατε εσείς πέρυσι ότι κάνει μηδέν, αυτό το πράγμα⁵ δεν ορίζεται για την 90 . Έτσι; Ναι!

Μ Αφού είναι κάθετη, και είναι παράλληλη με τον $y'y$ είναι αυτή συνάρτηση; μπορούμε να πάρουμε ...

Κ Όχι, δεν είναι. Δηλαδή αυτή δεν είναι κάτω απ' αυτόν τον τίτλο, και γι' αυτό θέλω κάπως να το επισημάνουμε. Ενώ ...

Μ Όχι, δεν είναι μόνο αυτό, δεν είναι μόνο ότι η εφαπτομένη μηδέν έχει παρονομαστή μηδέν, είναι κίόλας ότι μπορεί να ... για πολλά y να πάρει ...

Κ Οκ! Σωστά! Ωραία! Τι εξίσωση όμως έχει αυτή η ευθεία; Έχει εξίσωση; Καλά δεν έχει τέτοια, αλλά τι έχει; Δηλαδή, αν εδώ είναι ο αριθμός, ξέρω 'γώ, 1 , ποια είναι η εξίσωση της ευθείας αυτής;

Μ $x=1$.

⁴ σ.σ. Εννοεί την εξίσωση $y=ax+\beta$.

⁵ σ.σ. Εννοεί την $\varepsilon\varphi 90^\circ$.

- K $x=1, x=x_0$. Όλα ... γιατί γίνεται αυτό; Γιατί όλα τα ... οι τετμημένες των σημείων της ευθείας αυτής⁶, όποιο σημείο και να πάρεις εδώ είναι $x=0$, οποιοδήποτε y . Έτσι; Αν είναι $1, x=1$, όλα τα σημεία έχουν τετμημένη 1 . Όλες οι άλλες, περιγράφονται απ' αυτή την εξίσωση⁷. Αυτή, τι α έχει; Το είπαμε και πριν.
- M Μηδέν.
- K Το α της⁸ είναι μηδέν. Ωραία! Και θέλω να μου πει κάποιος κάτι για το α αυτής (βλ. Σχήμα 6), και κάτι για το α αυτής (βλ. Σχήμα 7).
- M Εε το α της αριστερής (βλ. Σχήμα 6) είναι μικρότερο των 90 μοιρών, και το α της δεξιάς (βλ. Σχήμα 7) είναι μεγαλύτερο των 90 μοιρών.
- K Πάμε ξανά. Το α , δεν το είπα ε; Ναι, γι' αυτό ίσως έγινε η παρεξήγηση. Το α λέγεται συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ...
- ... (επικρατεί σιωπή)
- M Αα εε να πω; ...
- K Περίμενε, ας την πούμε αυτήν ε . Δεν είναι η γωνία! Είναι η εφαπτομένη της γωνίας! Είμαστε εντάξει; Κάτι ήθελες να πεις;
- M Ναι, το α ... δεν είπατε να πούμε λίγο και για το α κάτι;
- K Ναι, ναι ...
- M ... το y προς x ; ... (η μαθήτρια ρωτά κάτι, δεν ακούγεται καθαρά)
- K Ναι, έτσι ορίζεται και η εφαπτομένη. Αν θυμάστε πέρσι, εκεί που κάνατε Τριγωνομετρία, η εφαπτομένη μίας γωνίας ... Πέρσι, που κάνατε για τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών που είναι μεγαλύτερες από 90 μοίρες, αν είχατε ... όταν είχατε εδώ ένα σημείο (x,y) , ορίσατε την εφαπτομένη της γωνίας ω , ως y/x , αρκεί το x να μην κάνει 0 . Εντάξει; Πες το!
- M Νομίζω όταν είναι αμβλεία γωνία τότε η εφαπτομένη είναι αρνητική.
- K Ακριβώς! Πράγματι, για κοιτάξτε εδώ (βλ. Σχήμα 7). Μπορείς να μου το εξηγήσεις με βάση αυτό τον ορισμό γιατί η εφαπτομένη είναι αρνητική όταν η γωνία είναι αμβλεία;
- M Εε, γιατί το x σε αυτή την περίπτωση είναι αρνητικό. Άρα ...
- K Και το y ...
- M Και το y είναι θετικό.
- K Και το y είναι θετικό, άρα το y/x είναι αρνητικό για αμβλείες γωνίες, όταν πέφτει στο 2° τεταρτημόριο η γωνία, είναι αμβλεία. Δηλαδή, εδώ πέρα τώρα η γωνία μας αυτή είναι οξεία (βλ. Σχήμα 6), το α που ισούται με το εφαπτομένη ω είναι ... πρόσημο;
- M Θετικό.
- K Θετικό! Εδώ η γωνία μας είναι αυτή, παιδιά ξαναλέω, ο x στρέφεται γύρω από το σημείο που τον τέμνει η ευθεία μέχρι να συμπέσει με την ευθεία. Όχι, μη πάρετε όποια γωνία να 'ναι, εντάξει; Εδώ η γωνία είναι μεγαλύτερη από 90 και η εφαπτομένη ω , το α , είναι αρνητικό (βλ. Σχήμα 7). Πες το!
- M Αα, δεν θυμάμαι ακριβώς τους τύπους, αλλά πέρσι είχαμε κάνει κάτι με αμβλείες και οξείες γωνίες με ημίτονα και συνημίτονα που είχαν νομίζω δύο με τρεις τύπους που έλεγαν 180 μείον συνημίτονο ισούται με εφαπτομένη ... (δεν ακούγεται καθαρά όλη η πρόταση του μαθητή)
- K Ναι!
- M ... (ο μαθητής συνεχίζει, αλλά δεν ακούγεται καθαρά)
- K Ναι! Πάμε παρακάτω!
- M Αα, έτσι δεν ξέρουμε ότι ... είναι ίσα; (ο μαθητής καταλήγει σε ερώτηση, αλλά δεν ακούγεται καθαρά)

⁶ σ.σ. Εννοεί την εξίσωση $x=x_0$.

⁷ σ.σ. Εννοεί την εξίσωση $y=ax+\beta$.

⁸ σ.σ. Εννοεί την εξίσωση $y=y_0$.

- K Νομίζω ότι αυτό είναι ... ο ορισμός σου δίνει πιο γρήγορα αποτελέσματα για το πρόσημο, παρά αυτό που λες. Άρα, αυτό που λες προκύπτει από τον ορισμό. Εε τι ήθελα να πω τώρα; Ναι! Πάμε λίγο ... Ναι! Θέλω να μου πείτε ποιο σημείο είναι αυτό⁹, αν η ευθεία παριστάνεται από αυτή την εξίσωση (βλ. Σχήμα 6). Ποιο, δηλαδή, ποιο είναι το σημείο που τέμνει η ευθεία τον άξονα $y'y$; Λέγε!
- M Εε το β ;
- K Πως το βρήκες;
- M Γιατί, εε σκέφτοντας η $y=ax$ είναι μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- K Γιατί;
- M Ναι, γιατί; Δεν ξέρω γιατί. Απλά μία σκέψη έκανα ... (ο μαθητής συνεχίζει, αλλά δεν ακούγεται καθαρά)
- K Ναι, γιατί κατάλαβα, αλλά γιατί αυτή διέρχεται; μπορείς να έχεις ένα επιχειρήμα γι' αυτό;
- M Επειδή τοσο ... στο ax δεν προσθέτουμε κάτι ...
- K Πολύ ποιοτική η προσέγγιση, λίγο πιο μαθηματικά;
- M Πιο μαθηματικά;
- M Πως μπορούμε να το πούμε αυτό, αφού δεν έχουμε ορίσει το β ; Έχουμε πει τι είναι, δηλαδή ...
- K Να ορίσουμε, να δούμε τι εκφράζει το β εδώ πάνω στην γραφική παράσταση.
- M ... (ο μαθητής λέει κάτι, αλλά δεν ακούγεται καθαρά)
- K Ναι, αυτό ... μπορείτε, μπορείτε, επειδή μπορείτε γι' αυτό το λέω, μπορείτε, μπορείτε λέω, αλλιώς δεν θα το ρώταγα.
- M Εε, από την ευθεία $y=\beta$, το β , το $(0,\beta)$ θα είναι το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$;
- K Πάμε, πάμε! Εδώ! Αυτό το σημείο έχει τετμημένη 0 , έχει $x=0$. Άμα πάτε s' αυτήν εδώ και βάλετε όπου x το μηδέν, θα βγει το $y=\beta$. Δηλαδή το β δείχνει που η $y=ax+\beta$ τέμνει τον $y'y$. Εντάξει; Αντίστοιχα εδώ πάλι είναι β . Ωραία! Το α ρε παιδιά ... ναι!
- M Ναι, αν το β είναι μηδέν;
- K Αν το β είναι μηδέν, αυτός ... α μπράβο! Αν το β είναι μηδέν σημαίνει ότι περνάει από 'δω! Δηλαδή, σημαίνει ότι είναι της μορφής $y=ax$, που είναι αυτό που έλεγε πριν, περνά από την αρχή των αξόνων. Ωραία! Ναι! Ναι!
- M ... το α ... (η μαθήτρια λέει κάτι, αλλά δεν ακούγεται καθαρά)
- K Δεν το ρώτησα ακόμα, θα το και ρωτήσω μετά. Κάτι ήθελες να με ρωτήσεις.
- M Βασικά, το β ... (ο μαθητής λέει κάτι, αλλά δεν ακούγεται καθαρά)
- K Ναι, αν και δεν έχουμε πει εμείς τις μετατοπίσεις, δηλαδή ... Ωραία, να το κρατήσουμε αυτό. Αν ... αυτή είναι η $y=ax$, αυτή είναι η $y=ax+\beta$ βλέπετε μια κατακόρυφη μετατόπιση της μιας, κατά β , προς τα πάνω αν είναι το β θετικό, προς τα κάτω αν είναι το β αρνητικό, θα το δούμε και στη συνέχεια τις μετατοπίσεις των γραφικών παραστάσεων. Τι ήθελα να σας ρωτήσω;
- M Πότε μετατοπίζεται κατά γωνία;
- K Κατά;
- M Γωνία. Εννοώ αυτήν ...
- K Δεν είπαμε ακόμα τις κατακόρυφες οριζόντιες ... είναι πολικές συντεταγμένες, δεν τα κάνουμε εμείς αυτά. Δηλαδή, όταν περιγράφεται το αντικείμενο με ... Υπάρχουν δύο τρόποι να ορίσεις ένα σημείο, ο ένας είναι να πεις ξεκινάω από 'δω, πάω τόσο δεξιά και τόσο πάνω, εντάξει; Ο άλλος είναι να πεις, ότι εε, ότι παίρνω τον άξονα $x'x$ στρίβω κατά γωνία τόση και s' αυτή την ημιευθεία περπατάω μέχρι εδώ. Δηλαδή, ένα ζευγάρι (ρ,θ) μπορεί να σου προσδιορίσει, όπου θ είναι η γωνία που στρίβει ο $x'x$, και ρ το πόσο περπατάς μέχρι να φτάσεις στο σημείο που s' ενδιαφέρει, μπορεί να σου δώσει επίσης

⁹ σ.σ. Εννοεί το σημείο τομής της ευθείας (βλ. Σχήμα 6) με τον άξονα $y'y$.

τον προσδιορισμό μιας θέσης. Αυτό το ζευγάρι λέγεται πολικές συντεταγμένες, δηλαδή εκτός από τις καρτεσιανές συντεταγμένες που κάνουμε εμείς υπάρχει και αυτό το πράγμα που κάπως απαντάει λίγο στο ερώτημα νομίζω, αλλά δε θα ... Εε, τι ήθελα να πω; Ναι! Ωραία!

M Οι παραβολές ως προς y κι ως προς x δεν είναι ...; (η μαθήτρια θέτει μία ερώτηση, αλλά δεν ακούγεται καθαρά)

K Είναι κατακόρυφες οριζόντιες μετατοπίσεις, αλλ' αυτά θα τα πούμε.

M Όχι, ... (η μαθήτρια επισημαίνει κάτι, αλλά δεν ακούγεται καθαρά)

K Ναι, κατάλαβα. Είναι, είναι 90 μοίρες ή ανάλογα πόσο είναι. Αν περιγράφεται αυτό με κάποιο τρόπο; ναι, νομίζω πως με τις πολικές συντεταγμένες περιγράφεται. Θα το κοιτάσουμε άμα είναι. Αλλά δεν θα το συναντήσετε πάντως. Εε θέλω ... δείτε λίγο, εντάξει το β είπαμε τι εκφράζει, το α καταλαβαίνετε τι εκφράζει; Εντάξει, είπαμε η κλίση, μήπως έχει κάποιος κάποιον άλλο τρόπο να το, να περιγράψει τι είναι το α για την ευθεία; Για πες.

M ... (ο μαθητής προτείνει κάτι, αλλά δεν ακούγεται καθαρά)

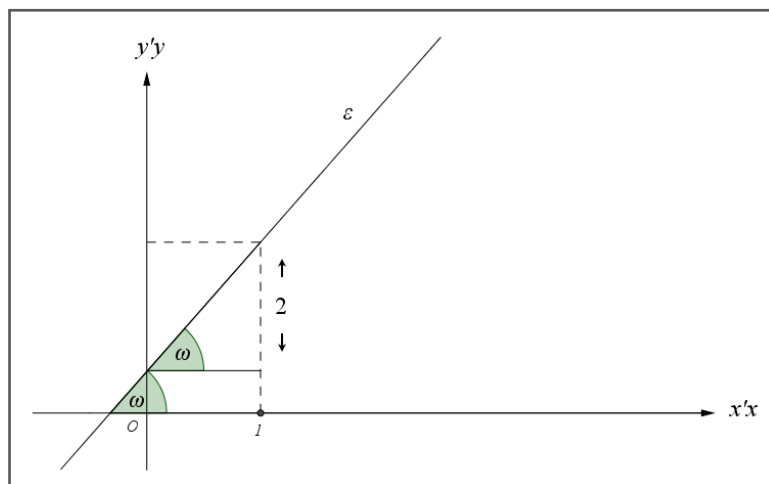
K Ναι, αλλά αυτό δεν περιγράφει το α , περιγράφει τη γωνία της οποίας η εφαπτομένη κάνει α . Εντάξει! Αυτό, ναι το είδαμε, αλλά είναι λίγο έμμεσο αυτό. Ναι!

M Το πηλίκο της διαφοράς των τεταγμένων με των τετμημένων;

K Ωραία! Εντάξει! Θα πω λίγο ποιοτικά εγώ και θα γυρίσουμε σ' αυτό που λέει. Παιδιά το α εκφράζει, πόσο μεταβάλλεται το y όταν το x μεταβληθεί κατά 1 . Δηλαδή, τι θέλω να πω; Ότι ...

M Είναι σαν κι αυτό που κάναμε στην αρχή δηλαδή, απλά αντί για 100 , 1 ; Σαν κι αυτό που κάναμε πριν με τον δρόμο;

K Ναι! Δηλαδή, αν αντί για 100 πάω 1 οριζόντια τότε η κατακόρυφη μετατόπιση θα είναι α . Αν το α θα είναι, αν το α είναι θετικό θ' ανέβω α προς τα πάνω, αν το α είναι αρνητικό θα κατέβω α προς τα κάτω. Πολύ καλή παρατήρηση! Δηλαδή, τι εννοώ εδώ ... Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την ευθεία $y=2x+1$, έτσι; ... (ο καθηγητής σχεδιάζει στον πίνακα ένα σχήμα, βλ. Σχήμα 10) ... Εε άμα κάνει κάποιος τη γραφική παράσταση, θα είναι αυτή κάπως έτσι. Τι εκφράζει αυτό το 2 εδώ; Ότι, από ... ότι αν πας από ένα σημείο που έχει τετμημένη 0 σε ένα σημείο που έχει τετμημένη 1 , δηλαδή αν έχεις μία οριζόντια μετατόπιση κατά 1 , τότε η κατακόρυφη μετατόπιση, αυτό εδώ, θα είναι 2 . Γιατί θα είναι 2 ; Γιατί η γωνία αυτή που είπαμε, που σχηματίζει η ευθεία με το ... Λέγε!



Σχήμα 10

M Ότι αυτή η γωνία είναι ίση με την ... , μ' αυτήν.

K Μ' αυτήν εδώ, και η εφαπτομένη της γωνίας ω είναι απέναντι προς προσκείμενη, θα είναι εδώ 2 προς 1 . Εντάξει; Δηλαδή, αυτό εδώ το νούμερο εκφράζει πόσο μεταβάλλεται το y όταν το x μεταβληθεί κατά 1 . Να το πω και λίγο πιο αλγεβρικά: φανταστείτε ότι έχετε ένα σημείο (x_1, y_1) , της ευθείας αυτής,

έτσι; Αν πάω εγώ σε ένα σημείο y_2 , που είναι το x_1 μεγαλύτερο από το προηγούμενο x_1 ... εντάξει; Τι σχέση έχουνε αυτά τα δύο y ; Τι αναμένετε σαν απάντηση;

... (επικρατεί σιωπή)

Κ Ξανά! Αυξάνω το x κατά 1, τι περιμένω να πάθει το y ;

Μ Ν' αυξηθεί.

Κ Πόσο;

Μ Κατά 1!

Κ Εμείς δεν είπαμε πριν ότι όταν αυξάνεται το x κατά 1, το y αυξάνεται κατά;

Μ 2!

Κ 2! α , γενικά.

Μ Ε, άρα θ' αυξηθεί κατά 2.

Κ Ωραία! Ναι! Να το δούμε όμως λίγο. Αυτό κάνει $2x_1+2+1$, δηλαδή, $2x_1+1+2$. Αυτό είναι το y_1 .

Μ Ναι.

Κ Το βλέπουμε; Γενικά, μεταβολή του x κατά 1 προκαλεί μεταβολή του y κατά α . Προσέξτε! Όχι πάντα αύξηση. Δηλαδή, μπορείτε να μου πείτε ένα παράδειγμα που μεταβολή του x κατά 1 προκαλεί μείωση του y κατά α ; Λέγε!

Μ Μπορεί το α να είναι αρνητικό.

Κ Μπορεί το α να είναι αρνητικό. Και τότε, τι σημαίνει αυτό εδώ; Ότι κατεβαίνει προς τα κάτω, είναι τέτοιο (ταυτόχρονα ο καθηγητής δείχνει στον πίνακα την αντίστοιχη γραφική παράσταση, βλ. Σχήμα 7). Εντάξει; Πείτε μου κάτι, αν το x αυξηθεί κατά 3, πόσο περιμένετε να μεταβληθεί το y σ' αυτήν εδώ; Αν το x αυξηθεί κατά 3, το y περιμένετε να αυξηθεί, μειωθεί κατά πόσο;

... (επικρατεί σιωπή)

Μ ... (η μαθήτρια λέει κάτι, αλλά δεν ακούγεται καθαρά)

Κ Εσύ θα μου πεις. Ρωτάω εγώ, εσύ απαντάς.

Μ Θα αυξηθεί κατά 1.

Κ Θα αυξηθεί κατά 1. Δηλαδή, μεταβολή κατά k του x , προκαλεί μεταβολή του y κατά $\alpha \cdot k$. Ε; Είμαστε 'ντάξει; ... Εε ...

Μ Το ξαναλέτε λίγο;

Κ Ναι, ναι! Λέω εδώ, τι είπαμε πρακτικά;

Μ ... μεταβολή ... (ο μαθητής εξηγεί, αλλά δεν ακούγεται καθαρά)

Κ Ναι, αν μεταβάλλεις το x κατά ένα αριθμό k , τότε το y θα μεταβληθεί κατά α φορές τον αριθμό αυτό: $\alpha \cdot k$. Αν το α είναι θετικός θα έχουμε αύξηση, αν, εφόσον το k είναι θετικός, αλλιώς θα έχουμε μείωση. Πες το!

Μ Αν το α είναι αρνητικός και το x είναι αρνητικός ...

Κ Το x ;

Μ Αν το α ...

Κ Η μεταβολή του x , ναι εντάξει, καταλάβατε πιστεύω, ναι. Πες το.

Μ Η γραφική αναπαράσταση του α ;

Μ Ναι αυτό!

Κ Η γραφική αναπαράσταση του α , κοίταξε τώρα, το α είναι λόγος, είναι ...

Μ Εφαπτομένη.

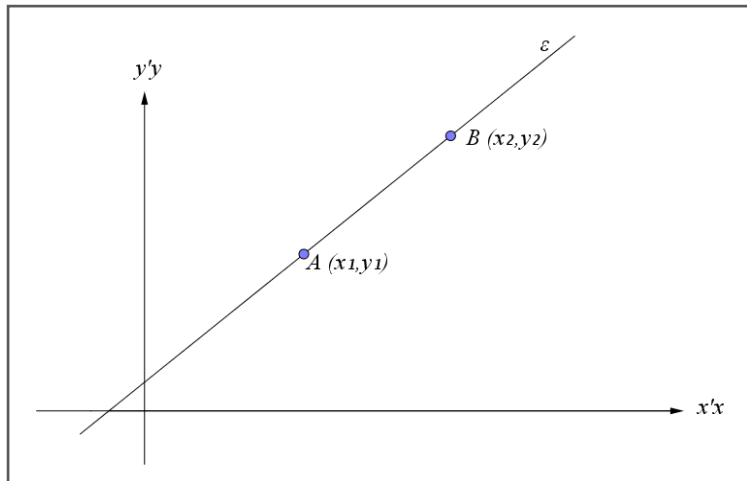
Κ Ναι είναι κλάσμα, α να πω, να γυρίσουμε λίγο σ' αυτό που έλεγε εδώ. Αν εε ...

Μ Το πώς σχεδιάζουμε.

Κ Ναι, και γιατί όχι να πούμε και τον τύπο, ένα τύπο που θα το βρούμε.

... (επικρατεί σιωπή, ο καθηγητής σχεδιάζει ένα σχήμα στον πίνακα, βλ. Σχήμα 11)

Κ Σας δίνει κάποιος δυο σημεία μιας ευθείας, θεωρήστε τα (x_1, y_1) , (x_2, y_2) γνωστά. 'Ντάξει; Ποιο είναι το α της ευθείας; Ποιος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας; Βρείτε μου! Γράψτε. Ποιος είναι ο συντελεστής της ευθείας αυτής; Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι της μορφής αυτής, πόσο είναι το α με βάση αυτά τα στοιχεία:



Σχήμα 11

(x_1, y_1) , (x_2, y_2) ;

... (οι μαθητές γράφουν, επικρατεί σιωπή)

Κ Το 'χουμε πει σε ειδική περίπτωση, δείτε το γενικά.

... (οι μαθητές γράφουν, επικρατεί σιωπή)

Κ Έγραψες;

Μ Ναι.

... (ο καθηγητής πηγαίνει προς το μέρος του μαθητή να δει αυτό που έγραψε, μιλούν χαμηλόφωνα, δεν ακούγονται καθαρά)

Κ Ναι, αλλά εδώ δεν υπάρχει κανένα σημείο.

Μ ... θα πάρω τη διαφορά τους ... (εξηγεί μιλώντας χαμηλόφωνα, δεν ακούγεται καθαρά)

Κ Που να το δω εγώ αυτό; που; πως προέκυψε; κάπου να το δω, στο σχήμα εννών, που προκύπτει αυτό; (ο καθηγητής τώρα πηγαίνει προς το μέρος μίας μαθήτριας) Τι είναι αυτά που γράφεις εκεί;

Μ ... (η μαθήτρια λέει κάτι, δεν ακούγεται καθαρά)

Κ Ε τι έτσι; Που τα βρήκες αυτά; Γιατί είναι έτσι;

... (επικρατεί σιωπή)

Κ Δεν είναι δύσκολο. Τι είπαμε εμείς ότι είναι το α ; Το α είπαμε είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει ... Ναι! Τι είπαμε ότι είναι το α ;

Μ Εφαπτομένη;

Κ Πάμε παρακάτω.

Μ Είναι αυτό, και αυτό πλην αυτό, προς αυτό πλην αυτό ... (η μαθήτρια δείχνει στον καθηγητή αυτό που έχει γράψει στο τετράδιό της)

Κ Γιατί δεν το πας από πάνω την γωνία;

Μ Ναι 'ντάξει, ναι ...

Κ Ωραία! Πάμε!

Μ Οπότε είναι στην ουσία όλο αυτό πλην αυτό.

Κ Ωραία! Ναι! Βρήκε άλλος τίποτα;

Μ Γίνεται με άλλο τρόπο;

Κ Με άλλο; Με ποιον;

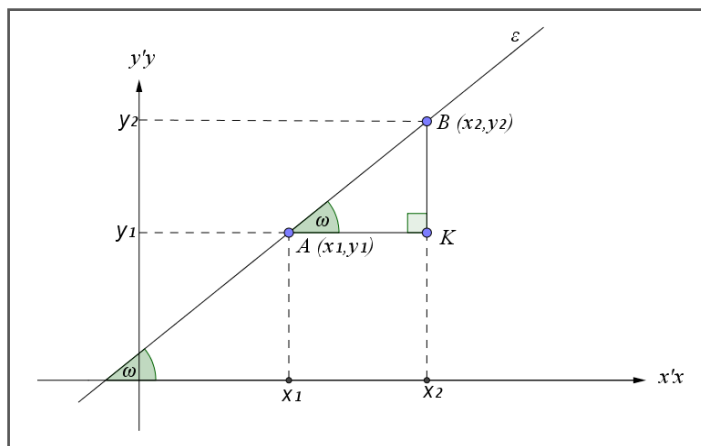
Μ Άμα γυρίσουμε αυτό σε σύστημα; ... χωρίς νούμερα δηλαδή ...

Κ Πολύ καλό είναι!

Μ Α!

Κ Εξαιρετικό είναι! Απλά δεν δείχνει τι, βρίσκεις, απαντάς στο ερώτημα που έθεσα, απλά δε φαίνεται στο σχήμα τι εκφράζει αυτό.

M A!
 K Πολύ καλό! Εε ναι, μία ιδέα είναι αυτή εδώ. Άμα κάνετε αυτό το τριγωνάκι, το κάναμε και πριν ρε παιδιά, εντάξει; ... (ο καθηγητής σχεδιάζει στον πίνακα ένα σχήμα, βλ. Σχήμα 12) ... Τότε η γωνία που λέγαμε πριν, αυτή, μεταφέρεται εδώ πέρα, εε; Το α είναι η εφαπτομένη της γωνίας. Μου λέτε την εφαπτομένη της γωνίας αυτής; A, B, K . Ναι! Λέγε!



Σχήμα 12

M ...ε είναι ... (ο μαθητής λέει κάτι, αλλά δεν ακούγεται καθαρά)

K Ωραία! Πες μου ποια είναι η απέναντι κάθετη;

M Ε η x , η KB .

K Η KB , προς;

M Εε την AK .

K Την AK . Κοιτάξτε τώρα πως έχει το πράγμα, εδώ ποιος αριθμός είναι;

M x_2 .

M x_2 . Εδώ είναι ο x_1 , εδώ είναι τώρα ο y_1 και εδώ είναι ο y_2 . Και λέμε τώρα ότι αυτό το κομμάτι εδώ είναι το y_2 που είναι όλο ετούτο, μείον το y_1 που είναι όλο ετούτο. Δηλαδή είναι το y_2 μείον το y_1 , προς αντίστοιχα εδώ πέρα είναι x_2 που είναι όλο αυτό, μείον x_1 που είναι τούτο εδώ. Εντάξει; Ε έτσι μπορείτε να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης. Ωραία; Δείτε κι άλλο ένα που λέει εδώ. Το y_1 είναι $\alpha x_1 + \beta$, αφού το σημείο A ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y = \alpha x + \beta$;

M Ναι.

K Και το y_2 δεν είναι $\alpha x_2 + \beta$; Αν τα αφαιρέσω λέει αυτά τα μέλη, την πάνω από την κάτω ... το β έχει φύγει. Άμα βγάλω κοινό παράγοντα το α ... Ωραία! Όλ' αυτά παιδιά γίνονται εφόσον το x_1 δεν είναι ίσο με το x_2 . Τι σημαίνει το x_1 να είναι ίσο με το x_2 ρε παιδιά; Δηλαδή αν το x_1 είναι ίσο με το x_2 ;

M Ταυτίζονται τα σύνορα;

K Όχι!

M Α μπορεί να είναι το αντίθετο; Εε ... να έχει μείον;

K Μπορείς να μου φτιάξεις δύο σημεία που έχουν ίδιο x ; Χωρίς να ταυτίζονται;

M Ναι ... (ο μαθητής λέει κάτι, αλλά δεν ακούγεται καθαρά)

K Δεν καταλαβαίνω τι σημαίνει αντίθετα σημεία γι' αυτό.

M Να είναι ... (ο μαθητής εξηγεί, αλλά δεν ακούγεται καθαρά)

K Νομίζω ότι το είπα καλά τώρα.

M Θα κάνω το ίδιο ...

K Ό,τι θες κάνε!

M Εε έχω ένα σημείο ... (ο μαθητής εξηγεί κάτι στον καθηγητή που τον έχει πλησιάσει, αλλά δεν ακούγεται καθαρά)

K Τι είναι το x_1 που γράφεις εκεί; Η τετμημένη των σημείων;

M Ναι, σημείο 1, σημείο 2.

K Α! κ , λ ;

M Ναι!

K Οκ! Ωραία! Και τι τετμημένη έχουν αυτά;

M Μηδέν.

K Πολύ ωραία! Μια χαρά είναι! Παιδιά, δύο σημεία που είναι στην ίδια κατακόρυφο, στην ίδια παράλληλη με τον $y'y$;

M Δεν έχουνε;

K Δεν έχει συντελεστή διεύθυνσης η ευθεία που ορίζουνε, έτσι;

M Αλλά αν είναι x_1 ίσον με x_2 και δεν ταυτίζονται, τότε δεν είναι συνάρτηση.

K Ναι. Σύμφωνα, εντάξει; Εμείς κάνουμε και το συνάρτηση και την ευθεία, 'ντάξει;

M Άρα το α ... (ο μαθητής λέει κάτι, αλλά δεν ακούγεται καθαρά)

K Το α είπαμε ποιοτικά τι εκφράζει, έτσι; Και είναι αυτό προς αυτό. Είναι ένας λόγος! Αυτό προς αυτό, πόσο ανεβαίνω ή κατεβαίνω προς πόσο μετακινούμαι οριζόντια.

M ... $y=x+1$ πρέπει αυτό το BK διά το α να κάνει ...

K Ναι! Αυτό προς αυτό σ' οποιοδήποτε, δηλαδή έχεις την ευθεία, όπου και να το πάρεις αυτό το τριγωνάκι πρέπει αυτό προς αυτό να κάνει το α .

... (σε αυτό το σημείο χτυπά το κουδούνι, στην τάξη επικρατεί φασαρία)

K Ωραία, για να δοκιμάσουμε τώρα την άσκηση 4. Θυμηθείτε και λίγο τριγωνομετρία απ' τα παλιά. Πάρτε το 3° και το 4° από την 1, κάντε από την 2 άσκηση το 3° και το 2° και κάντε και την 3.

M Όλη;

K Ναι!

... (γίνεται φασαρία, οι μαθητές φεύγουν από την αίθουσα)