



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ - ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ - ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ
ΣΠΟΥΔΩΝ «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

Εργασία στο μάθημα:
ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ
ΚΑΛΔΡΥΜΙΔΟΥ Μ., ΤΖΕΚΑΚΗ Μ., ΛΕΜΟΝΙΔΗΣ Χ.

Εργασία Μοντελοποίησης

Κατίδης Γεώργιος: ΑΜ 565
Μιχαηλίδου Χριστίνα: ΑΜ 575
Παπαγεωργίου Μαρία: ΑΜ 582
Χαριτίδου Ολυμπία: ΑΜ 594

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2016

Περιεχόμενα

Πρώτο Πρόβλημα Μοντελοποίησηςσελ.3

Δεύτερο Πρόβλημα Μοντελοποίησης.....σελ.8

Τρίτο πρόβλημα μοντελοποίησης.....σελ.19

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....σελ.25

Πρώτο Πρόβλημα Μοντελοποίησης

Εντοπίστε τη θέση του τραυματία

Στα τέλη του Φλεβάρη λόγω τριημέρου της Καθαρής Δευτέρας τρεις ομάδες ορειβατών από το Λιτόχωρο, το Κιλκίς και τη Θάσο αποφάσισαν να κατακτήσουν την κορυφή του Ολύμπου.



Λόγω της διαφορετικής εμπειρίας των ομάδων ορειβασίας θα ξεκινούσαν πρώτα οι ορειβάτες του Λιτόχωρου μετά του Κιλκίς και τελευταίοι της Θάσου. Το μονοπάτι που επέλεξαν να ακολουθήσουν ήταν από Γκορτσιά.

Οι ομάδες επικοινωνούσαν συνεχώς και η πρώτη έδινε το στίγμα των καιρικών συνθηκών στις άλλες ομάδες και στα κεντρικά του συλλόγου Ορειβατών Λιτόχωρου σε τακτά χρονικά διαστήματα. Λόγω όμως άσχημων συγκυριών η τελευταία συνομιλία με τους αρχηγούς των ομάδων του Λιτόχωρου από τα VHF ήταν η εξής:



- Μια τεράστια χιονοστιβάδα ... πετάμε ... τα σακίδια

- Δώστε μας το στίγμα σας ομάδα Λιτόχωρου

- Το GPS δε λειτουργεί...

- Δώστε ένδειξη θερμοκρασίας;

- -4,1 °C αν βλέπω καθαρά.

Την ίδια στιγμή και οι αρχηγοί των δύο άλλων ομάδων έδωσαν αντίστοιχες θερμοκρασίες: του Κιλκίς περίπου -0,6 °C σε υψόμετρο 2.220μ. ένδειξη GPS και της Θάσου περίπου 0 °C σε υψόμετρο 2.150μ



και την ίδια χρονική στιγμή που δόθηκε το στίγμα των θερμοκρασιών από τους 3 αρχηγούς, στο Λιτόχωρο η θερμοκρασία ήταν περίπου 12,2 °C.

Οι επικοινωνίες διακόπηκαν λόγω χιονοστιβάδας. Κινητοποιήθηκαν αμέσως οι ομάδες διάσωσης από το Λιτόχωρο ώστε να εντοπίσουν τους ορειβάτες με μόνη πληροφορία τις θερμοκρασίες εκείνη τη στιγμή. Το σχετικό δελτίο ειδήσεων αναφέρει ότι μετά από 8 ώρες προσπαθειών εντοπίστηκε η ομάδα του Λιτόχωρου με έναν 15χρονο τραυματία. Είναι έγκυρη η πληροφορία που έδωσε ο δημοσιογράφος σε σχέση με το υψόμετρο που βρέθηκε ο τραυματίας;

Μέθοδος Διδασκαλίας

Το πρόβλημα αυτό απευθύνεται σε μαθητές β' γυμνασίου μετά από τη διδασκαλία της ευθείας $y=ax+\beta$. Οι μαθητές αναμένεται να κινητοποιηθούν αφού είναι ένα πρόβλημα του πραγματικού κόσμου. Θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ανοιχτό γιατί ανάλογα με τον τρόπο που θα δουλέψουν οι μαθητές θα προσεγγίσουν την τιμή του υψομέτρου και στη συνέχεια θα συζητήσουν για να καταλήξουν σε συμπέρασμα. Επιπλέον, δεν γνωρίζουν από την αρχή τα μαθηματικά εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουν. Οι μαθητές θα εργαστούν με μαθηματικές έννοιες όπως η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=ax+\beta$ και θα συνειδητοποιήσουν τη σύνδεση αυτών των εννοιών με φαινόμενα που περιγράφουν πραγματικές καταστάσεις. Δίνονται στους μαθητές ευκαιρίες να βιώσουν την ευχαρίστηση της ανακάλυψης, και της συνεργασίας μέσα από το παιχνίδι ρόλων (ως μέλη ομάδας διάσωσης). Θα χρειαστούν τρεις διδακτικές ώρες.

1^η διδακτική ώρα

Κάθε μαθητής έχει το πρόβλημα μπροστά του σε φωτοτυπία. Οι μαθητές διαβάζουν το πρόβλημα συζητούν τις ιδέες για το χειρισμό των δεδομένων. Στον πίνακα σημειώνονται οι ιδέες τους και ο καθηγητής αφήνει τα παιδιά να μιλήσουν ελεύθερα μέσω καταιγισμού ιδεών ώστε οι ίδιοι να ανακαλύψουν τη σύνδεση της θερμοκρασίας με το υψόμετρο. Σημαντικό είναι να θυμηθούν από το μάθημα της Γεωγραφίας ότι καθώς μεγαλώνει το υψόμετρο μειώνεται η θερμοκρασία. Αναμένεται από τα παιδιά να προτείνουν έρευνα στο διαδίκτυο για να βρουν τον ρυθμό μείωσης της θερμοκρασίας κατά ύψος όπως και για τις θερμοκρασίες και το υψόμετρο του Λιτόχωρου και των δύο ορειβατικών ομάδων. Ενδεχομένως να

προτείνουν ότι ένας χάρτης με τα μονοπάτια του Ολύμπου καθώς και η επικοινωνία με τα μέλη του τοπικού ορειβατικού συλλόγου θα ήταν αρκετά κατατοπιστικός και χρήσιμος. Χωρίζονται οι μαθητές σε ομάδες 4-5 ατόμων με σκοπό να δουλέψουν στην εύρεση των στοιχείων ώστε στο επόμενο μάθημα να καταστρώσουν στρατηγικές για το πώς θα επιλύσουν το πρόβλημα.

2^η διδακτική ώρα

Οι ομάδες ως μικροί διασώστες θα προσπαθήσουν να εντοπίσουν τους ορειβάτες. Η κάθε ομάδα θα έχει το δικό της όνομα. Χωρίζουμε τον πίνακα σε 5 ή 6 στήλες με τα ονόματα των ομάδων. Κάθε ομάδα έχει ορίσει κάποιο αντιπρόσωπο που σημειώνει στον πίνακα τις πληροφορίες που έχουν συλλέξει.

Το συγκεκριμένο πρόβλημα βασίζεται στην έννοια της γραμμικής εξίσωσης.

Ωστόσο, απαιτείται από τους μαθητές να διαβάσουν το πρόβλημα με προσοχή να ερμηνεύσουν τις πληροφορίες που τους δίνονται και όχι απλά δίνοντάς τους δύο διατεταγμένα ζεύγη ή την κλίση της ευθείας και ένα διατεταγμένο ζεύγος να σχεδιάσουν μια ευθεία. Από τα δεδομένα της δραστηριότητας δε δηλώνεται τόσο ξεκάθαρα στους μαθητές που θα οδηγηθούν και αυτό θα δημιουργήσει συγκρούσεις, αρκετές σκέψεις θα ειπωθούν ώστε να καταλήξουν στη λύση.

Έτσι λοιπόν αναμένεται από τους μαθητές να βρουν ότι καθώς αυξάνεται το υψόμετρο η θερμοκρασία μειώνεται. Η ομάδα του Λιτόχωρου που ξεκίνησε πρώτη έδωσε ένδειξη θερμοκρασίας -4.1°C , ταυτόχρονα η δεύτερη ομάδα του Κιλκίς έδωσε ένδειξη θερμοκρασίας -0.6°C που



ήταν σε πιο χαμηλό υψόμετρο και τέλος της Θάσου 0°C άρα είναι εύλογο οι μαθητές να βγάλουν το παραπάνω συμπέρασμα.

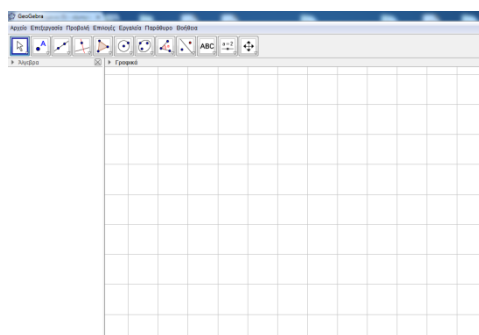
Προβλέπεται να ερευνήσουν και να βρουν την πληροφορία - κλειδί ότι κατά μέσο όρο η θερμοκρασία μειώνεται κατά $6,5^{\circ}\text{C}$ βαθμούς Κελσίου ανά 1.000 μέτρα (γνωστή ως κατακόρυφη θερμοβαθμίδα). Τη συγκεκριμένη πληροφορία μπορούν να την αντλήσουν από το διαδίκτυο ή και το μάθημα της Γεωγραφίας. Θα εντοπίσουν χάρτες με τα μονοπάτια του Ολύμπου όπως δίνονται στη διπλανή εικόνα. Είναι αναμενόμενο πως οι μαθητές θα καταφέρουν να συνδέσουν το υψόμετρο του Λιτόχωρου (300μ.) με την ένδειξη της θερμοκρασίας 12°C αλλά και των ορειβατικών ομάδων. Και θα δημιουργηθούν τα διατεταγμένα ζεύγη (*υψόμετρο, θερμοκρασία*).

Στην περίπτωση του Λιτόχωρου για παράδειγμα θα μπορούσαμε να είχαμε τις παρακάτω απαντήσεις (0.3,12.2) ή (300,12.2) ή (0.3, 12) ή (300,12). Τα δύο τελευταία ζευγάρια αναμένεται να δώσουν και τις διαφοροποιήσεις ανάμεσα στις ομάδες μας ανάλογα με το πώς αντιλαμβάνονται το «*περίπου*» της εκφώνησης όποτε να έχουμε μια πιθανή στρογγυλοποίηση ή ακρίβεια.

Μέσα από συζήτηση θα δημιουργηθεί η ανάγκη για κατασκευή ορθοκανονικού συστήματος αξόνων και τοποθέτηση των συντεταγμένων για παράδειγμα (0.3,12) και ανάλογα τα αλλά συντεταγμένα ζεύγη.

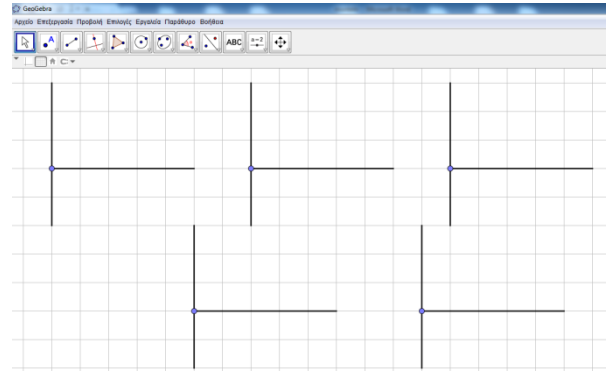
3^η διδακτική ώρα

Μοιράζεται σε κάθε ομάδα από ένα φύλλο τετραγωνισμένου χαρτιού και προβάλλουμε στον διαδραστικό πίνακα το GeoGebra με τετραγωνισμένη επιφάνεια χωρίς το ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.



Η κάθε ομάδα αφήνεται ελεύθερη να ενεργήσει και θα κατασκευάσει τους δικούς της άξονες και αναμένουμε οι μαθητές να σημειώσουν το πρώτο διατεταγμένο ζεύγος και όπως αναφέρθηκε παραπάνω ανάλογα θα διαφοροποιηθούν και οι απαντήσεις.

Δημιουργούνται 5 ή 6 ορθοκανονικά συστήματα συντεταγμένων και η τάξη καταλήγει στη συμφωνία, ύστερα από συζήτηση, ότι ο άξονας yy' εκτείνεται και προς τα θετικά και προς τα αρνητικά και αντιπροσωπεύει τις θερμοκρασίες που επικρατούν στις τοποθεσίες μας. Ενώ ο xx' εκτείνεται μόνο προς τα θετικά και αντιπροσωπεύει το υψόμετρο. Από κάθε ομάδα ένας αντιπρόσωπος συμπληρώνει τους άξονες και το σημείο Λ που αντιστοιχεί στο υψόμετρο-θερμοκρασία του Λιτόχωρου.



Στη συνέχεια γνωρίζοντας τη πληροφορία για τη θερμοβαθμίδα οι μαθητές περιμένουμε να συμπληρώσουν και το δεύτερο σημείο το οποίο ονομάζουν οι ομάδες T (τυχαία τοποθεσία). Αν για παράδειγμα κάποια ομάδα θα έχει $\Lambda(0,3,12)$ και $T(1,3,5,5)$ θα σημειώσει ανάλογα και $K(k_1, k_2)$ για Κιλκίς και $\Theta(\theta_1, \theta_2)$ για Θάσο.

Οργανώνουν τα δεδομένα και σημειώνουν τον πίνακα τιμών με τις συντεταγμένες των σημείων κάτω από κάθε διάγραμμα και παρατηρώντας τα, αντιλαμβάνονται τη γραμμικότητα. Οπότε υπολογίζουν τους συντελεστές α και β της $y = \alpha x + \beta$ αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες των σημείων Θ και Λ τα οποία είναι «βολικά σημεία» (δε γνωρίζουν να λύνουν γραμμικά συστήματα) και θα καταλήξουν στην $y = -6,5x + 13,95$ (μία περίπτωση). Στη συνέχεια οι ομάδες αναμένεται να αντικαταστήσουν την ένδειξη της θερμοκρασίας -4°C της ομάδας Λιτόχωρου ή $-4,1^\circ\text{C}$ και θα βρουν τη θέση των ορειβατών.

Τέλος, οι μαθητές θα συμπεράνουν ότι το ρεπορτάζ είναι ανακριβές ως προς το υψόμετρο. Μπορούμε να επεκτείνουμε το πρόβλημα και να τους ρωτήσουμε τελικά σε ποια τοποθεσία βρέθηκαν οι ορειβάτες.

Αξιολόγηση 1ου προβλήματος

Στη συγκεκριμένη εργασία λόγω περιορισμού στην έκταση της εργασίας κρίθηκε σκόπιμο να μην γίνει αναλυτική αξιολόγηση (στα πλαίσια της προτεινόμενης σύμφωνα με τα πρότυπα του μαθήματος) και για τα τρία προβλήματα μοντελοποίησης. Επιλέχθηκε το δεύτερο από τα προβλήματα προκειμένου να δοθεί τόσο η διαμορφωτική όσο και η συγκριτική αξιολόγηση όπως παρουσιάστηκε στο

μάθημα. Προφανώς παρόμοιες διαδικασίες αξιολόγησης μπορούν να γενικευτούν με κατάλληλες τροποποιήσεις και στα υπόλοιπα δυο προβλήματα.

Δεύτερο Πρόβλημα Μοντελοποίησης:

Επιλογή περιοχής για καλλιέργεια αρωματικών φυτών λεβάντας και ρίγανης.

Μια ομάδα νέων γεωπόνων που μόλις αποφοίτησαν από το Γεωπονικό της Αθήνας αποφάσισε να ασχοληθεί με τις αγροτικές εναλλακτικές καλλιέργειες και συγκεκριμένα με τα αιθέρια έλαια της λεβάντας και της ρίγανης. Οι συγκεκριμένες καλλιέργειες έχουν σαφώς εξαγωγικό χαρακτήρα και δύναται να αποφέρουν σημαντικά κέρδη στους παραγωγούς τους. Οι νέοι επίδοξοι γεωργοί είναι από διάφορα μέρη της Ελλάδος και ο πρωταρχικός τους στόχος είναι να επιλέξουν τη βέλτιστη περιοχή για τις καλλιέργειες τους. Η απόδοση των εναλλακτικών αυτών καλλιεργειών αυξάνεται σε πολύ μεγάλο βαθμό στην περίπτωση της βιολογικής καλλιέργειας και συνδέεται άμεσα με τις κλιματικές συνθήκες. Η Ελλάδα από πλευράς κλιματολογικών συνθηκών ευνοεί την καλλιέργεια αρωματικών - φαρμακευτικών φυτών και από πλευράς χλωρίδας βρίσκεται στις πρώτες θέσεις σε παγκόσμιο επίπεδο γεγονός που καθιστά την ενασχόληση με τις συγκεκριμένες καλλιέργειες ιδιαίτερα προσοδοφόρα οικονομικά αρκεί να γίνει με σωστές και οργανωμένες κινήσεις και βάσει ρεαλιστικού επιχειρηματικού σχεδίου.

Λεβάντα

Τα περισσότερα είδη λεβάντας κατάγονται από την λεκάνη της Μεσογείου, και απαντώνται σε βραχώδεις και ασβεστολιθικές περιοχές. Επίσης η λεβάντα εμφανίζεται πάνω από την βόρεια Αφρική, την Μεσόγειο την Ευρώπη και την Δυτική Ινδία. Η Λεβάντα καλλιεργήθηκε από τους αρχαίους Έλληνες, τους Ρωμαίους καθώς και την εποχή της



Ελισσαβετιανής Αγγλίας. Το όνομα «λεβάντα» προέρχεται από το λατινικό lavare που σημαίνει πλένω ή κολυμπώ. Είδη όπως η *Lavandula latifolia* φύονται σε ένα

μεγάλο μέρος της Μεσογείου προτιμώντας πιο ζεστά κλίματα και χαμηλότερες σε υπόμετρο περιοχές. Η Λεβάντα είναι μέτρια ανθεκτική σε πάγο και ξηρασία. Η πλατύφυλλη λεβάντα δεν είναι ανθεκτική σε παγετό. Όλες οι λεβάντες είναι ευαίσθητες στην υψηλή υγρασία, ενώ οι υψηλές θερμοκρασίες του καλοκαιριού επηρεάζουν την ποιότητα του παραγόμενου ελαίου. Σε περιοχές με ετήσιο ύψος βροχής 700-1400 mm η λεβάντα αποδίδει καλά. Η καλύτερη θερμοκρασία για την ανάπτυξη της, είναι 22-27 °C, δεν αντέχει τους ανοιξιάτικους παγετούς. Επιτρεπτά όρια για τον δείκτη ερημικότητας de Martonne: 35-40.

Ρίγανη

Η ρίγανη μπορεί να καλλιεργηθεί σε πεδινές, ημιορεινές και ορεινές περιοχές και σε



ποικιλία εδαφών, εκτός από τα πολύ αμμώδη και αργιλώδη. Η άριστη θερμοκρασία ανάπτυξης είναι 18-22 °C. Επιπλέον, το φως είναι απαραίτητο. Σε περιοχές με ετήσιο ύψος βροχής 600 mm η ρίγανη αποδίδει καλύτερα. Σε περιοχές με χαμηλό υπόμετρο και έντονη ηλιοφάνεια παρατηρείται υψηλότερη περιεκτικότητα αιθέριου ελαίου. Προτιμά εδάφη που

αποστραγγίζονται καλά. Επιτρεπτά όρια για τον δείκτη ερημικότητας de Martonne: 24-30.

Ποιες περιοχές της Ελλάδος είναι ευνοϊκές για κάθε μια από τις παραπάνω δυο καλλιέργειες;

Διευκρίνιση: Τα κλιματικά όρια για την καλλιέργεια των φυτών έχουν δοθεί έτσι ώστε οι μαθητές μελετώντας τα να μπορούν να διακρίνουν περιοχές με διαφορετικά χαρακτηριστικά, γιατί αλλιώς η καλλιέργειά τους είναι δυνατή στο σύνολο σχεδόν της ελληνικής περιοχής και το μοντέλο θα έβγαινε μάλλον άγονο.

Μέθοδος Διδασκαλίας

Το παραπάνω πρόβλημα ανήκει στον πραγματικό κόσμο, έξω από τα μαθηματικά, συμπεριλαμβάνει άλλους επιστημονικούς κλάδους και συνδέει διαφορετικά αντικείμενα μεταξύ τους όπως γεωγραφία, γεωπονία, μετεωρολογία, οικονομία. Είναι ανοικτό πρόβλημα που δεν δίνει όλες τις πληροφορίες για τη λύση

του, και μάλιστα από τις υποθέσεις που θα κάνει κάποιος ως προς τα στοιχεία που λείπουν ενδεχομένως να προκύψουν διαφορετικές προσεγγίσεις που θα οδηγήσουν σε διαφορετικές λύσεις. Οι μαθητές θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν γνώσεις γεωμετρίας ως προς την χωρική αντίληψη και την μελέτη χαρτών, γνώσεις άλγεβρας και στατιστικής ως προς την εξαγωγή απαραίτητων μεταβλητών για την κατηγοριοποίηση πληροφοριών και δημιουργία χαρτών που θα συμβάλλουν στην εξαγωγή συμπερασμάτων.

Το προτεινόμενο πρόβλημα μοντελοποίησης μπορούν να διαπραγματευθούν μαθητές της Α' Λυκείου στο πλαίσιο του μαθήματος "ερευνητική εργασία". Είναι διαθεματικό, εμπεριέχονται νέες έννοιες που οι μαθητές δεν γνωρίζουν εκ των προτέρων (όπως ο δείκτης ερημικότητας) ή έννοιες γνωστές από τη Γεωγραφία της Α' και Β' Γυμνασίου (μέσο ύψος βροχής, θερμοκρασίας, κλίμα) για το λόγο αυτό είναι απαραίτητο να προηγηθεί μια διδακτική προπαρασκευαστική ώρα όπου οι μαθητές θα θυμηθούν πως μελετούν κλιματικούς χάρτες. Το μάθημα προτείνεται να διεξαχθούν σε αίθουσα που διαθέτει ηλεκτρονικούς υπολογιστές και διαδίκτυο ή να γίνει χρήση κινητών συσκευών.

1η Διδακτική (προπαρασκευαστική) ώρα

Αρχικά δίδεται το παραπάνω πρόβλημα σε κάθε ένα από τους μαθητές και ζητείται να αφιερώσουν χρόνο για να σκεφτούν. Μπορεί να γίνει μια συζήτηση σε όλη την τάξη για τη φύση του έργου (αυθεντικότητα -σχέση με την πραγματικότητα). Στη συνέχεια θα δοθούν στους μαθητές ένα σύνολο από κλιματικούς χάρτες (1, 2, 4 και 5). Οι χάρτες θα προβάλλονται στον πίνακα μέσω οθόνης προβολής και οι μαθητές θα επιλέγουν με ποιον από αυτούς θέλουν να ασχοληθούν. Αφού συμπληρωθεί ο αριθμός των μαθητών ανά χάρτη (6 μαθητές αν το σύνολο της τάξης είναι 24) στη συνέχεια ο εκπαιδευτικός δίνει φωτοτυπία (καλύτερα έγχρωμη) με τον αντίστοιχο χάρτη καθώς και ένα σύνολο ερωτήσεων. Ενδεικτικά δίνονται οι ακόλουθες:

Για τους χάρτες 1 και 2:

Με βάση τις πληροφορίες που περιέχονται στο χάρτη βροχόπτωσης:

α) ποιες ελληνικές πόλεις ή περιοχές δέχονται τις περισσότερες βροχές;

.....
.....

β) ποιες ελληνικές πόλεις ή περιοχές δέχονται τις λιγότερες βροχές;

.....
.....

Συνοψίστε τα συμπεράσματά σας

.....
.....

Για τους χάρτες 4, 5

Με βάση τις πληροφορίες που περιέχονται στο χάρτη θερμοκρασίας:

α) ποιες ελληνικές πόλεις έχουν μέσες (ετήσιες, Ιανουαρίου, Ιουλίου) θερμοκρασίες 12-14 βαθμούς Κελσίου;

.....
.....

β) ποιες ελληνικές πόλεις έχουν μέσες (ετήσιες, Ιανουαρίου, Ιουλίου) θερμοκρασίες 14-16 βαθμούς Κελσίου;

.....
.....

γ) ποιες ελληνικές πόλεις έχουν μέσες (ετήσιες, Ιανουαρίου, Ιουλίου) θερμοκρασίες 16-18 βαθμούς Κελσίου;

.....
.....

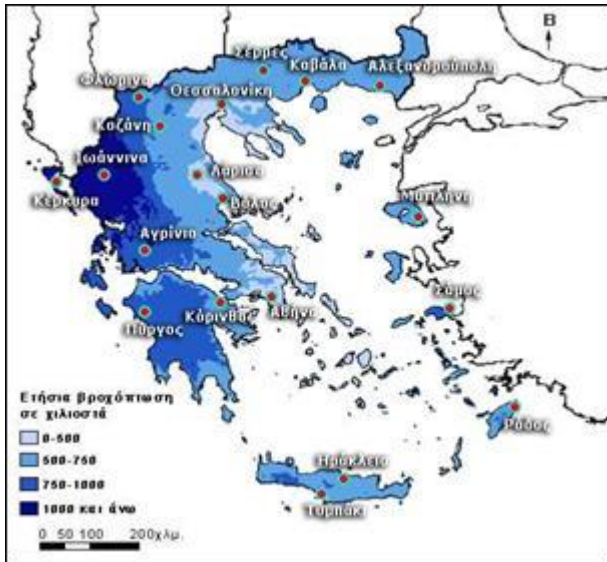
δ) ποιες ελληνικές πόλεις έχουν μέσες (ετήσιες, Ιανουαρίου, Ιουλίου) θερμοκρασίες μεγαλύτερες των 18 βαθμών Κελσίου;

.....
.....

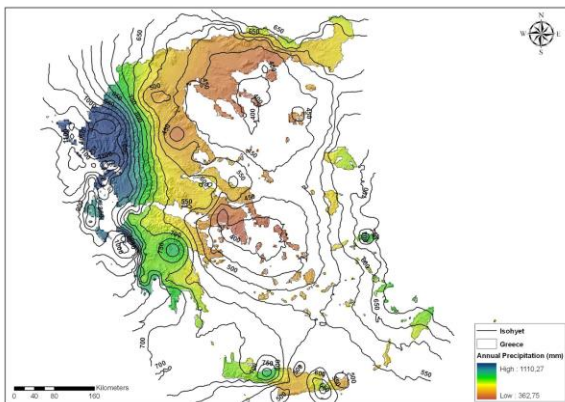
Συνοψίστε τα συμπεράσματά σας

.....
.....

Αφού οι μαθητές δουλέψουν για λίγο πάνω στο χάρτη τους και συζητήσουν με την ομάδα τους στη συνέχεια οι ομάδες βροχόπτωσης και θερμοκρασίας αλληλοδιαχέονται και παρουσιάζει η κάθε μια τα αποτελέσματα της στην άλλη με απώτερο στόχο την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με τα κλιματικά χαρακτηριστικά της Ελλάδος.



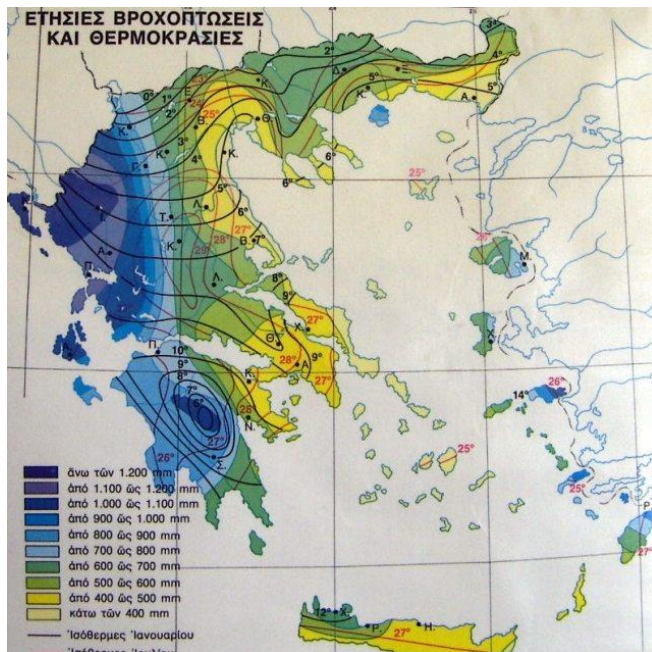
Σχήμα 1. Χάρτης γεωγραφικής κατανομής της ετήσιας βροχόπτωσης σε χιλιοστά (Περίοδος: 1950-2010).



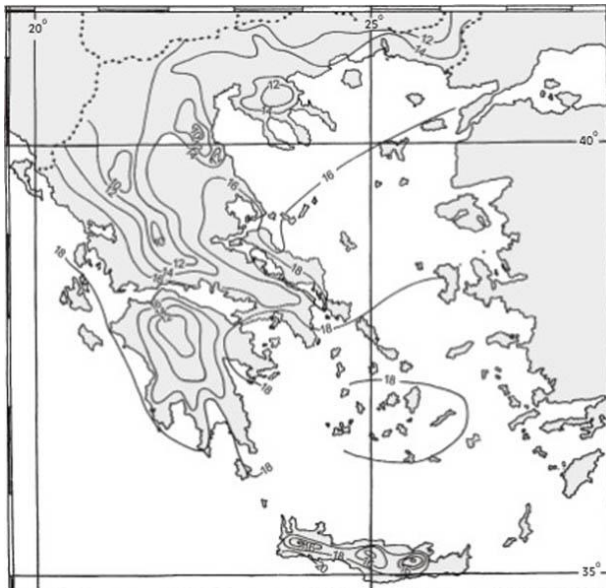
Σχήμα 2. Χάρτης γεωγραφικής κατανομής της ετήσιας βροχόπτωσης σε χιλιοστά για το 2015. (Βροχομετρικός χάρτης-χάρτης ισοϋετών καμπυλών-της Ελλάδας).



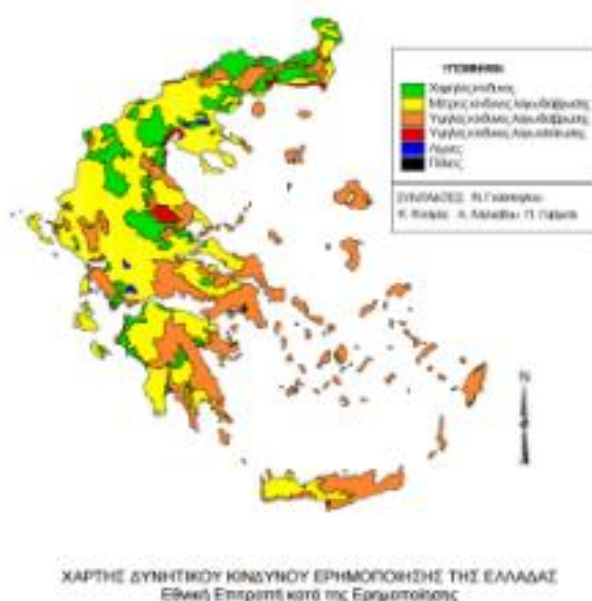
Σχήμα 3. Χάρτης υδατικών διαμερισμάτων για την ελληνική περιοχή.



Σχήμα 4. Χάρτης γεωγραφικής κατανομής της μέσης ετήσιας βροχόπτωσης σε χιλιοστά και της μέσης θερμοκρασίας για τους μήνες Ιανουάριο και Ιούλιο (ισόθερμες καμπύλες). Περίοδος 1950-1997.



Σχήμα 5. Χάρτης γεωγραφικής κατανομής της μέσης ετήσιας θερμοκρασίας σε βαθμούς Κελσίου στην ελληνική περιοχή.



Σχήμα 6. Χάρτης γεωγραφικής κατανομής του κινδύνου ερημοποίησης.

2η Διδακτική ώρα

Έχοντας οι μαθητές δουλέψει πάνω στους χάρτες τους και έχοντας θυμηθεί τα βασικά από το μάθημα της Γεωγραφίας χωρίζονται εκ νέου σε ομάδες με τυχαίο τρόπο (διαχωρισμός με καρτέλες χρωμάτων) επανέρχονται στο αρχικό πρόβλημα.

Δυνατά σενάρια:

- 1) να απαντήσουν αποκλειστικά στηριζόμενοι στις δικές τους εμπειρίες άρα δεν περνάνε ούτε σε μαθηματοποίηση ούτε σε μοντελοποίηση.
- 2) να κάνουν χρήση μόνο μιας από τις 2 μεταβλητές (βροχόπτωση ή θερμοκρασία) και να επιλέξουν και περιοχές που δεν πληρούν το σύνολο των χαρακτηριστικών που είναι ευνοϊκές για την καλλιέργεια π.χ. για την περίπτωση της λεβάντας αν ληφθεί υπόψη μόνο η βροχόπτωση η περιοχή του Αγρινίου είναι εντός των ορίων ωστόσο δεν καλύπτει τα επιθυμητά όρια της θερμοκρασίας αφού κατά μέσο όρο είναι πάνω από 28 °C. Σε αυτή την περίπτωση επιλύουν μερικώς το πρόβλημα.
- 3) να κάνουν χρήση και των δυο μεταβλητών και προτείνουν συγκεκριμένες περιοχές επιχειρηματολογώντας βασιζόμενοι στα δεδομένα τους. Έχουν περάσει σε διαχείριση και ταξινόμηση δεδομένων (data modeling problems)
- 4) η αναφορά στο δείκτη ερημικότητας De Martonne καθώς και το γεγονός ότι δίδεται ο χάρτης ερημοποίησης ενδεχομένως να έχει κινητοποιήσει κάποιους μαθητές να ασχοληθούν με αυτό. Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητο να υπάρχει

πρόσβαση στο διαδίκτυο. Οι μαθητές θα αναζητήσουν πληροφορίες για το δείκτη αυτό. Εκεί θα βρουν τον τύπο για το βαθμό ερημικότητας μιας περιοχής:

$$I = \frac{P}{T + 10}$$

όπου P είναι το ετήσιο ύψος βροχής σε (mm) και T η μέση ετήσια θερμοκρασία (°C). Παρά την ονομασία του ως δείκτη «ξηρότητας» μικρές τιμές του δείκτη δηλώνουν ξηρό κλίμα και μεγάλες τιμές υγρό κλίμα. Με αφορμή αυτόν τον τύπο μπορεί στο τέλος τους μαθήματος να γίνει μια συζήτηση για το πως προκύπτουν οι εμπειρικοί αυτοί τύποι στις φυσικές επιστήμες και πόσο απαραίτητοι είναι για την προσομοίωση φυσικών φαινομένων.

3η Διδακτική ώρα

Παρουσίαση των αποτελεσμάτων ανά ομάδα, εύρεση σημείων στα οποία συμφωνούν, ψήφιση της βέλτιστης λύσης από τους ίδιους. Ακόμα και αν καμία από τις ομάδες δεν κατορθώσει να φτάσει στο επιθυμητό αποτέλεσμα (4η περίπτωση) τότε δίδεται ως βοηθητικό στοιχείο στο σύνολο της τάξης ο χάρτης ερημοποίησης (σχήμα 6), ο τύπος του δείκτη και τα όρια του τύπου για τις δυο καλλιέργειες. Από τη συζήτηση και με κατάλληλες ερωτήσεις αναμένεται να προκύψει η ανάγκη υπολογισμού του δείκτη αυτού για τον Ελλαδικό χώρο και η ανάγκη παρουσίασης των τιμών αυτών με τη βοήθεια χάρτη.

Οπότε στη συνέχεια όλες οι ομάδες συλλέγουν πληροφορίες για τις δυο μετεωρολογικές παραμέτρους από την εθνική μετεωρολογική υπηρεσία (EMY). Εκεί αφού χαθούν λίγο στο σύνολο των πληροφοριών, καταφεύγουν στη συλλογή δεδομένων για διάφορα μέρη της Ελλάδος. Δεν θα κατευθυνθούν για το πλήθος των πόλεων που θα επιλέξουν, αλλά θα διαπιστώσουν ότι όσο λιγότερες τόσο πιο δύσκολη η χαρτογράφηση. Έτσι θα καταλήξουν να πάρουν δεδομένα από όσο το δυνατό περισσότερες πόλεις-περιοχές. Για να υπολογίσουν την μέση ετήσια θερμοκρασία σε κάθε πόλη θα χρειαστούν και στοιχειώδεις γνώσεις Στατιστικής. Δεν αναμένεται να έχουν προβλήματα σε αυτό τον τομέα γιατί ακόμα και στην περίπτωση που δεν έχουν διδαχθεί Στατιστική στο Γυμνάσιο, οι μαθητές είναι ιδιαίτερα ικανοί στην εξαγωγή μέσων όρων.

4η Διδακτική ώρα

Έχοντας υπολογίσει το δείκτη ερημικότητας για διάφορες πόλεις, τοποθετούν τις τιμές αυτές στις αντίστοιχες περιοχές στο σχήμα 7 (κενός χάρτης της Ελλάδος) και προσπαθούν να ενώσουν περιοχές με ίδιες πάνω κάτω τιμές του δείκτη (ισότιμες καμπύλες δείκτη ερημικότητας). Το πέρασμα αυτό είναι ιδιαίτερα δύσκολο ωστόσο έχουν έρθει σε επαφή ήδη παραπάνω με τις ισόθερμες και ισοϋέτιες καμπύλες οπότε αναμένεται να κατευθυνθούν από μόνοι τους.



Σχήμα 7. Κενός Χάρτης της Ελλάδος με τις αντίστοιχες πόλεις για τις οποίες δίδονται στοιχεία στην ΕΜΥ.

5η Διδακτική ώρα

Στην ώρα αυτή οι μαθητές εργαζόμενοι με τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας τους μελετούν την αναπαράσταση του δείκτη που συνδέει τις μεταβλητές βροχή και θερμοκρασία, με τη βοήθεια των καμπυλών που έχουν χαράξει, συζητούν, εικάζουν και συναποφασίζουν με βάση όλα τα στοιχεία για την καλύτερη περιοχή. (ερμηνεία αποτελεσμάτων). Στη συνέχεια, κάθε ομάδα παρουσιάζει το δικό της χάρτη μοντέλο

με τις καμπύλες του δείκτη και η ολομέλεια της τάξης συζητεί και διερευνά πιο μοντέλο είναι το πιο κατάλληλο, διεξάγεται συζήτηση για το πως θα βελτιωθεί, συναποφασίζουν για τη σύσταση που θα πρέπει να κάνουν στην ομάδα των γεωπόνων για την επιλογή της κατάλληλης τοποθεσίας για την κάθε καλλιέργεια (εγκυρότητα των αποτελεσμάτων). Τέλος, καλούνται να σκεφτούν ποιοι άλλοι παράγοντες θα μπορούσαν να ληφθούν υπόψη από τους γεωπόνους (πχ είδη εδάφους κ.τλ.) ώστε να σκεφτούν και να αναστοχαστούν για την πολυπαραγοντικότητα που παρουσιάζει η επιλογή περιοχής καλλιέργειας.

Αξιολόγηση

Στο πλαίσιο της μοντελοποίησης η σημασία της αξιολόγησης είναι εξίσου σημαντική όπως σε κάθε διδακτική κατάσταση. Τόσο η διαμορφωτική όσο και η συγκριτική μπορούν και πρέπει να χρησιμοποιηθούν με στόχο τη βελτίωση της μάθησης των μαθητών και τη βελτίωση των μεθόδων διδασκαλίας. Ο ανατροφοδοτικός ρόλος της αξιολόγησης μπορεί να βοηθήσει μαθητές και τον εκπαιδευτικό στα διάφορα στάδια της μοντελοποίησης. Στη συγκεκριμένη εργασία λόγω περιορισμού στην έκταση της εργασίας επιλέχθηκε το συγκεκριμένο πρόβλημα ώστε να δοθεί τόσο η διαμορφωτική όσο και η συγκριτική αξιολόγηση όπως παρουσιάστηκε στο μάθημα.

Διαμορφωτική αξιολόγηση:

Η διαμορφωτική αξιολόγηση συντελείται κατά τη διάρκεια όλων των σταδίων μοντελοποίησης και εστιάζει περισσότερο στην μάθηση των μαθητών αλλά και στη μάθηση των εκπαιδευτικών αφού μέσω αυτής καταγράφονται οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στα διάφορα στάδια του κύκλου μοντελοποίησης.

Ειδικότερα στο τέλος της δεύτερης ώρας οι μαθητές συμπληρώνουν κατάλληλα φύλλα αυτοαξιολόγησης που περιέχουν ερωτήσεις που αφορούν τα στάδια και τους κύκλους μοντελοποίησης όπως: “είναι το πρόβλημα αυθεντικό”, “σχετίζεται με τη πραγματικότητα”, “ποιες πληροφορίες του προβλήματος νομίζεις ότι είναι σημαντικές”, “μπορείς να εισάγεις μεταβλητές για να τις εκφράσεις και πόσες” (αναμενόμενες απαντήσεις όπως περιγράφονται στα παραπάνω σενάρια).

Παράλληλα ο εκπαιδευτικός στην αρχή της τρίτης ώρας αφού κάθε ομάδα παρουσιάζει στην τάξη την δουλειά της, μέσω ερωτήσεων, όπως “σχολιάστε τις διαφορετικές προσεγγίσεις των άλλων ομάδων”, “συμφωνείτε με αυτές” προωθεί

τον αναστοχασμό των μαθητών. Ενώ ζητώντας από τους μαθητές να σκεφτούν σχετικά με τις προτάσεις των άλλων ομάδων, να συνεργαστούν και να συναποφασίζουν με τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας τους και τέλος όλη η τάξη να ψηφίσει για την καλύτερη προσέγγιση (στρατηγική σκέψη-συνεργασία-επικοινωνία) καλλιεργεί την ιδέα της ετεροαξιολόγησης.

Οι παραπάνω στρατηγικές παρέχουν ανατροφοδότηση στις ομάδες αλλά και ατομικά σε κάθε μαθητή. Αυτή η ανατροφοδότηση μπορεί να ενισχυθεί και να γίνει προφορικά μετά την παρουσίαση της κάθε ομάδας αλλά μπορεί να συνεχιστεί μέσα από κατάλληλα φύλλα αξιολόγησης που θα δοθούν στην κάθε ομάδα. Σε αυτά θα αναγράφονται σχόλια που θα αφορούν τη πορεία της ομάδας και θα δίνουν νύξεις για να συνεχίσουν την διερεύνηση πχ εάν βρίσκονται στο σωστό δρόμο, σκεφτείτε να συνδυάσετε δύο μεταβλητές κ.τ.λ.

Συγκριτική αξιολόγηση

Για τον έλεγχο της μάθησης προτείνεται η συγκριτική αξιολόγηση της ομάδας. Πληροφορίες για την ατομική αξιολόγηση των μαθητών μπορεί να πάρει ο εκπαιδευτικός από τα φύλλα αυτοαξιολόγησης των μαθητών τόσο από αυτά που συμπληρώθηκαν κατά την πορεία των πέντε ωρών αλλά και από ένα τελικό φύλλο αυτοαξιολόγησης που θα συμπληρώσουν οι μαθητές στο τέλος της πέμπτης ώρας. Σημαντικό ο εκπαιδευτικός να έχει δημιουργήσει φύλλα αξιολόγησης με ερωτήσεις ανοικτού - κλειστού τύπου για κάθε ομάδα που θα αφορούν όλα τα στάδια του κύκλου. Το σώμα των ερωτήσεων μπορεί να είναι κοινό και στα φύλλα των μαθητών και στο του καθηγητή. Το κοινό σώμα ερωτήσεων προτείνεται να περιλαμβάνει:

-ερωτήσεις (στην ομάδα/άτομο) που σχετίζονται με την κατανόηση της κατάστασης: προσδιορίζει και διακρίνει εμπλεκόμενους παράγοντες (μεταβλητές) στο αρχικό πρόβλημα, μπορεί να διαβάσει χάρτες και να συσχετίζει τις αναπαραστάσεις των μεταβλητών των χαρτών με τους παράγοντες του προβλήματος

-ερωτήσεις που αφορούν μαθηματικές διεργασίες και οδηγούν στην μαθηματικοποίηση του προβλήματος: διαχειρίζεται και ταξινομεί δεδομένα (καθόλου, για μία μεταβλητή, για δύο, για τον δείκτη) αλλά και ερωτήσεις για το αν καταφέρνει να εξάγει συμπεράσματα από αυτά τα δεδομένα (μαθηματικές ικανότητες - δεξιότητες ιδιαίτερα χρήσιμες τόσο στην στατιστική αλλά και γενικότερα στην επίλυση προβλήματος).

-ερωτήσεις που αφορούν τη παραγωγή του μοντέλου και την χρήση του: αν αναζητεί και καταφέρνει να συλλέξει πληροφορίες για τον δείκτη, να υπολογίσει τον δείκτη για διάφορες περιοχές (εμπλέκονται μέσος όρος -δεξιότητες στατιστικής), μπορεί να περάσει τα αποτελέσματα για τον δείκτη σε έναν χάρτη, να κρίνει (χωρική ικανότητα) ότι χρειάζεται αρκετά δεδομένα για να προσεγγίσει καλύτερη αναπαράσταση, μπορεί να ενώσει τις περιοχές με τον ίδιο δείκτη, μπορεί να ερμηνεύσει τις καμπύλες που κατασκεύασε και να εξάγει συμπεράσματα.

-ερωτήσεις που αφορούν τα αποτελέσματα, μπορεί να τεκμηριώσει τα αποτελέσματα, μπορεί να σκεφτεί άλλους παράγοντες που θα επηρέαζαν το πρόβλημα και θα αξιολογήσει (είδος πετρωμάτων, έρευνα αγοράς για δυνατότητα αγοράς έκτασης στις κατάλληλες περιοχές,οικονομικό κόστος κ.τ.λ), μπορεί να επεκτείνει το πρόβλημα (επιστροφή στο αρχικό πρόβλημα -κύκλος μοντελοποίησης). Τέλος, είναι σημαντικό να σημειώνεται από τον εκπαιδευτικό για κάθε ομάδα ο βαθμός κάλυψης, η ακτίνα δράσης και το τεχνικό επίπεδο που εμφάνισε κάθε ομάδα. Γι αυτό τα φύλλα αξιολόγησης είναι θεμιτό να είναι έτοιμα από την αρχή της παρέμβασης ώστε να συμπληρώνονται από τον εκπαιδευτικό καθ' όλη την πορεία διδασκαλίας. Με αυτό τον τρόπο μπορεί η συγκριτική αξιολόγηση να χρησιμοποιηθεί διαμορφωτικά ώστε ο εκπαιδευτικός να παρατηρεί τις σημειώσεις του στα φύλλα και να κάνει παρεμβάσεις και κατάλληλες τροποποιήσεις που θα βοηθήσουν τους μαθητές να κατακτήσουν τους στόχους μάθησης

Στο φύλλο αυτοαξιολόγησης που συμπληρώνουν οι μαθητές μπορεί να προσθέσει ο εκπαιδευτικός ερωτήσεις γενικές όπως: ποια φάση της μοντελοποίησης τους δυσκολεύει περισσότερο (θεωρείται ότι έχουν συζητηθεί προγενέστερα τα σχετικά με το τι είναι μοντελοποίηση και τους κύκλους της), να εκφράσουν τα συναισθήματα για την διαδικασία μοντελοποίησης, νομίζετε ότι τα μαθηματικά είναι άσχετα με τη πραγματικότητα, τι θέλετε να βελτιώσετε στην διαδικασία μάθησης, τι μάθατε μέσα από την ενασχόληση σας με το πρόβλημα.

Τρίτο πρόβλημα μοντελοποίησης:

Εκτίμηση του αριθμού των αποσκευών λαμβάνοντας υπόψη τη θερμοκρασία

Η Β' Λυκείου του 2ου ΓΕΛ Κιλκίς θα πραγματοποιήσει πενθήμερη εκπαιδευτική εκδρομή τον μήνα Απρίλιο στην πόλη των Ιωαννίνων. Για την

οργάνωση της εκδρομής ο διευθυντής και το 15μελές του σχολείου αποφάσισαν η μετάβαση και η επιστροφή να γίνει αεροπορικώς με ‘Low Cost’ αεροπορική εταιρεία που επιτρέπει τη δωρεάν χρήση χειραποσκευών με μέγιστο βάρος 10 kgr. Η επιπλέον χρήση αποσκευών κοστίζει 20 ευρώ ανά άτομο εκτός αν δεν δηλωθεί με το κλείσιμο των εισιτηρίων, οπότε κοστίζει 50 ευρώ ανά άτομο. Επειδή το κλείσιμο των εισιτηρίων γίνεται το μήνα Δεκέμβριο δεν υπάρχουν προβλέψεις για τη θερμοκρασία το μήνα Απρίλιο, ώστε να γνωρίζουν αν θα πάρουν «βαριά» ρούχα γεγονός που θα επηρεάσει το βάρος των αποσκευών τους. Για θερμοκρασίες κάτω των 7°C και με ταχύτητα ανέμου άνω των 6,5 Km/h η αίσθηση του ψύχους είναι μεγαλύτερη από ότι στην πραγματικότητα και απαιτείται ενισχυμένη χρήση ρούχων από όλους, οπότε και δεύτερη αποσκευή. Αν οι θερμοκρασίες κυμαίνονται από 8 - 12°C μόνο τα κορίτσια του σχολείου θα χρειαστούν και δεύτερη αποσκευή (για οικονομικούς λόγους ανά δύο). Συνολικά οι μαθητές που θα συμμετάσχουν στην εκδρομή είναι 105 εκ των οποίων τα 64 είναι αγόρια. Ο πίνακας μέσων μηνιαίων θερμοκρασιών (κλιματολογία: περίοδος δεδομένων 1955-1997) για τα Ιωάννινα είναι αναρτημένος στην ιστοσελίδα της ΕΜΥ. Τελευταία στιγμή και για οικονομικούς λόγους άλλαξε ο προορισμός για το νησί της Μυτιλήνης όμως η αναζήτηση των μέσων μηνιαίων θερμοκρασιών της λόγω αναβάθμισης της ιστοσελίδας της ΕΜΥ είχε λιγότερα δεδομένων. Πόσες αποσκευές θα πάρουν οι μαθητές μαζί τους;

Μέθοδος Διδασκαλίας

Το παραπάνω πρόβλημα ανήκει στον πραγματικό κόσμο, δημιουργεί κίνητρα, έχει σχέση με τις άμεσες εμπειρίες των μαθητών και έχει τη δυνατότητα να προκαλέσει την εμφάνιση σημαντικών μαθηματικών ιδεών. Συμπεριλαμβάνει και άλλους επιστημονικούς κλάδους όπως η κλιματολογία. Είναι σύμφωνη με το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών *«ορίζονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, γίνεται η σύνδεση αυτών με φαινόμενα που εμφανίζουν περιοδικότητα»* (Π.Σ. Μαθηματικών Β' Λυκείου ΦΕΚ 1173,15-5-13) με στόχο να χρησιμοποιούν την έννοια της περιοδικής συνάρτησης και να κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων (αν και η παράγραφος 3.6 είναι προσωρινά εκτός διδακτέας ύλης) Μπορεί να χαρακτηριστεί ως ανοικτό πρόβλημα, αφού δεν δίνονται όλες οι απαραίτητες πληροφορίες για τη λύση του και οι μαθητές μπορεί να έχουν διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης, με βάση τις υποθέσεις που μπορεί να κάνουν

ως προς τα δεδομένα που λείπουν. Το πρόβλημα ανήκει στην περιοχή της Άλγεβρας και οι μαθητές θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν γνώσεις τριγωνομετρίας για την εκτίμηση της περιοδικότητας της μέσης μηνιαίας θερμοκρασίας καθώς και της προσομοίωσης της μεταβλητότητας της θερμοκρασίας μέσω κατάλληλης τριγωνομετρικής συνάρτησης. Η γνώση του λογισμικού Geogebra θα βοηθήσει στην επίλυση του προβλήματος. Άλλωστε η μοντελοποίηση και η ανάπτυξη εννοιολογικών συστημάτων μπορούν να ενισχυθούν σε μεγάλο βαθμό από τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών (Lesh, R., & Doerr, H.M. 2003). Η έννοια της μέσης μηνιαίας θερμοκρασίας αναφέρεται σε γνώσεις μέτρων θέσης από τη Στατιστική της Β' Γυμνασίου.

Οι μαθητές που θα διαπραγματευτούν το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι της Β' τάξης γενικού λυκείου στα πλαίσια του μαθήματος της Άλγεβρας. Οι έννοιες που εξετάζονται δεν είναι άγνωστες στους μαθητές. Το πρόβλημα προτείνεται να εξεταστεί μετά τη διδασκαλία των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και αφού έχουν ήδη διαπραγματευτεί οι ασκήσεις 1,2 και 3 της Β' Ομάδας του σχολικού βιβλίου. Η μέση μηνιαία θερμοκρασία είναι ήδη γνωστή από τη Β' Γυμνασίου από της Στατιστική. Πιθανόν όμως να μην την έχουν διδαχθεί όλοι οι μαθητές, αφού προέρχονται από διαφορετικά γυμνάσια οπότε μια υπενθύμιση της έννοιας της μέσης τιμής κρίνεται σκόπιμη (οι μαθητές είναι αρκετά εξοικειωμένοι από τη μέση τιμή της βαθμολογίας τους). Τα μαθήματα είναι απαραίτητο να γίνουν σε αίθουσα που περιέχει ηλεκτρονικούς υπολογιστές με εγκατεστημένο το λογισμικό Geogebra.

1η Διδακτική ώρα

Δίνουμε το πρόβλημα στους μαθητές, μελετούν σιωπηρά και αφήνεται αρκετός χρόνος για να σκεφτούν. Οι μαθητές συζητούν και διακρίνουν τις σχέσεις των μαθηματικών με ιδιαίτερες πτυχές του πραγματικού κόσμου, με αφορμή το πλαίσιο του προβλήματος. Κατόπιν δίνεται σε κάθε μαθητή μια φωτοτυπία με τον παρακάτω πίνακα που περιέχει τα δεδομένα των μέσων μηνιαίων θερμοκρασιών στην πόλη των Ιωαννίνων:

1^ο Εξάμηνο	ΙΑΝ	ΦΕΒ	ΜΑΡ	ΑΠΡ	ΜΑΙ	ΙΟΥΝ
Ελάχιστη Μηνιαία Θερμοκρασία	0.2	1.0	3.2	5.9	9.6	12.8
Μέση Μηνιαία Θερμοκρασία	4.7	6.1	8.8	12.4	17.4	21.9
Μέγιστη Μηνιαία Θερμοκρασία	10.1	11.5	14.4	17.7	23.0	27.6
2^ο Εξάμηνο	ΙΟΥΛ	ΑΥΓ	ΣΕΠ	ΟΚΤ	ΝΟΕ	ΔΕΚ
Ελάχιστη Μηνιαία Θερμοκρασία	14.9	15.0	12.2	8.5	4.7	1.8
Μέση Μηνιαία Θερμοκρασία	24.8	24.3	20.1	14.9	9.7	5.9
Μέγιστη Μηνιαία Θερμοκρασία	30.8	30.9	26.7	21.2	15.5	11.1

Οι μαθητές χωρίζονται με βάση την επιλογή τους σε 6 ομάδες όπου ανά δύο οι ομάδες επιλέγουν την ελάχιστη, τη μέγιστη ή τη μέση μηνιαία θερμοκρασία, τους δίνεται τόσο τετραγωνισμένο (μιλμετρέ) χαρτί όσο και δυνατότητα πρόσβασης σε υπολογιστή. Ζητείται από κάθε ομάδα να δώσουν εναλλακτικούς τρόπους παρουσίασης των δεδομένων αυτών. Οι μαθητές αφού έχουν ήδη έρθει σε επαφή με τις γραφικές παραστάσεις αναμένεται έστω και μετά από λίγο χρόνο να προβούν στη χρήση συστήματος συντεταγμένων για να παρουσιάσουν τα δεδομένα του πίνακα. Το δύσκολο θα είναι να περάσουν από τα μεμονωμένα σημεία σε μια συνεχή καμπύλη. Εκεί ενδεχομένως αν δούμε πως υπάρχει στασιμότητα να τους βοηθήσουμε λέγοντας τους να μπουν στη σελίδα της μετεωρολογικής υπηρεσίας. Εκεί σε συνδυασμό με τον πίνακα δίνεται και η καμπύλη της ετήσιας κατανομής των θερμοκρασιών (πάντα μέσες τιμές για την περίοδο κανονικότητας, όπως ονομάζεται στην κλιματολογία, 1955-1997).

Στη συνέχεια αναμένεται οι μαθητές προκειμένου να μπορέσουν να χαράξουν και την αντίστοιχη καμπύλη για την Μυτιλήνη να αναλογιστούν πως θα καλύψουν τον πρόβλημα των ελλειπουσών τιμών (missing values). Εκεί λοιπόν αν και η καμπύλη προσομοίωσης στο μιλμετρέ χαρτί θα είναι αρκετά εύκολο να χαραχθεί αναμένεται να προβληματιστούν με τον τύπο της καμπύλης. Λογικό είναι να πειραματιστούν με πολλές και διαφορετικές συναρτήσεις για παράδειγμα πολυωνυμικές. Το ίδιο εξάλλου κάνουν ακόμα και οι ερευνητές και αυτός είναι και ο στόχος της δραστηριότητας ο πειραματισμός και η εκτίμηση μέσω προσομοίωσης. Θα χρειαστεί να ανακαλέσουν γνώσεις από φυσική ή ενδεχομένως να προκληθεί μια συζήτηση σε σχέση με τον καιρό και τις μεταβλητές που τον περιγράφουν. Τι φαινόμενο είναι; Ίσως να αναφερθεί ότι η μέση θερμοκρασία είναι περιοδικό φαινόμενο ώστε να εισάγουν συνάρτηση ημιτονοειδούς μορφής $f(x) = \alpha \sin(\beta x + \gamma) + \delta$ και μεταβάλλοντας τις παραμέτρους θα βρουν τη βέλτιστη προσέγγιση, ενώ το

λογισμικό τους επιτρέπει σε κάθε προσέγγιση να βλέπουν τις μεταβολές στον τύπο της συνάρτησης και την αλληλεπίδραση γραφικής με συμβολική αναπαράσταση.

Οι μαθητές δουλεύουν στο δυναμικό περιβάλλον του προγράμματος, συζητούν μεταξύ τους και ανταλλάσσουν τα συμπεράσματά τους με τις άλλες ομάδες και καταλήγουν στη καλύτερη προσέγγιση για την συνάρτηση με την οποία θα εργαστούν την επόμενη διδακτική ώρα (την αποθηκεύουν).

2η Διδακτική ώρα

Κατά τη 2η διδακτική ώρα οι μαθητές θα εξασκηθούν στις τριγωνομετρικές γραφικές παραστάσεις. Η ώρα αυτή δεν εμπίπτει αμιγώς στο χαρακτήρα της μοντελοποίησης αλλά κρίνεται απαραίτητη να γίνει ώστε μέσω του προβλήματος να επιτευχθούν και οι στόχοι του αναλυτικού προγράμματος σε σχέση με τη χάραξη γραφικών παραστάσεων και την εμβάθυνση στις μετατοπίσεις τους και στις αλλαγές στην περίοδο τους. Η κατανόηση πραγματοποιείται έχοντας οι μαθητές κατά νου το αρχικό πρόβλημα άρα βλέποντας τη σύνδεση με την πραγματικότητα (ρεαλιστικά μαθηματικά).

Οι μαθητές των ομάδων ανοίγουν το αποθηκευμένο αρχείο και απαντούν σε ερωτήσεις με στόχο να κατανοήσουν το ρόλο των παραμέτρων αφού εισάγουν με τη βοήθεια δρομέων την εξίσωση $f(x) = \alpha \sin(\beta x + \gamma) + \delta$

- 1) Ποια είναι η περίοδος της συνάρτησης;
- 2) Υπολογίστε την κατακόρυφη μετατόπιση της συνάρτησης
- 3) Υπολογίστε την διαφορά φάσης για τη συνάρτηση
- 4) Υπολογίστε το εύρος της συνάρτησης
- 5) Με βάση τα παραπάνω κατασκευάστε εξίσωση της μορφής $f(x) = \alpha \sin(\beta x + \gamma) + \delta$ και δοκιμάστε τις τιμές της για $x=1, 2, \dots, 12$ με ακρίβεια τριών δεκαδικών. Τι παρατηρείτε;

3η Διδακτική ώρα

Οι μαθητές χωρίζονται εκ νέου με τυχαίο τρόπο κάνοντας χρήση καρτελών χρωμάτων σε 6 ομάδες και αυτή τη φορά δίνεται ο νέος πίνακας που αφορά στη Μυτιλήνη και έχοντας χάσει τις θερμοκρασίες για τους μήνες Μάρτιο και Απρίλιο:

1 ^ο Εξάμηνο	ΙΑΝ	ΦΕΒ	ΜΑΡ	ΑΠΡ	ΜΑΙ	ΙΟΥΝ
Ελάχιστη Μηνιαία Θερμοκρασία	6.7	7.0			15.2	19.3
Μέση Μηνιαία Θερμοκρασία	9.5	9.9			20.2	24.7
Μέγιστη Μηνιαία Θερμοκρασία	12.1	12.6			23.9	28.5
2 ^ο Εξάμηνο	ΙΟΥΛ	ΑΥΓ	ΣΕΠ	ΟΚΤ	ΝΟΕ	ΔΕΚ
Ελάχιστη Μηνιαία Θερμοκρασία	21.6	21.4	18.5	14.8	11.4	8.7
Μέση Μηνιαία Θερμοκρασία	26.6	26.1	22.9	18.5	14.3	11.3
Μέγιστη Μηνιαία Θερμοκρασία	30.4	30.2	26.7	21.7	17.2	13.8

Οι μαθητές διαβάζουν το αρχικό πρόβλημα και προσπαθούν να δώσουν απάντηση χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα των προηγούμενων διδακτικών ωρών προσαρμόζοντάς τα στα νέα δεδομένα.

Αναμένονται οι εξής περιπτώσεις:

Οι απαντήσεις να είναι διαισθητικές - εμπειρικές οπότε δεν έχει επιτευχθεί μαθηματικοποίηση.

Να περάσουν στο λογισμικό τα δεδομένα και με κατάλληλη μετατόπιση των δρομέων να πετύχουν τη συνάρτηση χωρίς να περάσουν από τη μαθηματική ερμηνεία των δρομέων και να δώσουν απάντηση στο ερώτημα προσεγγιστικά με τη βοήθεια του σχήματος. Θα έχουν επιτύχει εμπειρική λύση με δοκιμή και πείραμα.

Να περάσουν στο λογισμικό τα δεδομένα να προσεγγίσουν, να κατασκευάσουν τη νέα εξίσωση και χρησιμοποιώντας τον τύπο που εμφανίζεται με τη βοήθεια του λογισμικού, με αντικατάσταση σε αυτόν να βρουν τη θερμοκρασία του Απριλίου δίνοντας τιμή 4 για το x.

4η Διδακτική ώρα

Γίνεται η παρουσίαση των λύσεων από τις ομάδες, ακολουθεί αναστοχασμός και ψήφιση της βέλτιστης λύσης. Ενδεχομένως κάποιοι μαθητές να αναζητήσουν και στοιχεία για τον άνεμο αλλά οι μέσες θερμοκρασίες δε θα επιτρέψουν τη χρήση δείκτη ψυχρότητας. Η συζήτηση θα επιτρέψει τη χρήση της κατάλληλης συνάρτησης για την προσέγγιση των μέσων θερμοκρασιών. Μπορεί να αναδυθεί και το πρόβλημα της καταλληλότητας του μοντέλου από την άποψη ότι οι μέσες θερμοκρασίες και η πραγματικότητα μπορεί να διαφέρουν λόγω της δυναμικότητας του καιρού και των συστημάτων καιρού μια δεδομένη χρονική στιγμή. Εδώ μπορεί αν προκύψει να γίνει μια συζήτηση του σφάλματος που θα προκύψει λόγω ότι ασχολήθηκαν με μεσοποιημένες καταστάσεις (κλιματολογία) και όχι με στοιχεία παρόντος καιρού.

Ενδεχομένως να αποφασίσουν να δουλέψουν για την περιοχή τους (Κιλκίς) αναπροσαρμόζοντας το πρόβλημα παίρνοντας τόσο κλιματικά στοιχεία όσο και στοιχεία από προγνώσεις των τελευταίων ημερών. Τέλος, οι ομάδες συζητούν για τη μεταβλητή κόστος αποσκευών και τα ρούχα που μπορεί να φέρουν μαζί τους οι μαθητές (αγόρια ή κορίτσια).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Commons, W. (2009). *Βιβλιάριο Μοντελοποίησης*.

Λεμονίδης, Χ. “ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ” σημειώσεις μαθήματος στο πλαίσιο του Διατμηματικού - Διαπανεπιστημιακού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ» Μάιος 2016

Lesh, R., & Doerr, H.M. (2003). *Beyond Constructivism: A Models and Modeling Perspective on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.