



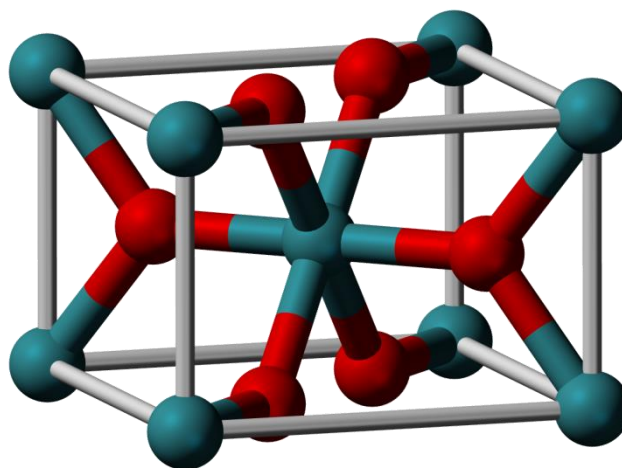
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΦΛΩΡΙΝΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ - ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΜΣ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2015-2016
ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ

Μάθημα: Ειδικά Θέματα Μαθηματικών
Διδάσκοντες: Μ. Καλδρυμίδου, **Χ. Λεμονίδης**, Μ. Τζεκάκη

Μοντελοποίηση



Επιμέλεια εργασίας:

Γαραντζιώτη Α. (559), Διαμαντή Ν. (562),
Μέμτσας Δ. (572), Στάμου Α. (589)
ΕΞΑΜ: 2^ο

Θεσσαλονίκη, Ιούλιος 2016

Περί εργασίας:

Η παρούσα εργασία είναι εμπειρική και έχει ως στόχο να δείξει την ενημέρωση και εξάσκηση των γραφόντων στο θέμα της Μοντελοποίησης ως ειδικό θέμα της Διδακτικής Μαθηματικών στο πλαίσιο του αντίστοιχου μεταπτυχιακού προγράμματος. Πιο συγκεκριμένα ο στόχος της εργασίας είναι να παρουσιάσει το βηματισμό στις εξής πτυχές του θέματος:

1. Στο χειρισμό και την τροποποίηση/κατασκευή προβλημάτων μοντελοποίησης.
2. Στην πρόβλεψη κατάλληλων μεθόδων για τη διδασκαλία προβλημάτων μοντελοποίησης.
3. Στην αξιολόγηση συμπεριφορών μαθητών σε θέματα μοντελοποίησης.

Δομή εργασίας:

Στην εργασία παρουσιάζονται τρία (3) προβλήματα, δύο (2) του δημοτικού και ένα (1) του γυμνασίου, τα οποία αναλύονται σύμφωνα με τις οδηγίες και ως προς τους επιμέρους άξονες της μοντελοποίησης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

1) Επιλογή/Τροποποίηση προβλήματος:


Το πρόβλημα 1 είναι τροποποίηση του προβλήματος του σχολικού βιβλίου (Στ' τάξη, βιβλίο μαθητή, σελ. 25), που παρουσιάζεται στη συνέχεια στο πλαίσιο - δραστηριότητα.

Δραστηριότητα

Το υπερωκεάνιο "Τιτανικός" βυθίστηκε το 1912. Οι επιβάτες του ήταν 1316 άτομα και το πλήρωμά του 885. Είχε 20 σωσίβιες λέμβους, η καθεμία από τις οποίες χωρούσε 58 άτομα. Στο ναυάγιο χάθηκαν 1490 άτομα. Αν γέμιζαν όλες οι σωσίβιες λέμβοι, πόσο περισσότεροι διασωθέντες θα υπήρχαν;

Αφού διαβάσεις με προσοχή το πρόβλημα, απάντησε στις ερωτήσεις:

- Ποια είναι τα γνωστά στοιχεία που θα σε βοηθήσουν στη λύση;
(τι ξέρεις;)
- Ποια είναι τα άγνωστα στοιχεία του προβλήματος;
(τι δεν ξέρεις;).....
- Πώς σχετίζονται τα γνωστά με τα άγνωστα στοιχεία;
.....
- Οργάνωσε το σχέδιο λύσης και διάλεξε ποιες πράξεις θα χρησιμοποιήσεις (+) (-) (:) (·)
Αρχικά θα κάνω..... ώστε να
- Στη συνέχεια θα
- Τέλος
- Κάνε τις πράξεις. (Μπορείς με τον νου ή με χαρτί και μολύβι.)
.....
.....
.....
- Απάντησε στο πρόβλημα.
.....
- Έλεγξε αν είναι η απάντηση λογική σύμφωνα με τα δεδομένα.
.....



Το πρόβλημα του σχολικού βιβλίου από κλειστό πρόβλημα εκτέλεσης συγκεκριμένων βημάτων επίλυσης προβλήματος έγινε ανοιχτό **πρόβλημα μοντελοποίησης** ως εξής:

Να επισκεφθείτε τη σελίδα της Wikipedia και να ψάξετε το λήμμα «Τιτανικός», αναζητώντας τα ιστορικά στοιχεία ενός από τα μεγαλύτερα ναυάγια του κόσμου. Αφού συγκεντρώσετε τις απαραίτητες πληροφορίες, να υπολογίσετε πόσοι περισσότεροι άνθρωποι θα μπορούσαν να είχαν διασωθεί και με ποιον τρόπο, αν το πλοίο διέθετε καλύτερα μέτρα προστασίας για τους επιβάτες του. Τι μέτρα θα προτεινάτε εσείς στις ναυτιλιακές εταιρείες να παίρνουν για την ασφάλεια των επιβατών τους;

Ταξινόμηση του προβλήματος: Με βάση τα παρακάτω κριτήρια το πρόβλημα:

α) ως προς την **περιοχή του πραγματικού κόσμου** (1^η ταξινόμηση), ταξινομείται στην κοινωνική γνώση, που συνδυάζεται με τα ιστορικά ντοκουμέντα και τον κινηματογράφο. Οι μαθητές έχουν ήδη γνώσεις σχετικά με το ναυάγιο του Τιτανικού και πιθανόν να έχουν δει και την ομώνυμη ταινία. Μέσω του έργου θα γνωρίσουν περισσότερες λεπτομέρειες για το συμβάν και τις αιτίες που το προκάλεσαν. Έτσι, θα προσεγγίσουν με ενδιαφέρον το πρόβλημα και θα προσπαθήσουν να δώσουν απάντηση στις ερωτήσεις του έργου.

β) ως προς την **εφαρμογή με τις επίσημες προδιαγραφές του προγράμματος σπουδών** (2^η ταξινόμηση), το έργο έχει εφαρμογή σύμφωνα με αυτές και συμβαδίζει με το επίπεδο της τάξης, το σχολικό πρόγραμμα σπουδών και την επίσημη αξιολόγηση γενικά. Για να μιλήσουμε ειδικά πρέπει να αναφερθούμε σε μία συγκεκριμένη τάξη. Σχετικά με το μαθηματικό του περιεχόμενο αφορά τις ικανότητες επίλυσης προβλήματος, που απαιτούνται από το πρόγραμμα σπουδών για την Στ' τάξη δημοτικού, και την επίλυση προβλήματος με τέσσερις πράξεις.

γ) ως προς το **άνοιγμα του έργου** (3^η ταξινόμηση), το πρόβλημα είναι ανοιχτό, γιατί τα απαραίτητα στοιχεία για την επίλυσή του λείπουν και οι μαθητές καλούνται να τα συλλέξουν διαδικτυακά ή άλλα να τα υποθέσουν, ώστε να υπάρξουν έτσι διαφορετικοί τρόποι προσέγγισης και κατ' επέκταση διαφορετικές λύσεις.

δ) ως προς τη **σχετικότητα με τους μαθητές** (4^η ταξινόμηση), η κατάσταση και το πρόβλημα είναι ρεαλιστικά τόσο για τους μαθητές όσο και για τους εκπαιδευτικούς. Οι περισσότεροι μαθητές και εκπαιδευτικοί ταξιδεύουν με πλοίο ή έχουν ταξιδέψει και η ασφάλεια της μετακίνησης τους ενδιαφέρει όλους. Το ενδιαφέρον αυξάνεται, καθώς πρόκειται για ένα ιστορικό ναυάγιο, που έχει κινηματογραφηθεί και η μουσική της ταινίας έχει γίνει παγκοσμίως γνωστή, και

ε) ως προς τη **μαθηματική περιοχή** (5^η ταξινόμηση), το έργο ανήκει στο πεδίο των Φυσικών Αριθμών και στο χώρο της επίλυσης προβλήματος με τέσσερις πράξεις. Η περιοχή απαιτεί υψηλές μαθηματικές ικανότητες και μ' αυτή την έννοια ο τρόπος, με τον οποίο οι μαθητές θα συλλέξουν τα στοιχεία που λείπουν

και θα μοντελοποιήσουν το πρόβλημα, κρίνεται ιδιαίτερης σημασίας. Αν λάβουμε υπόψη μας τη γενικότερη δυσκολία των μαθητών στην επίλυση προβλήματος, οι μαθητές ίσως χρειαστούν υποστήριξη στη συγκέντρωση και οργάνωση των δεδομένων με επιμέρους ερωτήματα, όπως «πόσοι ήταν οι επιβάτες του Τιτανικού;», «πόσοι διασώθηκαν;», «ποια σωστικά μέτρα διέθετε το πλοίο;» κλπ.

2) Καταγραφή της μεθόδου διδασκαλίας του προβλήματος στους μαθητές.

Το πρόβλημα 1 θα διδαχτεί στους μαθητές με τον εξής τρόπο: Το θέμα θα παρουσιαστεί στην ολομέλεια της τάξης και θα γίνει συζήτηση για το ναυάγιο του Τιτανικού. Οι μαθητές θα καταθέσουν τις γνώσεις που έχουν για το περιεχόμενο του θέματος από κείμενα ή από την ταινία ή από οποιαδήποτε άλλη πηγή και θα προετοιμαστούν για τη μετάβαση στη μαθηματική περιοχή.

Στη συνέχεια θα χωριστούν σε ομάδες και θα εργαστούν συλλογικά. Στο σημείο αυτό θα παρουσιαστεί το έργο στη μαθηματική του διατύπωση και τα παιδιά θα κληθούν επίσημα πια να το επεξεργαστούν και να απαντήσουν στα ερωτήματα. Θα επισκεφτούν τη Wikipedia και θα συλλέξουν τις πληροφορίες που θεωρούν σημαντικές για την επίλυση του έργου. Η διδασκαλία περνάει στην αδιδακτική φάση και ο εκπαιδευτικός ίσως απλά υποστηρίζει τους μαθητές σε τυχόν δυσκολίες και απορίες. Υπάρχει η δυνατότητα να δοθεί ένα σύνολο ερωτημάτων για διευκόλυνση των μαθητών στην οργάνωση των στοιχείων του προβλήματος.

Αναμένεται οι μαθητές να καταγράψουν τον αριθμό των επιβατών του Τιτανικού, τον αριθμό των διασωθέντων, τον αριθμό των ναυαγών και των μη διασωθέντων και να συζητήσουν μεταξύ τους για τους λόγους που χάθηκαν τόσοι άνθρωποι, αλλά και για τους δυνατούς τρόπους διάσωσής τους. Ενθαρρύνονται οι μαθητές να προτείνουν λύσεις που στηρίζονται σε αριθμητικά δεδομένα (π.χ. αριθμός σωστικών λεμβών) και στην αξιοποίηση αυτών.

3) Περιγραφή τρόπων και μεθόδου διδασκαλίας αξιολόγησης των συμπεριφορών των μαθητών: Η αξιολόγηση των μαθητών στο ανοιχτό πρόβλημα 1 αφορά τη διαμορφωτική αξιολόγηση και τη συγκριτική.

α) Διαμορφωτική αξιολόγηση: Η διαμορφωτική αξιολόγηση στη διαδικασία της μοντελοποίησης είναι η **αξιολόγηση για μάθηση** και γι' αυτό είναι πολύ σημαντικό ο εκπαιδευτικός να μοιραστεί τους στόχους του έργου με τους μαθητές και να προσπαθήσει να αναπτύξει σ' αυτούς δεξιότητες μοντελοποίησης. Σε αυτές περιλαμβάνονται η υποβολή ερωτήσεων, η ανατροφοδότηση, η αυτοαξιολόγηση και αξιολόγηση των συμμαθητών, καθώς και η διαμορφωτική αξιοποίηση της αξιολόγησης που γίνεται για έλεγχο.

Συνεπώς οι μαθητές σύμφωνα με τις παραπάνω παιδαγωγικές πρακτικές θα αξιολογηθούν από τις ερωτήσεις που θα υποβάλλουν κατά την πρόσληψη και επεξεργασία του έργου και από την ανατροφοδότηση που λαμβάνουν από τον

εκπαιδευτικό. Επίσης θα αξιολογηθούν από την ικανότητα αυτοαξιολόγησης και αξιολόγησης των συμμαθητών τους στην πορεία οργάνωσης του μοντέλου, αλλά και από τη διαμορφωτική αξιοποίηση της αξιολόγησης που γίνεται για έλεγχο της επίλυσης έργου και των προτεινόμενων λύσεων.

β) Συγκριτική αξιολόγηση: Η συγκριτική αξιολόγηση αφορά τα εξής κριτήρια: (1) Οικοδομώντας το μοντέλο, (2) Δουλεύοντας με ακρίβεια, (3) Ερμηνεύοντας, (4) Έλεγχος εγκυρότητας και αναστοχασμός, (5) Παρουσίαση, και μπορούν να αναγνωριστούν σ' αυτή ανώτερες και κατώτερες ποιοτικές περιγραφές κατά την εφαρμογή της.

Ακολουθώντας λοιπόν τις ανώτερες ποιοτικές περιγραφές κατά τη συγκριτική αξιολόγηση, θα αξιολογούσαμε τους μαθητές μας στο παραπάνω έργο:

- ως προς το 1^ο κριτήριο (Οικοδομώντας το μοντέλο), αν λαμβάνουν καλές αποφάσεις, οι οποίες τους επιτρέπουν να απλοποιήσουν τη σύνθετη κατάσταση που τους δίνεται.
- ως προς το 2^ο κριτήριο (Δουλεύοντας με ακρίβεια), αν χρησιμοποιούν τη μαθηματική γλώσσα και τα σύμβολα με ακρίβεια.
- ως προς το 3^ο κριτήριο (Ερμηνεύοντας), αν ερμηνεύουν τη δοθείσα κατάσταση καλά και με ακρίβεια.
- ως προς το 4^ο κριτήριο (Έλεγχος εγκυρότητας και αναστοχασμός), αν έχουν καλή κατανόηση και κριτική όσον αφορά την κατανόηση της εγκυρότητας και των περιορισμών του μοντέλου.
- ως προς το 5^ο κριτήριο (Παρουσίαση), αν δημιουργούν μια περιεκτική παρουσίαση της δουλειάς τους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

1) Επιλογή/Τροποποίηση προβλήματος:

Το πρόβλημα 2 είναι τροποποίηση του προβλήματος του σχολικού βιβλίου (Στ' τάξη, τετράδιο εργασιών, α' τεύχος, σελ.24), που παρουσιάζεται στη συνέχεια στο πλαίσιο - δραστηριότητα με προεκτάσεις.

Δραστηριότητα με προεκτάσεις: «Η μεγαλύτερη κρεμαστή γέφυρα του κόσμου»

Από το τέλος του 2004 η χώρα μας έχει τη μεγαλύτερη σε μήκος κρεμαστή γέφυρα στον κόσμο. Πρόκειται για τη γέφυρα που συνδέει το Ρίο με το Αντίρριο. Πριν από την κατασκευή της γέφυρας 2 εκατομμύρια αυτοκίνητα τον χρόνο που μετέφεραν 6 εκατομμύρια επιβάτες περνούσαν από την Πελοπόννησο στη Στερεά Ελλάδα με πλοία. Η διαδρομή διαρκούσε 45 λεπτά και πολλές φορές λόγω του κακού καιρού τα πλοία έμεναν δεμένα. Η γέφυρα άρχισε να κατασκευάζεται το 1998 και τελείωσε το 2004.

Η κυρίως γέφυρα είναι καλωδιωτή (κρέμεται σε συρματοσχοίνα) και στηρίζεται σε 4 πυλώνες (κολόνες), το ύψος των οποίων επάνω από τη στάθμη της θάλασσας φθάνει τα 159 μ. και το βύθισμά τους από 44 έως 62 μ. κάτω από τη στάθμη της θάλασσας. Η γέφυρα έχει τρία κεντρικά ανοίγματα των 560 μ. και δύο ακραία των 305 μ. Για να συνδεθεί με το οδικό δίκτυο κατασκευάστηκαν στα δύο άκρα της γέφυρες πρόσβασης. Οι γέφυρες πρόσβασης έχουν μήκος 378 μ. στην πλευρά του Ρίου και 252 μ. στην πλευρά του Αντιρρίου.



α) Να υπολογίσετε το συνολικό μήκος της γέφυρας (μαζί με τις γέφυρες πρόσβασης).

β) Να υπολογίσετε τον χρόνο (σε δευτερόλεπτα) που θα κάνει ένα αυτοκίνητο για να διασχίσει τη γέφυρα κινούμενο με ταχύτητα 36 χιλιομέτρων την ώρα.

γ) Να υπολογίσετε πόσο πρέπει να χρεώνεται για διόδια η διέλευση κάθε αυτοκινήτου από τη γέφυρα, αν ισχύουν οι ακόλουθες προϋποθέσεις:

- Η συνολική δαπάνη του έργου ανέρχεται σε 588 εκατομμύρια €.
- Ο αριθμός των αυτοκινήτων που περνούν απέναντι με τη γέφυρα έχει διπλασιαστεί σε σχέση με τον αριθμό των αυτοκινήτων που χρησιμοποιούσαν τα πλοία.
- Η απόσβεση του ποσού κατασκευής της γέφυρας έχει οριστεί να γίνει σε 20 χρόνια.



Θέμα για διερεύνηση και συζήτηση

- Ωφέλησε η γέφυρα τις δύο περιοχές που συνδέει;

Λύσεις του προβλήματος:

Μήκος γέφυρας: $3 \times 560 + 2 \times 305 + (378 + 252) = 1.680 + 610 + 630 = 2.920$ μέτρα.

Ταχύτητα αυτοκινήτου: $36.000 : (60 \times 60) = 10 \mu / \delta \lambda$, $2.920 : 10 = 292$ δευτερόλεπτα.

$588.000.000 : 20 = 29.400.000 \text{€}$ το χρόνο, $29.400.000 : 4.000.000 = 7,35 \text{€}$ για κάθε αυτοκίνητο.

Το πρόβλημα του σχολικού τετραδίου εργασιών είναι ήδη ένα ανοιχτό μαθηματικό πρόβλημα με κοινωνικές και οικονομικές προεκτάσεις, όπως προαναγγέλεται από τον τίτλο του. Ωστόσο στο πλαίσιο της μοντελοποίησης το παραπάνω έργο μπορεί να προεκταθεί ακόμα περισσότερο ως εξής:

Να επισκεφθείτε την ιστοσελίδα <http://www.gefyra.gr/> και να ενημερωθείτε σχετικά με το ποσό που καταβάλλεται για τη διέλευση αυτοκινήτων από τη γέφυρα και τις προσφορές για συχνές μετακινήσεις (π.χ. μηνιαία κάρτα διαδρομών). Στη συνέχεια, να βρείτε τα ετήσια στοιχεία διέλευσης των τελευταίων πέντε χρόνων και να κάνετε μία πρόβλεψη για τη χρονιά που πιθανολογείται ότι θα γίνει απόσβεση του ποσού συνολικής δαπάνης σε σχέση με το μέσο ποσό που καταβάλλεται ανά διέλευση. Αποτελεί τελικά η γέφυρα του Ρίου – Αντίρριου ένα κερδοφόρο έργο;

Ταξινόμηση του προβλήματος: Με βάση τα παρακάτω κριτήρια το πρόβλημα:

α) ως προς την **περιοχή του πραγματικού κόσμου** (1^η ταξινόμηση), ταξινομείται στην κοινωνική και οικονομική ζωή, καθώς συσχετίζει τη διευκόλυνση των μετακινήσεων με τα οικονομικά οφέλη. Οι μαθητές γνωρίζουν ήδη τη γέφυρα από το μάθημα της Γεωγραφίας ή από τα ταξίδια τους, τη σημασία της στις εθνικές ή τοπικές μεταφορές των ανθρώπων, όπως και τις οικονομικές δυσχέρειες της χώρας. Έτσι, θα προσεγγίσουν με ενδιαφέρον το πρόβλημα και θα προσπαθήσουν να συνδυάσουν λογικά τις κοινωνικές με τις οικονομικές παραμέτρους του έργου.

β) ως προς την **εφαρμογή με τις επίσημες προδιαγραφές του προγράμματος σπουδών** (2^η ταξινόμηση), το έργο έχει εφαρμογή με τις επίσημες προδιαγραφές και προσδοκίες του προγράμματος σπουδών της Στ' Δημοτικού. Το μαθηματικό του περιεχόμενο άπτεται της επίλυσης προβλημάτων με τέσσερις πράξεις (Αριθμοί - Άλγεβρα) και επεκτείνεται στη διεξαγωγή πιθανοτήτων (Στοχαστικά Μαθηματικά), που απαιτούνται από το πρόγραμμα σπουδών της Στ' Δημοτικού και αναπτύσσονται ιδιαίτερα στο ΝΠΣ του 2011.

γ) ως προς το **άνοιγμα του έργου** (3^η ταξινόμηση), το πρόβλημα είναι ανοιχτό, καθώς δε δίνονται όλα τα στοιχεία που χρειάζονται για την επίλυσή του, αλλά πρέπει να τα συλλέξουν οι μαθητές διαδικτυακά ή να τα υποθέσουν. Έτσι, μπορούν να γίνουν διάφορες προσεγγίσεις του συγκεκριμένου προβλήματος.

δ) ως προς τη **σχετικότητα με τους μαθητές** (4^η ταξινόμηση), η κατάσταση και το πρόβλημα είναι ρεαλιστικά τόσο για τους μαθητές όσο και για τους εκπαιδευτικούς. Στις μέρες μας τα οικονομικά ζητήματα είναι πιο επίκαιρα από ποτέ λόγω της δυσχερούς κατάστασης της χώρας από την οικονομική κρίση. Έτσι, όλοι οι άνθρωποι ενδιαφέρονται τόσο για τα προσωπικά οικονομικά τους συμφέροντα όσο και τα δημόσια οικονομικά της χώρας. Στη Στ' τάξη Δημοτικού

φοιτούν μαθητές ηλικίας 11-12 ετών, οι οποίοι βρίσκονται σε ηλικία που κατανοούν την οικονομική κατάσταση του τόπου και σίγουρα συμμετέχουν, είτε ενεργητικά είτε παθητικά, καθημερινά σε οικονομικές συζητήσεις, οπότε είναι εξοικειωμένοι με όρους όπως «κέρδος», «ζημία», «απόσβεση χρέους», «δαπάνες» κλπ, και

ε) ως προς τη **μαθηματική περιοχή** (5η ταξινόμηση), το πρόβλημα ανήκει στο χώρο των Αριθμών και της επίλυσης προβλήματος, και επεκτείνεται στα Στοχαστικά Μαθηματικά στο πεδίο των Πιθανοτήτων. Η επίλυση προβλήματος αποτελεί μία περιοχή που δυσκολεύει τους μαθητές, οπότε πρέπει να γίνεται προσεκτική συλλογή των δεδομένων, για να μπορέσουν οι μαθητές να μοντελοποιήσουν το πρόβλημα. Επίσης, απαιτεί υψηλές μαθηματικές ικανότητες και κριτική σκέψη για τη συγκέντρωση των απαιτούμενων δεδομένων.

2) Καταγραφή της μεθόδου διδασκαλίας του προβλήματος στους μαθητές.

Η δραστηριότητα είναι καλό να γίνει κατά ομάδες. Τα παιδιά αντλούν τις πληροφορίες που χρειάζονται από το κείμενο, τις οποίες στη συνέχεια καταγράφουν και επεξεργάζονται. Μετά προχωρούν στην ανακοίνωση των πορισμάτων τους, τα συγκρίνουν με τα αποτελέσματα των άλλων και ανταλλάσσουν απόψεις σχετικά με τις φυσικές παραμέτρους του έργου. Ακολουθεί συζήτηση για τις οικονομικές και κοινωνικές παραμέτρους του έργου, καθώς και επέκταση – σύνδεση με άλλες γνωστικές περιοχές (Γεωγραφία, Ιστορία). Τα παιδιά προσπαθούν να ερμηνεύσουν την ανάγκη κατασκευής ενός τόσο δαπανηρού έργου, καθώς και να το συγκρίνουν με άλλα σύγχρονα έργα (π.χ. Αεροδρόμιο Αθηνών, Εγνατία Οδός, Μετρό, εκτροπή Αχελώου).

Το γεγονός ότι η διάσταση του έργου υπερβαίνει τα στενά τοπικά όρια αποδεικνύεται από το ότι έχει ενταχθεί από το 1994 στα Διευρωπαϊκά Δίκτυα Μεταφορών (Σύννοδος Κέρκυρας) και στα δεκατέσσερα ευρωπαϊκά έργα πρώτης προτεραιότητας (Σύννοδος Έσσην). Ωστόσο και η περιοχή γύρω από το έργο αναμένεται να αποκομίσει πολλά οφέλη από την κατασκευή του. Έτσι η αύξηση των θέσεων εργασίας, η επιμόρφωση του ανθρώπινου δυναμικού της περιοχής, η βελτίωση της ανταγωνιστικότητας των παραγωγικών μονάδων της περιοχής, η διεύρυνση της ενδοχώρας της Πάτρας προς βορρά και αντίστροφα η ενσωμάτωση των περιοχών βόρεια του Πατραϊκού στην ενδοχώρα, καθώς και η ανακήρυξη της πόλης της Πάτρας σε μητρόπολη της Δυτικής Ελλάδας αποτελούν μερικές από τις θετικές επιπτώσεις του έργου στην ανάπτυξη της περιοχής. Η Γέφυρα ονομάστηκε «Γέφυρα Χαρίλαου Τρικούπη» προς τιμή του μεγάλου Έλληνα πολιτικού, καθώς ήταν ο πρώτος πολιτικός που είχε την ιδέα της κατασκευής γέφυρας στο στενό.

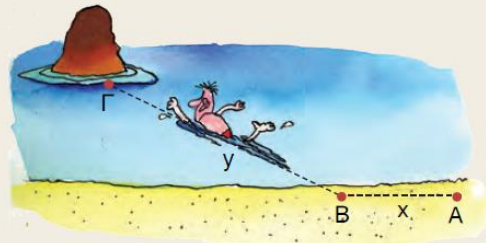
3) Περιγραφή τρόπων και μεθόδου διδασκαλίας αξιολόγησης των συμπεριφορών των μαθητών: Ισχύουν οι παιδαγωγικές πρακτικές που παρατίθενται στο πρόβλημα 1.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

1) Επιλογή/Τροποποίηση προβλήματος:

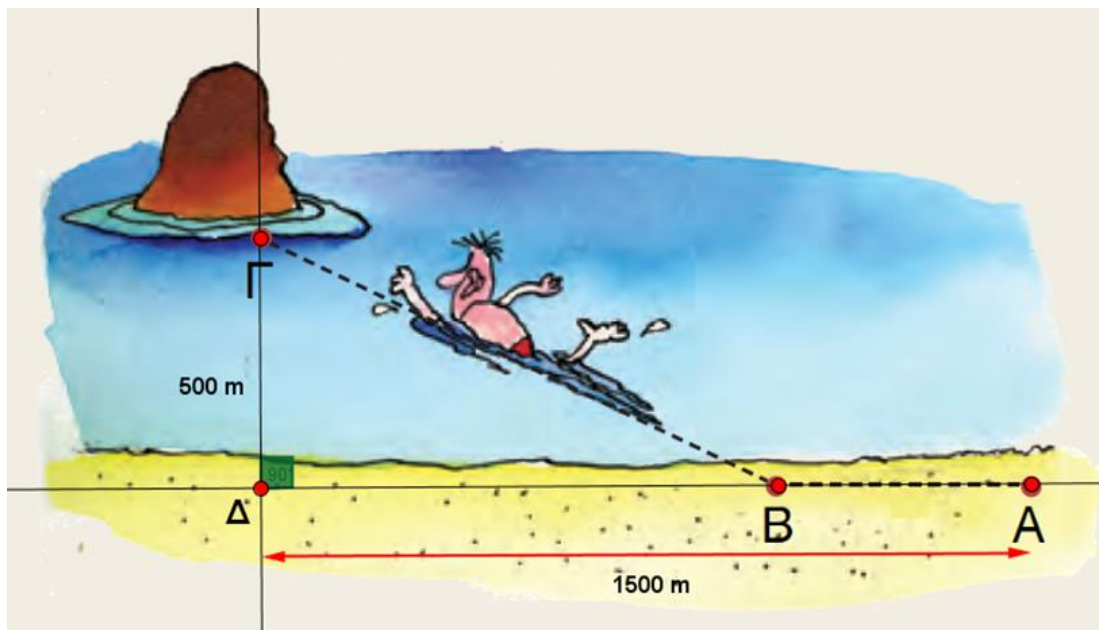
Το πρόβλημα 3 είναι τροποποίηση του προβλήματος 7 του σχολικού βιβλίου (Γ' τάξη, σελίδα 127), που παρουσιάζεται στη συνέχεια στο γκρι πλαίσιο.

- 7 Κάποιος περπάτησε από το σημείο A στο σημείο B με ταχύτητα 4 km/h και μετά κολύπησε με ταχύτητα 2 km/h μέχρι να φτάσει στο σημείο Γ. Αν ο συνολικός χρόνος που μεσολάβησε μέχρι να φτάσει στο σημείο Γ είναι μια ώρα, τότε:
- Να βρείτε τη γραμμική εξίσωση με την οποία συνδέονται οι αποστάσεις x , y .
 - Αν περπάτησε 3 km, πόσο χρόνο κολύπησε;



Το πρόβλημα του σχολικού βιβλίου από κλειστό πρόβλημα έγινε **ανοιχτό πρόβλημα μοντελοποίησης** ως εξής:

Κάποιος περπάτησε από το σημείο A στο σημείο B με ταχύτητα 4 km/h και μετά κολύπησε με ταχύτητα 2 km/h, μέχρι να φτάσει στο σημείο Γ (βλέπε σχήμα). Δίνονται οι αποστάσεις $\Gamma\Delta = 500$ m και $\Delta A = 1500$ m. Αν οι ταχύτητες κολύμβησης και βαδίσματος παραμένουν ίδιες, ποια διαδρομή πρέπει να ακολουθήσει, ώστε ο χρόνος επιστροφής του από το σημείο Γ στο A να είναι ο πιο σύντομος;



Ταξινόμηση του προβλήματος: Με βάση τα παρακάτω κριτήρια το πρόβλημα:

α) ως προς την **περιοχή του πραγματικού κόσμου** (1^η ταξινόμηση), ταξινομείται στην καθημερινή ζωή·

β) ως προς την **εφαρμογή με τις επίσημες προδιαγραφές του προγράμματος σπουδών** (2^η ταξινόμηση), εντάσσεται στη διδασκαλία της Β' Γυμνασίου στις θεματικές περιοχές του Πυθαγορείου Θεωρήματος και των Συναρτήσεων. Η υλοποίησή του τοποθετείται προς το τέλος του διδακτικού έτους και έχει το πλεονέκτημα ότι σ' αυτό εμπλέκονται οι δύο από τις σημαντικότερες θεματικές περιοχές διδασκαλίας αυτής της τάξης. Κρίνεται απαραίτητη η χρήση Η/Υ για τους αριθμητικούς υπολογισμούς, οι οποίοι θα μπορούσαν να γίνουν πιο εύκολα με κάποιο φύλλο εργασίας (EXCEL). Για το λόγο αυτό το μάθημα θα μπορούσε να γίνει είτε στο εργαστήριο Η/Υ είτε μέσα στην τάξη με χρήση φορητού Η/Υ για κάθε μία από τις ομάδες εργασίας, στις οποίες θα έχουν χωριστεί οι μαθητές·

γ) ως προς το **άνοιγμα του έργου** (3^η ταξινόμηση), με την παρούσα διατύπωση επιδέχεται μοναδική λύση, θα μπορούσε όμως να γίνει ανοικτό με μία διαφορετική διατύπωση του ερωτήματος: *«Ο κολυμβητής, ενώ κολυμπά γύρω από το νησάκι, βλέπει να πλησιάζει απειλητικά στο βάθος ένα μπουρίνι. Αποφασίζει λοιπόν να επιστρέψει στο σημείο Α, όπου έχει αφήσει τα πράγματά του όσο το δυνατόν πιο γρήγορα. Αν το μπουρίνι ξεσπάσει σε ... λεπτά, θα προφτάσει να επιστρέψει στο σημείο Α πιο πριν;»* Στην περίπτωση αυτή δεν δίνονται οι ταχύτητες κολύμβησης και τρεξίματος, οπότε οι μαθητές θα πρέπει να εξετάσουν διαφορετικά σενάρια, αναλογιζόμενοι ερωτήματα, όπως: *«Ποια είναι η μεγαλύτερη ταχύτητα κολύμβησης ή δρόμου που μπορεί να επιτύχει ο άνθρωπος;», «Μήπως ο κολυμβητής είναι κουρασμένος και δε θα μπορέσει να πάει πιο γρήγορα» κλπ.*

δ) ως προς τη **σχετικότητα με τους μαθητές** (4^η ταξινόμηση), η κατάσταση και το πρόβλημα κρίνονται ρεαλιστικά για τους μαθητές, γιατί αναφέρονται στο κολύμπι, που είναι για αυτούς μια ευχάριστη δραστηριότητα, και

ε) ως προς τη **μαθηματική περιοχή** (5^η ταξινόμηση), το έργο έχει το πλεονέκτημα ότι συνδυάζει δύο μαθηματικές περιοχές, τη Γεωμετρία και την Άλγεβρα.

2) Καταγραφή της μεθόδου διδασκαλίας του προβλήματος στους μαθητές:

Για τη διδασκαλία του προβλήματος κρίνεται απαραίτητη η χρήση Η/Υ για τους αριθμητικούς υπολογισμούς, οι οποίοι θα μπορούσαν να γίνουν πιο εύκολα με κάποιο φύλλο εργασίας (EXCEL). Για το λόγο αυτό το μάθημα θα μπορούσε να γίνει είτε στο εργαστήριο Η/Υ είτε μέσα στην τάξη με χρήση φορητού Η/Υ για κάθε μία από τις ομάδες εργασίας, στις οποίες θα έχουν χωριστεί οι μαθητές. Μετά την παρουσίαση του προβλήματος οι μαθητές θα πρέπει να καταγράψουν τα δεδομένα του προβλήματος και τα επιμέρους στοιχεία που θα πρέπει να υπολογίσουν, ώστε να εκφράσουν το συνολικό χρόνο επιστροφής στο

ζητούμενο σημείο της ακτής. Τα στοιχεία αυτά προκύπτουν από τις πιθανές διαδρομές από το σημείο Γ στο σημείο Α και τις διανυόμενες αποστάσεις στη θάλασσα και την ακτή.

Επομένως, στην πρώτη φάση της λύσης του προβλήματος οι μαθητές εκφράζουν με μαθηματικό τρόπο τις διανυόμενες αποστάσεις. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν μία μεταβλητή x , για να εκφράσουν την απόσταση του σημείου Β από το Δ. Στη συνέχεια με τη βοήθεια του x μπορούν να εκφράσουν τις αποστάσεις ΓΒ και ΒΑ:

$$\Gamma B = \sqrt{500^2 + x^2}, \quad B A = 1500 - x$$

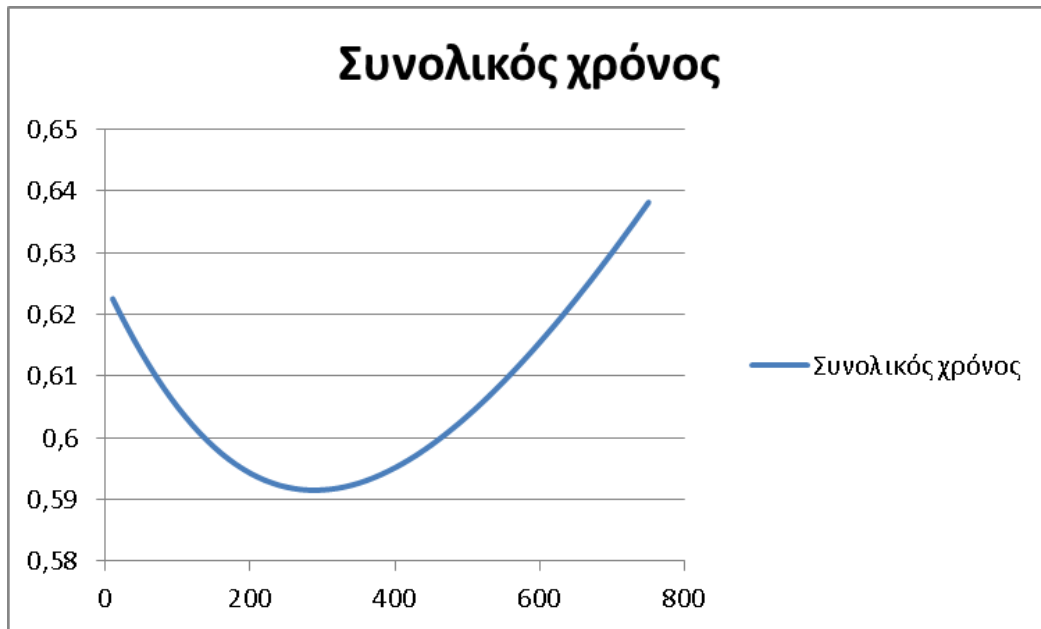
Στη δεύτερη φάση οι μαθητές θα πρέπει να εκφράσουν τους χρόνους για την κάθε επιμέρους απόσταση, που προκύπτουν με τη βοήθεια των ταχυτήτων που δίνονται στην εκφώνηση:

$$t_1 = \frac{\sqrt{500^2 + x^2}}{2000} \quad \text{και} \quad t_2 = \frac{1500 - x}{4000}$$

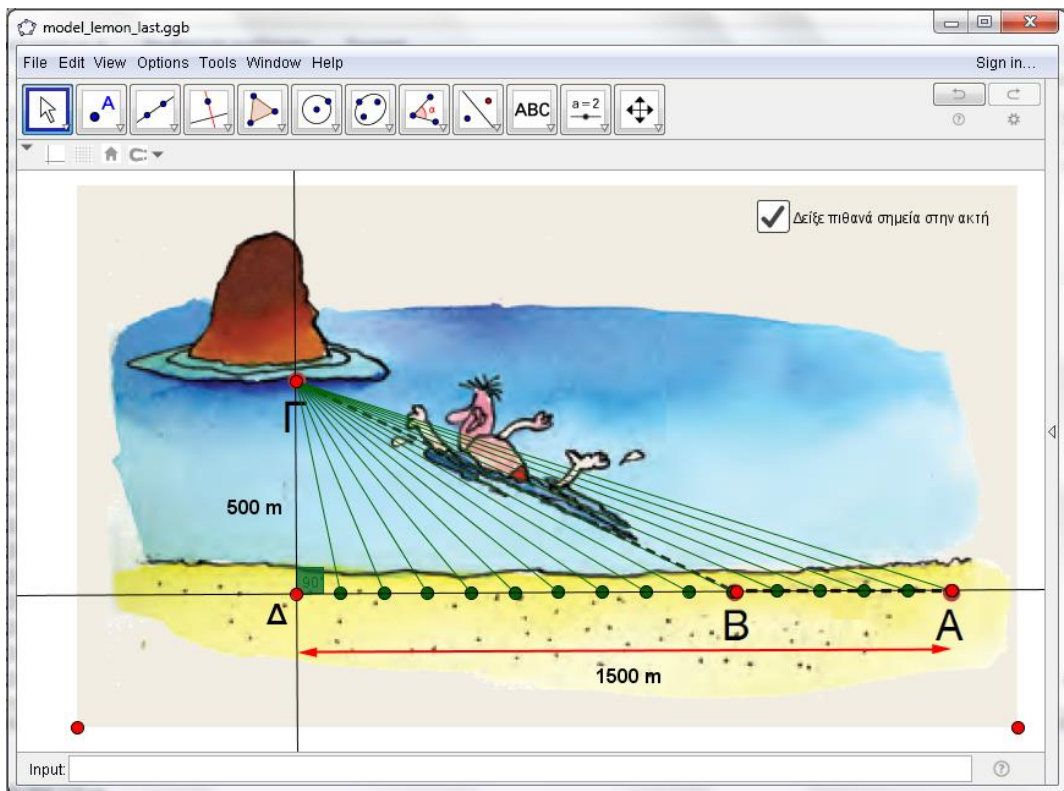
Στην τρίτη φάση οι μαθητές με χρήση λογισμικού υπολογίζουν τους επιμέρους χρόνους t_1 και t_2 και ψάχνουν το σημείο της ακτής, για το οποίο το άθροισμα $t_1 + t_2$ γίνεται ελάχιστο. Εδώ θα πρέπει οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν το λογισμικό EXCEL, για να υπολογίσουν τους συνολικούς χρόνους ανάλογα με το υποτιθέμενο σημείο της ακτής, στο οποίο πρωτοβγαίνει ο κολυμβητής.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Σημείο στην ακτή	Χρόνος κολύμβησης		Διάστημα στην ακτή	Χρόνος στην ακτή		Συνολικός χρόνος
20	190	0,267441582		1310	0,3275		0,5949416
21	200	0,26925824		1300	0,325		0,5942582
22	210	0,271154937		1290	0,3225		0,5936549
23	220	0,273130006		1280	0,32		0,59313
24	230	0,275181758		1270	0,3175		0,5926818
25	240	0,277308492		1260	0,315		0,5923085
26	250	0,279508497		1250	0,3125		0,5920085
27	260	0,281780056		1240	0,31		0,5917801
28	270	0,284121453		1230	0,3075		0,5916215
29	280	0,286530976		1220	0,305		0,591531
30	290	0,28900692		1210	0,3025		0,5915069
31	300	0,291547595		1200	0,3		0,5915476
32	310	0,294151322		1190	0,2975		0,5916513
33	320	0,296816442		1180	0,295		0,5918164
34	330	0,299541316		1170	0,2925		0,5920413
35	340	0,302324329		1160	0,29		0,5923243
36	350	0,30516389		1150	0,2875		0,5926639
37	360	0,308058436		1140	0,285		0,5930584
38	370	0,311006431		1130	0,2825		0,5935064

Οι μαθητές, μετά την καταγραφή των χρόνων, μπορεί να απεικονίσουν γραφικά τη συνάρτηση που εκφράζει το συνολικό χρόνο ως προς το σημείο, στο οποίο βγαίνει ο κολυμβητής. Με τη γραφική αυτή απεικόνιση γίνεται φανερή η σχέση που συνδέει τα δύο μεγέθη, και το ζητούμενο σημείο είναι το σημείο ελαχίστου.



Ο εκπαιδευτικός μπορεί να έχει προετοιμάσει κατάλληλη γραφική απεικόνιση των πιθανών διαδρομών του κολυμβητή, την οποία θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει, όταν το κρίνει απαραίτητο ανάλογα με την πορεία της διδασκαλίας.



Η διδασκαλία του μαθήματος μπορεί να γίνει και με χρήση καταλλήλου φύλλου εργασίας με ανάλογα ερωτήματα για την κάθε φάση της λύσης του προβλήματος.

3) Περιγραφή τρόπων και μεθόδου διδασκαλίας αξιολόγησης των συμπεριφορών των μαθητών:

α) Διαμορφωτική αξιολόγηση: Η διαμορφωτική αξιολόγηση κατά τη διάρκεια της υλοποίησης του έργου μπορεί να γίνει με βάση κατάλληλες ερωτήσεις και υποδείξεις του εκπαιδευτικού, οι οποίες θα εξαρτηθούν από τις πραγματικές καταστάσεις που θα αντιμετωπίσει μέσα στην τάξη. Τα ερωτήματα - υποδείξεις θα μπορούσαν να είναι:

- Πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την απόσταση της διαδρομής κολύμβησης από το νησάκι (σημείο Γ) προς κάποιο σημείο της ακτής;
- Πώς μπορεί να υπολογιστεί ο χρόνος στον οποίο κάποιος διήνυσε μία απόσταση με γνωστή ταχύτητα;
- Θα συνέφερε στον κολυμβητή να κολυμπήσει κατευθείαν από το σημείο Γ στο Α ή όχι και γιατί;
- Σε πόσο χρόνο θα διανυθεί η διαδρομή ΓΔΑ;
- Δοκιμάστε να υπολογίσετε το χρόνο για διαφορετικά σημεία στην ακτή μεταξύ των σημείων Δ και Α.
- Μπορείτε να απεικονίσετε γραφικά τους χρόνους που βρήκατε ως προς τα σημεία της ακτής που επιλέξατε στο προηγούμενο ερώτημα; Τι παρατηρείτε;

β) Συγκριτική αξιολόγηση: Οι απαντήσεις των μαθητών στο πρόβλημα μπορούν να κριθούν με βάση κριτήρια, όπως:

- Κατανόησαν το πρόβλημα.
- Δείχνουν τον τρόπο εργασίας τους.
- Δίνουν επαρκείς εξηγήσεις για τις υποθέσεις τους ή εξηγούν γιατί επέλεξαν ή απέρριψαν κάποιες πιθανές λύσεις.
- Υλοποίησαν σωστά τη μαθηματική μέθοδο που επέλεξαν.
- Παρουσιάζουν με σαφή τρόπο τα αποτελέσματά τους.
- Απαντούν στο τελικό ερώτημα.
- Αναρωτήθηκαν για τυχόν επέκταση του προβλήματος.

Παράρτημα

Στο Παράρτημα παρουσιάζεται το «Έργο 4: Ακούγοντας παραδοσιακή μουσική» ως πρόσθετο πρόβλημα μοντελοποίησης:

Μοντελοποίηση

Έργο 4: Ακούγοντας παραδοσιακή μουσική

Έναν ξενιτεμένο τον μήνυσε η αγάπη του να πάει να τον φιλέψει τρεις φορές την εβδομάδα και δεκαπέντε φορές το μήνα.

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ						
ΔΕΥΤΕΡΑ	ΤΡΙΤΗ	ΤΕΤΑΡΤΗ	ΠΕΜΠΤΗ	ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ	ΣΑΒΒΑΤΟ	ΚΥΡΙΑΚΗ
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30						



Ποιον μήνα πιστεύετε ότι τον κάλεσε και ποια χρονιά; Τι μπορεί να έκανε τον ξενιτεμένο να μην έφτασε ποτέ στον προορισμό του;

Να εργαστείτε, αφού ακούσετε το παραδοσιακό τραγούδι στον παρακάτω σύνδεσμο, και να εξηγήσετε τον τρόπο σκέψης σας.

https://www.youtube.com/watch?v=2_kgIF2SUOo

Με μήνυσε η αγάπη μου – 1992

Άιντε με μήνυσε η αγάπη μου
να πάω να με φιλέψει
την εβδομάδα τρεις φορές.

Άιντε την εβδομάδα τρεις φορές
το μήνα δεκαπέντε
μα εγώ ήμαν ξένος κι ατζαμής.

Άιντε μα εγώ ήμαν ξένος κι ατζαμής
την στράτα δεν την ξέρω
και παίρνω ένα στρατί στρατί.

Λύση

Ξεκινάμε από τα δεδομένα της πραγματικής ζωής και εμπειρίας ότι μία εβδομάδα έχει 7 μέρες και ότι ένας μήνας έχει 30 ή 31 μέρες, εκτός από το Φλεβάρη που έχει 28 μέρες σε μη δίσεκτο έτος και 29 σε δίσεκτο.

Σύμφωνα με την εμπειρία, διαιρώντας έναν τυπικό μήνα 30 ημερών με το 7, βλέπουμε ότι έχει 4 εβδομάδες και 2 μέρες ($30:7=4$, υπόλοιπο 2).

Σύμφωνα με το πρόβλημα, διαιρώντας το 15 (μηνιαίο σύνολο επισκέψεων) με το 3 (επισκέψεις/εβδομάδα), βλέπουμε ότι χρειάζονται 5 εβδομάδες, για να μπορεί να επαληθευτεί η πρόσκληση του μηνύματος ($15:3=5$).

Άρα, ο πιθανός μήνας πρόσκλησης του ξενιτεμένου από την αγαπημένη του χρειάζεται να έχει 5 εβδομάδες, όχι απαραίτητα ολοκληρωμένες, αλλά τουλάχιστον με 3 ημέρες η μία από τις πέντε.

Έτσι, οι μήνες με 30 μέρες (Φεβρουάριος, Απρίλιος, Ιούνιος Σεπτέμβριος, Νοέμβριος) εξαιρούνται λόγω πλήθους ημερών. Οι μήνες με 31 μέρες (Ιανουάριος, Μάρτιος, Μάιος, Ιούλιος, Αύγουστος, Οκτώβριος, Δεκέμβριος) είναι πιθανοί.

Οι μέρες των πιθανών μηνών μπορεί να είναι της μορφής:

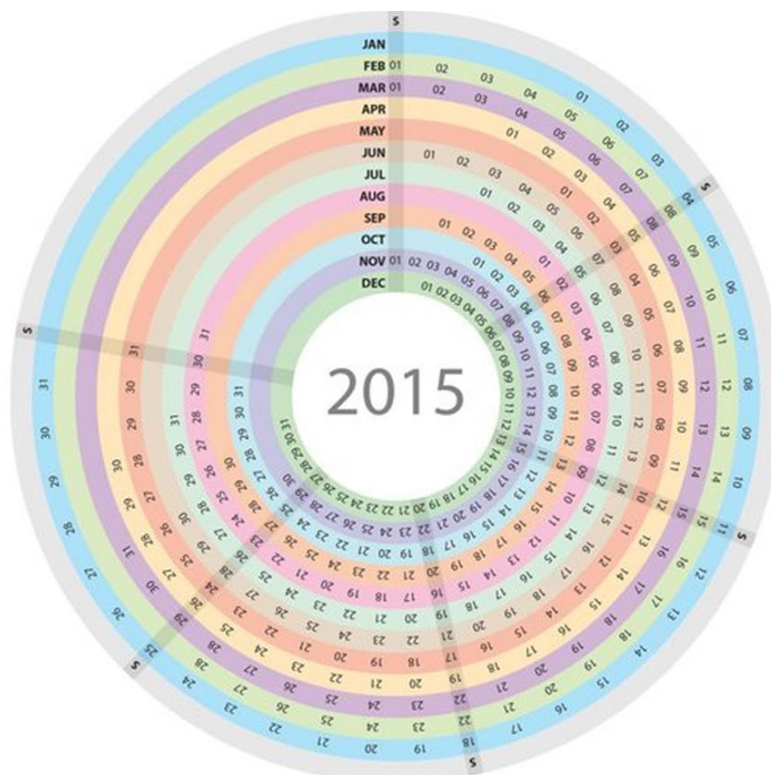
$$3 + (4 \times 7) = 31 \quad \text{ή} \quad (4 \times 7) + 3 = 31$$

$$4 + (3 \times 7) + 6 = 31 \quad \text{ή} \quad 6 + (3 \times 7) + 4 = 31$$

$$5 + (3 \times 7) + 5 = 31$$

Στο σημείο αυτό χρειάζεται να συμφωνηθεί η σύμβαση αν η εβδομάδα ξεκινάει από την Κυριακή ή τη Δευτέρα.

Για παράδειγμα το έτος 2015 η πρόσκληση θα μπορούσε να αφορά τους μήνες Ιανουάριο, Μάρτιο, Ιούλιο, Οκτώβριο και Δεκέμβριο.



Ο κύκλος της μοντελοποίησης / Φάσεις

Η πρώτη φάση είναι η κατανόηση της δεδομένης προβληματικής κατάστασης, σύμφωνα με την οποία ο λύτης του προβλήματος έχει να κατασκευάσει ένα μοντέλο της κατάστασης (situation model), που εδώ εμπεριέχει επίσκεψη 3 φορές την εβδομάδα, σύνολο 15 φορές το μήνα.

Η δεύτερη φάση είναι η δόμηση της κατάστασης με την εισαγωγή ορισμένων μεταβλητών, όπως είναι ο αριθμός ημερών μιας εβδομάδας, ο αριθμός ημερών ενός μήνα, ο αριθμός εβδομάδων του μήνα, η ημέρα έναρξης της εβδομάδας.

Στην τρίτη φάση της μαθηματοποίησης το πραγματικό μοντέλο μετασχηματίζεται σε μαθηματικό μοντέλο, το οποίο εδώ αποτελείται από τις πιθανές μορφές ημερών ανά εβδομάδα στους μήνες με 31 μέρες.

Στην τέταρτη φάση γίνεται μαθηματική εργασία (υπολογισμοί κτλ) που παράγουν μαθηματικά αποτελέσματα.

Στην πέμπτη φάση αυτά ερμηνεύονται στον πραγματικό κόσμο ως πραγματικά αποτελέσματα (real results), που καταλήγουν σε μια διατύπωση πιθανού μήνα πρόσκλησης του ξενιτεμένου για φιλοξενία.

Στην επαλήθευση των αποτελεσμάτων στην έκτη φάση μπορεί να ληφθούν υπόψη περισσότεροι παράγοντες, όπως ο χρόνος ή οι συνθήκες ζωής του ξενιτεμένου. Ανάλογα με το ποιο έτος έχει επιλεγεί, οι μήνες πρόσκλησης μπορεί να είναι διαφορετικοί.

Η έβδομη και τελευταία φάση είναι η παρουσίαση της τελικής λύσης, λαμβάνοντας υπόψη το κοινωνικοοικονομικό και πολιτισμικό πλαίσιο της κατάστασης που μελετήθηκε.

