

**Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΟΠΤΙΚΩΝ  
ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ  
ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ  
ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

- Οι μαθηματικές έννοιες και γενικότερα οι μαθηματικές διαδικασίες είναι αφηρημένες και, αρκετές φορές, ιδιαίτερα πολύπλοκες.
- Η κατανόηση τους παρουσιάζει σημαντικές δυσκολίες για τους μαθητές.

- Αυτές οι δυσκολίες οδηγούν στην υποβάθμιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών, σε μια διδασκαλία διαδικασιών με καθαρά τυπικό τρόπο, χωρίς να επιδιώκεται η ουσιαστική κατανόηση τους.

- Αυτό που μαθαίνουν οι περισσότεροι μαθητές μέσα από μια τέτοια διδασκαλία, είναι να εκτελούν έναν αριθμό τυποποιημένων διαδικασιών, ώστε να μπορούν να δώσουν απαντήσεις σε σαφώς οριοθετημένες κλάσεις ερωτήσεων.

- Η αξιολόγηση τους συνήθως συνίσταται στη δυνατότητα που έχουν να απαντήσουν ερωτήσεις, γνωστού σε αυτούς τύπου, εκτελώντας σωστά τη διαδικασία που απαιτείται για την απάντηση.

- Αν παρατηρήσει κάποιος προσεκτικά, πώς σκέφτονται αρκετοί μαθητές που θεωρούνται καλοί στα Μαθηματικά, όταν προσπαθούν να αντιμετωπίσουν μαθηματικά προβλήματα, βλέπει ότι έχουν σοβαρές παρανοήσεις σε βασικά θέματα.

- Αυτοί οι μαθητές έχουν αποκτήσει μια υπολογίσιμη μαθηματικά γνώση, καθώς και την ικανότητα να λειτουργούν, με πολύ μικρότερη βέβαια ταχύτητα, όπως ένας υπολογιστής εφοδιασμένος με ένα κατάλληλο πρόγραμμα.

- Δεν έχουν αποκτήσει όμως την ικανότητα να χρησιμοποιούν τη γνώση τους ευέλικτα, ώστε να μπορούν να λύνουν προβλήματα που δεν είναι παρόμοια με άλλα, γνωστά σε αυτούς από πριν.

Δηλαδή, δεν έχουν αποκτήσει ουσιαστική μαθηματική σκέψη.



- **Η μάθηση στα Μαθηματικά πρέπει να είναι εννοιολογική.**
- Ο μαθητής δεν πρέπει να μαθαίνει απλά ορισμούς, θεωρήματα και διαδικασίες. Πρέπει να καταβάλλεται προσπάθεια να κατανοεί τις ιδέες που υπάρχουν πίσω από την τυπική περιγραφή αυτών. Να κατανοεί τις βαθύτερες αιτίες που οδηγούν στα μαθηματικά αποτελέσματα.

- Μια διδασκαλία που επιδιώκει την εννοιολογική κατανόηση δεν είναι εύκολη.
- Η αφηρημένη φύση των μαθηματικών ιδεών αποτελεί ένα από τα μεγάλα εμπόδια.

- Μια διδασκαλία που περιέχει ως βασικό συστατικό στοιχείο τη χρήση οπτικών αναπαραστάσεων μπορεί να βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση από τους μαθητές των μαθηματικών εννοιών.

- Μια τέτοια διδασκαλία μπορεί επίσης να οδηγήσει τους μαθητές στο να μάθουν να χρησιμοποιούν τις αναπαραστάσεις ως εργαλείο, όταν προσπαθούν να κατανοήσουν μόνοι τους μια έννοια ή απόδειξη ή ακόμη και να αποδείξουν έναν ισχυρισμό.

Οι μαθητές πρέπει:

- Να μάθουν να μελετούν τις εικόνες και να καταλαβαίνουν τι "λένε".
- Να μπορούν να μετατρέπουν τις συμβολικές σχέσεις σε εικόνες και να μεταφράζουν τις εικόνες σε συμβολικά Μαθηματικά.

- Η μετάβαση από τα σύμβολα στις εικόνες, δηλαδή από το αφηρημένο στο συγκεκριμένο, τους δίνει τη δυνατότητα να κατανοήσουν καλύτερα το αφηρημένο και να σκεφτούν πάνω σε κάτι που αντιλαμβάνονται με τις αισθήσεις τους.

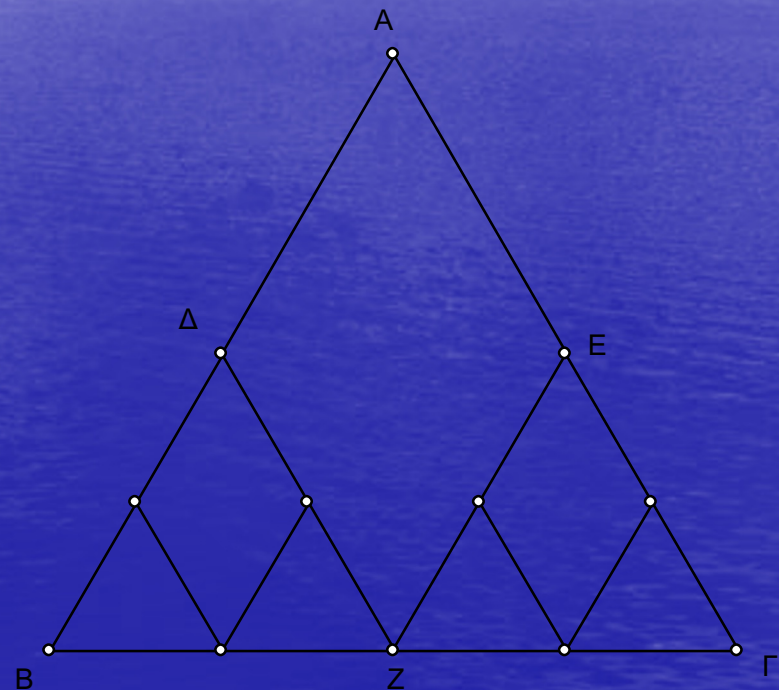
- Η δυνατότητα απόδοσης των εικόνων με τυπικά Μαθηματικά είναι απαραίτητη γιατί μόνον έτσι, δηλαδή μέσα από την αυστηρά τυπική απόδειξη, κατοχυρώνεται και γίνεται αποδεκτή μια Μαθηματική αλήθεια.

- Συμπεράσματα που στηρίζονται αποκλειστικά στην εικόνα είναι δυνατόν να είναι εσφαλμένα.

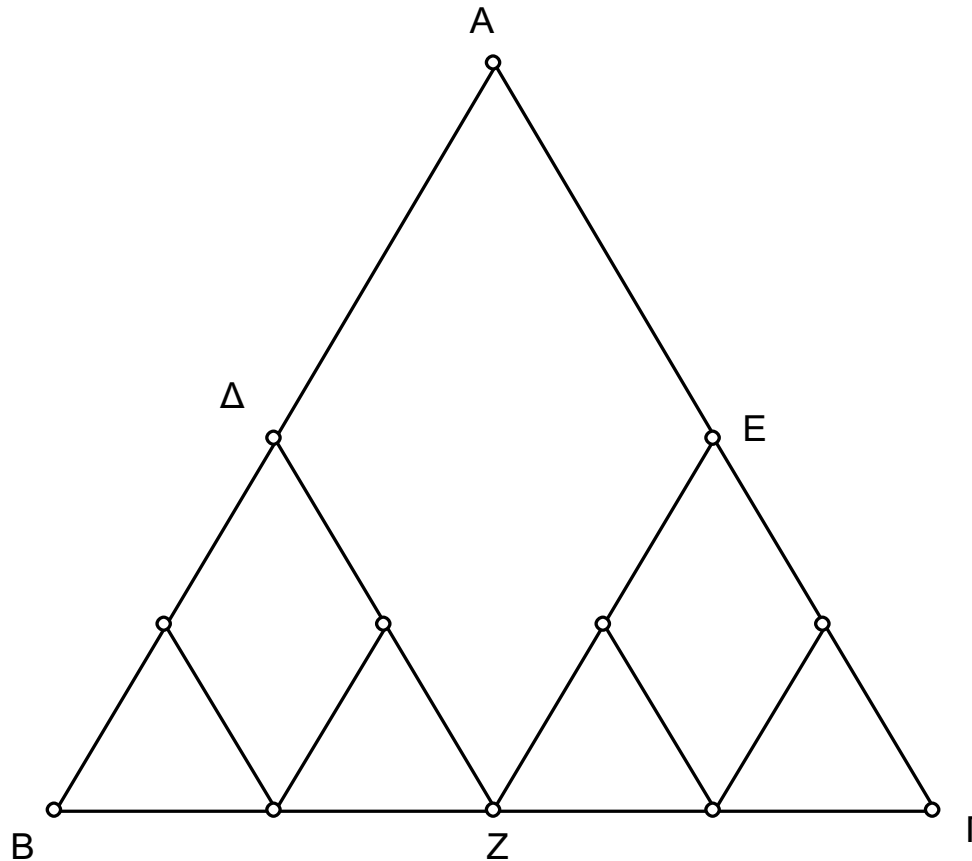


- Ένα απλό, αλλά χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου σφάλματος είναι και το επόμενο:

- Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  θεωρούμε τα μέσα των πλευρών του και κατασκευάζουμε τα τρίγωνα  $B\Delta Z$  και  $\Delta E\Gamma$ . Έστω  $a_1 = B\Delta + \Delta Z + ZE + E\Gamma$ . Στα τρίγωνα  $B\Delta Z$  και  $Z E\Gamma$  εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία, κατασκευάζουμε τέσσερα τρίγωνα και θέτουμε  $a_n$  το άθροισμα των αντίστοιχων οκτώ πλευρών. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία κατασκευάζουμε μια ακολουθία  $a_n$ :  $n=1,2,\dots$ . Ποιο είναι το όριο της ακολουθίας  $a_n$ ;



Η εικόνα μπορεί να μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι το όριο της  $a_n$  είναι το μήκος της ΒΓ. Όμως εύκολα αποδεικνύεται ότι  $a_n = AB + AΓ$  για κάθε  $n = 1, 2, \dots$ .



# **ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ**

**Πως μπορούν να χρησιμοποιηθούν  
οι εικονικές αναπαραστάσεις στη  
διδασκαλία των Μαθηματικών, ώστε  
συντελέσουν στην οικοδόμηση  
πραγματικής μαθηματικής σκέψης  
από τον μαθητή;**

# Χρήση αναπαραστάσεων για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών

Οι μαθηματικές έννοιες, αν εξαιρέσουμε τις γεωμετρικές, είναι έννοιες αφηρημένες. Οι ορισμοί τους δίνονται με μαθηματικά σύμβολα και η κατανόηση τους από τον μαθητή είναι πολλές φορές ελλιπής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την αδυναμία ή τη λανθασμένη χρήση τους στη λύση ασκήσεων.

Η δυνατότητα απόδοσης των ορισμών με μια οπτική αναπαράσταση μπορεί να βοηθήσει το μαθητή να τους κατανοήσει καλύτερα και να τους χρησιμοποιεί σωστά.

- Ένα παράδειγμα έννοιας που δημιουργεί προβλήματα στους μαθητές και εισάγεται στις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου, είναι η έννοια της απόλυτης τιμής.
- Ο τυπικός ορισμός μαθαίνεται από τους μαθητές με έναν μάλλον μηχανιστικό τρόπο και αυτό πολλές φορές τους οδηγεί σε λάθη.
- Επίσης τους εμποδίζει να κατανοήσουν πιο δύσκολες έννοιες που θα συναντήσουν αργότερα και που η απόλυτη τιμή παίζει καθοριστικό ρόλο στον ορισμό τους.

- Αν ο μαθητής έχει κατανοήσει την αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών σε έναν άξονα και αντιληφθεί την απόλυτη τιμή ενός αριθμού ως την απόσταση του από το μηδέν, καθώς και την απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο αριθμών ως την απόσταση τους πάνω στον άξονα, θα έχει τη δυνατότητα να βλέπει θέματα που συνδέονται με την απόλυτη τιμή και από μια γεωμετρική οπτική. Αυτή η οπτική θα του φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη σε πολλές περιπτώσεις.

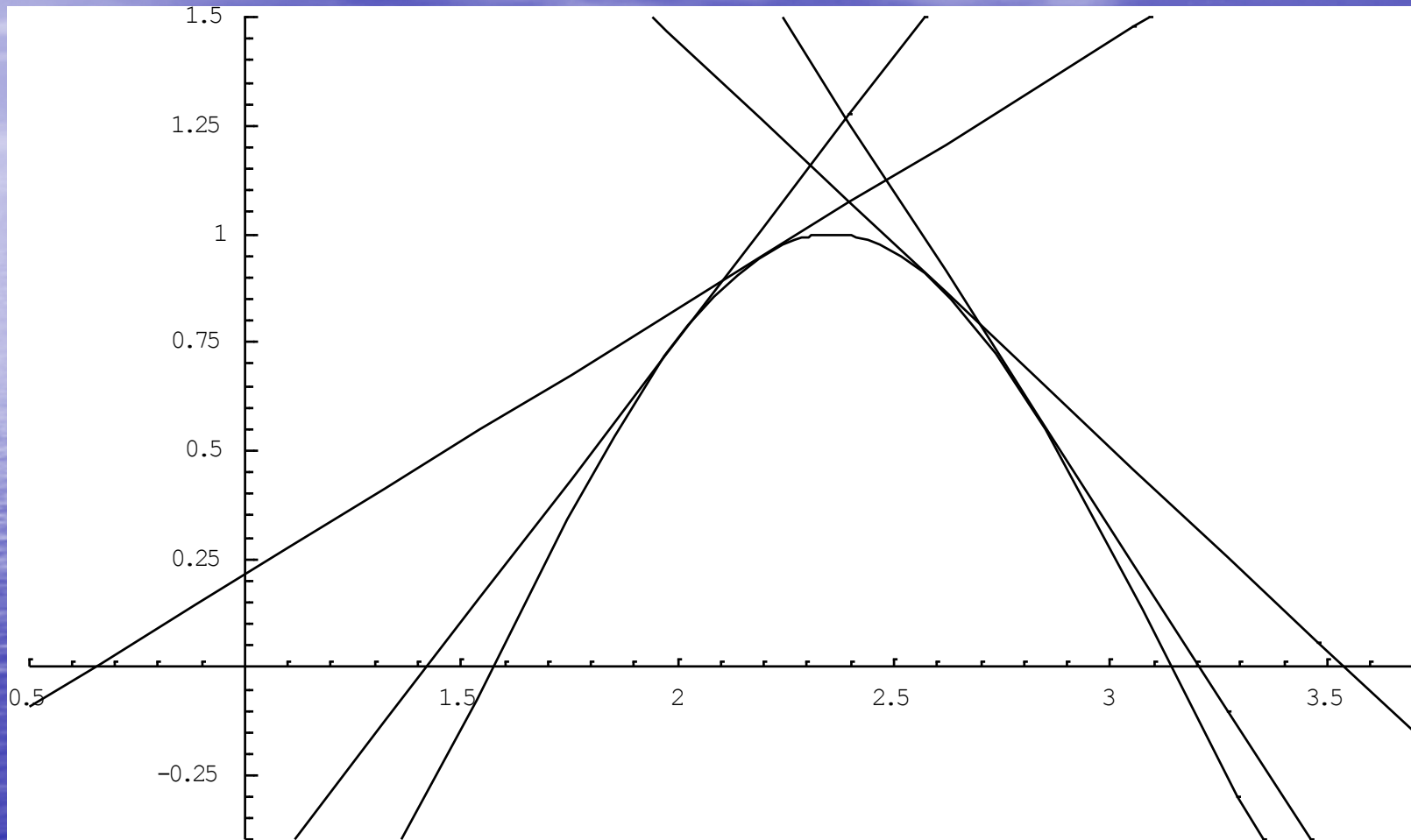


# Χρήση αναπαραστάσεων για τη δημιουργία εικασιών.

Ο ρόλος των εικασιών στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης είναι πολύ σημαντικός. Για να αποδείξουμε μια μαθηματική πρόταση πρέπει πρώτα αυτή να προκύψει ως εικασία. Δηλαδή, μετά από κατάλληλες σκέψεις να οδηγηθούμε στη διατύπωση αυτής της πρότασης και να μας δημιουργηθεί η πεποίθηση ότι αυτή ισχύει.

Οι αναπαραστάσεις μπορούν να βοηθήσουν σημαντικά στη δημιουργία προβληματισμού μέσα στην τάξη, ο οποίος θα οδηγήσει στη διατύπωση της εικασίας.

- Ας δούμε για παράδειγμα ένα σημαντικό θεώρημα της Μαθηματικής Ανάλυσης που συμπεριλαμβάνεται στην ύλη του λυκείου.
- Είναι το θεώρημα που συνδέει τη μονοτονία μιας διαφορίσιμης συνάρτησης με το πρόσημο της πρώτης παραγώγου της.
- Πως, όμως, σκεφτήκαμε ότι συνδέεται η μονοτονία μιας διαφορίσιμης συνάρτησης με το πρόσημο της παραγώγου της και οδηγηθήκαμε στη διατύπωση του συγκεκριμένου θεωρήματος;



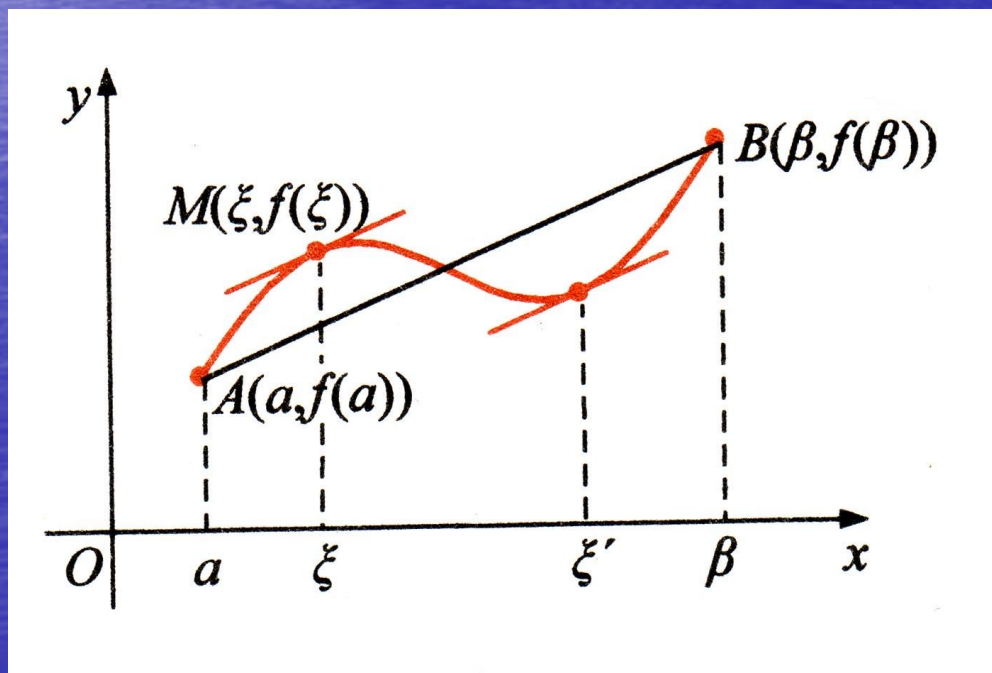
- Η παρατήρηση της κλίσης της εφαπτομένης στα διαστήματα που η συνάρτηση είναι μονότονη μας οδηγεί στη σύνδεση της μονοτονίας με την παράγωγο. Στη συνέχεια με ποιο προσεκτική μελέτη γραφημάτων και με κατάλληλες ερωτήσεις που τίθενται από τον καθηγητή μπορεί να δημιουργηθεί η ακόλουθη εικασία:
- Αν η παράγωγος μιας διαφορίσιμης συνάρτησης είναι θετική ( αντ. αρνητική) σε ένα διάστημα τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα (αντ. γνησίως φθίνουσα) σε αυτό το διάστημα.

# Χρήση αναπαραστάσεων για την περιγραφή Μαθηματικών συμπερασμάτων.

Μια μαθηματική πρόταση διατυπώνεται σε καθαρά συμβολική μορφή. Η διατύπωση αυτή πολλές φορές φαίνεται δυσνόητη και ξένη στον μαθητή. Η περιγραφή αυτής της πρότασης με μια οπτική αναπαράσταση, μπορεί να βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση της.

- Ένα κλασσικό παράδειγμα είναι το θεώρημα της Μέσης Τιμής

- “ Αν  $f:[a, b]$  συνάρτηση συνεχής στο  $[a, b]$  και διαφορίσιμη στο  $(a, b)$  τότε υπάρχει  $\xi (a, b)$  ώστε  $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$





# Περιγραφή διαδικασιών και αποδείξεων

- Πολλές φορές διαδικασίες ή αποδείξεις φαίνονται στους μαθητές περίεργες. Δεν μπορούν να καταλάβουν τι “λένε” και έτσι δεν μπορούν να τις κατανοήσουν.
- Άλλα και όσον αφορά στις διαδικασίες ή αποδείξεις που οι μαθητές τις θεωρούν εύκολες, πολλές φορές μπορούν απλώς να τις εφαρμόσουν ή να τις αναπαράγουν όταν τους ζητηθεί, αλλά πολλοί από αυτούς δεν έχουν κατανοήσει την ουσία τους. Δεν έχουν καταλάβει την ουσιαστική μαθηματική ιδέα που κρύβεται πίσω από τη τυπική παρουσίαση της απόδειξης.

- Η δυνατότητα περιγραφής τέτοιων διαδικασιών ή αποδείξεων με οικίες στο μαθητή αναπαραστάσεις τον βοηθάει στην κατανόηση τους.

- Ένα παράδειγμα μια τέτοιας απόδειξης είναι η απόδειξη του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών
- «Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $[a, b]$  και  $h$  ένας πραγματικός αριθμός μεταξύ του  $f(a)$  και του  $f(b)$ . Τότε υπάρχει  $\xi$  στο διάστημα  $(a, b)$  ώστε  $f(\xi) = h$ .»

- Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού, η οποία υπάρχει στα σχολικά βιβλία, προκύπτει εύκολα από την ειδική περίπτωση για  $h=0$ , η οποία είναι γνωστή ως θεώρημα του Bolzano και υπάρχει στα σχολικά βιβλία χωρίς απόδειξη.

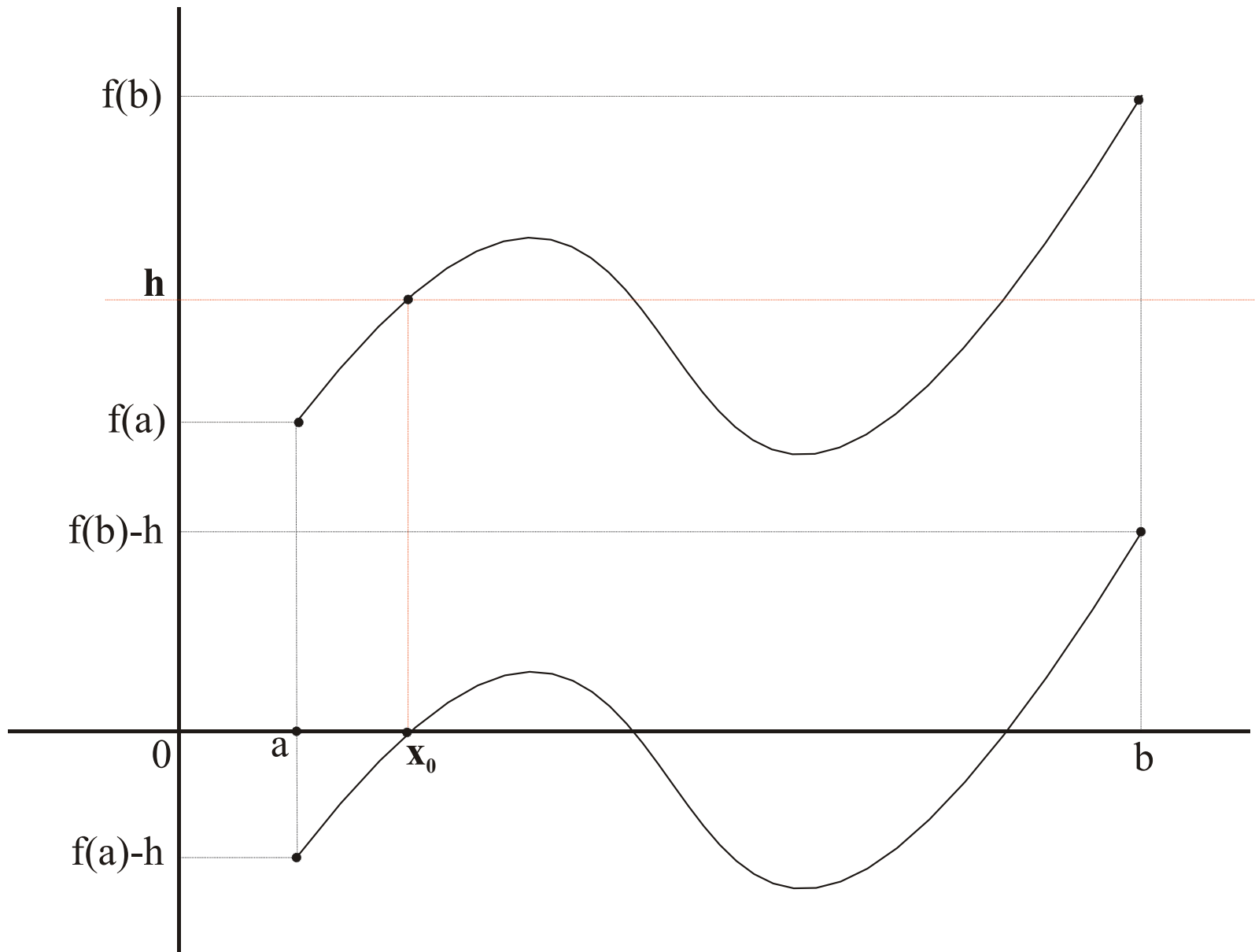
- Πράγματι, αν θεωρήσουμε την συνάρτηση  $g(x)=f(x)-h$  για κάθε  $x$  στο  $[a, b]$ , είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσουμε ότι αυτή ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano. Συνεπώς υπάρχει  $\xi$  στο  $(a, b)$  ώστε  $g(\xi)=0$ . Άρα  $f(\xi)=h$ .

- Η παραπάνω απόδειξη είναι μια απλή απόδειξη που δεν δημιουργεί πρόβλημα στους μαθητές. Πόσοι όμως από αυτούς κατανοούν την ουσία της;

- Πόσοι κατανοούν ότι κάνουμε μια μεταφορά της συνάρτησης  $f$ , ώστε να ικανοποιηθούν οι προϋποθέσεις για να εφαρμοστεί το θεώρημα του Bolzano;

- Η περιγραφή της παραπάνω απόδειξης με την παρακάτω εικόνα αναδεικνύει αυτή την ιδέα.





- Οι αναπαραστάσεις που αναφέραμε παραπάνω είναι όλες γεωμετρικές αναπαραστάσεις. Δηλαδή έχουν ένα άμεσα μαθηματικό περιεχόμενο.
- Η ενσάρκωση όμως μιας μαθηματικής ιδέας δεν γίνεται μόνο μέσα από τέτοιου τύπου αναπαραστάσεις.
- Υπάρχουν και αναπαραστάσεις που δεν έχουν άμεση σχέση με τα Μαθηματικά, αλλά μπορούν να βοηθήσουν στη κατανόηση μαθηματικών ιδεών.

- Ένα τέτοιο κλασσικό παράδειγμα είναι το επόμενο.
- Τοποθετούμε στη σειρά και σε όρθια θέση τα πλακίδια του γνωστού παιχνιδιού “ντόμινο”, ώστε η απόσταση κάθε ενός από το επόμενο του να είναι μικρότερη του ύψους τους. Αν ρίξουμε το πρώτο πλακίδιο τότε θα πέσουν όλα.
- Γιατί συμβαίνει αυτό;
- Αυτό συμβαίνει επειδή πέφτει το πρώτο και όταν πέσει κάποιο θα πέσει και το επόμενο του

- Η παραπάνω εικόνα βοηθά να αντιληφθεί ο μαθητής την αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής που πολλές φορές εφαρμόζουμε για να αποδείξουμε ότι μια σχέση ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς.

- Πολλές φορές σε μαθηματικές ιδιότητες δίνουμε μια ονομασία που παραπέμπει σε μη μαθηματική, νοερή εικόνα.

Πολλές φορές σε μαθηματικές ιδιότητες δίνουμε μια ονομασία που παραπέμπει σε μη μαθηματική, νοερή εικόνα.

Παράδειγμα:

“Έστω  $a_n, \beta_n, \gamma_n$  τρεις ακολουθίες με  $a_n \leq \beta_n \leq \gamma_n$  για κάθε  $n=1,2,\dots$ . Αν  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = a$  τότε και  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = a$ .”

- Ας φανταστούμε δύο αστυνομικούς οι οποίοι έχουν συλλάβει ένα κρατούμενο και τον κρατάνε από τη μια μεριά ο ένας και από την άλλη ο άλλος. Τότε, όπου πάνε οι αστυνομικοί εκεί αναγκαστικά θα πάει και ο κρατούμενος.
- Αυτή η, μη μαθηματική, νοερή εικόνα αναπαριστά την παραπάνω μαθηματική ιδιότητα.
- Για αυτό το λόγο σε ορισμένα βιβλία αυτή η ιδιότητα ονομάζεται “αρχή των αστυνομικών”.

# Συμπεράσματα

Η χρήση κατάλληλων οπτικών αναπαραστάσεων μπορεί να βοηθήσει ουσιαστικά τους μαθητές

- να κατανοήσουν μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες,
- να προβληματιστούν,
- να σκεφτούν και να οδηγηθούν σε εικασίες,
- να καταλάβουν τις ιδέες που κρύβονται μέσα στις τυπικές αποδείξεις.



- Για να μπορέσει ο μαθητής να κάνει ουσιαστική χρήση αυτών των αναπαραστάσεων πρέπει η διδασκαλία των μαθηματικών στο σχολείο να είναι τέτοια ώστε να συνδυάζει τα συμβολικά μαθηματικά με τις οπτικές αναπαραστάσεις.

- Να μάθει ο μαθητής να χρησιμοποιεί και τους δύο τρόπους προσέγγισης των Μαθηματικών, να γνωρίζει τα όρια τους και να μπορεί να μεταβαίνει από τον ένα στον άλλο.
- Να εξασκηθεί ώστε να είναι σε θέση να χρησιμοποιεί κάθε φορά αυτόν που είναι πιο πρόσφορος για να λύσει το πρόβλημα που αντιμετωπίζει, γνωρίζοντας όμως ότι η μαθηματική αλήθεια κατοχυρώνεται μόνο μέσα από τη τυπική απόδειξη