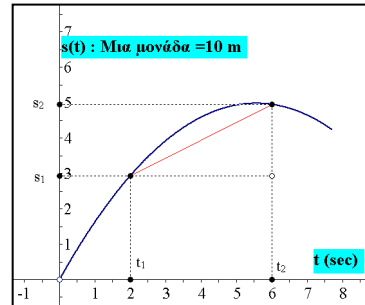


ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Το θέμα

Η κίνηση ενός τραίνου περιγράφεται από τη συνάρτηση $y = s(t)$ της οποίας το γράφημα δίνεται στο διπλανό σχήμα. Η ανεξάρτητη μεταβλητή t εκφράζει το χρόνο κίνησης του τραίνου και η εξαρτημένη μεταβλητή $s(t)$ την απόσταση που έχει διανύσει το τρένο μέχρι τη χρονική στιγμή t .



E1: Μπορείτε να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του οχήματος ανάμεσα στις χρονικές στιγμές $t_1 = 2 \text{ sec}$ και $t_2 = 6 \text{ sec}$;
Τι σημαίνει γεωμετρικά η μέση ταχύτητα που υπολογίσατε στο προηγούμενο σχήμα;

Εδώ αναμένεται να συσχετίσουν οι μαθητές τη μέση ταχύτητα με την κλίση της τέμνουσας.

E2: Ποια είναι η κοινή μαθηματική έννοια που υπάρχει σε όλες τις παρακάτω εκφράσεις:
στιγμιαία ταχύτητα, στιγμιαίος (ή οριακός) ρυθμός μεταβολής, κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης σε ένα σημείο;

Είναι επιθυμητό οι μαθητές να οδηγηθούν, με τη συμβολή και του καθηγητή εάν απαιτείται, στην έννοια του παράγωγου αριθμού $f'(x_0)$.

E3: Τι σημαίνει γραφικά το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας του τρένου τη χρονική στιγμή $t_0 = 4 \text{ sec}$;

Η επιθυμητή απάντηση είναι η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης στο σημείο $(t_0, s(t_0))$.

E4: Νομίζετε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του τρένου από τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ sec}$ έως τη χρονική στιγμή $t_2 = 6 \text{ sec}$ υπάρχει χρονική στιγμή t_0 , όπου το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας ισούται με τη μέση ταχύτητα που βρήκατε προηγουμένως για το χρονικό διάστημα $[t_1, t_2]$;

Μια διαισθητική απάντηση από την πλευρά των μαθητών θα ήταν ικανοποιητική.

**E5: Ισχύει το συμπέρασμα της E4 για οποιεσδήποτε χρονικές στιγμές t_1 και t_2 ;
Μπορείτε να εκφράσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια συμβόλων;**

Ο στόχος είναι οι μαθητές να οδηγηθούν στο συμπέρασμα ότι σε οποιοδήποτε διάστημα $[t_1, t_2]$ υπάρχει χρονική στιγμή t_0 ώστε $s'(t_0) = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ ή αλλιώς ότι $v(t_0) = v_\mu$ όπου $v(t_0)$ η στιγμιαία ταχύτητα στο t_0 και v_μ η μέση ταχύτητα στο διάστημα $[t_1, t_2]$.

E6: Προσπαθήστε να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία της απάντησης στην E5;

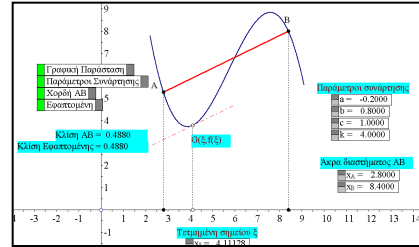
Εδώ, με τη βοήθεια των προηγούμενων ερωτημάτων αλλά και τη συμβολή του καθηγητή, αναμένεται οι μαθητές να οδηγηθούν στη γεωμετρική ερμηνεία του ΘΜΤ με όρους της υπάρχουσας κατάστασης (μέση ταχύτητα, στιγμιαία ταχύτητα-κλίση τέμνουσας, κλίση εφαπτομένης).

Ο καθηγητής θα μπορούσε, με αφετηρία τις δύο διαφορετικές έννοιες της μέσης και στιγμιαίας ταχύτητας, αξιοποιώντας ενδεχομένως και κάποιες από τις διαισθητικές απαντήσεις των μαθητών, να συμβάλλει στη διαμόρφωση μιας εικασίας για το Θ.Μ.Τ. Αυτό μπορεί να αποτελέσει για κάποιους από τους μαθητές το έναυσμα που μπορεί να οδηγήσει σε περαιτέρω ανάλυση και διερεύνηση.

**E7: Θα μπορούσατε να γενικεύσετε το συμπέρασμα της E5 για μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $[x_1, x_2]$;
Ποια είναι η αντίστοιχη διατύπωση;**

Ανοίξτε το αρχείο του Geogebra και πατήστε τα κουμπιά εμφάνισης για να δείτε το περιβάλλον:

Με τη βοήθεια των αντιστοίχων πλήκτρων μπορείτε εμφανίσετε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, τη χορδή AB και ένα τυχαίο σημείο $G(\xi, f(\xi))$ της γραφικής παράστασης μαζί με την εφαπτομένη της σε αυτό. Μεταβάλλοντας την τιμή της τετμημένης x_ξ



μπορείτε να μετακινήσετε το σημείο G πάνω στη γραφική παράσταση και να κάνετε παρατηρήσεις για τις κλίσεις της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης και της χορδής AB.

E8: Μετακινώντας το σημείο επαφής G ανάμεσα στα σημεία A και B , μπορείτε να εξετάσετε εάν υπάρχει κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης το οποίο να ικανοποιεί την εικασία της E6 ;

Οι μαθητές πειραματίζονται με τη γραφική παράσταση της συγκεκριμένης συνάρτησης, προσπαθώντας να εξακριβώσουν εάν υπάρχει κάποιο σημείο της ανάμεσα στα A και B, στο οποίο η εφαπτομένη να γίνει παράλληλη με τη χορδή AB. Αναμένεται να κάνουν μια γραφική διαπίστωση για το Θ.Μ.Τ. που θα βοηθήσει στη συνέχεια της δραστηριότητας. Σημειώνουμε ότι προκειμένου να επιτευχθεί ισότητα ανάμεσα στις δύο κλίσεις θα πρέπει να μεταβληθούν δεκαδικά ψηφία διαφόρων τάξεων στην τετμημένη x_ξ του σημείου G .

Ο καθηγητής θα πρέπει να βοηθήσει τους μαθητές στο τεχνικό αυτό μέρος εξηγώντας τους με ποιο τρόπο μπορούν να μεταβάλλουν δεκαδικά ψηφία διαφόρων τάξεων καθώς και το πλήθος τους.

Στη συνέχεια οι μαθητές μπορούν να μεταβάλλουν τη μορφή της συνάρτησης επεμβαίνοντας σε κάποιες από τις παραμέτρους της ή ακόμη και τα άκρα x_1, x_2 ώστε να διαπιστώσουν ότι οι κλίσεις γίνονται ίσες σε όλες αυτές τις διαφορετικές περιπτώσεις.

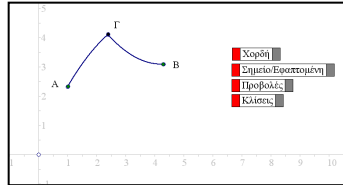
E9: Ποιες ιδιότητες νομίζετε ότι πρέπει να έχει η συνάρτηση f ώστε να ισχύει η παραπάνω εικασία;

Εδώ είναι επιθυμητή μια γενική διατύπωση του ΘΜΤ για τη συνάρτηση f , αρχικά με τη βοήθεια της γεωμετρικής ερμηνείας. Στόχο αποτελεί μια συζήτηση πάνω στις υποθέσεις του και η τελική τυπική του διατύπωση με τη βοήθεια των επόμενων ερωτήσεων

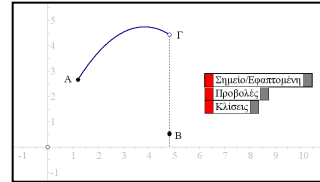
Μέσω των παραδειγμάτων που ακολουθούν δίνεται έμφαση στις υποθέσεις του θεωρήματος: Η παραγωγισιμότητα στο εσωτερικό του διαστήματος και η συνέχεια στα άκρα είναι απολύτως αναγκαίες.

E10: Για κάθε μια από τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις, υπάρχει κάποιος πραγματικός αριθμός ξ στο εσωτερικό του αντίστοιχου διαστήματος, ο οποίος να ικανοποιεί την εικασία της E6;

A)



B)



Στο αρχείο Geogebra δημιουργήστε αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις με τη βοήθεια των μετρητών και διαπιστώστε εάν ισχύει η εικασία που διαμορφώθηκε στην ερώτηση E6.

Οι μαθητές καλούνται στη συνέχεια, με τη βοήθεια των μετρητών του προγράμματος, να διαπιστώσουν ότι η κλίση του AB σε κάθε περίπτωση βρίσκεται πολύ έξω από το εύρος μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης και επομένως είναι αδύνατο κάποια στιγμή αυτές οι δύο κλίσεις να εξισωθούν.

Εδώ θα πρέπει να γίνει κάποιο σχόλιο από τον καθηγητή σχετικά με την υπολογιστική ανεπάρκεια, η οποία δίνει κλίση ακόμη και στο γωνιακό σημείο, ενώ αυτό δεν είναι σωστό.

E11: Για ποιο λόγο νομίζετε ότι δεν ισχύει η εικασία της E6 σε κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις;

Η απόλυτη αναγκαιότητα των προϋποθέσεων του Θ.Μ.Τ. θα πρέπει να τονιστεί από τον καθηγητή, ο οποίος θα μπορούσε ίσως να συμπληρώσει κάποιες ερωτήσεις όπως:

*Ποια είναι τα «προβληματικά» σημεία των γραφικών παραστάσεων σε κάθε περίπτωση;
Για ποιο λόγο; κ.λ.π.*

E12: Πως θα μπορούσατε να διατυπώσετε με τη βοήθεια μαθηματικών όρων και συμβόλων την εικασία που προέκυψε στα προηγούμενα ερωτήματα;

Σε αυτό το στάδιο πλέον ο καθηγητής μπορεί να ενισχύσει τους μαθητές στη διαμόρφωση του νοήματος του Θ.Μ.Τ. σε αυστηρή μαθηματική γλώσσα, καθώς επίσης και να δώσει το όνομα του θεωρήματος. Έτσι μπορεί να επαναφέρει κάποια ερωτήματα όπως:

Νομίζετε ότι το Θ.Μ.Τ. θα μπορούσε να εφαρμοστεί σε κάθε συνάρτηση;

Τι είδους ιδιότητες θα πρέπει να έχει μια συνάρτηση ώστε αυτό να μπορεί να εφαρμοστεί (Εμφαση στις υποθέσεις του θεωρήματος);

E13: Το σημείο που προκύπτει από το ΘΜΤ είναι το μοναδικό με τη συγκεκριμένη ιδιότητα;

Θα πρέπει να τονιστεί από τον καθηγητή ότι γενικά η ύπαρξη κάποιου αντικειμένου δεν συνεπάγεται άμεσα και μοναδικότητα. Οι μαθητές μπορούν να το διαπιστώσουν δουλεύοντας σε άλλη συνάρτηση στο αρχείο Geogebra.