

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Πρόβλημα: Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδό ενός κύκλου με ακτίνα $R=1$?

Αυτό είναι το γενικό πρόβλημα που θα εισάγει τους μαθητές στην άπειρη διαδικασία. Αναμένεται κάποιοι από τους μαθητές να γνωρίζουν τον τύπο που δίνει το εμβαδό του κύκλου και κατά πάσα πιθανότητα να δοθεί η απάντηση ότι το ζητούμενο εμβαδό ισούται με π .

Στην περίπτωση αυτή μπορεί να γίνει κάποια συζήτηση με ενδεχόμενες αφορμές τις παρακάτω ερωτήσεις:

Γιατί το εμβαδόν ισούται με π ;

Πώς προκύπτει ο τύπος $E = \pi R^2$;

Πώς μπορεί να υπολογιστεί το π ;

Προκειμένου να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημά μας, αρχίζουμε με τρεις ερωτήσεις που σχετίζονται με τις βασικές γνώσεις της μέτρησης εμβαδού.

E1: Τι σημαίνει ότι ένα τρίγωνο έχει εμβαδό ίσο με 4,5;

Αυτό σημαίνει ότι τέσσερα και μισό τετράγωνα πλευράς 1 μπορούν να καλύψουν ακριβώς την επιφάνεια του τριγώνου. Μπορεί να γίνει κάποια συζήτηση για τη μέτρηση εμβαδού καθώς και για την έννοια της μονάδας μέτρησης εμβαδού.

E2: Βρείτε γεωμετρικά σχήματα των οποίων το εμβαδό μπορεί να υπολογιστεί με την προηγούμενη μέθοδο.

Με την προηγούμενη μέθοδο μπορούμε να υπολογίσουμε εμβαδά πολυγώνων.

Μπορεί να γίνει συζήτηση για τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουμε το εμβαδό πολυγώνων, χωρίζοντάς τα σε μικρότερα ευθύγραμμα σχήματα των οποίων τα εμβαδά μπορούμε να τα υπολογίσουμε.

E3: Μπορούμε να χωρίσουμε τον κύκλο σε σχήματα των οποίων τα εμβαδά μπορούμε να τα υπολογίσουμε;

Η ερώτηση αυτή είναι ισοδύναμη με την ερώτηση “μπορούμε να χωρίσουμε τον κύκλο σε πολύγωνα;”. Οι πλευρές των πολυγώνων είναι ευθύγραμμα τμήματα και κατά συνέπεια ο κύκλος δεν μπορεί να χωριστεί σε πολύγωνα. Από την αρνητική απάντηση προκύπτει η επόμενη ερώτηση.

E4: Με ποιο τρόπο είναι δυνατόν να συνδέσουμε το εμβαδό του κύκλου με τα εμβαδά πολυγώνων;

Κάποια συζήτηση μπορεί να προκύψει από τις απαντήσεις των μαθητών. Στόχος της συζήτησης είναι να οδηγηθούμε στην ιδέα ότι μπορούμε να βρούμε πολύγωνα με εμβαδό μεγαλύτερο από αυτό του κύκλου και πολύγωνα με εμβαδό μικρότερο από αυτό του κύκλου (πχ πολύγωνα εγγεγραμμένα ή περιγεγραμμένα στον κύκλο)

Κατασκευάστε δυο τετράγωνα: Ένα εγγεγραμμένο και ένα περιγεγραμμένο στον κύκλο.

Προσπαθήστε να απαντήσετε στην ερώτηση χρησιμοποιώντας το αρχείο του Geogebra.

Στο περιβάλλον:

Μπορούμε να δούμε τον κύκλο.

Οι δύο δρομείς μεταβάλλουν την ακτίνα ρ του κύκλου και το πλήθος n των πλευρών του κανονικού εγγεγραμμένου και του κανονικού περιγεγραμμένου πολυγώνου στον κύκλο.

Εμφανίζονται τα εμβαδά αυτών των πολυγώνων και η διαφορά τους.

E5: Ποια σχέση υπάρχει ανάμεσα στο εμβαδό E του κύκλου και τα εμβαδά των δύο αυτών τετραγώνων;

E6: Ποια είναι η διαφορά των εμβαδών των δύο τετραγώνων;

Με τα παραπάνω εμβαδά επιτυγχάνουμε μια πρώτη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού E . Η προσέγγιση αυτή προφανώς δεν είναι πολύ καλή. Έτσι προκύπτει η επόμενη ερώτηση.

E7: Μέσω ποιας διαδικασίας είναι δυνατόν να επιτύχουμε καλύτερη προσέγγιση του E ;

Αυτή η ερώτηση είναι το κρίσιμο σημείο για να περάσουν οι μαθητές στην έννοια των διαδοχικών προσεγγίσεων. Οι μαθητές ενδεχομένως μπορούν να εικάσουν ότι η αύξηση στον αριθμό των πλευρών μπορεί να επιφέρει καλύτερες προσεγγίσεις.

Ο διδάσκων μπορεί να παροτρύνει τους μαθητές να εστιάσουν στη διαφορά του εσωτερικού από το εξωτερικό πολύγωνο καθώς το n μεγαλώνει. Η διαφορά μας δείχνει πόσο κοντά βρισκόμαστε στο ζητούμενο εμβαδό του κύκλου.

Κατασκευάζουμε το εσωτερικό και εξωτερικό κανονικό πεντάγωνο, επιτυγχάνοντας έτσι καλύτερη προσέγγιση του εμβαδού του κύκλου. Οι μαθητές μπορούν να πειραματιστούν με μεγαλύτερο αριθμό πλευρών.

Καθώς ο αριθμός των πλευρών αυξάνεται, τα πολύγωνα δείχνουν να ταυτίζονται με τον κύκλο ενώ στην πραγματικότητα αυτό δεν συμβαίνει. Αν ορισμένοι μαθητές προβληματίζονται μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μεγέθυνση. Το ενδιαφέρον μετατοπίζεται στα αριθμητικά αποτελέσματα.

E8: Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

n	Εμβαδό Εγγεγραμμένου n -γώνου	Εμβαδό Περιγεγραμμένου n -γώνου	Διαφορά των εμβαδών μικρότερη ή ίση από
4			
5			
6			
10			
12			
(18)			0,09
(23)	3,1...	3,1...	
(56)			0,009
(114)	3,14...	3,14....	
(177)			0,0009
(187)	3,141...	3,141...	
(243)			
(559)			0,00009

Στην ερώτηση αυτή οι μαθητές συμπληρώνουν τα κενά κελιά στον πίνακα. Τα αριθμητικά δεδομένα του πίνακα έχουν στόχο να κάνουν οι μαθητές κάποιες εικασίες σχετικές με τη σύγκλιση των τριών ακολουθιών.

Για τους αριθμούς όπως ο 0,09 που δίδονται στον πίνακα αναμένεται από τους μαθητές να βρουν κάποια τιμή του n τέτοια ώστε η διαφορά των δυο εμβαδών να είναι μικρότερη του 0,09 .

3,14... σημαίνει ότι το πλήθος των πλευρών είναι τέτοιο ώστε και το εσωτερικό και το εξωτερικό πολύγωνο έχουν εμβαδά με τα πρώτα δύο δεκαδικά τους ψηφία ίσα.

Στις παραπάνω ερωτήσεις οι απαντήσεις των μαθητών μπορεί να διαφέρουν.

E9: Υπάρχει κάποιο βήμα στη διαδικασία αυτή όπου το περιγεγραμμένο και το εγγεγραμμένο πολύγωνο θα έχουν το ίδιο εμβαδό με εκείνο του κύκλου;

Προφανώς, κανένα πολύγωνο δεν μπορεί να συμπίσει με τον κύκλο.

E10: Θα τερματίσει αυτή η διαδικασία;

Αφού η διαδικασία δεν τερματίζεται μπορεί να συνεχιστεί απεριόριστα. Δηλαδή, μπορούμε πάντοτε να πάρουμε πολύγωνα με περισσότερες πλευρές. Στο σημείο αυτό γίνεται το πέρασμα στις άπειρες διαδικασίες.

E11: Η διαφορά των εμβαδών ποιον αριθμό πλησιάζει;

Η διαφορά πλησιάζει το 0 όσο το πλήθος των πλευρών μεγαλώνει.

E12: Πόσο κοντά στον αριθμό αυτό μπορεί να φτάσει η διαφορά των εμβαδών;

Μπορούμε να βρεθούμε οσοδήποτε κοντά στο 0, αρκεί να επιλέξουμε κατάλληλα μεγάλο αριθμό πλευρών.

E13: Πόσο κοντά στο εμβαδό του κύκλου μπορούμε να φτάσουμε;

Σε συνδυασμό με την προηγούμενη ερώτηση μπορούμε να βρεθούμε οσοδήποτε κοντά στο εμβαδό του κύκλου.

