

άλγεβρα και αλγεβρική σκέψη
στην πρώτη σχολική περίοδο
(Νηπιαγωγείο – Δημοτικό)

ΜΑΡΙΑ ΚΑΛΔΡΥΜΙΔΟΥ

κάποια ερωτήματα

τι είναι η άλγεβρα;

τι περιλαμβάνει η άλγεβρα;

ποια η σχέση της με την αριθμητική;

γιατί άλγεβρα στο Δημοτικό;

Τι απαντήσεις παίρνουμε στην ερώτηση
τι είναι η άλγεβρα;

Εξισώσεις

Ταυτότητες

Γράμματα

Συναρτήσεις

Τριώνυμο

χ και ψ

Άλγεβρα και αλγεβρική σκέψη

τι, πώς και γιατί

Γιατί άλγεβρα και αλγεβρική σκέψη από το Νηπιαγωγείο;;;

Για να απαντήσουμε θα πρέπει να δούμε τι είναι η Άλγεβρα και σε τι διαφέρει από την Αριθμητική

Ένα ερώτημα:

γιατί δεν απαντούν σε κάποια προβλήματα

μαθητές Γυμνασίου

αλλά και

φοιτητές προπτυχιακοί και μεταπτυχιακοί

Πρόβλημα 1

Ο Γιάννης θα έβγαινε με τους φίλους του. Πριν πάει στη συνάντηση πέρασε να δει τη γιαγιά του, η οποία όταν έφευγε του έδωσε 50 ευρώ. Όταν το βράδυ γύρισε στο σπίτι διαπίστωσε ότι είχε 37 ευρώ λιγότερα από όσα είχε πριν φύγει. Πόσα ξόδεψε εκείνο το βράδυ;

75% των μαθητών Γ' Γυμνασίου αποτυγχάνουν

(G. Vergnaud)

Πρόβλημα 2

Ο δάσκαλος γυμναστικής αγόρασε για το σχολείο μπάλες ποδοσφαίρου που κόστισαν 120 ευρώ και κάποιες μπάλες μπάσκετ προς 20 ευρώ την κάθε μία. Το ποσό που έδωσε για αυτήν την αγορά του επέτρεπε να αγοράσει 11 μπάλες του μπάσκετ. Πόσες μπάλες μπάσκετ αγόρασε;

Ο Κώστας έδωσε την παρακάτω λύση: $(11 \times 20 - 120) \div 20 = 5$

Ο Γιάννης έδωσε την παρακάτω λύση: $11 - (120 \div 20) = 5$

Πώς το υπολόγισε ο καθένας;

Μόνο 1 (ένας) μαθητής Γ' Γυμνασίου μπόρεσε να εξηγήσει τη λύση του Γιάννη.

(Α. Ατματζίδου)

Αιτίες δυσκολίες στην Άλγεβρα

Τα **επιστημολογικά** χαρακτηριστικά της άλγεβρας που τη διαφοροποιούν από την αριθμητική

Η αντιμετώπιση της άλγεβρας ως **γενικευμένης αριθμητικής** από τα σχολικά προγράμματα σπουδών καθώς επίσης και η έμφαση στο **συντακτικό** της άλγεβρας και όχι στη **σημασία** των αντικειμένων (συμβόλων) των παραστάσεων

Υιοθέτηση της εισαγωγής της άλγεβρας από την αρχή της εκπαίδευσης και όχι ως συνέχεια της αριθμητικής

Επιστημολογικά χαρακτηριστικά της άλγεβρας και της αλγεβρικής σκέψης

Η άλγεβρα μελετά

- τις μεταβολές, τις σχέσεις,
- τις δομές και τις κανονικότητες

των (μαθηματικών) αντικειμένων που εμπλέκονται σε διάφορες καταστάσεις

Σε ένα περιβάλλον **αναλυτικού συμβολικού συλλογισμού** με χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων

Επιστημολογικά χαρακτηριστικά της άλγεβρας και της αλγεβρικής σκέψης

Ο αλγεβρικός συλλογισμός απαιτεί

Γενίκευση

- Επικέντρωση στη **δομή** και τις **σχέσεις** και όχι στις περιπτώσεις

Αφαίρεση

- Επικέντρωση στις **ιδιότητες** και όχι στα συγκεκριμένα αντικείμενα

Επιστημολογικά χαρακτηριστικά της άλγεβρας και της αλγεβρικής σκέψης

Έτσι πρέπει να **ανασκευαστεί** ή να **εμπλουτιστεί** η σημασία απλών συμβόλων και παραστάσεων από την αριθμητική, όπως π.χ.

Το νόημα και η σημασία του =

- από εκτελώ μια πράξη σε δήλωση σχέσης

Το νόημα και η σημασία των παραστάσεων με πράξεις $3+5$, $3/5$,

- από βρίσκω το αποτέλεσμα ότι είναι αριθμοί

Έτσι π.χ. στο $11 - (120 \div 20) = 5$, το $120 \div 20$ δηλώνει το πλήθος από μπάλες μπάσκετ που θα αγόραζε με το ποσό που έδωσε για τις μπάλες ποδοσφαίρου

Άλγεβρα (εξέλιξη)

από την επίλυση εξισώσεων

στη μελέτη των μεταβολών, των σχέσεων, των κανονικοτήτων και δομών, σε ένα περιβάλλον αναλυτικού συμβολικού συλλογισμού

με χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων

επιστημολογικά χαρακτηριστικά της άλγεβρας

γενίκευση

- όχι στις περιπτώσεις, αλλά στις δομές και σχέσεις

αφαίρεση

- επικέντρωση σε μια ιδιότητα

αποτελούν δύο βασικά χαρακτηριστικά της άλγεβρας

απαραίτητη η ανάπτυξη **συλλογισμού** για την επίτευξη γενικεύσεων και αφαιρέσεων

αλγεβρική σκέψη

συλλογισμός βασισμένος σε **μορφές δομημένων συντακτικά γενικεύσεων** και σε ενέργειες που καθοδηγούνται συντακτικά και **σημασιολογικά** (Karut, 1998)

αλγεβρικός συλλογισμός – πλαίσιο ανάπτυξης (Karut)

γενίκευση και αφαίρεση μοτίβων και κανονικοτήτων

διαχείριση συμβόλων που καθοδηγείται συντακτικά

μελέτη δομής και συστημάτων που αποτελούν αφαιρέσεις
σχέσεων

μελέτη συναρτήσεων, σχέσεων και μεταβολών

μοντελοποίηση

αλγεβρικός συλλογισμός (Radford, 2004)

αριθμητική σκέψη (συγκεκριμένες ποσότητες)

αλγεβρική σκέψη (απροσδιόριστες ποσότητες)

αλγεβρική σκέψη επεξεργασμένος πολιτισμικός τύπος
αναστοχασμού και δράσης

αλγεβρικός συλλογισμός (Kieran, 1992,
2007)

διαδικαστικές όψεις (αλγεβρικός λογισμός)

δομικές όψεις

σύνταξη και διαχείριση παραστάσεων αλλά και **σημασία (νόημα)** των στοιχείων που εμπλέκονται

Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΣΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

σχολική άλγεβρα

η άλγεβρα αντιμετωπίζεται (αντιμετωπιζόταν;) κυρίως ως γενικευμένη αριθμητική, με αποτέλεσμα να διδάσκεται μετά από αυτήν

ο αλγεβρικός συλλογισμός, κυρίως μέσα από τις γενικεύσεις και αφαιρέσεις, (πρέπει να) ξεκινά πολύ νωρίτερα, δεδομένου ότι η αντικατάσταση των συγκεκριμένων αριθμών με απροσδιόριστους ή γενικούς αριθμούς (επαγωγική γενίκευση) δεν αρκεί για το πέρασμα στον αλγεβρικό συλλογισμό

δυσκολίες στην άλγεβρα

μαθηματική δραστηριότητα συνδεδεμένη με τις περιστάσεις – δύσκολο το πέρασμα στη γενίκευση και αφαίρεση

ανάπτυξη ικανότητας συμβολικής διαχείρισης, με ανασκευή του **νοήματος** και των πιο απλών συμβόλων,

- π.χ. αλλαγή της σημασίας του **=**, από ένα σύμβολο που σημαίνει *κάνω κάτι* σε ένα σύμβολο που δηλώνει μια **σχέση (ανακλαστική, συμμετρική & μεταβατική)**

δυσκολίες στην άλγεβρα

δυσκολίες στην **απόδοση νοήματος** σε πολλές αλγεβρικές παραστάσεις, π.χ.

- α συγκεκριμένος αριθμός
- απλοποίηση μιας παράστασης, τάση να προστεθεί το =0
- μορφολογική αναγνώριση: $(x-3)^4 - (x+3)^4$ δεν αναγνωρίζεται ως διαφορά τετραγώνων ή ότι οι δύο σχέσεις $2\chi+3=4\psi-5$ και $2\rho+3=4\phi-5$ εκφράζουν την ίδια δομή μεταξύ των μεταβλητών

Μεταβλητές, άγνωστοι και εξισώσεις

υπολογιστικά λάθη, λόγω μορφής

σημασιολογικά λάθη (σύγχυση μεταξύ αγνώστου, μεταβλητής και παραμέτρου)

- συγκεκριμένος άγνωστος
- γενίκευση προτύπου
- μεταβαλλόμενο μέγεθος

μοντέλο ζυγαριάς για τις εξισώσεις (αλλά εμπόδιο για τις ανισώσεις)

περιγραφή με σύμβολα πραγματικών καταστάσεων ή προσομοιώσεων αυτών

Ανάδειξη δύο σημαντικών παραγόντων

Δυσκολία:

- **νοηματοδότησης** ακόμα και αριθμητικών παραστάσεων
- **αναπαράστασης και χειρισμού** μεταβλητής που απουσιάζει (αν και δεν παίζει ρόλο)

που αποτελούν δύο από τις αιτίες των καταγεγραμμένων δυσκολιών των μαθητών στην Άλγεβρα

Ένα κεντρικό ερώτημα (ζήτημα)

Μπορούμε να αναπτύξουμε την αλγεβρική σκέψη στο Δημοτικό χωρίς τη χρήση γραμμάτων αλλά με βάση την αριθμητική και τους αριθμούς;

Άλγεβρα – Πλαίσιο ανάπτυξης αλγεβρικής σκέψης

ΠΕΡΙΟΧΕΣ

γενίκευση και αφαίρεση μοτίβων και κανονικοτήτων

διαχείριση συμβόλων που καθοδηγείται συντακτικά

μελέτη δομής και συστημάτων που αποτελούν αφαιρέσεις σχέσεων

μελέτη συναρτήσεων, σχέσεων και μεταβολών

μοντελοποίηση

ΘΕΜΑΤΙΚΕΣ

κατανόηση προτύπων, σχέσεων και συναρτήσεων

αναπαράσταση και ανάλυση μαθηματικών καταστάσεων και δομών χρησιμοποιώντας αλγεβρικά σύμβολα

χρήση μαθηματικών μοντέλων για αναπαράσταση και κατανόηση ποσοτικών σχέσεων

ανάλυση μεταβολών σε διάφορα πλαίσια

πλαίσιο ανάπτυξης αλγεβρικής σκέψης

κατανόηση προτύπων, σχέσεων και συναρτήσεων

αναπαράσταση και ανάλυση μαθηματικών καταστάσεων και δομών χρησιμοποιώντας αλγεβρικά σύμβολα

χρήση μαθηματικών μοντέλων για αναπαράσταση και κατανόηση ποσοτικών σχέσεων












ανάλυση μεταβολών σε διάφορα πλαίσια

παράδειγμα στοιχείων ανάπτυξης αλγεβρικής σκέψης (1)

Ονομασία των εμπλεκόμενων αριθμητικών τιμών στα προβλήματα και των τιμών που εμφανίζονται σε κάθε βήμα

Αναγνώριση των μεταβλητών που εμπλέκονται και της φύσης των (μαθηματικών) αντικειμένων που εκφράζονται αριθμητικά

π.χ. αναγνώριση του ότι όταν διαιρώ μήκος με μήκος προκύπτει πλήθος διαστημάτων και όχι σημεία (πρβ. τριανταφυλλιές)

 0	0
 1	1
 2	0
 3	0
 4	1
 5	5
 6	56
 7	26
 8	4
 όλα τα παραπάνω	1
 κανένα από τα παραπάνω	18

παράδειγμα στοιχείων ανάπτυξης αλγεβρικής σκέψης (2)

- ο πολλαπλές αναπαραστάσεις και σχέσεις με αριθμητικές παραστάσεις
 - ο $3+5 = 2+6 = 9-1 = 2*4 = 16/2$
 - ο $5 = 4+1 = 3+2 = 2+3 = 1+4$
 - ο $25 + 45 - 45 = 25, 25 + \square = 57, 25 + \square + 3 - (2*4) = 20$

συζήτηση και αναζήτηση της γενικότητας, της δομής και της κανονικότητας αυτών των σχέσεων

προτάσεις για καταστάσεις που μπορεί να περιγράψουν αυτές οι παραστάσεις

παράδειγμα στοιχείων ανάπτυξης αλγεβρικής σκέψης (3)

Διερεύνηση ανοιχτών προβλημάτων:

Ο κ. Γ. αγόρασε 2 κιλά μήλα και 3 κιλά πορτοκάλια και πλήρωσε 10 ευρώ. Από το ίδιο κατάστημα, την ίδια μέρα η κ. Μ. αγόρασε 3 κιλά μήλα και 2 κιλά πορτοκάλια και πλήρωσε και αυτή 10 ευρώ. Ποια μπορεί να είναι η τιμή κιλού για τα μήλα και ποια για τα πορτοκάλια;

$x + \psi = 4 \rightarrow$ συμμεταβολή 2 μεταβλητών, γραμμική συνάρτηση

Πολλαπλές αναπαραστάσεις, με πίνακα τιμών, γράφημα, γραφική παράσταση

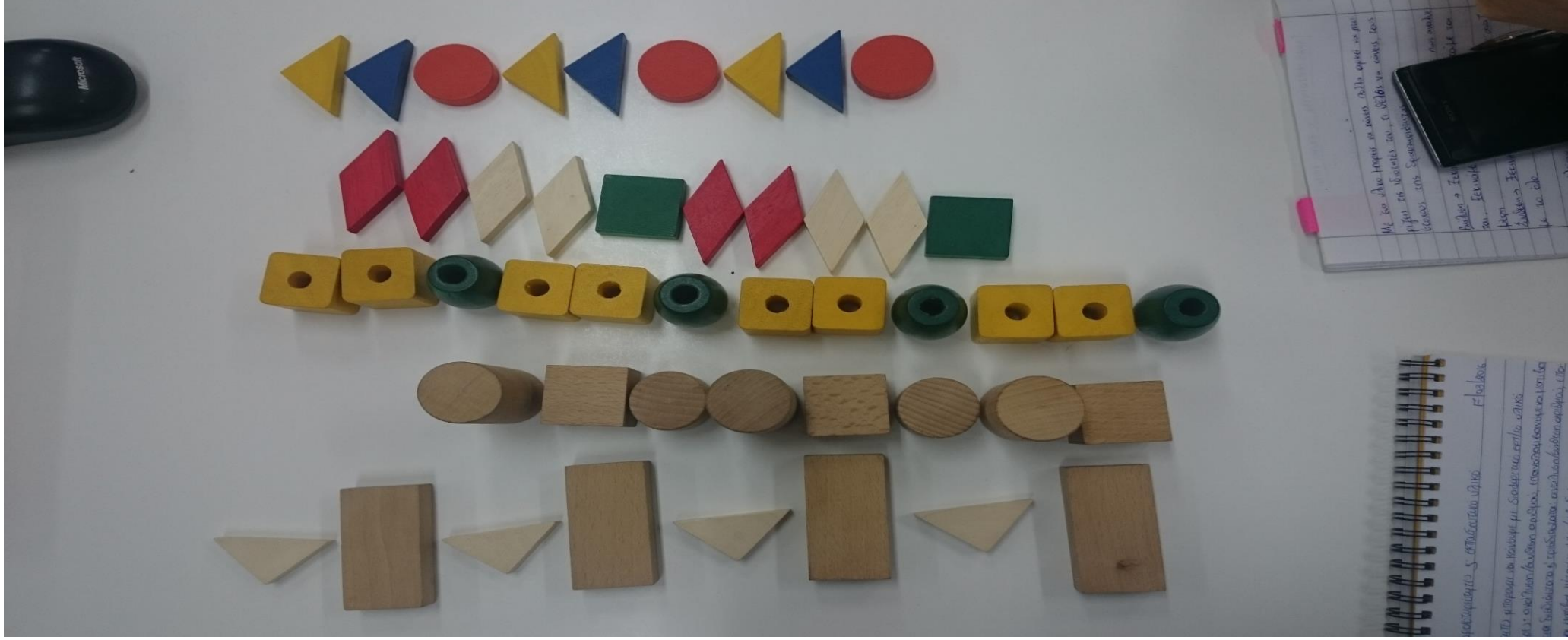
κανονικότητες – ακολουθίες
συναρτήσεις

μελέτη και
διερεύνηση
μοτίβων και
κανονικοτήτων

προνομιούχο
πεδίο ανάπτυξης
αλγεβρικής, και
όχι μόνο, σκέψης

κανονικότητες (μοτίβα, πρότυπα, patterns)

μια κανονικότητα περιλαμβάνει ένα σύνολο από χαρακτηριστικά ή σχέσεις που παραμένουν σταθερά μέσα σε ομάδες αριθμών, σχημάτων, μεγεθών ή άλλων μαθηματικών καταστάσεων (Τζεκάκη, 2010)



ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΕΣ

μονάδα

κανόνα διαδοχής

- επανάληψη
- ανάπτυξη

ΑΒΑΒΑΒΑΒ.....

1, 3, 5, 7,.....

1, 3, 9,.....

κανονικότητες - ακολουθίες

η σύνδεση κάθε στοιχείου με τη θέση που κατέχει στην κανονικότητα δημιουργεί μια μονότιμη αντιστοιχία, που αποτελεί μια ακολουθία

ποιες είναι οι ακολουθίες των προηγούμενων κανονικοτήτων;

κανονικότητες - ακολουθίες

ABABAB....

$$v=2\kappa+1 \quad \alpha_v = A$$

$$v=2\kappa \quad \alpha_v = B$$

1, 3, 5, 7, ...

$$\alpha_v = 2v - 1$$

1, 3, 9,

$$\alpha_v = 3^{v-1}$$

ακολουθίες - συναρτήσεις

μια (αριθμητική) ακολουθία είναι μία μονότιμη αντιστοίχιση από τους φυσικούς αριθμούς στους πραγματικούς αριθμούς

η (αριθμητική/πραγματική) συνάρτηση είναι μια επέκταση της ιδέας της ακολουθίας, δηλαδή είναι μια μονότιμη αντιστοίχιση από το σύνολο των πραγματικών αριθμών στον εαυτό του

κανονικότητες – ακολουθίες συναρτήσεις

κοινά και βασικά χαρακτηριστικά αποτελούν

η αντιστοίχιση μεταξύ δύο αντικειμένων (μεταβλητές)

οι πολλαπλές αναπαραστάσεις

- λεκτικές
- αριθμητικές (πίνακας τιμών)
- γραφικές
- συμβολικές

διδασκτική προσέγγιση

συστηματική διερεύνηση καταστάσεων κανονικότητας

- αναγνώριση μονάδας
- συμπλήρωση
- περιγραφή
- αναπαράσταση με άλλο υλικό/ σε άλλο πλαίσιο
- σύγκριση
- κατασκευή

ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΕΣ

Είδη

Επαναλαμβανόμενα

Αναπτυσσόμενα

Δράσεις

αναπαραγωγή με
αντιγραφή εξ
όψεως ή χωρίς

συνέχιση ή
επέκταση
κανονικοτήτων

αναγνώριση
δομικά όμοιων
κανονικοτήτων

δημιουργία
κανονικότητας

εύρεση στοιχείου
που λείπει

η αλλαγή υλικού

εύρεση μονάδας
επανάληψης ή
κανόνα μεταβολής

πρόβλεψη
στοιχείου (κοντινή
μακρινή ή γενική)

σύνδεση στοιχείου
με τη θέση στην
οποία βρίσκεται

ένα επαναλαμβανόμενο πρότυπο



ένα επαναλαμβανόμενο πρότυπο



ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗΣ

ποιο στοιχείο θα υπάρχει στη $10^{\text{η}}$ θέση

ποιο στοιχείο θα υπάρχει στη $30^{\text{η}}$ θέση

ποιο στοιχείο στην $100^{\text{η}}$ θέση

ποιος είναι ο κανόνας;

πώς μπορώ να το γράψω για την οποιαδήποτε θέση;

πώς μπορώ να το γράψω για τα οποιαδήποτε αντικείμενα;

ΚΑΝΟΝΑΣ

Αν η θέση είναι πολλαπλάσιο του 3 τότε είναι κόκκινος κύκλος

Αν η θέση είναι πολλαπλάσιο του 3 συν 1 τότε είναι κίτρινο τρίγωνο

Αν η θέση είναι πολλαπλάσιο του 3 συν 2 τότε είναι μπλε τρίγωνο

Αν η $n=3k$ τότε a_n =κόκκινος κύκλος

Αν η $n=3k+1$ τότε a_n =κίτρινο τρίγωνο

Αν η $n=3k+2$ τότε a_n =μπλε τρίγωνο

Τύπος του μοτίβου: ABΓ

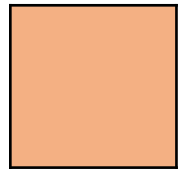
Αν $n=3k$ τότε a_n =Γ

Αν $n=3k+1$ τότε a_n =Α

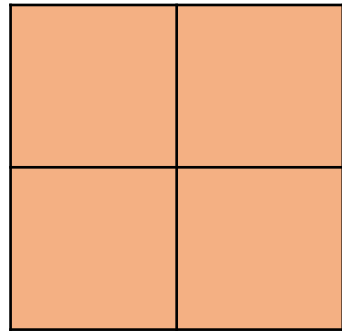
Αν $n=3k+2$ τότε a_n =Β

$$\Delta = \pi \delta + \upsilon, \upsilon = 0, \dots, \delta - 1$$

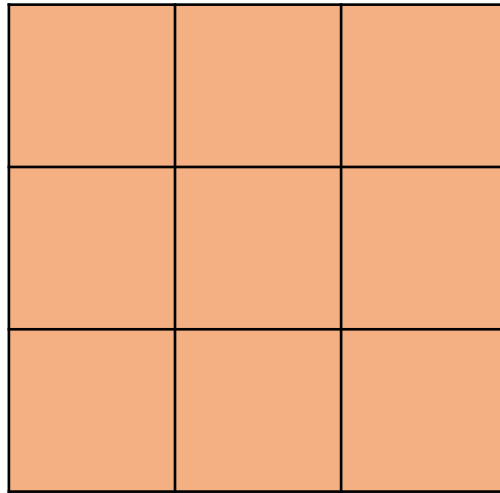
ένα αναπτυσσόμενο πρότυπο



1



2



3

μελέτη προτύπου (αριθμητική – γενίκευση)

	1	2	3	4	5	v
Περίμετρος	4α	8α	12α	16α	20α		$(4\alpha)v$
Εμβαδόν	α^2	$4\alpha^2$	$9\alpha^2$	$16\alpha^2$	$25\alpha^2$		$(\alpha^2)v^2$

16				
12				
8				
4				
	1	2	3	4

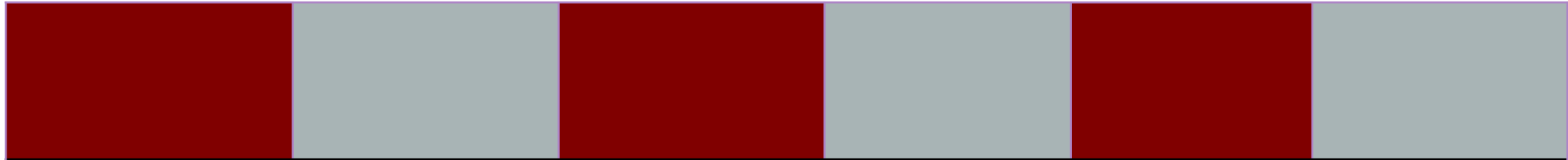
1	2	3	4

διδασκτική προσέγγιση

συστηματική διερεύνηση καταστάσεων κανονικότητας

- αναγνώριση μονάδας
- συμπλήρωση, γενίκευση
- περιγραφή
- αναπαράσταση με άλλο υλικό/ σε άλλο πλαίσιο
- σύγκριση
- κατασκευή

εξερεύνηση πάτερνς (1)



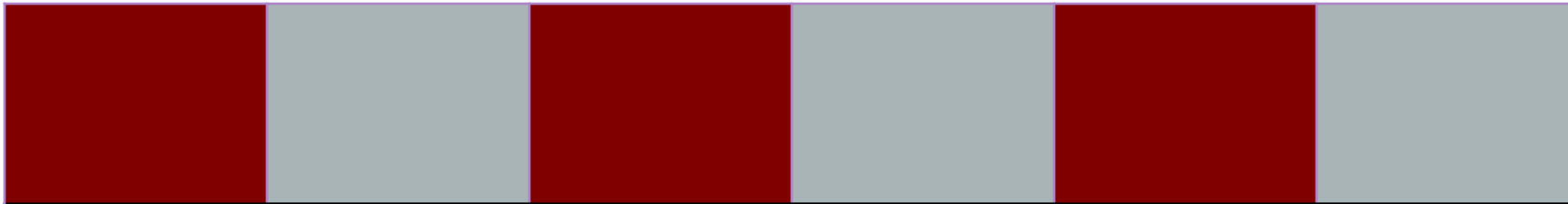
επαναλαμβανόμενο AB

επέκταση – συμπλήρωση – διατύπωση κανόνα – κατασκευή
ίδιου με άλλο υλικό

.....

Αλλά και άλλες επιλογές

εξερεύνηση πάτερνς (2)



.....

μεταβαλλόμενο (1, 2, 3, 4,...τετράγωνα)

διερεύνηση του πλήθους των πλευρών

διερεύνηση του εμβαδού

και αναπαράσταση σε πίνακα τιμών, σε γραφική παράσταση.....

εξερεύνηση πάτερνς (3)

τετράγωνα	1	2	3	4	5	6	7	...	v
πλήθος πλευρών	4	7	10	13	16	19	22		$3v+1$
εμβαδόν	α^2	$2\alpha^2$	$3\alpha^2$	$4\alpha^2$	$5\alpha^2$	$6\alpha^2$	$7\alpha^2$		$v\alpha^2$

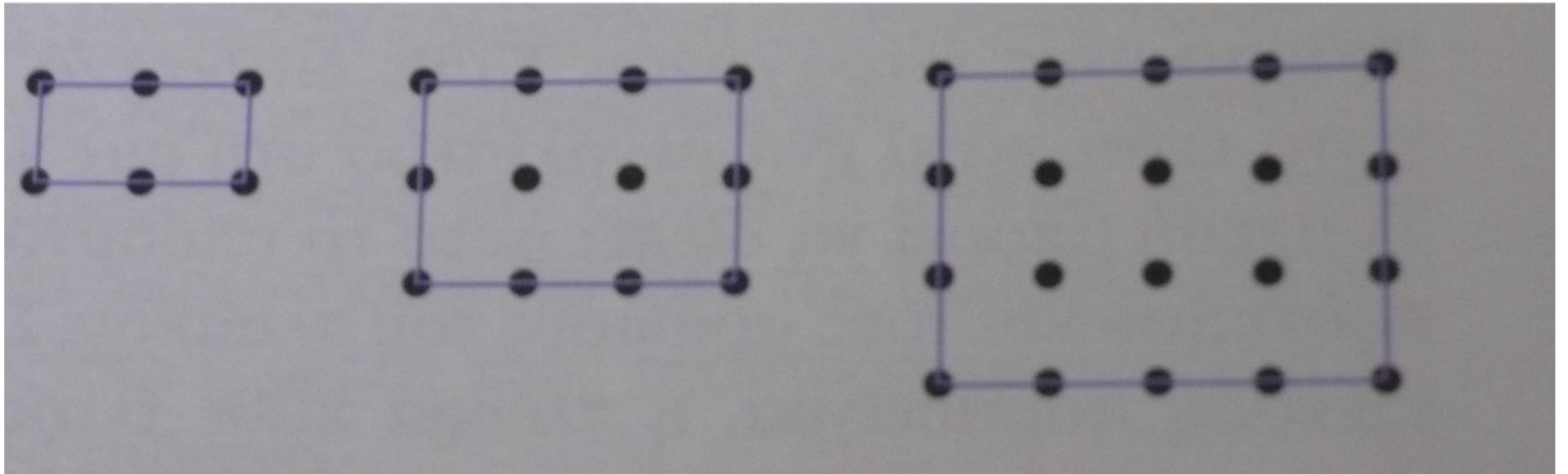
εξερεύνηση πάτερνς (4)

ποιος είναι ο κανόνας;

πόσες είναι οι κουκίδες περιμετρικά (γύρω-γύρω);

πόσες είναι οι κουκίδες συνολικά;

εξερεύνηση πάτερνς (4)



εξερεύνηση πάτερνας (5)

θέση	1	2	3	4	5	6	7	...	v
πλήθος κουκίδες γύρω	6	10	14						
πλήθος κουκίδες	6	12	20						

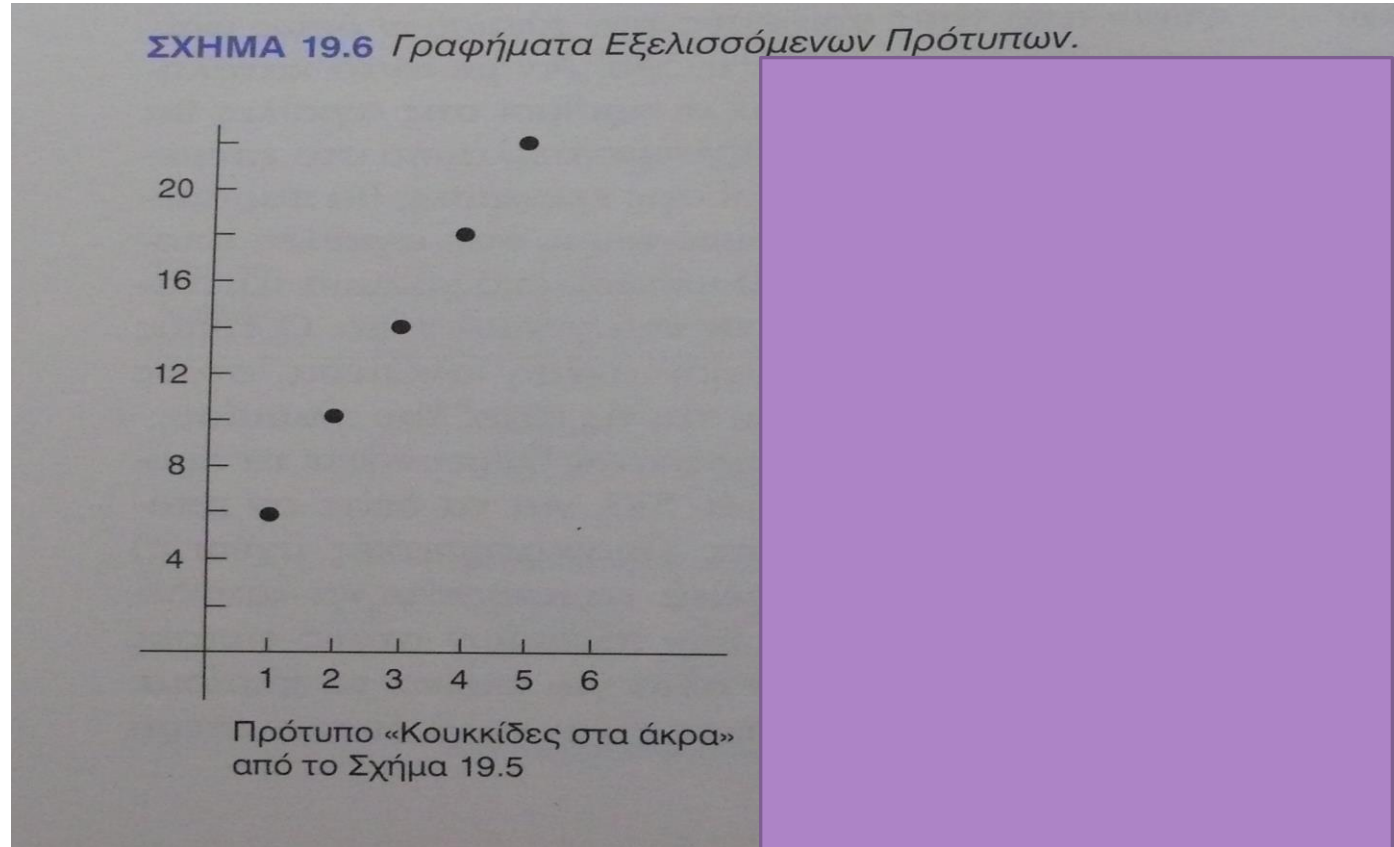
εξερεύνηση πάτερνας (6)

θέση	1	2	3	4	5	6	7	...	v
πλήθος κουκίδες γύρω	6	10	14	18	22				
πλήθος κουκίδες	6	12	20	30	42				

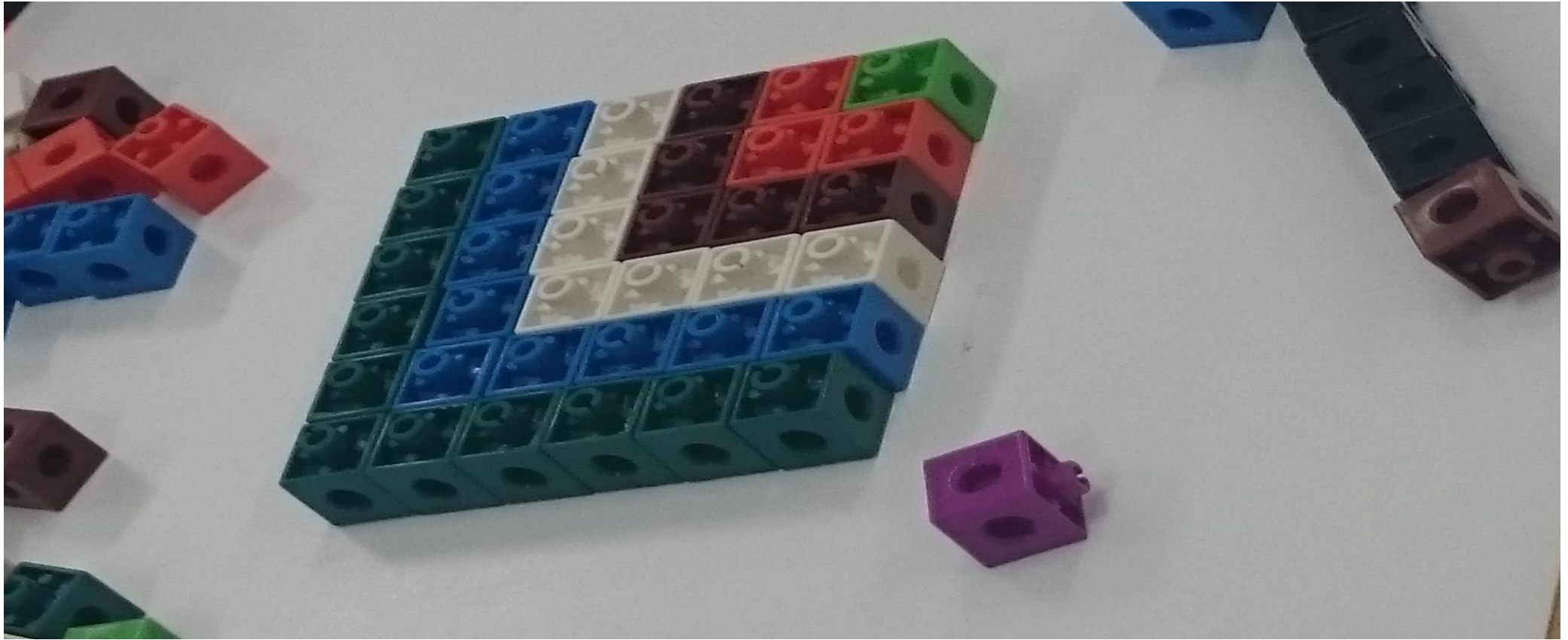
εξερεύνηση πάτερνς (5)

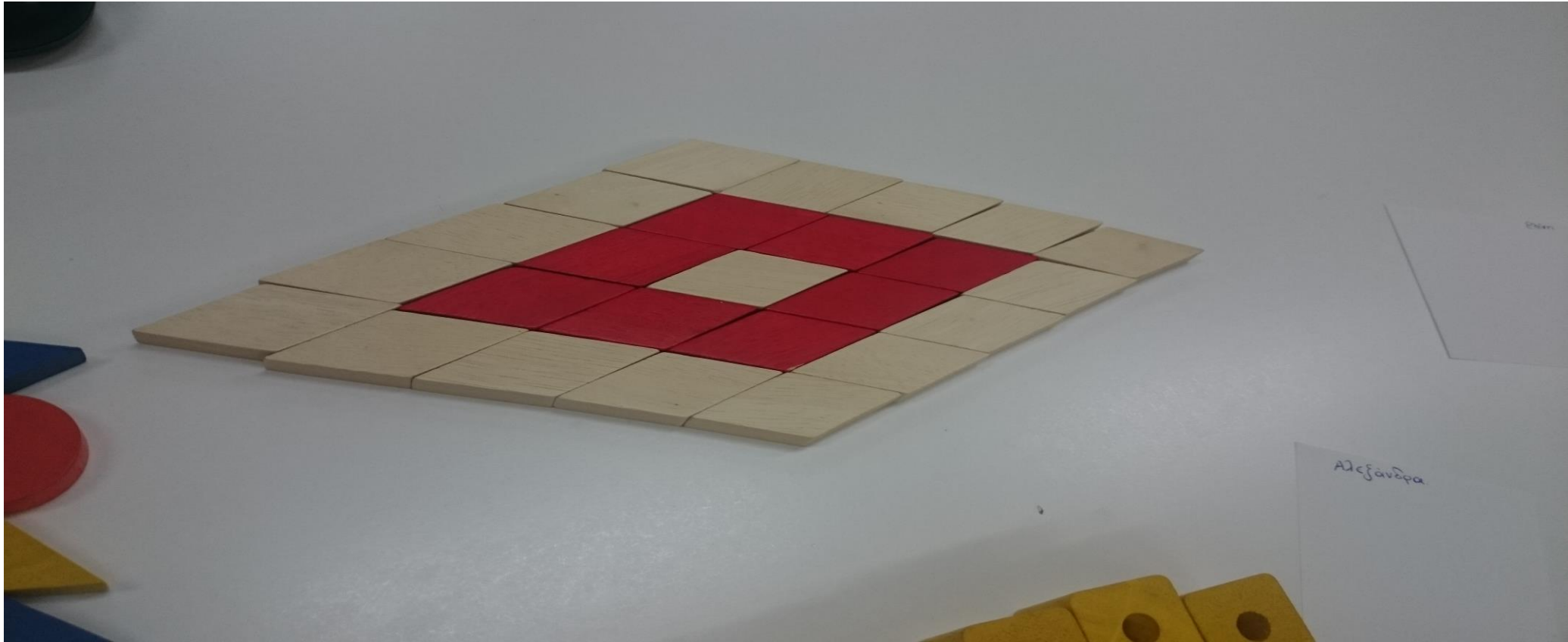
θέση	1	2	3	4	5	6	7	...	v
πλήθος κουκίδες γύρω	6	10	14	18	22			$2(v+2)$ + $2(v+1)$ - 4	$4v+2$
πλήθος κουκίδες	6	12	20	30	42				$(v+2)(v+1)$

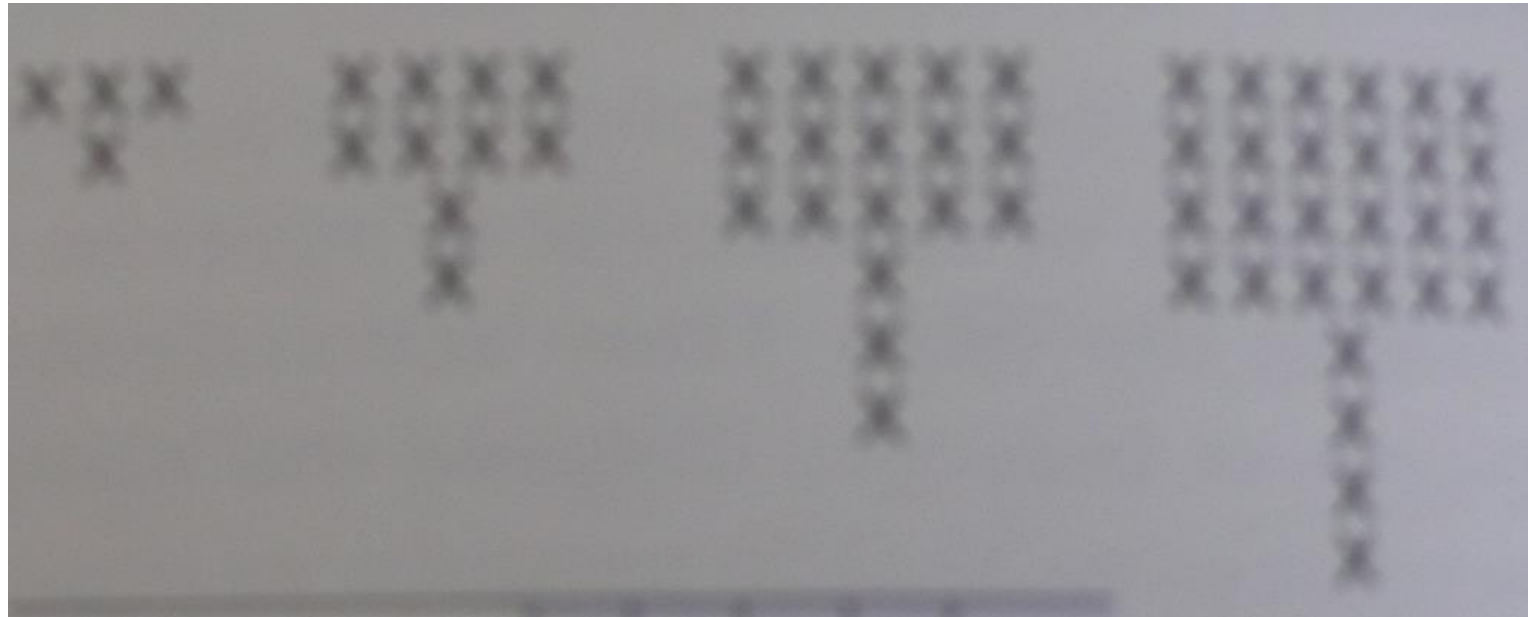
εξερεύνηση πάτερνας (6)



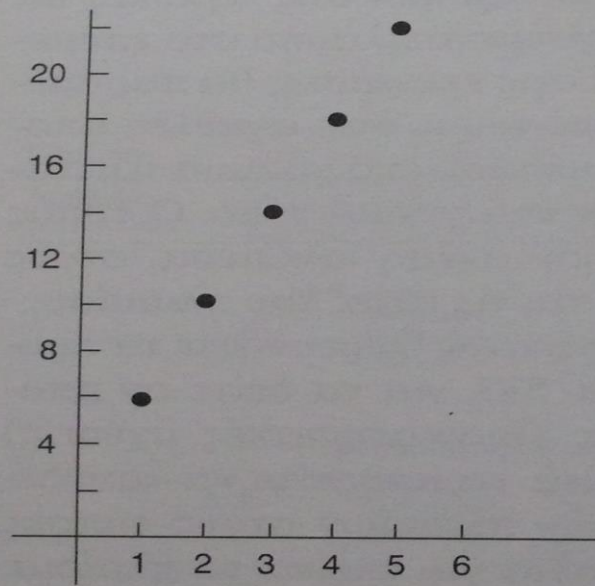




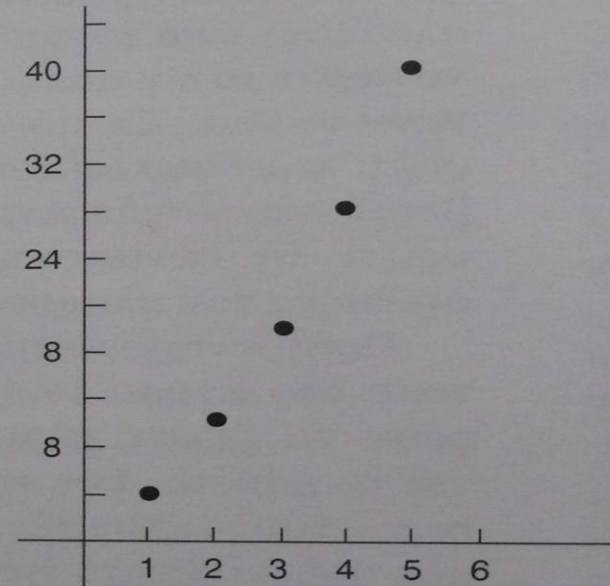




ΣΧΗΜΑ 19.6 Γραφήματα Εξελισσόμενων Πρότυπων.



Πρότυπο «Κουκκίδες στα άκρα»
από το Σχήμα 19.5



Πρότυπο «Τ από Χ»
από το Σχήμα 19.5

Σύνδεση με...

Ιδιότητες και οργάνωση των αριθμών

Σχέσεις μεταξύ μεγεθών και μεταβολής και συμμεταβολής αυτών

και

Πολλαπλές αναπαραστάσεις

αναπαράσταση και ανάλυση μαθηματικών καταστάσεων και δομών χρησιμοποιώντας αλγεβρικά σύμβολα

χρήση μαθηματικών μοντέλων για αναπαράσταση και κατανόηση ποσοτικών σχέσεων

ανάλυση μεταβολών σε διάφορα πλαίσια

μελέτη δομής (οργάνωση
προβλημάτων)
μελέτη μεταβολής (οργάνωση
προβλημάτων)

επίλυση και μελέτη προβλημάτων

μελέτη μεγεθών που συνδέονται ή προκύπτουν από πρότυπα

πολλαπλές αναπαραστάσεις

συνδέσεις αναπαραστάσεων

ερμηνείες αναπαραστάσεων

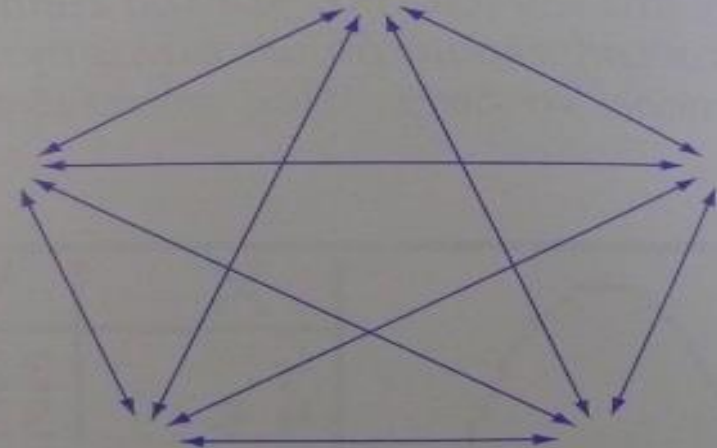
κατασκευή συναρτήσεων

μελέτη και διερεύνηση σχέσης μεταβολής και ρυθμού μεταβολής
πριν την τυπική εισαγωγή στο λύκειο

Συγκείμενο



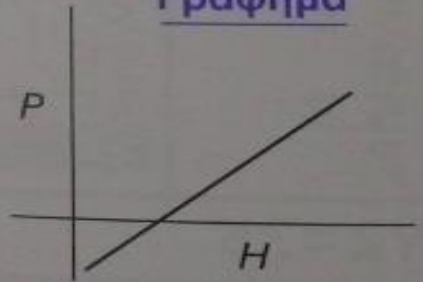
Χοτ
ντογκ



Πίνακας

H	P
0	-35
100	30
200	

Γράφημα



Εξίσωση

$$P = 0.65H - 35$$

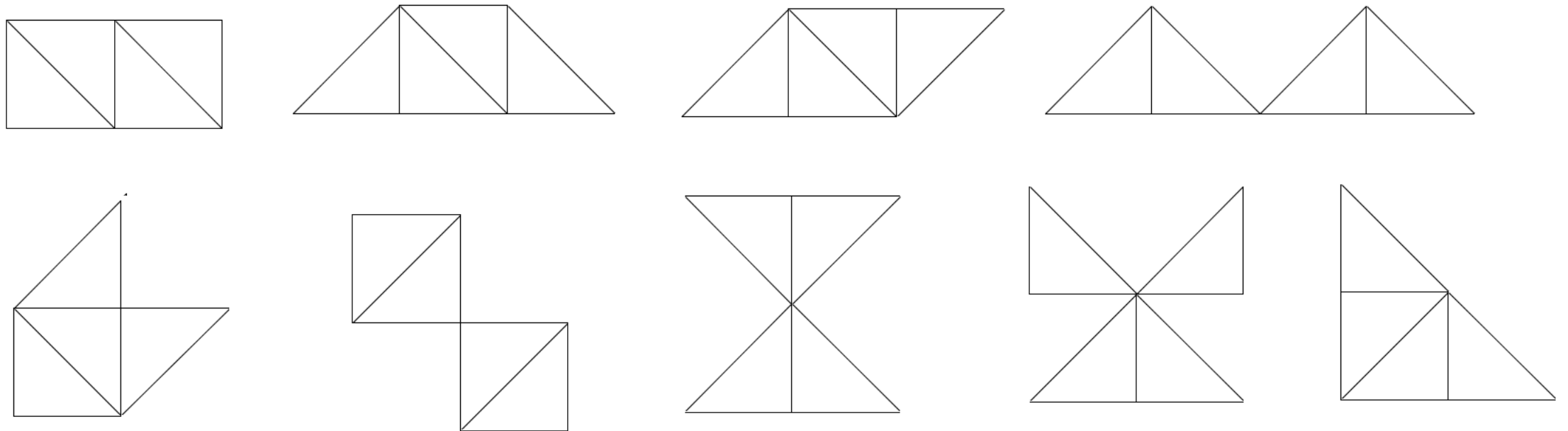
διδασκτική προσέγγιση

χρήση προβλημάτων (πχ. γραμμικής μεταβολής) από την «αριθμητική», όπου συνήθως έχουμε μια συγκεκριμένη φάση μιας κατάστασης που μπορεί να γενικευθεί και να γίνουν πολλαπλές αναπαραστάσεις της σχέσης συμμεταβολής

π.χ. το ποσό που ξοδεύει κάποιος για την αγορά μιας ποσότητας προϊόντος, η αξία μιας διαδρομής με ταξί, η σχέση πλευρών και εμβαδού σε βασικά σχήματα.....

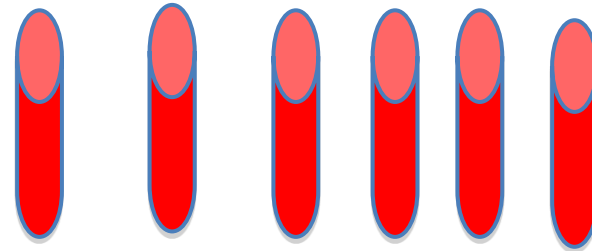
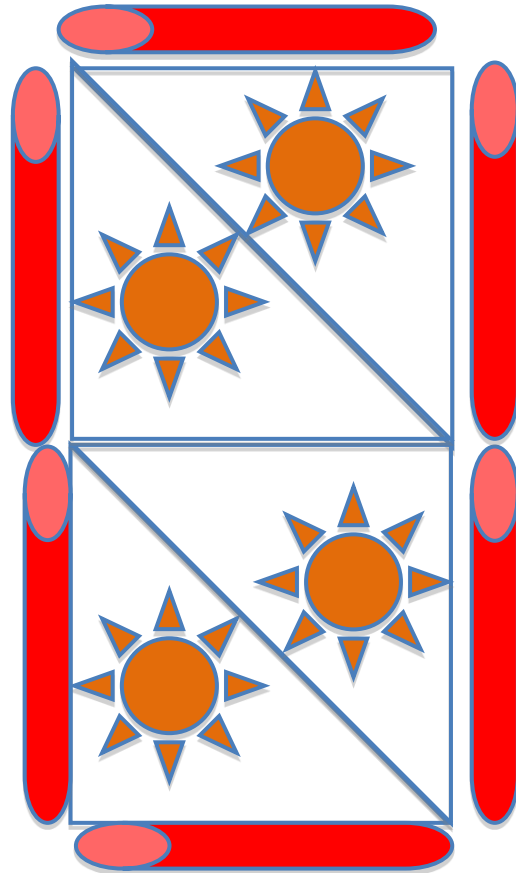
αναπαράσταση και ανάλυση
καταστάσεων – σχέσεων με (προ)-
αλγεβρικό συμβολισμό

παράδειγμα (1): σύγκριση περιμέτρων

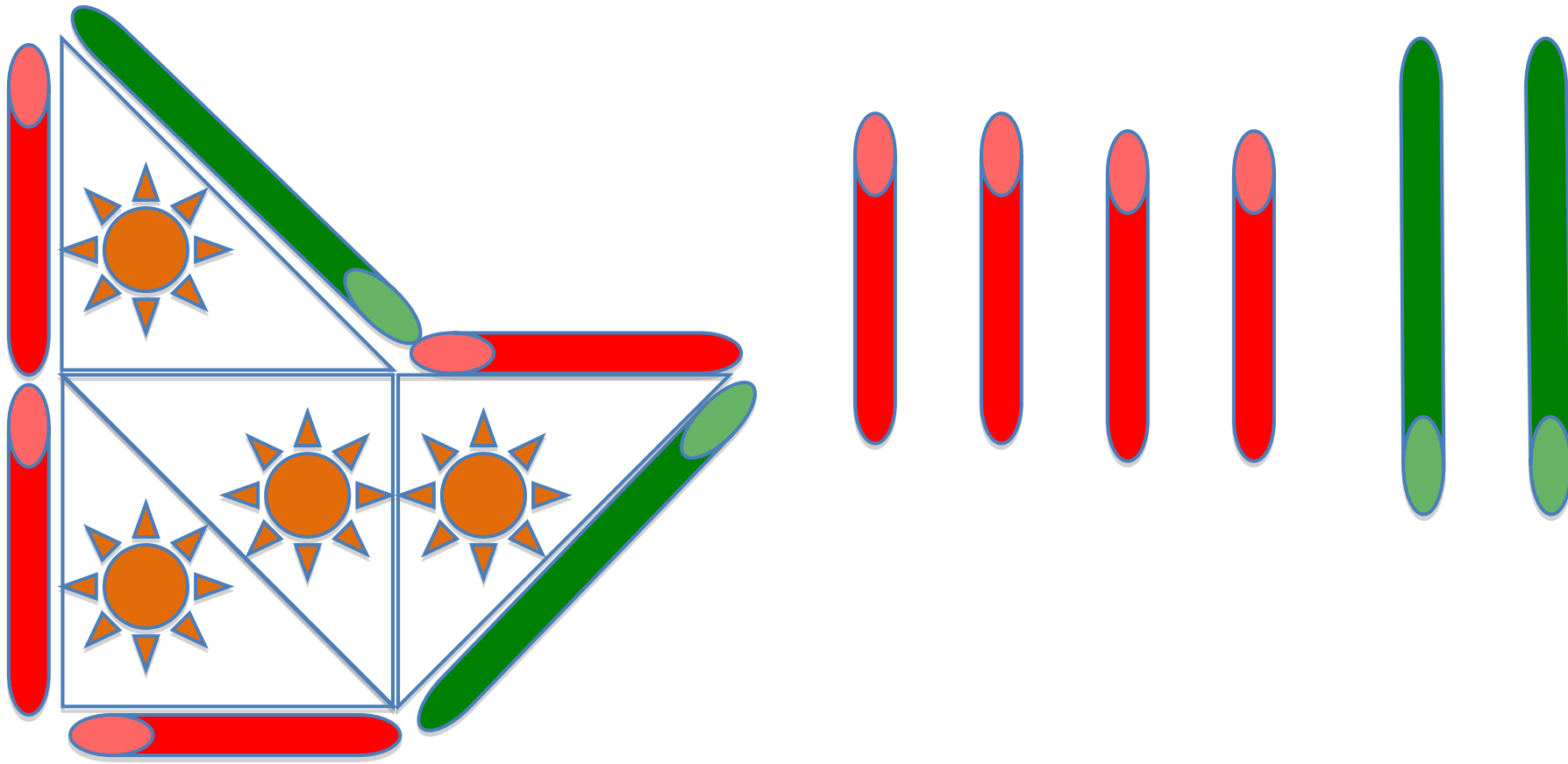


αναγκαιότητα συμβολισμού $(\alpha) \kappa + (\beta) \upsilon$ και σύγκριση σύνθετων γενικών αριθμών

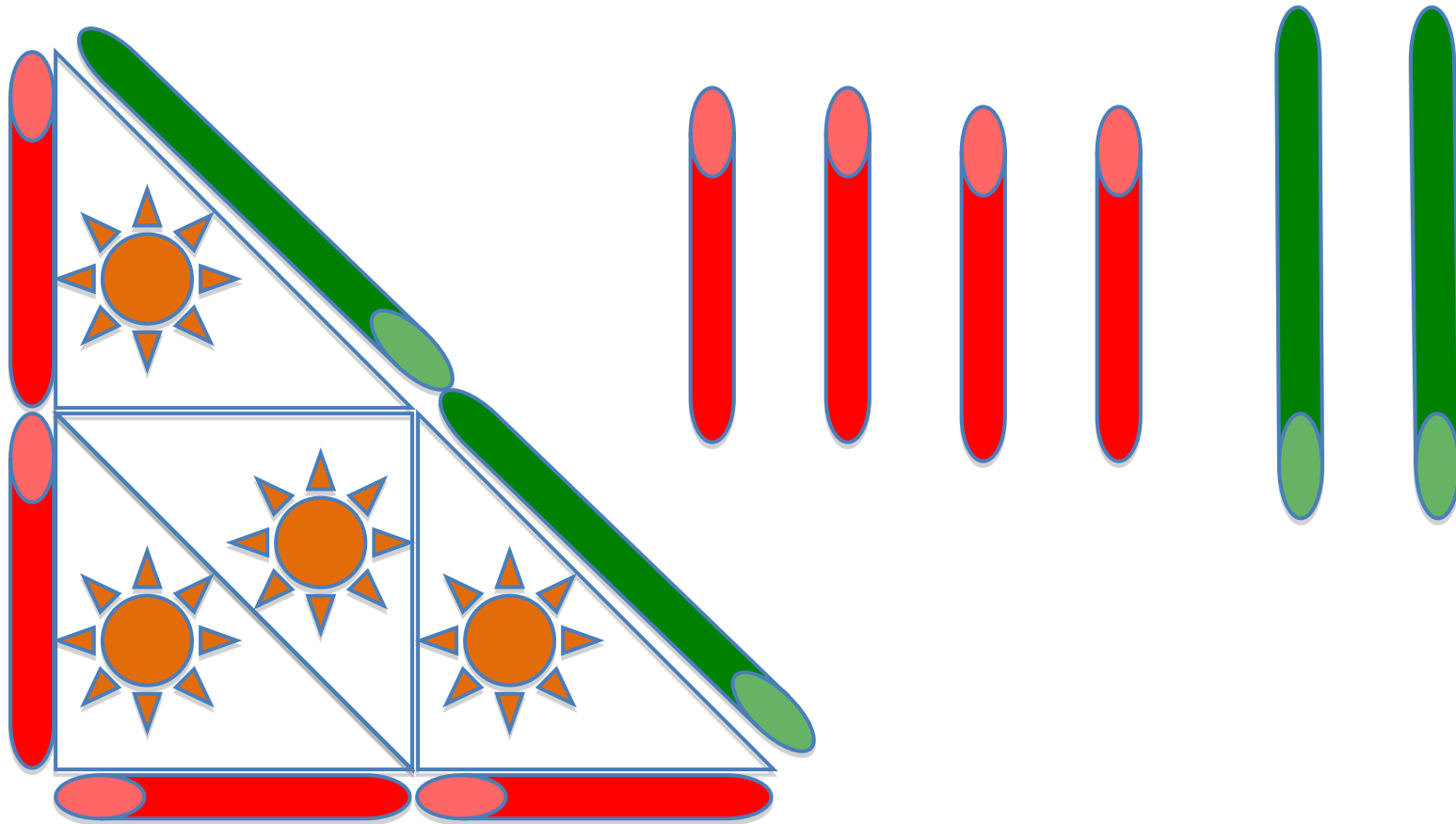
Σχηματισμός 1



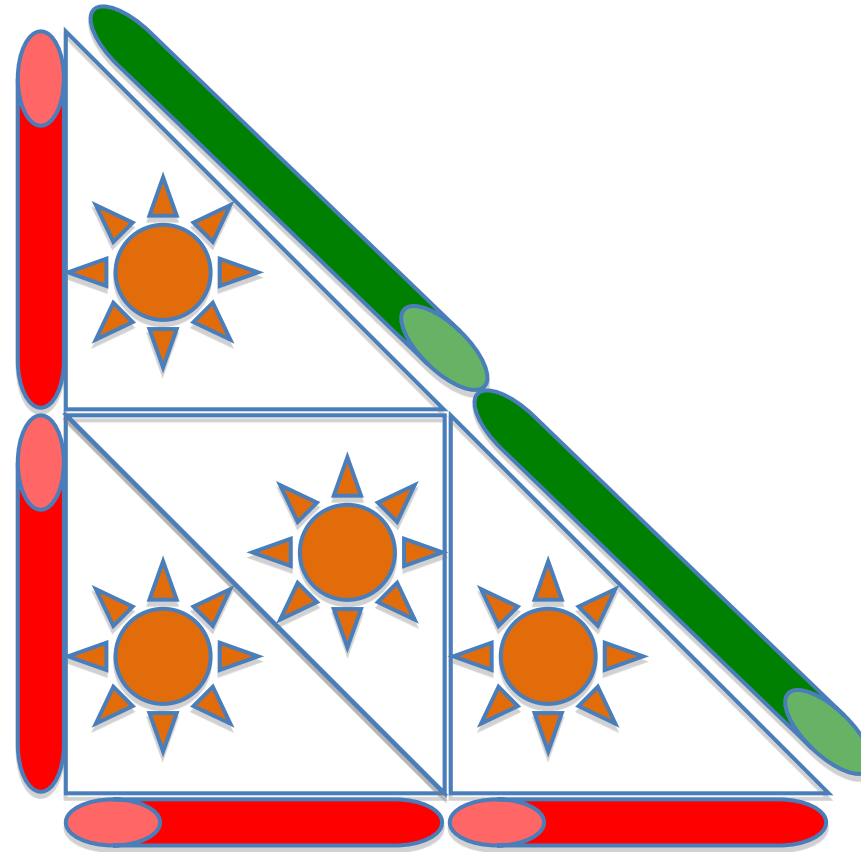
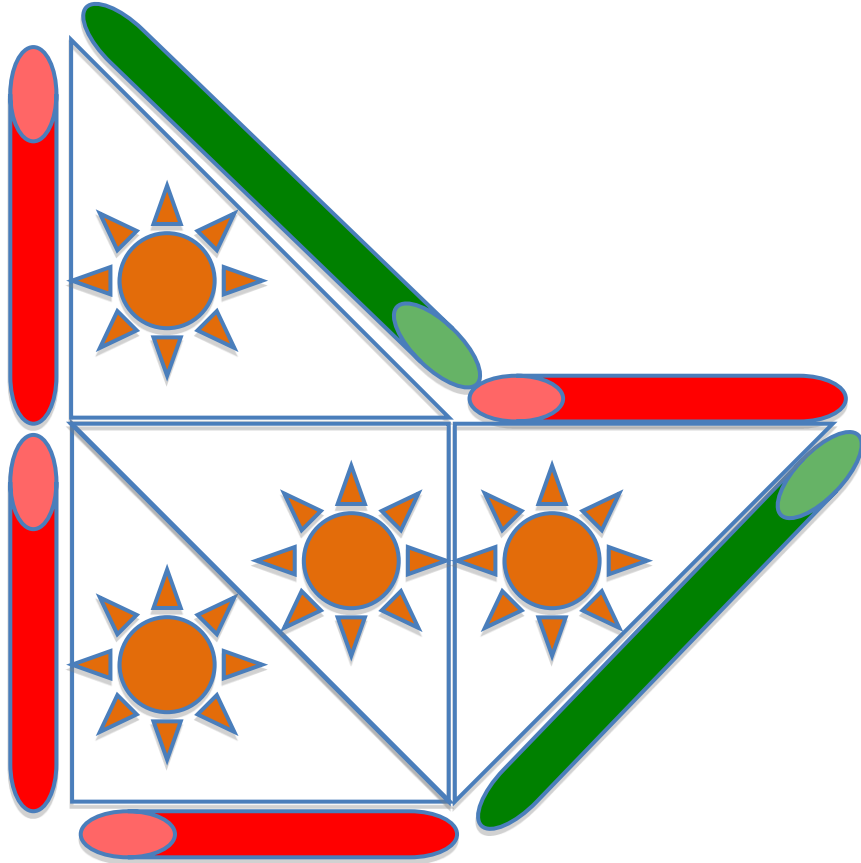
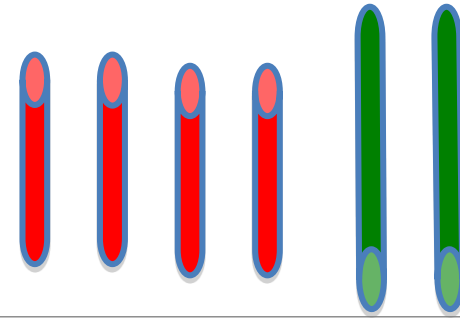
σχηματισμός 2



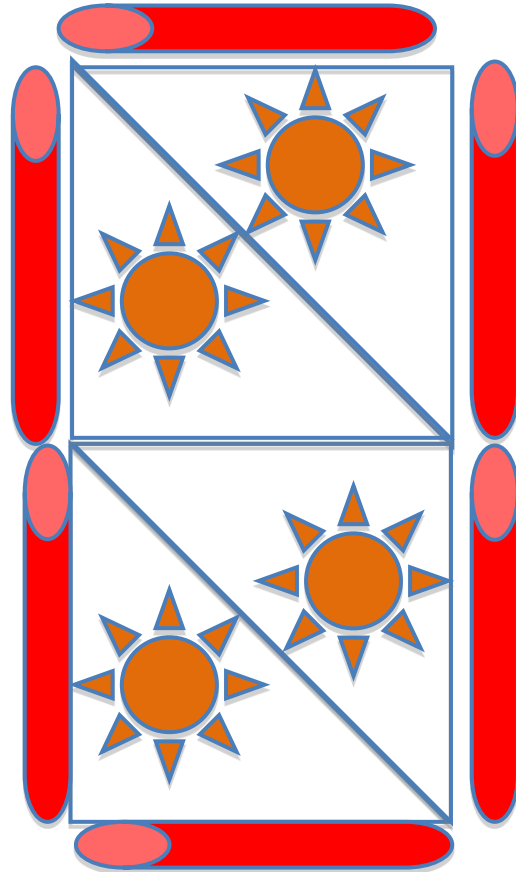
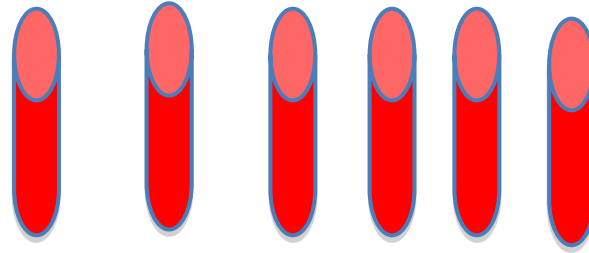
σχηματισμός 3



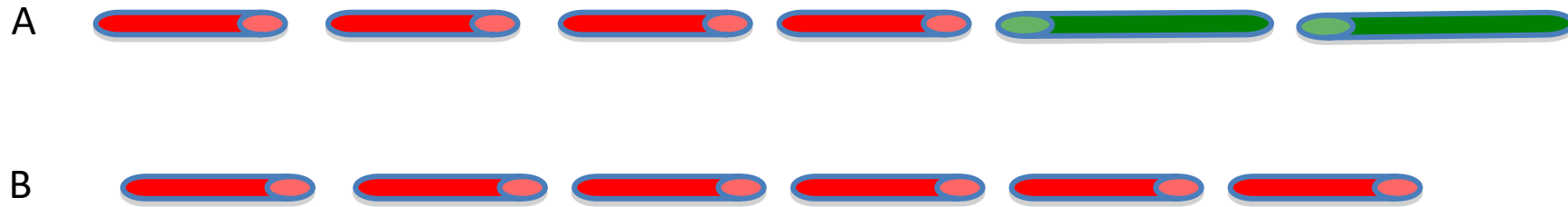
Ταξινόμηση Ομάδα Α



Ταξινόμηση Ομάδα Β



σύγκριση περιμέτρου (προ-αλγεβρικός συμβολισμός)



αλγεβρικές παραστάσεις - εξισώσεις

αλγεβρική παράσταση

μια έκφραση που συνδυάζει αριθμούς (ειδικούς ή γενικούς), μεταβλητές

εκφράζει σχέση μεταξύ των στοιχείων της

περιγράφει και μοντελοποιεί μια πραγματική ή μια μαθηματική κατάσταση

ειδικές περιπτώσεις παραστάσεων είναι

- οι τύποι, π.χ. ο τύπος του εμβαδού ενός γεωμετρικού σχήματος
- οι εξισώσεις

Πολλές έρευνες έχουν εντοπίσει την περιορισμένη κατανόηση του τρόπου που χρησιμοποιούνται τα γράμματα στην άλγεβρα από τους μαθητές.

Τα περισσότερα ευρήματα συγκλίνουν στο γεγονός ότι συχνά οι μαθητές ερμηνεύουν ένα γράμμα ως ένα όνομα ενός συγκεκριμένου αριθμού, δηλαδή ως συγκεκριμένο άγνωστο.

Για παράδειγμα, πολλοί μαθητές πιστεύουν ότι οι εξισώσεις $5n+14=89$ και $5\mu+14=89$ έχουν διαφορετικές λύσεις.

διδασκτική προσέγγιση

προετοιμασία για συμβολικές παραστάσεις

δημιουργία πλαισίου που δεν θα διεκολύνεται η δημιουργία στερεοτύπων

η περιγραφή των λύσεων προβλημάτων σε ενιαία παράσταση/ακολουθία πράξεων

η εξάσκηση σε έργα όπου τα δεδομένα παρουσιάζονται με μορφή παρεμφερή με την αλγεβρική

ένα παράδειγμα

Liming Elementary school had funds to buy 12 basketballs that cost 24 Yuan each. Before buying the basketballs, the school spent 144 Yuan of the funds for some soccer balls. How many basketballs can the school buy with the remaining funds?

διδασκτική προσέγγιση

$$25 + 45 - 45 = 25$$

- συζήτηση και αναζήτηση της γενικότητας και της κανονικότητας αυτής της σχέσης
- προτάσεις για καταστάσεις που μπορεί να περιγράψει μια τέτοια παράσταση

$$25 + \square = 57$$

$$25 + \square + 3 - (2*4) = 20$$

διδασκτική προσέγγιση

- πολλαπλές αναπαραστάσεις του ίδιου αριθμού
 - $3+5 = 2+6 = 9-1 = 2*4 = 16/2$

σχέσεις μέρους – μέρους – όλου

- $5 = 4+1 = 3+2 = 2+3 = 1+4$

κατηγοριοποίηση (σχολικών) αλγεβρικών δραστηριοτήτων

παραγωγικές δραστηριότητες (generational activities)

μετασχηματιστικές δραστηριότητες (transformational activities)

δραστηριότητες συνολικού μετα- επιπέδου (global meta-level activities)

Kieran

παραγωγικές δραστηριότητες

περιλαμβάνουν το σχηματισμό των εκφράσεων και των εξισώσεων:

- Εξισώσεις που περιέχουν έναν άγνωστο που αντιπροσωπεύουν καταστάσεις προβλημάτων.
- Γενικές εκφράσεις που προκύπτουν από γεωμετρικά πρότυπα ή αριθμητικές ακολουθίες.
- Εκφράσεις κανόνων που διέπουν τις αριθμητικές σχέσεις.

μετασχηματιστικές δραστηριότητες

περιλαμβάνουν:

- επέκταση, αντικατάσταση
- πρόσθεση και πολλαπλασιασμό πολυωνύμων, ύψωση πολυωνύμων σε δύναμη
- επίλυση εξισώσεων
- απλοποίηση εκφράσεων

Αυτού του τύπου οι δραστηριότητες ασχολούνται με την αλλαγή- μετασχηματισμό μιας έκφρασης, με διατήρηση της ισοδυναμίας

δραστηριότητες συνολικού μετα-επιπέδου

περιλαμβάνουν:

- την επίλυση προβλημάτων
- μοντελοποίηση
- παρατήρηση της δομής
- μελέτη της αλλαγής
- γενίκευση, ανάλυση των σχέσεων
- δικαιολόγηση
- απόδειξη και πρόβλεψη

Κάποια παραδείγματα από
την έρευνα στην αλγεβρική
σκέψη

Sally is having a party.

The first time the doorbell rings, 1 guest enters.

The second time the doorbell rings, 3 guests enter.

The third time the doorbell rings, 5 guests enter.

The fourth time the doorbell rings, 7 guests enter.

The guests keep arriving in the same way. On the next ring a group enters that has 2 more persons than the group that entered on the previous ring.

- A. How many guests will enter on the 10th ring?
Explain or show how you found your answer.
- B. Write a rule or describe in words how to find the number of guests that entered on each ring.
- C. 99 guests entered on one of the rings. What ring was it? Explain or show how you found your answer.

Τα ποσοστά επιτυχών απαντήσεων ήταν τα ίδια και στους μαθητές της Κίνας και των Η.Π.Α. (70%) για την 1^η ερώτηση.

• Στην 3^η ερώτηση οι Κινέζοι μαθητές συγκέντρωσαν υψηλότερο ποσοστό επιτυχίας (43%) έναντι των μαθητών από τις Η.Π.Α. (24%) Αυτό οφείλεται στο ότι οι Κινέζοι μαθητές χρησιμοποίησαν περισσότερο αφηρημένες στρατηγικές. Το 65% των Κινέζων χρησιμοποίησαν την κατάλληλη αφηρημένη στρατηγική (π.χ. $99=2n-1$) έναντι του 11% των Αμερικανών μαθητών. Αντίθετα, η πλειοψηφία (75%) των μαθητών από τις Η.Π.Α. χρησιμοποίησε συγκεκριμένες στρατηγικές (επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ανά δύο ως το 99 ή με πίνακα ή με λίστα) έναντι του 29% των Κινέζων μαθητών.

- Πιθανή αιτία αυτής της διαφοροποίησης είναι ότι οι εκπαιδευτικοί στις Η.Π.Α δεν ενθαρρύνουν τη μετάβαση από το συγκεκριμένο στο πιο αφηρημένο και δεν επιδιώκουν οι μαθητές του να χρησιμοποιούν και πιο αφηρημένες στρατηγικές, καθώς θεωρούν ότι οι εικονογραφημένες αναπαραστάσεις και οι συγκεκριμένες στρατηγικές διευκολύνουν τη μάθηση.

- Άλλη έρευνα (Cai, 2004) αναφέρει ότι αιτία μπορεί να είναι και οι διαφορετικές προσδοκίες των εκπαιδευτικών από τους μαθητές της 6^{ης} βαθμίδας. Αναφέρεται ότι οι εκπαιδευτικοί των Η.Π.Α. δεν περιμένουν από τους μαθητές να χρησιμοποιούν γενικευμένες στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων (*generalized problem solving strategies*) σε αντίθεση με τους εκπαιδευτικούς της Κίνας.

Π.χ. $1 + () = 3$ In order to find the number in (), subtraction is introduced: $3 - 1 = 2$
If $() \times 2 = 8$, what is the number in ()?

➤ Η συσχέτιση των αντίστροφων πράξεων στην επίλυση της εξίσωσης (Chinese, Singaporean & South Korean curricula)

➤ Χρήση εικονογραφημένων εξισώσεων (Singaporean curricula)

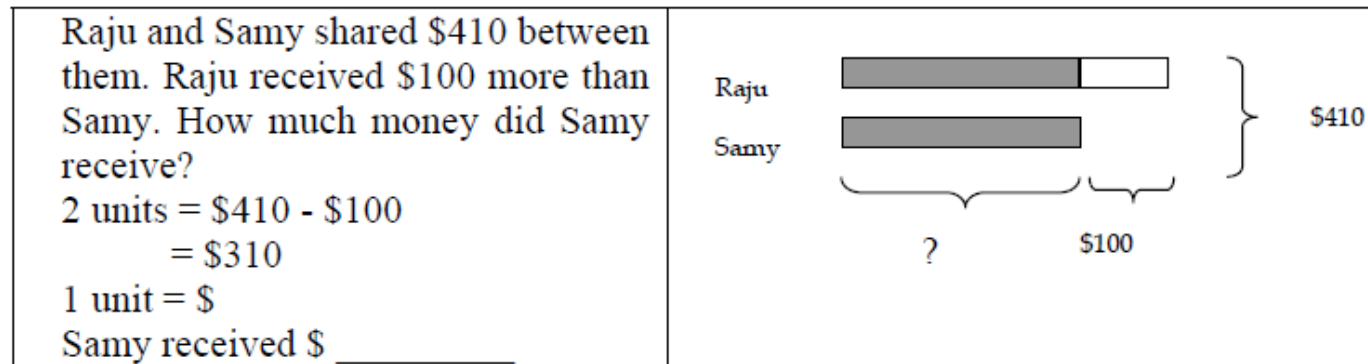


Figure 1. A Pictorial Equation

➤ Χρήση αλγεβρικών και αριθμητικών προσεγγίσεων στην επίλυση προβλημάτων
(Chinese curricula)

Π.χ. *Liming Elementary school had funds to buy 12 basketballs that cost 24 Yuan each. Before buying the basketballs, the school spent 144 Yuan of the funds for some soccer balls. How many basketballs can the school buy with the remaining funds?*

Solution 1: Begin by computing the original funding and subtracting the money spent on soccer balls: $(24 \times 12 - 144) \div 24 = 144 \div 24 = 6$ basketballs.

Solution 2: Begin by computing the number of basketballs that can no longer be bought: $12 - (144 \div 24) = 6$ basketballs.

Solution 3: Assume that the school can still buy x basketballs: $(24 \times 12 - 144) = 24x$. Therefore, $x = 6$ basketballs.

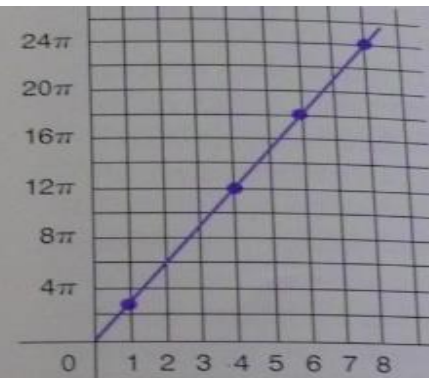
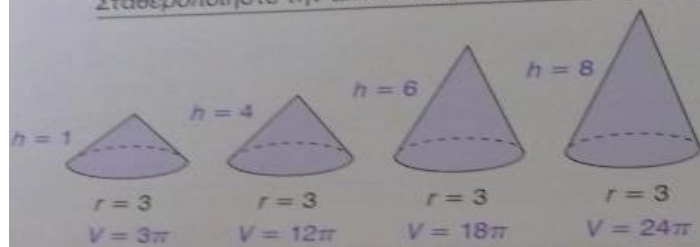
Solution 4: Assume that the school can still buy x basketballs: $24 \times 12 = 24x + 144$. Therefore, $x = 6$ basketballs.

Solution 5: Assume that the school can still buy x basketballs. $12 = (144 \div 24) + x$. Therefore, $x = 6$ basketballs.

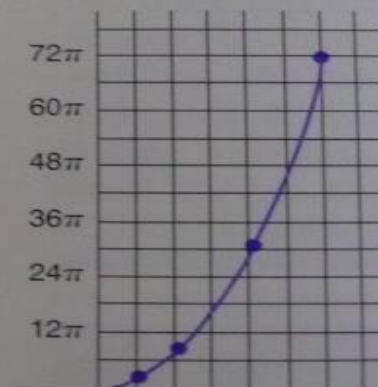
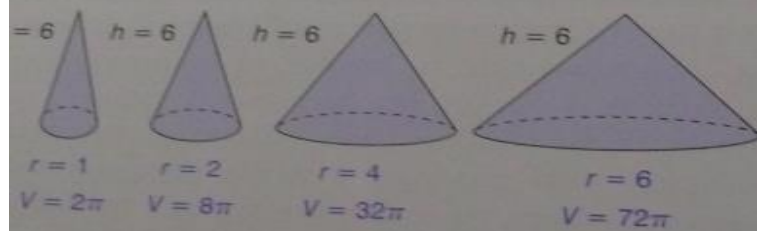
Όγκος Κώνου

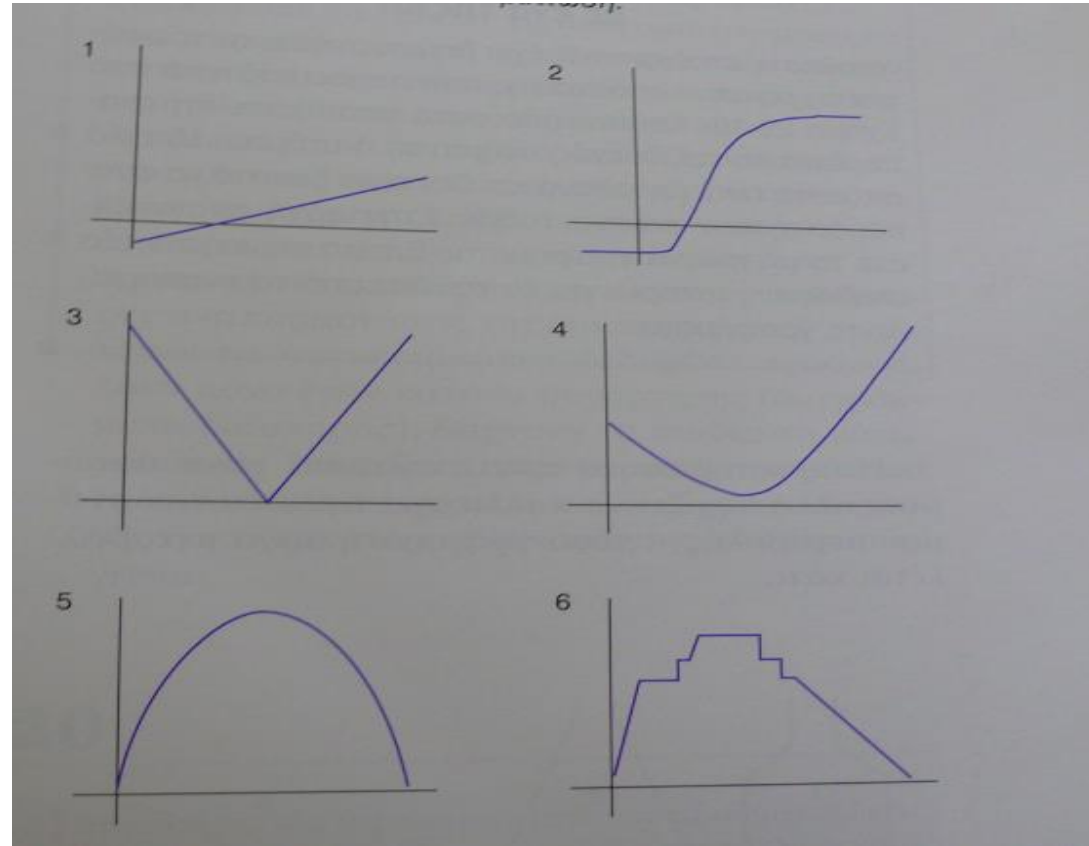
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

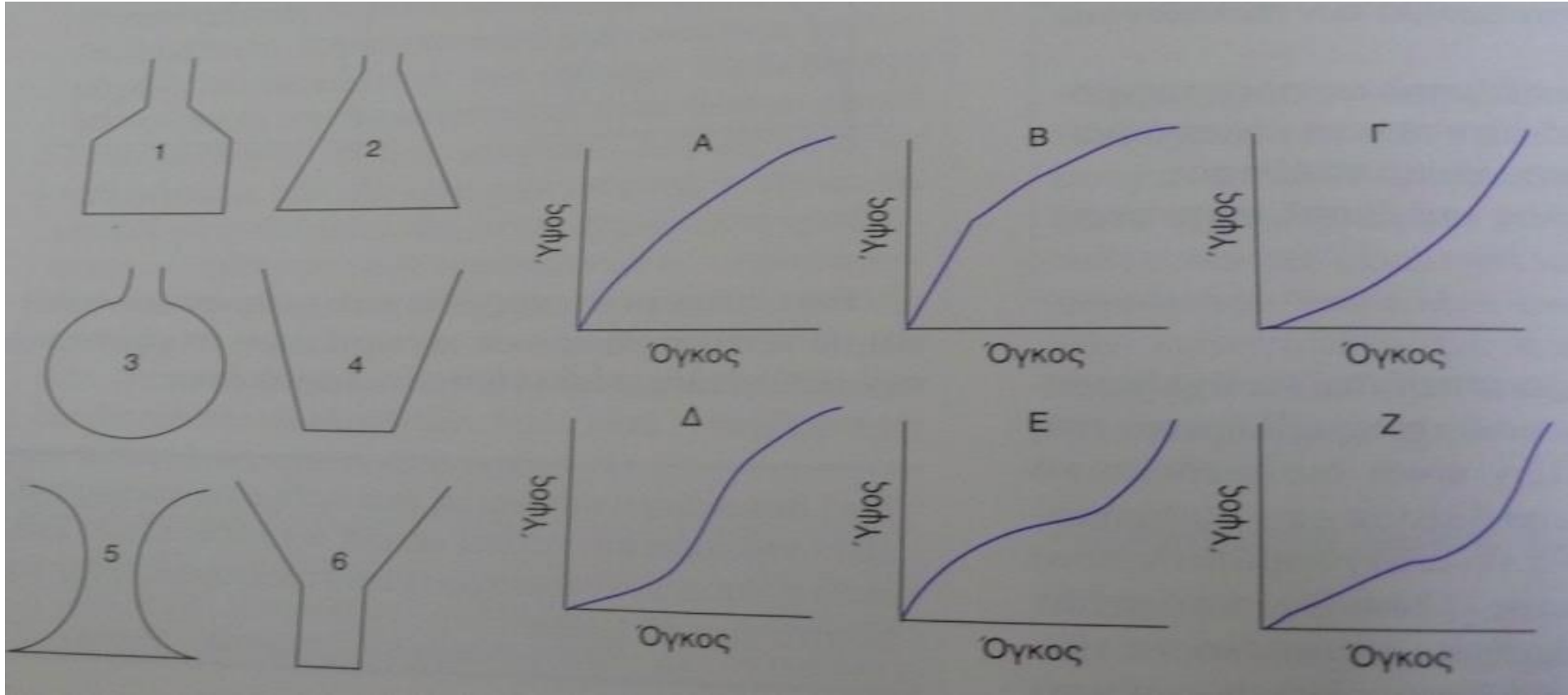
Σταθεροποιήστε την ακτίνα και μεταβάλετε το ύψος.

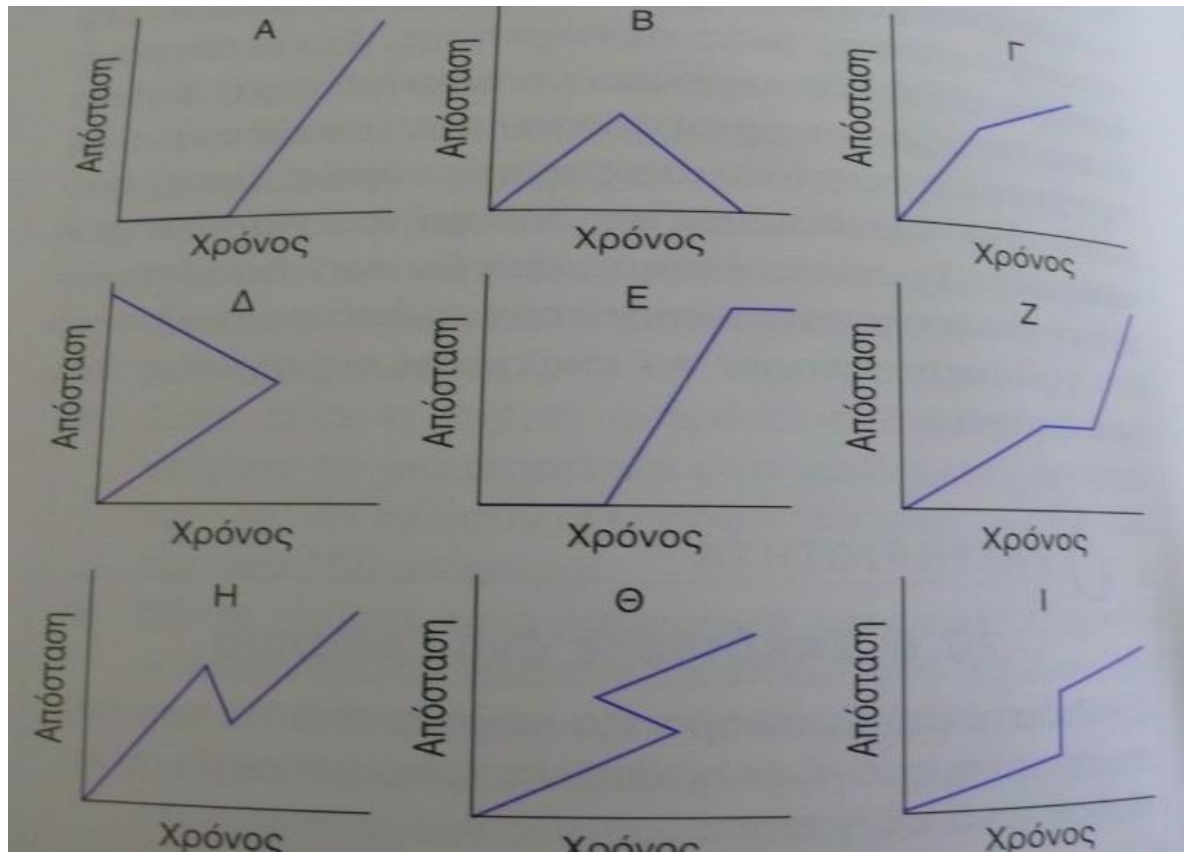


Σταθεροποιήστε το ύψος και μεταβάλετε την ακτίνα.









το περιεχόμενο του ΑΠ

περιεχόμενο άλγεβρας στο ΠΣ (1)

Μελέτη (αναγνώριση, συμπλήρωση, περιγραφή, γενίκευση)
κανονικοτήτων

Αναγνώριση των σχέσεων μεταξύ διαφόρων αναπαραστάσεων
(γλωσσικών, υλικών, εικονικών, συμβολικών) και μετάβαση από τη
μία στην άλλη

περιεχόμενο άλγεβρας στο ΠΣ (2)

Επίλυση προβλημάτων του τύπου «βρες τον αριθμό που λείπει»

Κατανόηση ιδιοτήτων αριθμών, όπως η αντιμεταθετικότητα

Κατανόηση του συμβόλου σχέσης της ισότητας

Επινόηση αλγορίθμων για την πραγματοποίηση μιας εργασίας

Θέματα θεωρίας αριθμών, όπως πρώτοι αριθμοί, διαιρετότητα,

περιεχόμενο άλγεβρας στο ΠΣ (3)

Κατανόηση των λόγων, όπως στις κλίμακες και στους ρυθμούς μεταβολής

Ερμηνεία και κατασκευή γραφικών παραστάσεων και τη χρήση τους για προβλέψεις

Επινόηση τύπων για τον σύντομο υπολογισμό εμβαδών και όγκων