



ΕΣΠΑ 2007-13\Ε.Π. Ε&ΔΒΜ\Α.Π. 1-2-3
«ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21^{ου} αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, Οριζόντια Πράξη» MIS: 295450
Με την συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης (Ε. Κ. Τ.)

Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση (Δημοτικό)

*Οδηγός για τον εκπαιδευτικό
«Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων»*

ΑΘΗΝΑ 2011



ΕΣΠΑ 2007-13\Ε.Π. Ε&ΔΒΜ\Α.Π. 1-2-3

«ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21^{ου} αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών , Οριζόντια Πράξη» MIS: 295450
Με την συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης (Ε. Κ. Τ.)

Το παρόν έργο έχει παραχθεί στο πλαίσιο υλοποίησης της Πράξης «*ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο πρόγραμμα σπουδών, στους Άξονες Προτεραιότητας 1,2,3, -Οριζόντια Πράξη*», με κωδικό MIS 295450 και ειδικότερα στο πλαίσιο του Υποέργου 1: «*Εκπόνηση Προγραμμάτων Σπουδών Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και οδηγών για τον εκπαιδευτικό «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων*» με ευθύνη του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΓΕΝΙΚΟ ΜΕΡΟΣ	1
Εισαγωγή	2
Δομή του Οδηγού	3
Βασικές Αρχές Μάθησης και Διδασκαλίας των Μαθηματικών	4
Μαθηματικά και Μαθηματικός γραμματισμός	4
Εργαλεία διδασκαλίας και μάθησης.....	4
Μαθηματικό Περιεχόμενο: Τροχιές Μάθησης και Διδασκαλίας	7
Αριθμοί – Άλγεβρα.....	8
Χώρος – Γεωμετρία – Μετρήσεις.....	23
Στοχαστικά Μαθηματικά.....	30
Αξιολόγηση	33
Εργαλείο 1.....	33
Εργαλείο 2	39
Εργαλείο 3	40
Το πορτφόλιο (χαρτοφυλάκιο)	42
Ημερολόγια.....	43
Συνεντεύξεις	45
Παρατήρηση	46
Αξιολόγηση συνθετικής εργασίας.....	47
Α΄ ΚΥΚΛΟΣ	50
Αριθμοί	51
Άλγεβρα	57
Χώρος και Γεωμετρία	62
Χώρος	62
Γεωμετρία	66
Μετρήσεις	72
Στοχαστικά Μαθηματικά	75
Στατιστική	75
Πιθανότητες	78
Β΄ ΚΥΚΛΟΣ	81
Αριθμοί	82
Άλγεβρα	96
Χώρος και Γεωμετρία	110
Μετρήσεις	123
Στοχαστικά Μαθηματικά	134
Στατιστική	134
Πιθανότητες	138
Συνθετική Εργασία Β΄ Κύκλου	143

ΓΕΝΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Εισαγωγή

Ο οδηγός του εκπαιδευτικού για τα Μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης στοχεύει στην υποστήριξη του εκπαιδευτικού ώστε να μπορέσει να υλοποιήσει κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο τη φιλοσοφία του νέου προγράμματος σπουδών. Ο οδηγός δεν δίνει στον εκπαιδευτικό “συνταγές” για το τι θα κάνει στην τάξη του, αλλά προσπαθεί να τον βοηθήσει:

- να κατανοήσει τον εκπαιδευτικό προσανατολισμό του νέου ΠΣ και να αναγνωρίσει τις αλλαγές τόσο στο περιεχόμενο όσο και στις διδακτικές προσεγγίσεις που αυτό εισάγει,
- να σχεδιάζει τη διδασκαλία του αξιοποιώντας παραδείγματα δραστηριοτήτων και διδακτικών εργαλείων που του προτείνονται,
- να συνειδητοποιεί τις διδακτικές επιλογές του καθώς και το αποτέλεσμα που αυτές μπορούν να έχουν στη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών,
- να αναγνωρίζει τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα για κάθε μαθηματική ενότητα και να τα συνδέει με αυτά που οι μαθητές αναμένεται να έχουν επιτύχει στις προηγούμενες τάξεις ή θα επιτύχουν στις επόμενες,
- να πειραματίζεται με νέες διδακτικές προσεγγίσεις δίνοντας του παραδείγματα διαχείρισης που θα επιτρέψουν την πραγματοποίηση των διδακτικών στόχων που διαμορφώνει με βάση το ΠΣ.

Για την επίτευξη των παραπάνω, παρουσιάζονται:

- οι βασικές αρχές του ΠΣ αναφορικά με το μαθηματικό περιεχόμενο, τη διδασκαλία και τη μάθηση,
- παραδείγματα εργαλείων αξιολόγησης που ανταποκρίνονται στις βασικές αρχές αξιολόγησης που θέτει το ΠΣ,
- η σημασία βασικών μαθηματικών θεμάτων ανά ηλικιακό κύκλο που έχουν επιλεγεί από το ΠΣ, η προηγούμενη και η επόμενη γνώση των μαθητών, οι δυσκολίες που σύμφωνα με την έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών αντιμετωπίζουν οι μαθητές καθώς και ζητήματα διδακτικής διαχείρισης,
- συγκεκριμένα παραδείγματα διδακτικής διαχείρισης δραστηριοτήτων που προτείνονται κυρίως στο ΠΣ δίνοντας έμφαση στις μαθηματικές διεργασίες που μπορούν να αναπτυχθούν,
- προτεινόμενες πηγές εκπαιδευτικού υλικού που μπορεί να αξιοποιηθεί.

Ο οδηγός του εκπαιδευτικού δεν αντικαθιστά το ΠΣ, αλλά δίνει μεγαλύτερη έμφαση σε ζητήματα που αφορούν το σχεδιασμό, την εφαρμογή και την αξιολόγηση της διδασκαλίας. Αυτό σημαίνει ότι ο οδηγός χρειάζεται να χρησιμοποιείται συμπληρωματικά με το ΠΣ. Τόσο το ΠΣ όσο και ο οδηγός υποστηρίζουν τον εκπαιδευτικό στο να μπορεί:

- α) να προγραμματίζει την κατανομή του διδακτικού χρόνου,
- β) να επιλέγει τη σειρά με την οποία θα διδάξει τις βασικές θεματικές ενότητες,
- γ) να καθορίζει με τη βοήθεια του ΠΣ τους στόχους του και τα μέσα επίτευξης τους ανάλογα με τις ιδιαιτερότητες των μαθητών,

- δ) να σχεδιάζει εργαλεία αξιολόγησης της επίτευξης των στόχων του με στόχο την ανατροφοδότηση και τη διαμόρφωση της διδασκαλίας,
- ε) να επιλέγει ή να αναπτύσσει εκπαιδευτικό υλικό,
- στ) να συνεργάζεται με άλλους εκπαιδευτικούς στο σχολείο του αλλά και εκτός ώστε να σχεδιάζει από κοινού, να ανταλλάσει ιδέες και να πειραματίζεται με διδακτικές προσεγγίσεις που αποδεικνύονται αποτελεσματικές.

Δομή του Οδηγού

Ο οδηγός περιλαμβάνει το γενικό μέρος που απευθύνεται στους εκπαιδευτικούς του Δημοτικού και του Γυμνασίου καθώς και ξεχωριστό ειδικό μέρος για κάθε εκπαιδευτική βαθμίδα.

Στο γενικό μέρος παρουσιάζονται:

- οι βασικές αρχές μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών σύμφωνα με το ΠΣ εστιάζοντας κυρίως στο τι είναι καινούριο στο ΠΣ,
- η δομή του μαθηματικού περιεχομένου σύμφωνα με τις τροχιές μάθησης και διδασκαλίας που αξιοποιήθηκαν στο ΠΣ,
- εργαλεία – παραδείγματα αξιολόγησης.

Οι αρχές μάθησης και διδασκαλίας παρουσιάζονται συνοπτικά δίνοντας έμφαση περισσότερο σε ζητήματα διαχείρισης, τα οποία συγκεκριμενοποιούνται στο ειδικό μέρος. Σχετικά με τις τροχιές μάθησης και διδασκαλίας παρουσιάζονται συνοπτικά οι κύριες υποτροχιές εστιάζοντας στο τι είναι αυτό που διαφοροποιείται ανά ηλικιακό κύκλο. Στην αξιολόγηση προτείνονται: τρόποι αξιολόγησης των απαντήσεων των μαθητών σε μια δραστηριότητα με βάση το βαθμό επίτευξης των Προσδοκώμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων (ΠΜΑ), τεχνικές αξιολόγησης όπως πορτφόλιο, συνέντευξη, παρατήρηση με αντίστοιχα παραδείγματα, καθώς και ένα παράδειγμα αξιολόγησης συνθετικής εργασίας των μαθητών.

Στο ειδικό μέρος της κάθε εκπαιδευτικής βαθμίδας έχουν επιλεγεί κάποιες βασικές ενότητες ως προς τις οποίες παρουσιάζονται:

- η σημασία της ενότητας εστιάζοντας στις βασικές μαθηματικές έννοιες που τη χαρακτηρίζουν, καθώς και στη μαθηματική δραστηριότητα που ενθαρρύνεται από το ΠΣ σχετικά με την ενότητα αυτή,
- η προηγούμενη και η επόμενη γνώση των μαθητών όπως αυτή προτείνεται από το ΠΣ σχετικά με την ενότητα,
- οι δυσκολίες που έχουν οι μαθητές σχετικά με την ενότητα όπως αυτές προκύπτουν κυρίως από τη σχετική έρευνα,
- προτάσεις διδακτικής διαχείρισης της ενότητας,
- ιδέες διδακτικής διαχείρισης παραδειγμάτων ενδεικτικών δραστηριοτήτων που προτείνονται στο ΠΣ ή συμπληρωματικών.

Σε κάποιες περιπτώσεις προτείνεται εκπαιδευτικό υλικό ανά ενότητα που μπορεί να χρησιμοποιήσει ο εκπαιδευτικός καθώς και προτάσεις – παραδείγματα διαχείρισης συνθετικών εργασιών.

Βασικές Αρχές Μάθησης και Διδασκαλίας των Μαθηματικών

Μαθηματικά και Μαθηματικός γραμματισμός

Κεντρική επιδίωξη της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην υποχρεωτική εκπαίδευση είναι η ανάδειξη των βασικών χαρακτηριστικών της μαθηματικής γνώσης: της γενίκευσης, της αφαίρεσης, της ακρίβειας και της συντομίας, καθώς και η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Παράλληλα, η διδασκαλία επιδιώκει τη σύνδεση των παραπάνω με το κοινωνικό περιβάλλον, γεγονός που οδηγεί στην ανάπτυξη του μαθηματικού γραμματισμού, δηλαδή στην ικανότητα του ατόμου να αναλύει, να ερμηνεύει και να επεμβαίνει στο κοινωνικό του περιβάλλον και στον κόσμο γύρω του, χρησιμοποιώντας ως εργαλείο τα μαθηματικά και να αντιλαμβάνεται τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά για τη λήψη αποφάσεων. Το ΠΣ επιδιώκει κυρίως να αποκτήσουν οι μαθητές την ικανότητα διατύπωσης και επίλυσης προβλημάτων, καθώς και να διαμορφώσουν μια θετική στάση για τα μαθηματικά, εκτιμώντας το ρόλο τους στην ανάπτυξη του ανθρώπινου πολιτισμού.

Η υλοποίηση των παραπάνω στόχων επιχειρείται, όπως αναλύεται στο ΠΣ, να επιτευχθεί μέσα από τέσσερις βασικές διεργασίες:

- α) του μαθηματικού συλλογισμού και της επιχειρηματολογίας,
- β) της δημιουργίας συνδέσεων/ δεσμών,
- γ) της επικοινωνίας μέσω της χρήσης διαφορετικής μορφής εργαλείων, και
- δ) της μεταγνωστικής ενημερότητας, όπου ο μαθητής σκέφτεται πάνω στις δράσεις του και ελέγχει την αποτελεσματικότητα των στρατηγικών του.

Η ανάπτυξη αυτών των διεργασιών από τον μαθητή εξαρτάται από το είδος του προβλήματος/ δραστηριότητας που θέτει ο εκπαιδευτικός στους μαθητές, αλλά και από την αλληλεπίδραση των μαθητών και του εκπαιδευτικού στην τάξη. Για παράδειγμα, μια άσκηση της μορφής «Λύστε την εξίσωση» δεν ενθαρρύνει τις ίδιες διεργασίες με ένα πρόβλημα που μοντελοποιείται από μια εξίσωση. Επιπλέον, αν ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τους μαθητές του να περιγράψουν, να επεξηγήσουν και να τεκμηριώσουν τις λύσεις τους σε ένα πρόβλημα, μπορεί να τους υποστηρίξει να αναπτύξουν κάποιες από τις παραπάνω διεργασίες.

Εργαλεία διδασκαλίας και μάθησης

Δραστηριότητες

Τα βασικά εργαλεία διδασκαλίας και μάθησης που υποστηρίζει το ΠΣ είναι η χρήση, από τους ίδιους τους μαθητές στην τάξη, δραστηριοτήτων, οι οποίες μπορούν να βοηθήσουν στην εισαγωγή μαθηματικών εννοιών, στην αναγνώριση μαθηματικών ιδιοτήτων και δομών, στη μοντελοποίηση καταστάσεων με την αξιοποίηση μαθηματικών εργαλείων και γενικότερα στη μαθηματική διερεύνηση. Το πέρασμα από τη δραστηριότητα στο μαθηματικό αντικείμενο είναι ένα δύσκολο σημείο που χρειάζεται να διαχειριστεί ο εκπαιδευτικός ώστε να μπορέσει ο μαθητής να κάνει τις ανάλογες συνδέσεις ανάμεσα στο πλαίσιο που θέτει η δραστηριότητα και στο μαθηματικό περιεχόμενο. Η διαρκής αναφορά του μαθητή στο πλαίσιο της δραστηριότητας που έχει να λύσει σε όλη την πορεία επίλυσής της βοηθά στο

πέρασμα αυτό. Συχνά, η παρουσίαση του μαθηματικού μοντέλου απευθείας από τον εκπαιδευτικό καταστρατηγεί την αρχή της ανακάλυψής του από τους μαθητές και μετατρέπει τη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών σε τετριμμένη. Η παρουσίαση από τον εκπαιδευτικό του μαθηματικού μοντέλου συχνά μετατρέπει τη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών σε τετριμμένη. Η συνεργασία των μαθητών στην τάξη, η συζήτηση τόσο στο πλαίσιο μικρών ομάδων όσο και σε ολόκληρη την τάξη επιτρέπει στους μαθητές να διατυπώσουν, να επεξηγήσουν και να τεκμηριώσουν τις σκέψεις τους. Επίσης, ο εκπαιδευτικός χρειάζεται να υποστηρίξει τη νοηματοδότηση των μαθηματικών εννοιών που αναδεικνύονται στη δραστηριότητα και να μην περιορίζεται στη συνεχή εξάσκηση.

Χειραπτικά εργαλεία

Συχνά, η μαθηματική διερεύνηση γίνεται μέσα από τη χρήση χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων. Το ΠΣ και ο οδηγός προτείνουν την αξιοποίηση τέτοιων εργαλείων και δίνουν κάποια παραδείγματα αξιοποίησής τους στη διδασκαλία. Τα εργαλεία αυτά επιτρέπουν στους μαθητές να πειραματιστούν, να κάνουν εικασίες, να ανακαλύψουν μαθηματικές έννοιες και ιδιότητες και συχνά να εντοπίσουν ακόμα και βασικές ιδέες που θα τους οδηγήσουν στην τεκμηρίωση των εικασιών τους με μαθηματικά εργαλεία. Το πέρασμα από τον εμπειρικό-διαισθητικό τρόπο σκέψης που επιτρέπουν τα εργαλεία στον τυπικό δεν γίνεται αυτόματα και απαιτεί οι μαθητές να έχουν την ευκαιρία, μέσα από συζήτηση, να κάνουν αυτές τις συνδέσεις. Τα χειραπτικά εργαλεία που αξιοποιούνται στο ΠΣ είναι δομημένα (π.χ. Dienes blocks για τη διδασκαλία του θεσιακού συστήματος), ημι-δομημένα (π.χ. τα algebra tiles για τις πράξεις των ακεραίων) ή μη δομημένα (π.χ. γεωπίνακες για την κατασκευή και σύγκριση γεωμετρικών σχημάτων). Ακόμα και η χρήση τους μπορεί να διαφέρει ως προς τη μαθηματική δράση που υποστηρίζουν. Για παράδειγμα, το χειραπτικό υλικό μπορεί να είναι ένα μοντέλο αναπαράστασης μιας διαδικασίας (π.χ. το μοντέλο της ζυγαριάς ή τα algebra tiles), ένα μέσο διερεύνησης μιας σχέσης (π.χ. τα geostrips για τη διερεύνηση της σχέσης εμβαδόν – περίμετρος) ή ακόμα πιο παραδοσιακής μορφής εργαλεία (διαβήτη, όργανα μέτρησης) που χρησιμοποιούνται στη γεωμετρία για σχεδιασμό, κατασκευή, σύγκριση γεωμετρικών αντικειμένων. Επίσης, η κατάλληλη χρήση του υπολογιστή τσέπης επιτρέπει τη μαθηματική διερεύνηση και τον πειραματισμό. Τέλος, μια σειρά από αναπαραστασιακά εργαλεία (π.χ. διάφορες μορφές αριθμογραμμής [κενή, διπλή κ.λπ.], μήκη, γεωμετρικά σχήματα) μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αποδώσουν νόημα σε έννοιες και διαδικασίες. Το κάθε χειραπτικό και αναπαραστασιακό υλικό έχει δυνατότητες και περιορισμούς και προσομοιώνει μαθηματικές έννοιες, ιδιότητες και διαδικασίες. Αυτό είναι πολύ δύσκολο να γίνει αντιληπτό ακόμα και από μαθητές του Γυμνασίου. Η εναλλαγή χειραπτικών υλικών για το ίδιο μαθηματικό περιεχόμενο και η συζήτηση πάνω στις ομοιότητες και στις διαφορές τους μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν τις διαφοροποιήσεις ανάμεσα στις μαθηματικές οντότητες και στις αναπαραστάσεις τους. Επίσης, καθημερινά αντικείμενα από το περιβάλλον των μαθητών μπορούν να δώσουν τη δυνατότητα στους μαθητές να συνδέσουν την άτυπη με την τυπική γνώση.

Ψηφιακά εργαλεία

Η αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών υποστηρίζει την έμφαση που δίνεται στο ΠΣ στην εμπλοκή των μαθητών σε μαθηματικές δραστηριότητες, διερεύνηση μαθηματικών ιδεών και επίλυση προβλήματος μέσα από τη χρήση εξειδικευμένων λογισμικών για μαθηματική διερεύνηση και εργαλείων κοινωνικού λογισμικού για συλλογική διαπραγμάτευση και συνεργασία.

Τα ψηφιακά εργαλεία που προτείνονται στο ΠΣ χρησιμοποιούνται ως εργαλεία έκφρασης και οργανώνονται σε πέντε κατηγορίες, ανάλογα με το είδος της μαθηματικής δραστηριότητας και τον τρόπο χρήσης της υφιστάμενης τεχνολογίας. Αυτές είναι: η μαθηματική έκφραση μέσω προγραμματισμού, ο δυναμικός χειρισμός γεωμετρικών αντικειμένων και σχέσεων, η αλγεβρική διερεύνηση με αντίστοιχα συστήματα, η διερεύνηση και επεξεργασία δεδομένων για στατιστική και πιθανότητες και ο πειραματισμός με ψηφιακά μοντέλα. Τα εργαλεία αυτά αξιοποιούνται με συνδυασμό μεικτής και διακριτής παρέμβασης σε δύο επίπεδα:

- (α) επιλεκτικά με τη μορφή *μικροπειραμάτων* που ενσωματώνονται σε διαφορετικά σημεία της ύλης και μπορεί να συνδέονται είτε με ορισμούς και μαθηματικές ιδιότητες είτε με δραστηριότητες και ασκήσεις των σχολικών βιβλίων,
- (β) ως βασικό υλικό αναφοράς σε *συνθετικές εργασίες* για το σχεδιασμό και την προετοιμασία μαθητικών δραστηριοτήτων, αλλά και για μαθηματική διερεύνηση.

Τα μικροπειράματα εμπεριέχουν διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις και η βασική χρήση τους από μαθητές προβλέπει δυναμικό χειρισμό μαθηματικών αντικειμένων ώστε συμπεριφορές, σχέσεις και ιδιότητες να γίνονται αντικείμενο προβληματισμού, διερεύνησης και διαπραγμάτευσης (τι μένει σταθερό και τι αλλάζει, καθώς μετεξελίσσονται τα μαθηματικά αντικείμενα). Για παράδειγμα, με αφετηρία μια δραστηριότητα – άσκηση του σχολικού βιβλίου, ένα μικροπείραμα μπορεί να στοχεύει στην επεξήγηση μιας έννοιας ή στην απαραίτητη εμβάθυνση για την κατανόησή της από τους μαθητές. Έτσι, το κάθε μικροπείραμα μπορεί να καλύπτει μια έννοια στενά ή σε ένα ευρύτερο εννοιολογικό πεδίο όπου εμπλέκονται συνδεδεμένες μαθηματικές έννοιες. Για παράδειγμα, σε μια δραστηριότητα κατασκευής της περιμέτρου ενός τριγώνου με ένα εργαλείο δυναμικής γεωμετρίας (μέσω τομής κύκλων) περιλαμβάνονται στοιχεία που αφορούν τον τρόπο κατασκευής ισοσκελούς και ισοπλεύρου τριγώνου, αλλά και αναγκαίες συνδέσεις με γνώσεις που έχουν οι μαθητές για τις ιδιότητες του κύκλου. Τα μικροπειράματα σε κάποιες περιπτώσεις βασίζονται στη χρήση έτοιμων εφαρμογών (applets) από έγκυρες ιστοσελίδες. Αυτό συμβαίνει κυρίως στους κύκλους Α και Β όπου η πλαισίωση των μαθηματικών εννοιών με μοντέλα και καταστάσεις απαιτεί μεγάλη ποικιλία αναπαραστάσεων και σχέσεων. Με αυτό τον τρόπο επιδιώκεται η ενίσχυση των ευκαιριών μάθησης των αντίστοιχων μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές.

Τα μικρο-πειράματα λοιπόν προορίζονται για χειρισμό από το μαθητή (εξατομικευμένα ή σε συνεργασία σε ομάδα) με δια ζώσης διδακτική υποστήριξη από τον εκπαιδευτικό, ενώ μπορεί να χρησιμοποιηθούν κατά την παραδοσιακή μετωπική διδασκαλία με χρήση διαδραστικού πίνακα ως μέσα επεξήγησης εννοιών, αλλά και ως μέσα για σχεδιασμό μιας διευρυμένης μαθηματικής διερεύνησης

ενώπιον όλης της τάξης. Τα μικροπειράματα είναι σχεδιασμένα ώστε οι όποιες απαντήσεις των μαθητών να αφήνουν πεδίο παρέμβασης στον εκπαιδευτικό και αφορμές για διενέργεια συζήτησης στην ολομέλεια της τάξης (π.χ. μέθοδος επίλυσης ενός προβλήματος ή εύρεσης μιας απάντησης, γενίκευση της λύσης, ερμηνεία αποτελεσμάτων και συμπεριφορών μαθηματικών αντικειμένων).

Συνθετικές εργασίες

Στο Πρόγραμμα Σπουδών προτείνεται η διαχείριση 10 ωρών διδασκαλίας από τον προβλεπόμενο ανά σχολικό έτος χρόνο για να εργαστούν οι μαθητές σε συνθετικές εργασίες. Η συνθετική εργασία δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να ασχοληθούν με μια πιο εκτεταμένη δραστηριότητα που συνδέεται με άλλα μαθησιακά διδακτικά αντικείμενα, καθώς και με καταστάσεις της πραγματικής ζωής. Στην περίπτωση των συνθετικών εργασιών με αξιοποίηση των ψηφιακών εργαλείων η έμφαση δίνεται στη δυνατότητα που παρέχουν στους μαθητές να εμπλακούν βαθύτερα σε μαθηματικές δραστηριότητες, να κατασκευάσουν και να επεξεργαστούν ψηφιακά μαθηματικά αντικείμενα, συμπεριφορές και σχέσεις μέσα από το χειρισμό αλληλοσυνδεδεμένων αναπαραστάσεων για ένα σύνολο διδακτικών ωρών. Στο επίκεντρο κάθε συνθετικής εργασίας βρίσκεται η συνεργασία μεταξύ των μαθητών (συχνά σε ομάδες) για τη διερεύνηση ενός θέματος ή για τη λύση ενός προβλήματος στο οποίο εμπλέκονται τα μαθηματικά και αναδεικνύονται ως εργαλείο που ευνοεί τη διερεύνηση καθαυτή, τη διαπραγμάτευση και την ερμηνεία. Έτσι, ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να σχεδιάσει διερευνήσεις που αναδεικνύουν συνδέσεις εντός των μαθηματικών (π.χ. διερεύνηση με άξονα ένα μαθηματικό θέμα) ή εκτός των μαθηματικών (π.χ. μαθηματικά και πολιτισμός, μαθηματικά στο πλαίσιο πραγματικών καταστάσεων). Σε κάθε περίπτωση, οι προτεινόμενες συνθετικές εργασίες δεν προτείνεται να ειδωθούν ως αντικείμενα υλικού προς επεξήγηση στους μαθητές, αλλά να λειτουργήσουν ως γεννήτορες ιδεών για τη δημιουργική εμπλοκή των ίδιων των εκπαιδευτικών στο σχεδιασμό νέων εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων προς διερεύνηση μιας ποικιλίας μαθηματικών εννοιών του ΠΣ από τους μαθητές. Μέρος ή το σύνολο των συνθετικών εργασιών που βασίζονται στη χρήση ψηφιακών εργαλείων προτείνεται να εφαρμοστούν στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου.

Μαθηματικό Περιεχόμενο: Τροχιές Μάθησης και Διδασκαλίας

Όπως έχουμε παρουσιάσει στο ΠΣ η ανάπτυξη του περιεχομένου έγινε με βάση την έννοια της «τροχιάς μάθησης και διδασκαλίας» εστιάζοντας σε μια εξελικτική πορεία μάθησης και ανάπτυξης των μαθηματικών νοημάτων κατά τη διάρκεια της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Όταν οι εκπαιδευτικοί κατανοούν αυτήν την πορεία και τους βασικούς σταθμούς της και οργανώνουν τη δραστηριοποίηση των παιδιών με αναφορά σε αυτήν, μπορούν να δημιουργήσουν περιβάλλοντα μάθησης που να στηρίζουν αποτελεσματικά την επιτυχή μαθητεία του μαθητή στα μαθηματικά (Clements & Sarama, 2009)¹. Σε αυτήν την κατεύθυνση είναι εξαιρετικά σημαντική η έννοια της τροχιάς μάθησης και διδασκαλίας, η οποία υποδεικνύει τους εκάστοτε

¹ Clements, D. H. & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: the learning trajectory approach*. New York & London: Routledge.

στόχους μάθησης, την αφετηρία εκκίνησης, πώς και πού μετακινείσαι κάθε φορά και πώς επιτυγχάνεις, τελικά, το στόχο μάθησης που είχε αρχικά τεθεί.

Μια Τροχιά Μάθησης και Διδασκαλίας (ΤΜΔ) αποτυπώνει μια συνολική θέαση της μαθησιακής εμπειρίας των μαθητών σε μια συγκεκριμένη θεματική του Προγράμματος Σπουδών των μαθηματικών και στοχεύει στη διαφάνεια και στην προσβασιμότητα στην αντίστοιχη εκπαιδευτική τους πορεία.

Οι βασικές θεματικές περιοχές όπου αναπτύσσονται τα περιεχόμενα και τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα είναι: Αριθμοί – Άλγεβρα, Χώρος – Γεωμετρία – Μετρήσεις και Στοχαστικά Μαθηματικά. Οι περιοχές αυτές εμφανίζονται σε όλους τους ηλικιακούς κύκλους αναδεικνύοντας, στις μικρότερες τάξεις, άτυπους και διαισθητικούς τρόπους σκέψης, οι οποίοι γίνονται περισσότερο τυπικοί προς το τέλος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα που περιγράφονται για την κάθε τάξη θα ήταν ιδανικό να επιτευχθούν από όλους τους μαθητές. όμως, στην πραγματικότητα, ο βαθμός επίτευξης του κάθε μαθησιακού αποτελέσματος θα διαφέρει για τον κάθε μαθητή. Η γνώση από τον εκπαιδευτικό των διαφόρων επιπέδων ανάπτυξης θα τον βοηθήσει στη διαμόρφωση κατάλληλων παρεμβάσεων με στόχο την περαιτέρω ανάπτυξη όλων των μαθητών. Στη συνέχεια, περιγράφονται σύντομα τα βασικά χαρακτηριστικά των τροχιών μάθησης για την κάθε βασική θεματική περιοχή και για κάθε ηλικιακό κύκλο (Α΄ κύκλος – νηπιαγωγείο, Α΄ και Β΄ δημοτικού, Β΄ κύκλος – Γ΄, Δ΄, Ε΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού, Γ΄ κύκλος – Γυμνάσιο) και δίνονται κάποια παραδείγματα ανάπτυξης κατά τη διάρκεια της υποχρεωτικής εκπαίδευσης.

Αριθμοί – Άλγεβρα

Περιγράφονται παρακάτω οι τροχιές για τη θεματική «αριθμός» και για τη θεματική «άλγεβρα». Επιπλέον, στο τέλος της σχετικής περιγραφής, δίνεται ένα παράδειγμα ανάπτυξης μιας τροχιάς για καθεμία από τις δύο θεματικές.

Αριθμός

Η θεματική «αριθμός» αναπτύσσεται σε έξι τροχιές - φυσικός αριθμός, κλασματικός αριθμός, δεκαδικός αριθμός/ ποσοστά, ακέραιος αριθμός, ρητός αριθμός, άρρητος/πραγματικός αριθμός-, οι οποίες παρουσιάζονται, στη συνέχεια, με τη συγκεκριμένη σειρά.

Σε καθεμία από τις τροχιές της συγκεκριμένης θεματικής μπορεί κανείς να διακρίνει δύο υπο-τροχιές. Η πρώτη αφορά σε μάθηση που συνδέεται με την έννοια του εκάστοτε αριθμού και του αντίστοιχου συνόλου αριθμών, ενώ η δεύτερη αναφέρεται σε μάθηση που σχετίζεται με τις πράξεις στο αντίστοιχο σύνολο. Θα πρέπει να επισημανθεί ότι οι υπο-τροχιές κάθε τροχιάς, οι υπο-τροχιές διαφορετικών τροχιών, αλλά και οι διαφορετικές τροχιές συσχετίζονται, διασταυρώνονται και συχνά ενοποιούνται, δράση που δεν είναι πάντοτε εύκολο να ανιχνευτεί και να περιγραφεί με σαφήνεια.

Παρακάτω, για κάθε τροχιά της θεματικής «αριθμός», περιγράφονται οι δύο υπο-τροχιές και, ειδικότερα, οι σημαντικοί σταθμοί, τα ορόσημά τους. Επιπλέον, υποδεικνύεται η εξέλιξη των δύο υπο-τροχιών στους τρεις ηλικιακούς κύκλους. Στο

τέλος της ενότητας παρατίθεται ως παράδειγμα η σχηματική ανάπτυξη μιας υπο-τροχιάς για την έννοια του κλάσματος και το σύνολο των κλασματικών αριθμών.

α. Τροχιά «φυσικός αριθμός»

Υπο-τροχιές	Σημαντικοί σταθμοί – ορόσημα στην πορεία ανάπτυξης
Φυσικός αριθμός & το σύνολο των φυσικών αριθμών	<ul style="list-style-type: none"> • Αναγνώριση φυσικών αριθμών σε μια ποικιλία από πλαίσια και με τη χρήση διάφορων στρατηγικών. • Αναπαράσταση φυσικών αριθμών (με φυσικά αντικείμενα, με εικόνες, λεκτικά, ως σημεία στην ευθεία, με ψηφία/σύμβολα). • Αρίθμηση και απαρίθμηση και αναπαράσταση των σχετικών διαδικασιών με διαφορετικούς τρόπους. • Σύγκριση και διάταξη φυσικών αριθμών. • Ανάλυση και σύνθεση φυσικών αριθμών με διαφορετικούς τρόπους (αξία θέσης ψηφίου). • Διάκριση φυσικών από άλλους αριθμούς.
Πράξεις στους φυσικούς αριθμούς	<ul style="list-style-type: none"> • Αναγνώριση και των τεσσάρων πράξεων σε διαφορετικά πλαίσια και με διαφορετικούς τρόπους/ στρατηγικές (νοερά, προφορικά και γραπτά). • Εκτέλεση των τεσσάρων πράξεων σε διαφορετικά πλαίσια και με διαφορετικούς τρόπους/ στρατηγικές (νοερά, προφορικά και γραπτά). • Αναγνώριση των ιδιοτήτων των τεσσάρων πράξεων και της σχέσης μεταξύ τους. • Αξιοποίηση των τεσσάρων πράξεων και των ιδιοτήτων τους για την επίλυση προβλημάτων. • Επικοινωνία των στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων. • Ανάπτυξη μεθόδων αξιολόγησης των αποτελεσμάτων των πράξεων.

Αναφορικά με την εξέλιξη των δύο υπο-τροχιών ανά ηλικιακό κύκλο, ισχύουν οι ακόλουθες παρατηρήσεις:

Α΄ κύκλος: Οι μαθητές εργάζονται στην πρώτη χιλιάδα και σε μια ποικιλία από πλαίσια. Αναφορικά με τον αριθμό και το σύνολο των φυσικών αριθμών, η εργασία στην τάξη εστιάζεται στην αναγνώριση (άμεση και μέσω αντιστοίχισης), στην ανάγνωση (προφορική και γραπτή) και στην αναπαράσταση φυσικών αριθμών (με φυσικά υλικά, εικόνες, λέξεις, σύμβολα και στην ευθεία). Επιπλέον, παρέχονται ευκαιρίες στους μαθητές να αποκτήσουν εμπειρίες και ευχέρεια στη σύνθεση και στην ανάλυση φυσικών αριθμών, αλλά και στη σύγκριση και στη διάταξή τους. Τέλος, να αναπτύξουν δεξιότητες και ικανότητες αρίθμησης και απαρίθμησης.

Σχετικά με τις πράξεις στους φυσικούς αριθμούς, η έμφαση βρίσκεται στην κατανόηση των τεσσάρων πράξεων και στην αναγνώριση, αναπαράσταση και εφαρμογή τους σε μια ποικιλία από καταστάσεις. Επιπλέον, οι μαθητές εμπλέκονται

σε καταστάσεις εκτίμησης και υπολογισμού του αποτελέσματος αριθμητικών παραστάσεων πρόσθεσης και αφαίρεσης. Ακόμη, ενθαρρύνονται να αναπτύσσουν και να αξιοποιούν στρατηγικές νοερών υπολογισμών, άτυπες και τυπικές διαδικασίες εκτέλεσης των τεσσάρων πράξεων (πολλαπλασιαστής έως διψήφιος και διαιρέτης μονοψήφιος) και να διερευνούν τη σχέση μεταξύ των τεσσάρων πράξεων. Τέλος, παρέχονται ευκαιρίες στους μαθητές να αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων (έως δύο πράξεων), να τις τεκμηριώνουν και να ελέγχουν τη 'λογικότητα' της λύσης.

Β' κύκλος: Η μαθησιακή δράση του πρώτου κύκλου επεκτείνεται, πλέον, στους φυσικούς αριθμούς μέχρι το 1 τρις. Οι σχετικές δραστηριότητες στοχεύουν στη συστηματοποίηση της αντίστοιχης σκέψης των μαθητών, ώστε να οδηγηθούν προοδευτικά στην κατανόηση των δομικών και των λειτουργικών χαρακτηριστικών του συνόλου των φυσικών αριθμών. Σε αυτήν την κατεύθυνση, προσφέρονται στους μαθητές κάποιες επιπλέον μαθησιακές εμπειρίες, όπως η έννοια της θετικής δύναμης φυσικών αριθμών, η παρένθεση στις αριθμητικές παραστάσεις και η χρήση της αριθμομηχανής για τη διευκόλυνση της ουσιαστικής μαθηματικής σκέψης (συνήθως μετά τη Γ' τάξη). Ακόμη, καλούνται οι μαθητές να θέτουν και να διερευνούν ερωτήματα σχετικά με τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών (αναγνώριση της Ευκλείδειας διαίρεσης και των κριτηρίων διαιρετότητας), αλλά και τη σχέση των φυσικών με τους άλλους αριθμούς.

Γ' κύκλος: Η μάθηση και η διδασκαλία που αφορά στους φυσικούς αριθμούς σε αυτόν τον κύκλο επικεντρώνεται, πλέον, στη μελέτη από τους μαθητές των χαρακτηριστικών του συνόλου των φυσικών αριθμών και στη σχέση του με τα άλλα σύνολα αριθμών

β. Τροχιά «κλασματικός αριθμός»

Υπο-τροχιές	Σημαντικοί σταθμοί – ορόσημα ανάπτυξης
Κλασματικός αριθμός & το σύνολο των κλασματικών αριθμών	<ul style="list-style-type: none"> • Χωρισμός διακριτών και συνεχών ποσοτήτων σε ίσα μέρη, διερεύνηση και περιγραφή της μεταξύ τους σχέσης. • Αναγνώριση, αναπαράσταση και διαφορετικές ερμηνείες της σχέσης μέρους/ όλου. • Αναγνώριση, διερεύνηση, αναπαράσταση και κατασκευή ισοδύναμων κλασμάτων. • Σύγκριση κλασματικών αριθμών. • Διερεύνηση της σχέσης κλασματικών και φυσικών αριθμών.
Πράξεις στους κλασματικούς αριθμούς	<ul style="list-style-type: none"> • Αναγνώριση, αναπαράσταση και εκτέλεση των τεσσάρων πράξεων με ομώνυμα και ετερόνυμα κλάσματα σε διαφορετικά πλαίσια και με διαφορετικούς τρόπους. • Αναγνώριση και διερεύνηση των ιδιοτήτων των τεσσάρων πράξεων με κλάσματα. • Αναγνώριση, αναπαράσταση και εκτέλεση πράξεων με

κλάσματα και φυσικούς αριθμούς.

- Αξιοποίηση των πράξεων και των ιδιοτήτων τους για την επίλυση προβλημάτων.
- Επικοινωνία σχετικά με τις στρατηγικές επίλυσης.
- Ανάπτυξη μεθόδων/ στρατηγικών αξιολόγησης των αποτελεσμάτων των πράξεων με κλάσματα.

Η εξέλιξη των δύο υπο-τροχιών ανά κύκλο έχει ως εξής:

Α΄ κύκλος: Οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες σύγκρισης εμπράγματων ποσοτήτων, διακριτών και συνεχών, βρίσκουν τη σχέση μεγέθους τους και την περιγράφουν λεκτικά. Ακόμη, εισάγονται στη συμβολική γραφή απλών κλασμάτων (π.χ., $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$...).

Β΄ κύκλος: Οι δραστηριότητες του πρώτου κύκλου επαναλαμβάνονται, αλλά περιλαμβάνουν, πλέον, και εικονικές και συμβολικές ποσότητες, ενώ στα ανάγωγα κλάσματα προστίθενται, προοδευτικά, καταχρηστικά και μικτά. Επιπλέον, δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να αναπαραστήσουν την ίδια σχέση μεγεθών με διαφορετικές κλασματικές αναπαραστάσεις, να βρουν ένα κλάσμα ανάμεσα σε δύο ανάγωγα (π.χ., μεταξύ $\frac{2}{3}$ και $\frac{3}{4}$) και να συγκρίνουν κλάσματα με διαφορετικούς τρόπους. Για τη σύγκριση και τη διάταξη κλασμάτων, ακολούθως, οι μαθητές εισάγονται στη διαδικασία μετατροπής τους σε ομώνυμα (κατασκευή ισοδύναμων κλασμάτων) με τη χρήση του ΕΚΠ. Τέλος, εισάγονται στην έννοια του κλάσματος ως αριθμού, αλλά και στην έννοια του λόγου.

Αναφορικά με τις πράξεις με κλασματικούς αριθμούς, αρχικά, οι μαθητές προσθέτουν και αφαιρούν ομώνυμα, απλά ετερόνυμα, οποιαδήποτε ανάγωγα και καταχρηστικά κλάσματα, με αυτήν τη σειρά. Ακολούθως, ασχολούνται με τον πολλαπλασιασμό και συνεχίζουν με τη διαίρεση (αρχικά, μεταξύ φυσικών και κλασματικών αριθμών και, στη συνέχεια, μεταξύ κλασματικών αριθμών). Και για τις τέσσερις πράξεις, αξιοποιούνται και ενθαρρύνονται διάφορες μέθοδοι/ στρατηγικές εκτέλεσης, ενώ προοδευτικά εισάγεται ο καθιερωμένος αλγόριθμος. Ακόμη, οι μαθητές διερευνούν την ισχύ των ιδιοτήτων των τεσσάρων πράξεων με φυσικούς και στην περίπτωση των κλασματικών αριθμών. Τέλος, εισάγονται στα ποσοστά, μετατρέπουν κλασματικούς αριθμούς σε ποσοστά και τα χρησιμοποιούν στη μοντελοποίηση καταστάσεων και στην επίλυση προβλημάτων.

Γ΄ κύκλος: Δεν υπάρχει εργασία αποκλειστικά εστιασμένη σε κλασματικούς αριθμούς.

γ. Τροχιά «δεκαδικός αριθμός»

Υπο-τροχιές

Δεκαδικός αριθμός και το σύνολο των δεκαδικών αριθμών

Σημαντικοί σταθμοί – ορόσημα ανάπτυξης

- Αναγνώριση δεκαδικών αριθμών σε μια ποικιλία από καθημερινά και άλλα πλαίσια.
- Μετατροπή δεκαδικών αριθμών σε κλάσματα και ποσοστά και αντιστρόφως.
- Αναγνώριση και αξιοποίηση της αξίας της έννοιας του

ποσοστού στην αντιμετώπιση καθημερινών καταστάσεων.

Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς

- Στρογγυλοποίηση δεκαδικών αριθμών.
- Αναγνώριση, αναπαράσταση και εκτέλεση των τεσσάρων πράξεων με δεκαδικούς αριθμούς.
- Έλεγχος της 'λογικότητας' του αποτελέσματος των πράξεων με δεκαδικούς, με τη χρήση εκτιμήσεων.
- Αξιοποίηση των δεκαδικών αριθμών, των ποσοστών, των σχετικών πράξεων και των ιδιοτήτων τους για την επίλυση προβλημάτων.
- Ανάπτυξη μεθόδων αξιολόγησης του αποτελέσματος των πράξεων με δεκαδικούς αριθμούς.

Οι τροχιά μάθησης για τους δεκαδικούς αριθμούς αναπτύσσεται ως ακολούθως σε κάθε κύκλο:

Α' κύκλος: Οι μαθητές, μέσω πρακτικών δραστηριοτήτων, εισάγονται στη γραφή και στην ανάγνωση δεκαδικών αριθμών, καθώς και στην (κυρίως προσεγγιστική) τοποθέτησή τους στην αριθμογραμμή.

Β' κύκλος: Αναφορικά με την έννοια του δεκαδικού αριθμού και το αντίστοιχο σύνολο, οι μαθητές μελετούν τα δεκαδικά κλάσματα ως ειδική περίπτωση κλασμάτων (αρχικά με παρονομαστή το 10 και το 100 και αργότερα οποιαδήποτε θετική δύναμη του 10), εισάγονται στο δεκαδικό συμβολισμό και αναγνωρίζουν ότι κάθε δεκαδικός αριθμός με πεπερασμένο δεκαδικό μέρος είναι ένα κλάσμα. Επιπλέον, διατάσσουν δεκαδικούς αριθμούς και τους τοποθετούν στην αριθμογραμμή. Τέλος, στρογγυλοποιούν έναν αριθμό με ένα ή δύο δεκαδικά ψηφία στον πλησιέστερο ακέραιο ή στην πλησιέστερη δεκάδα.

Σε ότι αφορά στις πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς, παρέχονται ευκαιρίες στους μαθητές να προσθέτουν και να αφαιρούν δεκαδικούς αριθμούς, νοερώς μέχρι και δύο δεκαδικά ψηφία και γραπτώς με ένα, δύο και περισσότερα δεκαδικά ψηφία, με αυτήν τη σειρά. Αναφορικά με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, στις πρώτες σχετικές εμπειρίες των μαθητών, πολλαπλασιαστικής και διαιρέτης είναι μονοψήφιοι φυσικοί, ενώ, στη συνέχεια, είναι δεκαδικοί με ένα δεκαδικό ψηφίο, με δύο δεκαδικά ψηφία, κ.ο.κ. Και για τις τέσσερις πράξεις, ενθαρρύνονται και αξιοποιούνται διάφορες μέθοδοι/ στρατηγικές εκτέλεσης, ενώ προοδευτικά εισάγεται ο καθιερωμένος αλγόριθμος. Ακόμη, οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιούν προσεγγιστικές και άλλες στρατηγικές, για να ελέγχουν αν το αποτέλεσμα των πράξεων είναι λογικό, καθώς και την αριθμομηχανή για να επιτρέψουν στη σκέψη να ασχοληθεί περισσότερο με τα μη υπολογιστικά «συστατικά» της μαθηματικής γνώσης.

Γ' κύκλος: Δεν υπάρχει εργασία εστιασμένη αποκλειστικά στους δεκαδικούς αριθμούς.

δ. Τροχιά «ακέραιος αριθμός»

Υπο-τροχιές	Σημαντικοί σταθμοί – ορόσημα ανάπτυξης
Ακέραιος αριθμός και το σύνολο των ακέραιων αριθμών	<ul style="list-style-type: none"> • Διαισθητική αντίληψη των ακέραιων αριθμών μέσω μιας ποικιλίας από καθημερινές καταστάσεις. • Αναγνώριση και αναπαράσταση ακέραιων αριθμών σε διαφορετικά πλαίσια. • Σύγκριση και διάταξη ακέραιων αριθμών με τη χρήση της αριθμογραμμής. • Αναγνώριση και αξιοποίηση της ιδιότητας των αντίθετων ακεραίων.
Πράξεις με ακέραιους αριθμούς	<ul style="list-style-type: none"> • Αναγνώριση, αναπαράσταση και εκτέλεση των τεσσάρων πράξεων με ακέραιους αριθμούς, με τη χρήση κατάλληλων μοντέλων. • Αναγνώριση και διερεύνηση των ιδιοτήτων των τεσσάρων πράξεων με ακέραιους αριθμούς. • Αξιοποίηση των ακέραιων αριθμών, των πράξεων στο αντίστοιχο σύνολο και των ιδιοτήτων τους για την επίλυση μαθηματικών και καθημερινών προβλημάτων (μοντελοποίηση).

Τα ορόσημα της ανάπτυξης των υπο-τροχιών στους τρεις ηλικιακούς κύκλους της υποχρεωτικής εκπαίδευσης έχουν ως εξής:

Α΄ κύκλος: Δεν προβλέπεται εργασία σχετική με τους ακέραιους αριθμούς.

Β΄ κύκλος: Στο συγκεκριμένο κύκλο επιχειρείται μια πρώτη αισθητοποίηση της έννοιας των ακεραίων αριθμών από τους μαθητές. Ειδικότερα, οι μαθητές καλούνται να αντιληφθούν διαισθητικά τη σχετική έννοια, μέσα από καθημερινές καταστάσεις, να συνειδητοποιήσουν την ανάγκη επέκτασης της αριθμογραμμής, να διατάξουν ακέραιους αριθμούς με πλαίσιο αναφοράς την αριθμογραμμή και να διερευνήσουν διαισθητικά απλές προσθέσεις και αφαιρέσεις με ακέραιους αριθμούς.

Γ΄ κύκλος: Πρόκειται για την περίοδο της πλήρους ανάπτυξης της σχετικής έννοιας. Οι μαθητές αναγνωρίζουν και αναπαριστούν ακέραιους σε διαφορετικά πλαίσια, διερευνούν τη σχέση διάταξης στο σύνολο των ακεραίων (κάθε ακέραιος έχει επόμενο) και τη σχέση του συνόλου των ακεραίων με το σύνολο των φυσικών αριθμών και, τέλος, αναγνωρίζουν την απόλυτη τιμή ακεραίων αριθμών ως την απόστασή τους από το 0.

Αναφορικά με τις πράξεις, οι μαθητές αναπτύσσουν κατανόηση των εννοιών των τεσσάρων πράξεων με ακεραίους αριθμούς και των ιδιοτήτων τους. Επιπλέον, αναγνωρίζουν, αναπαριστούν και εκτελούν τις τέσσερις πράξεις και αξιοποιούν τη γνώση τους για αυτές ώστε να διαχειριστούν μαθηματικά προβλήματα (π.χ., αριθμητικός λογισμός παραστάσεων), αλλά και καθημερινές καταστάσεις (π.χ., μοντελοποίηση).

στ. Τροχιά «ρητός αριθμός»

Υπο-τροχιές	Σημαντικοί σταθμοί – ορόσημα ανάπτυξης
Ρητός αριθμός και το σύνολο των ρητών αριθμών	<ul style="list-style-type: none"> • Αναγνώριση της έννοιας του ρητού αριθμού και, ειδικότερα, της σχέσης του με τους υπόλοιπους αριθμούς. • Σύγκριση και διάταξη ρητών αριθμών και διερεύνηση της ιδιότητας της 'πυκνότητας', με τη χρήση της ευθείας των αριθμών.
Πράξεις με ρητούς αριθμούς	<ul style="list-style-type: none"> • Διερεύνηση της επέκτασης της ισχύος όσων είναι γνωστά για τους αριθμούς (φυσικούς, κλασματικούς και ακεραίους) και για τις πράξεις τους στους ρητούς αριθμούς.

Η συγκεκριμένη τροχιά εμφανίζεται στο Γυμνάσιο (τρίτος ηλικιακός κύκλος). Όμως, οι εμπειρίες των μαθητών με τα διάφορα σύνολα αριθμών κατά τους προηγούμενους δύο κύκλους αναμένεται να έχουν συμβάλει στη συγκρότηση ενός επαρκούς γνωστικού κεφαλαίου και μιας μαθηματικής υποδομής με σαφή επιστημολογικά χαρακτηριστικά που αφορούν σε αριθμούς (έννοια, ιδιότητες, χαρακτηριστικά του αντίστοιχου συνόλου και πράξεις σε αυτό), που επιτρέπουν την επέκταση της αντίστοιχης μαθηματικής σκέψης, ενδεχομένως με κατάλληλους μετασχηματισμούς, στο διευρυμένο σύνολο των ρητών αριθμών.

Ειδικότερα, στο πλαίσιο της συγκεκριμένης τροχιάς, οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν, αρχικά, το κλάσμα ως αναπαράσταση του αποτελέσματος της διαίρεσης δύο φυσικών αριθμών και τα ισοδύναμα κλάσματα ως διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου αποτελέσματος. Στη συνέχεια, ορίζουν το σύνολο των ρητών (μετά τον ορισμό των ακεραίων), συγκρίνουν και διατάσσουν ρητούς αριθμούς και ορίζουν τη θέση τους στην αριθμογραμμή, διακρίνουν και διερευνούν τις έννοιες του λόγου και των αναλογιών και τις αξιοποιούν στη μοντελοποίηση καταστάσεων. Τέλος, αναγνωρίζουν, διερευνούν και χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των πράξεων με ρητούς αριθμούς (αντιμεταθετική, προσεταιριστική, επιμεριστική, ο ρόλος του 1, ο ρόλος του 0).

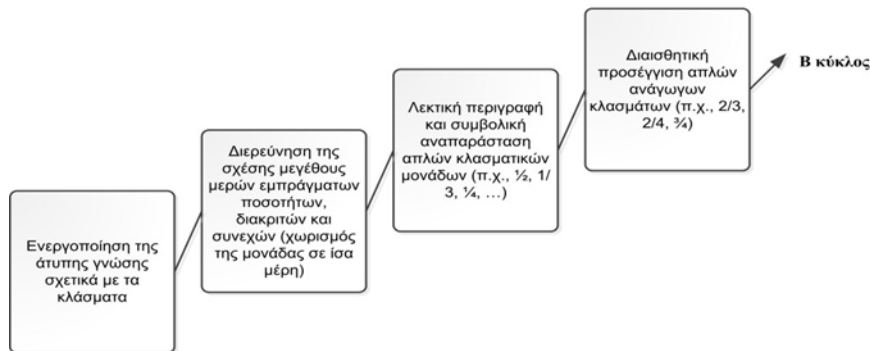
ζ. Τροχιά «άρρητος και πραγματικός αριθμός»

Υπο-τροχιές	Σημαντικοί σταθμοί – ορόσημα ανάπτυξης
Άρρητος και πραγματικός αριθμός - το σύνολο των άρρητων και των πραγματικών αριθμών	<ul style="list-style-type: none"> • Αναγνώριση της έννοιας της τετραγωνικής ρίζας θετικού αριθμού και αξιοποίησή της στην επίλυση προβλημάτων. • Διάκριση των άρρητων από τους ρητούς και αναγνώριση της σχέσης τους με τους υπόλοιπους αριθμούς. • Ορισμός των πραγματικών αριθμών, αναπαράστασή τους στην ευθεία, σύγκριση και διάταξή τους.
Πράξεις με άρρητους και πραγματικούς αριθμούς	<ul style="list-style-type: none"> • Διερεύνηση της επέκτασης της ισχύος όσων είναι γνωστά για τους αριθμούς και τις πράξεις τους στους πραγματικούς αριθμούς, με έμφαση στην ιδιότητα της πυκνότητας των πραγματικών αριθμών.

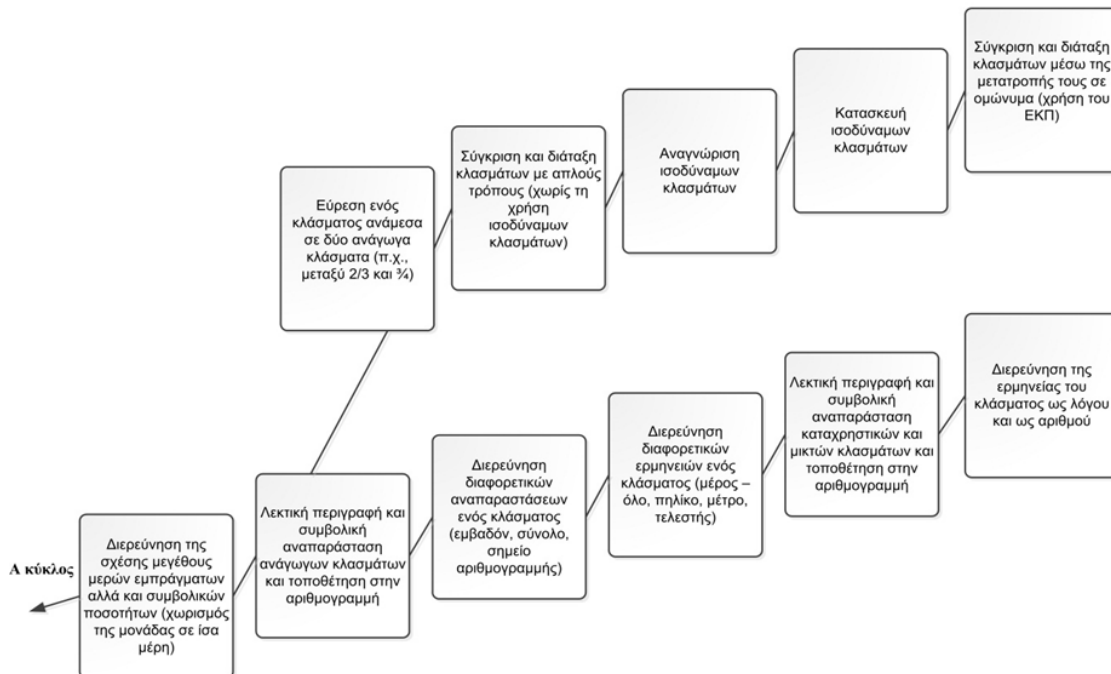
Και η τροχιά αυτή αναπτύσσεται αποκλειστικά στον τρίτο κύκλο, ωστόσο, τα βασικά επιστημολογικά χαρακτηριστικά της αντίστοιχης μαθηματικής γνώσης, αλλά και η αναγκαία γνωστική υποδομή αναμένεται να έχουν θεμελιωθεί, προοδευτικά, κατά τους προηγούμενους δύο κύκλους. Ένα πρόσθετο σημαντικό στοιχείο σε αυτήν την περίπτωση είναι ότι, πλέον, με τον ορισμό των πραγματικών αριθμών όχι μόνο προσφέρεται στους μαθητές μια ενιαία και ολιστική θέαση της έννοιας του αριθμού, αλλά, επιπλέον, δίνεται η αίσθηση της ολοκλήρωσης μιας κατασκευής που, αναπόφευκτα, αναδεικνύει θεμελιώδη επιστημολογικά ερωτήματα για τα μαθηματικά, όπως αυτά της πληρότητας και της κλειστότητας ενός συνόλου, τα οποία μπορούν να διευκολύνουν σημαντικά την περαιτέρω ανάπτυξη της σχετικής μαθηματικής γνώσης και σκέψης.

Σε ότι αφορά την ανάπτυξη της συγκεκριμένης τροχιάς στο Γυμνάσιο, οι μαθητές ενθαρρύνονται να αναγνωρίσουν, μέσα από προβλήματα, την αναγκαιότητα χρήσης των τετραγωνικών ριζών θετικών αριθμών και να υπολογίζουν τετραγωνικές ρίζες με δοκιμές και με τη χρήση αριθμομηχανής. Επιπλέον, αναγνωρίζουν τους άρρητους αριθμούς ως αριθμούς που δεν μπορούν να γραφούν ως κλάσμα ακεραίων και ως αριθμούς με άπειρο, μη περιοδικό δεκαδικό μέρος (δεκαδική αναπαράσταση ρητών και άρρητων αριθμών). Ακόμη, παριστάνουν γεωμετρικά και τοποθετούν στην ευθεία αριθμούς της μορφής \sqrt{a} . Ακολουθώντας, ορίζουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών και διερευνούν τη σχέση του με τα σύνολα των φυσικών, των ακεραίων και των ρητών, συγκρίνουν και διατάσσουν πραγματικούς αριθμούς, χρησιμοποιώντας την ευθεία των αριθμών και επεκτείνουν τις πράξεις των ρητών στους πραγματικούς. Τέλος, αναγνωρίζουν τη μη επέκταση της "ιδιότητας του επόμενου" στους πραγματικούς αριθμούς και διερευνούν την ιδιότητα της πυκνότητας σε αυτούς.

Τα σχεδιαγράμματα που ακολουθούν αποτελούν μια απόπειρα σχηματικής αποτύπωσης της ανάπτυξης μιας υπο-τροχιάς για την «έννοια του κλάσματος και το σύνολο των κλασματικών αριθμών» στην υποχρεωτική εκπαίδευση (Α' και Β' κύκλος).



Α' κύκλος



Β' κύκλος

Σχεδιάγραμμα 1. Σχηματική αναπαράσταση της ανάπτυξης της υπο-τροχιάς «η έννοια του κλάσματος και το σύνολο των κλασματικών αριθμών» στους Α' και Β' κύκλους (η τροχιά εμφανίζεται διαιρημένη σε δυο μέρη για πρακτικούς λόγους)

Άλγεβρα

Η θεματική «άλγεβρα» περιλαμβάνει τρεις τροχιές: ισότητες & ανισότητες, αλγεβρικές παραστάσεις και μοτίβα/ κανονικότητες & συναρτήσεις, οι οποίες παρουσιάζονται, στη συνέχεια, με αυτήν τη σειρά. Και εδώ οι διαφορετικές τροχιές συσχετίζονται, διασταυρώνονται και συχνά ενοποιούνται, χωρίς αυτό να είναι πάντοτε εύκολο να ανιχνευτεί και να περιγραφεί με σαφήνεια και ακρίβεια.

Παρακάτω, για κάθε τροχιά της θεματικής «άλγεβρα» περιγράφονται οι ενδεχόμενες υπο-τροχιές και οι σημαντικοί σταθμοί, τα ορόσημά τους. Επιπλέον,

περιγράφεται αδρομερώς η εξέλιξη της τροχιάς σε καθέναν από τους τρεις ηλικιακούς κύκλους. Στο τέλος της ενότητας παρατίθεται ως παράδειγμα η σχηματική ανάπτυξη μιας τροχιάς για την έννοια της συνάρτησης.

1. Τροχιά «Ισότητα & ανισότητα»

Υπο-τροχιές	Σημαντικοί σταθμοί – ορόσημα ανάπτυξης
Ισότητα	<ul style="list-style-type: none"> • Η έννοια της ισότητας και οι διαφορετικές χρήσεις του ίσον (=). • Εξισώσεις πρώτου βαθμού (επίλυση, κατασκευή, μοντελοποίηση). • Επίλυση απλών πολυωνυμικών εξισώσεων με παραγοντοποίηση (κυρίως δευτεροβάθμιας εξίσωσης). • Γραμμικά συστήματα 2×2 (επίλυση και μοντελοποίηση).
Ανισότητα	<ul style="list-style-type: none"> • Η έννοια της ανισότητας και οι διαφορετικές χρήσεις του συμβόλου της. • Ανισώσεις πρώτου βαθμού (επίλυση, κατασκευή, μοντελοποίηση).

Οι σημαντικοί σταθμοί ανάπτυξης της συγκεκριμένης τροχιάς κατά κύκλο έχουν ως εξής:

Α΄ κύκλος: Οι μαθητές διερευνούν τις έννοιες της ισότητας και της ανισότητας σε διαφορετικά πλαίσια και χρησιμοποιούν τα αντίστοιχα σύμβολα για να δηλώσουν την κατάλληλη σχέση μεταξύ αριθμών ή απλών αριθμητικών παραστάσεων (συμπεριλαμβάνονται παραστάσεις με σύμβολα που δηλώνουν αγνώστους ή μεταβλητές, π.χ., $\triangle + \square = 8$ ή $3 + \square = 9$).

Β΄ κύκλος: Η εστίαση βρίσκεται στη μελέτη των διαφορετικών χρήσεων του συμβόλου της ισότητας και της ανισότητας. Έτσι, αρχικά, οι μαθητές διατάσσουν αριθμούς από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο και αντιστρόφως (φυσικούς, δεκαδικούς, κλάσματα) και συνδέουν τις ανισοτικές τους σχέσεις με τη θέση τους στην αριθμογραμμή. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούν το σύμβολο της ισότητας ή της ανισότητας, για να δηλώσουν τη σχέση μεταξύ αριθμητικών παραστάσεων προοδευτικά μεγαλύτερης πολυπλοκότητας [π.χ., $6-1 \dots 2+5, 5+(7-4) \dots (5+7)-4$] ή να συμπληρώσουν ισότητες και ανισότητες με τον κατάλληλο αριθμό [π.χ., $6 + \square < 10-1$ ή $2(3+4)-5 = \triangle + 8$]. Ακόμη, μοντελοποιούν προβλήματα με εξισώσεις της μορφής $\alpha + x = \beta$, $\alpha \cdot x = \beta$, και τις επιλύουν με δοκιμές και με τη χρήση αντίστροφων πράξεων.

Γ΄ κύκλος: Κεντρικό αντικείμενο μάθησης είναι οι εξισώσεις και οι ανισώσεις (έννοια, επίλυση, μοντελοποίηση). Οι μαθητές εισάγονται στις έννοιες της εξίσωσης και της ανίσωσης και εξετάζουν ποιοι αριθμοί τις επαληθεύουν. Στη συνέχεια, εργάζονται με εξισώσεις της μορφής $\alpha + x = \beta$, $\alpha x = \beta$ και αργότερα της μορφής $\alpha \beta = \gamma x$ και $\alpha/\beta = \gamma/x$ (αντιστοίχως και στις ανισώσεις), τις οποίες χρησιμοποιούν για να μοντελοποιήσουν σχετικές καταστάσεις και τις επιλύουν με εφαρμογή ιδιοτήτων της ισότητας (ή της ανισότητας, αντιστοίχως).

Ακολουθως, εμπλέκονται σε δραστηριότητες μοντελοποίησης με γραμμικές εξισώσεις, πρώτα της μορφής $ax+b=y$ και έπειτα της μορφής $ax+b=cx+d$, τις οποίες επιλύουν αριθμητικά, αλγεβρικά και γραφικά (σύνδεση με τη συνάρτηση $y=ax+b$). Αυτή η φάση εργασίας επαναλαμβάνεται με τις ανισώσεις, αρχικά της μορφής $ax+b < c$ και, στη συνέχεια, της μορφής $ax+b < cx+d$ που, επίσης, επιλύονται αλγεβρικά και γραφικά. Αργότερα, οι μαθητές εισάγονται στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων (κυρίως δεύτερου βαθμού), οι οποίες, με παραγοντοποίηση, ανάγονται σε πρωτοβάθμιες. Τέλος, μοντελοποιούν προβλήματα με δύο γραμμικές εξισώσεις της μορφής $ax+by=c$ ή δύο συναρτήσεις της μορφής $y=ax+b$ και αναζητούν τις κοινές λύσεις τους γραφικά και αλγεβρικά (γραμμικά συστήματα 2×2).

2. Τροχιά «Αλγεβρική παράσταση»

Τροχιά

Σημαντικοί σταθμοί – ορόσημα ανάπτυξης

- | | |
|---------------------|---|
| Αλγεβρική παράσταση | <ul style="list-style-type: none"> • Ανάπτυξη της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης (μετασχηματισμός αριθμών, καθώς και απλών αριθμητικών προτάσεων με αξιοποίηση ιδιοτήτων των πράξεων, χρήση συμβόλων σε απλές αριθμητικές προτάσεις, συμβολική έκφραση ενός απλού προβλήματος). • Διερεύνηση του αλγεβρικού χαρακτήρα της αριθμητικής (μελέτη των ιδιοτήτων των πράξεων, γενίκευση με λεκτική διατύπωση, αξιοποίησή τους για τον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων). • Διερεύνηση των διαφορετικών χρήσεων του γράμματος (για την έκφραση μεγεθών, τη γενική διατύπωση ιδιοτήτων πράξεων και δυνάμεων με εκθέτες φυσικούς αριθμούς, ως αγνώστου σε απλές εξισώσεις, ως μεταβλητής στο γενικό όρο μοτίβων και ως παραμέτρου στις συναρτήσεις). • Διαχείριση αλγεβρικών παραστάσεων (ερμηνεία, δημιουργία, υπολογισμός της αριθμητικής τιμής και απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων). • Εισαγωγή στον αλγεβρικό λογισμό (δυνάμεις με ακέραιους εκθέτες, τετραγωνική ρίζα και ιδιότητές τους αντιστοίχως, πράξεις πολυωνύμων, απλές ταυτότητες, παραγοντοποίηση πολυωνύμων). |
|---------------------|---|

Η τροχιά αναπτύσσεται σύμφωνα με τον ακόλουθο προσανατολισμό σε καθέναν από τους τρεις κύκλους:

Α' κύκλος: Στη διάρκεια αυτού του κύκλου οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες μετασχηματισμού αριθμών για λόγους διευκόλυνσης υπολογισμών (π.χ., $7+9=7+7+2=14+2=16$) και διερευνούν τις ιδιότητες των πράξεων και το ρόλο του «=» σε απλές αριθμητικές παραστάσεις, 'κλειστές' (π.χ., $\square+3=9-2$) ή 'ανοικτές' ($\Delta+\square=8$). Ακόμη, ενθαρρύνονται να εκφράσουν ένα απλό πρόβλημα με μια αριθμητική παράσταση ή σχέση και το αντίστροφο.

Β' κύκλος: Οι δραστηριότητες του πρώτου κύκλου επαναλαμβάνονται, αλλά οι αριθμητικές παραστάσεις που αξιοποιούνται είναι, πλέον, πιο σύνθετες. Επιπλέον, οι μαθητές διερευνούν τη γενίκευση των ιδιοτήτων των πράξεων και τη διατυπώνουν λεκτικά. Ακόμη, καλούνται να υπολογίσουν την τιμή αριθμητικών παραστάσεων, αρχικά απλών, στη συνέχεια, με παρενθέσεις και αργότερα με δυνάμεις, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των πράξεων. Επίσης, συζητούν για τη δομή μιας αριθμητικής παράστασης, χρησιμοποιώντας κατάλληλους όρους (παράγοντες, όροι ;, κ.ά.). Τέλος, χρησιμοποιούν γράμματα για να εκφράσουν μεγέθη σε σχέσεις (από την καθημερινή ζωή και τις επιστήμες), αγνώστους σε απλές εξισώσεις και μεταβλητές στο γενικό όρο μοτίβων και στις συναρτήσεις.

Γ' κύκλος: Συνεχίζοντας στην κατεύθυνση των δραστηριοτήτων του προηγούμενου κύκλου, οι μαθητές καλούνται να μεταβαίνουν από τη λεκτική στη συμβολική μορφή μιας απλής αλγεβρικής παράστασης και αντιστρόφως, να μοντελοποιούν ένα πρόβλημα με μια αλγεβρική παράσταση μίας ή περισσότερων μεταβλητών, να υπολογίζουν την αριθμητική τιμή μιας παράστασης, να απλοποιούν μια αλγεβρική παράσταση, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των πράξεων και να αναγνωρίζουν τα δομικά της στοιχεία (το $2x+3$ είναι άθροισμα). Επιπλέον, οι δραστηριότητες που αφορούν στη χρήση γραμμάτων εμπλουτίζονται, ενθαρρύνοντας, προοδευτικά τους μαθητές να διακρίνουν τους διαφορετικούς ρόλους τους: μεταβλητή (ανεξάρτητη/εξαρτημένη) και παράμετρος στις συναρτήσεις, άγνωστος στις εξισώσεις, μέγεθος στους τύπους, γενικός και ανεξάρτητος αριθμός στις ταυτότητες.

Στη συνέχεια, οι μαθητές εισάγονται στις δυνάμεις με αρνητικούς εκθέτες και στις τετραγωνικές ρίζες και μελετούν τις ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιους εκθέτες,

καθώς και απλές ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών ($\sqrt{a\beta} = \sqrt{a}\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\frac{a}{\beta}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\beta}}$).

Το υπόλοιπο της ανάπτυξης της συγκεκριμένης τροχιάς στον τρίτο κύκλο αφορά στα πολυώνυμα και περιλαμβάνει ορόσημα ανάλογα με αυτά που συνδέονταν με τις αλγεβρικές παραστάσεις στους δύο προηγούμενους κύκλους. Ειδικότερα, οι μαθητές: εκτελούν πράξεις απλών πολυωνύμων (κυρίως μίας μεταβλητής), αποδεικνύουν αλγεβρικά και γεωμετρικά (όπου είναι δυνατόν) τις ταυτότητες $(\alpha\pm\beta)^2$, $(\alpha\pm\beta)^3$, $\alpha^2-\beta^2$, $\alpha^3-\beta^3$, $\alpha^3+\beta^3$, παραγοντοποιούν απλά πολυώνυμα, μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα σε διάφορα πλαίσια, χρησιμοποιώντας πολυώνυμα και ταυτότητες, αναγνωρίζουν στοιχεία της δομής ενός πολυωνύμου και χρησιμοποιούν κατάλληλη ορολογία και, τέλος, βρίσκουν το ΕΚΠ μονωνύμων και απλών πολυωνύμων, κάνουν πράξεις απλών ρητών παραστάσεων και τις απλοποιούν.

3. Τροχιά «μοτίβο/ κανονικότητα και συνάρτηση»

Η συγκεκριμένη τροχιά περιλαμβάνει δύο υπο-τροχιές, μία για το μοτίβο/ κανονικότητα και μία για τις συναρτήσεις.

Υπο-τροχιές

Σημαντικοί σταθμοί – ορόσημα ανάπτυξης

Μοτίβο/
κανονικότητα

- Αναγνώριση, συμπλήρωση, περιγραφή της κανονικότητας και της διαδικασίας παραγωγής της, κατασκευή κανονικοτήτων διαφόρων τύπων.

- Αναπαράσταση κανονικοτήτων με διαφορετικούς τρόπους - μετάβαση από μία αναπαράσταση σε άλλη.
 - Εύρεση και συμβολική διατύπωση του γενικού όρου της κανονικότητας.
 - Μοντελοποίηση και μελέτη καταστάσεων μέσω κανονικοτήτων.
- Συνάρτηση
- Διερεύνηση σχέσεων μεγεθών από την καθημερινή ζωή - συμμεταβαλλόμενα μεγέθη.
 - Εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης (μεταβλητή, μονοσήμαντη απεικόνιση, αναπαραστάσεις συναρτήσεων, ερμηνεία αναπαραστάσεων).
 - Μοντελοποίηση απλών καταστάσεων και απαντήσεις σε ερωτήματα που τις αφορούν μέσω συναρτήσεων.
 - Διερεύνηση συγκεκριμένων συναρτήσεων (γραμμικών, της μορφής $\psi = a/x$, τετραγωνικών και ρυθμού μεταβολής).

Η ανάπτυξη των δύο υπο-τροχιών σε καθέναν από τους τρεις κύκλους διακρίνεται από τα κάτωθι χαρακτηριστικά:

Α΄ κύκλος: Βασικός προσανατολισμός της σχετικής εργασίας στην τάξη είναι η μύηση των μαθητών στη διερεύνηση σχέσεων και δομών. Προς αυτήν την κατεύθυνση, αναφορικά με τα μοτίβα, οι σχετικές δραστηριότητες ενθαρρύνουν τους μαθητές να αναγνωρίζουν, να συμπληρώνουν, να περιγράφουν και να κατασκευάζουν απλές γεωμετρικές, αριθμητικές και άλλες κανονικότητες, πρώτα επαναλαμβανόμενες και κατόπιν αυξανόμενες ή μειούμενες.

Σχετικά με τις συναρτήσεις, οι μαθητές καλούνται να διερευνούν μεταβολές μεγεθών σε σχέση με άλλα μεγέθη στην καθημερινή ζωή και αντιστοιχίες μέσα από παιχνίδια.

Β΄ κύκλος: Στη μελέτη των κανονικοτήτων επαναλαμβάνονται όσα και στον προηγούμενο κύκλο, αλλά σε ανώτερο επίπεδο, καθώς οι αριθμητικές και γεωμετρικές κανονικότητες είναι πιο σύνθετες, ενώ προστίθενται και αναδρομικές. Επιπλέον, η σχετική εργασία των μαθητών περιλαμβάνει γενίκευση της κανονικότητας, αναπαράστασή της με διαφορετικά μέσα (εικονικά, λεκτικά, αριθμητικά), σύγκριση κανονικοτήτων, λεκτική διατύπωση του κανόνα του μοτίβου, εύρεση του επόμενου, αλλά και ενός απομακρυσμένου όρου και, τέλος, συμβολική διατύπωση του γενικού όρου στις αριθμητικές κανονικότητες, χρησιμοποιώντας μεταβλητές (π.χ., $n+2$).

Σε σχέση με τις συναρτήσεις, η έμφαση βρίσκεται στην αισθητοποίηση της σχετικής έννοιας. Συγκεκριμένα, οι μαθητές συνεχίζουν να διερευνούν καταστάσεις συμμεταβολής: ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά, συσχέτιση μεγεθών στη γεωμετρία ($E=1/2\beta u$), στη φυσική ($u=s/t$), κτλ, γενικά, σχέση ανεξάρτητης-εξαρτημένης μεταβλητής και υπολογισμός ενός μεγέθους με αντικατάσταση αριθμού στις μεταβλητές. Τέλος, διερευνούν την έννοια της συνάρτησης μέσω διαφορετικών αναπαραστάσεων μονοσήμαντων αντιστοιχιών.

Γ' κύκλος: Η ανάπτυξη της υπο-τροχιάς της κανονικότητας ολοκληρώνεται με τους μαθητές να διερευνούν αριθμητικές κανονικότητες, να διατυπώνουν το γενικό όρο λεκτικά και συμβολικά και να τις αναπαριστούν εικονικά, αριθμητικά με πίνακες ή γεωμετρικά σε σύστημα ημι-αξόνων.

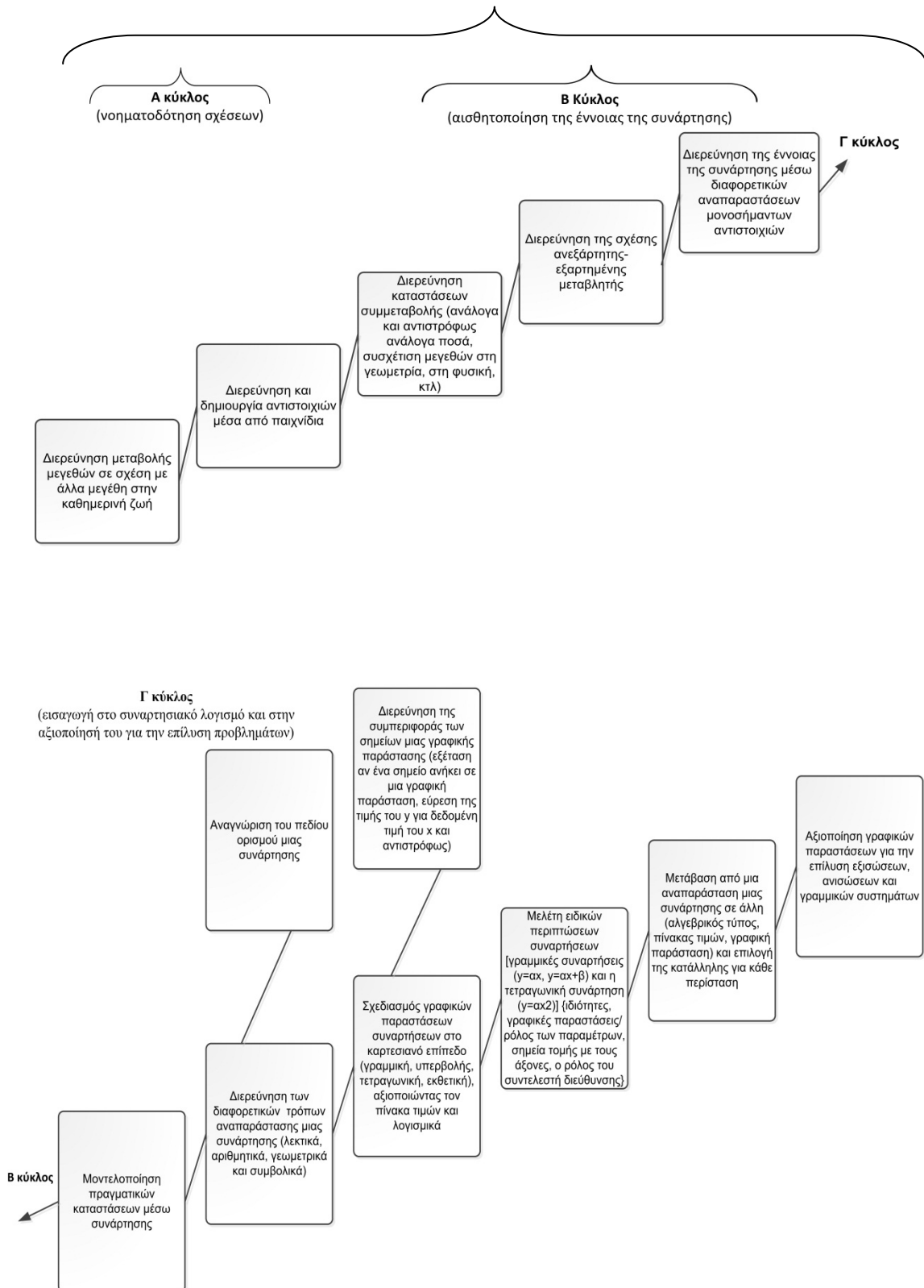
Η υπο-τροχιά των συναρτήσεων επικεντρώνεται, πλέον, στις διαφορετικές μορφές αναπαράστασής της και της χρήσης τους για την επίλυση προβλημάτων. Ειδικότερα, οι μαθητές, οικοδομώντας πάνω στη σχετική εμπειρία των προηγούμενων κύκλων, μοντελοποιούν μια κατάσταση με μια συνάρτηση, εκφράζουν μια συνάρτηση με διαφορετικούς τρόπους (λεκτικά, αριθμητικά, γεωμετρικά και συμβολικά), βρίσκουν τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής για δεδομένες τιμές της εξαρτημένης και αντιστρόφως και αναγνωρίζουν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης.

Ακολούθως, η σχετική εργασία στην τάξη εστιάζεται στις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων: οι μαθητές σχεδιάζουν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων (γραμμικών, υπερβολών, τετραγωνικών, εκθετικών με αυτήν τη σειρά), οι οποίες μοντελοποιούν μια κατάσταση, χρησιμοποιώντας σημεία (πίνακα τιμών) και λογισμικά. Ακόμη, εξετάζουν αν ένα σημείο ανήκει σε μια γραφική παράσταση και, τη χρησιμοποιούν για να βρουν την τιμή του y για δεδομένη τιμή του x και αντιστρόφως.

Στη συνέχεια, η εστίαση μετακινείται στη μελέτη ειδικών περιπτώσεων συναρτήσεων: οι μαθητές διερευνούν τις γραμμικές συναρτήσεις ($y=ax$, $y=ax+\beta$) και την τετραγωνική συνάρτηση $y=ax^2$, τις ιδιότητές τους και τις γραφικές τους παραστάσεις (εξετάζονται ο ρόλος των παραμέτρων, τα σημεία τομής με τους άξονες, ο ρόλος του συντελεστή διεύθυνσης και η χρήση του στο σχεδιασμό της γραφικής παράστασης).

Η υπο-τροχιά που αφορά στη συνάρτηση ολοκληρώνεται με δραστηριότητες που ενθαρρύνουν τους μαθητές να μετακινούνται από μια αναπαράσταση σε άλλη (αλγεβρικός τύπος, πίνακας τιμών, γραφική παράσταση), να επιλέγουν την κατάλληλη, σε κάθε περίπτωση, αναπαράσταση και να χρησιμοποιούν τις γραφικές παραστάσεις για την επίλυση εξισώσεων, ανισώσεων και γραμμικών συστημάτων.

Τα σχεδιαγράμματα που παρουσιάζονται στη συνέχεια συνιστούν μια προσπάθεια σχηματικής αποτύπωσης της ανάπτυξης μιας τροχιάς για την έννοια της συνάρτησης στην υποχρεωτική εκπαίδευση (Α', Β' και Γ' κύκλοι).



Σχεδιάγραμμα 2. Σχηματική αναπαράσταση μιας ανάπτυξης της τροχιάς «συνάρτηση» στους τρεις κύκλους (εδώ εμφανίζεται σε δύο μέρη για πρακτικούς λόγους).

Χώρος – Γεωμετρία – Μετρήσεις

Η θεματική ενότητα του **Χώρου-Γεωμετρίας** αναπτύσσεται σε τέσσερις τροχιές: *Χώρος, Γεωμετρικά Σχήματα, Μετασχηματισμοί και Οπτικοποιήσεις.*

- Η **πρώτη τροχιά του Χώρου** αφορά σε δύο θέματα: *στις θέσεις διευθύνσεις, διαδρομές σε χάρτες όπως και στη Δόμηση χώρου, επικαλύψεις και συντεταγμένες*

Το θέμα «*Θέσεις διευθύνσεις και διαδρομές σε χάρτες*» αναφέρεται στον εντοπισμό, περιγραφή και αναπαράσταση θέσεων, διευθύνσεων και διαδρομών, αρχικά στο χώρο και μεταγενέστερα σε χάρτες.

Οι μαθητές στον πρώτο κύκλο συστηματοποιούν τις χωρικές εμπειρίες με την αξιοποίηση διαφορετικών συστημάτων αναφοράς, χρήση χωρικών εννοιών και πρώτη επαφή με οικείους χάρτες (βλ. ΓΔ1, ΓΔ2, Νηπιαγωγείο και Α΄ Δημοτικού). Στο δεύτερο κύκλο συστηματοποιούν την αναγνώριση, περιγραφή θέσεων, σχέσεων και διαδρομών σε χάρτες και οδηγούνται στην προσέγγιση της κλίμακας και της κατασκευής τους (βλ. όμοια, ΓΔ1, Ε΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού). Τέλος, στον τρίτο κύκλο οδηγούνται στην άνετη χρήση και κατασκευή χαρτών με εφαρμογή κλίμακας και αξιοποίηση της ομοιότητας για επίλυση προβλημάτων με αποστάσεις και διαδρομές και εισάγονται στα διανύσματα (βλ. ΓΔ1, Β΄ Γυμνασίου).

Το θέμα «*Δόμηση χώρου, επικαλύψεις και συντεταγμένες*» αναφέρεται στις επικαλύψεις του επιπέδου με διάφορα σχήματα και ουσιαστικά στην εξοικείωση και μελέτη του τετραγωνισμένου περιβάλλοντος που οδηγεί στις δισδιάστατες συντεταγμένες.

Συγκεκριμένα, οι μαθητές στον πρώτο κύκλο αρχικά εντοπίζουν, περιγράφουν και αναπαριστούν θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές σε τετραγωνισμένα περιβάλλοντα και, στη συνέχεια, επιδιώκουν να εντοπίσουν τρόπους παράστασης και επικοινωνίας των καταστάσεων αυτών με τη χρήση αυθαίρετων συμβόλων όπως χρώματα, γράμματα και αριθμούς (βλ. ΓΔ4, Α΄ Δημοτικού και ΓΔ2, ΓΔ3, Β΄ Δημοτικού). Στη συνέχεια, στο δεύτερο κύκλο συστηματοποιούν τη χρήση αριθμητικών ζευγών και, στη συνέχεια, διατεταγμένων ζευγών για την παράσταση θέσεων στο πρώτο τεταρτημόριο (βλ. δραστηριότητα ΓΔ1, Δ΄ Δημοτικού) και τέλος στον τρίτο κύκλο γενικεύουν τη χρήση συντεταγμένων και στα υπόλοιπα τεταρτημόρια για την απόδοση χωρικών σχέσεων και σχημάτων (βλ. ΓΔ4, Β΄ Γυμνασίου και ΓΔ1, Γ΄ Γυμνασίου).

- Η **δεύτερη τροχιά των Γεωμετρικών Σχημάτων** αφορά τέσσερα θέματα: *Ταξινόμηση και Ανάλυση σχημάτων σε στοιχεία και ιδιότητες, Κατασκευές σχημάτων και σχεδιασμός, Σύνδεση επιπέδων και στερεών σχημάτων, Ανάλυση ή σύνθεση επιπέδων και στερεών σχημάτων.*

Στο θέμα «*Ταξινόμηση και ανάλυση σχημάτων σε στοιχεία και ιδιότητες*» οι μαθητές ξεκινούν στις μικρότερες τάξεις με αναγνώριση, ονομασία και ταξινόμηση των σχημάτων (επίπεδων και στερεών) με βάση γεωμετρικά και μη χαρακτηριστικά και σε ποικιλία θέσεων, μεγεθών και προσανατολισμών, ενώ βαθμιαία αναγνωρίζουν βασικές ιδιότητες και σχέσεις (βλ. δραστηριότητες ΓΔ3, Νηπιαγωγείο, ΓΔ5, Α΄, ΓΔ4, ΓΔ5, Β΄ Δημοτικού). Στη συνέχεια, στο δεύτερο ηλικιακό κύκλο, διευρύνουν την

αναγνώριση και στα στοιχεία των σχημάτων (σημεία, ευθείες, ημιευθείες, ευθύγραμμα τμήματα), καθώς και στις ιδιότητες (παράλληλες, κάθετες, ίσες, άνισες) και ταξινομούν τα σχήματα (τρίγωνα, τετράπλευρα, πολύγωνα και πολύεδρα) με βάση τις ιδιότητες όπως αριθμός πλευρών, σύγκριση γωνιών, μήκος πλευρών κ.λπ. (βλ. ΓΔ2 και ΓΔ3 Δ' Δημοτικού). Τέλος, στον τρίτο κύκλο, οι μαθητές διατυπώνουν απλούς ορισμούς και περιγράφουν σχέσεις μεταξύ των σχημάτων, εφαρμόζοντάς τες στην επίλυση χωρικών προβλημάτων (βλ. δραστηριότητες ΓΔ1, ΓΔ2, ΓΔ4, Α' Γυμνασίου και ΓΔ2, ΓΔ3 Β' Γυμνασίου).

Αντίστοιχα, στο θέμα «Κατασκευές σχημάτων και σχεδιασμός», οι μαθητές ξεκινούν στον πρώτο κύκλο με απλές κατασκευές με χρήση χειραπτικών υλικών και απλές παραστάσεις (βλ. ΓΔ11, Β' Δημοτικού). Στο δεύτερο ηλικιακό κύκλο περνούν σε απλούς σχεδιασμούς σε πραγματικό και ψηφιακό περιβάλλον, χρησιμοποιούν τα γεωμετρικά όργανα και σχεδιάζουν γεωμετρικά στοιχεία (ευθείες, ημιευθείες, κύκλους, κ.λπ.), καθώς και γεωμετρικά σχήματα (βλ. δραστηριότητες ΓΔ2, ΓΔ3, ΓΔ4, Γ' Δημοτικού, ΓΔ4, Δ' Δημοτικού, ΓΔ2, Ε' Δημοτικού και ΓΔ3, ΓΔ4 ΣΤ' Δημοτικού). Τέλος, στον τρίτο κύκλο χρησιμοποιούν πιο τυποποιημένα μέσα (κανόνα και διαβήτη ή αντίστοιχα ψηφιακά περιβάλλοντα) κατανοώντας τη διαφορά μιας κατασκευής με βαθμολογημένα όργανα από τη γεωμετρική κατασκευή με κανόνα και διαβήτη και λύνουν προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών (βλ. ΓΔ3, ΓΔ7, Α' Γυμνασίου).

Στο θέμα «Σύνδεση επιπέδων και στερεών σχημάτων», οι μαθητές του πρώτου κύκλου ξεκινούν να αναγνωρίζουν τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα ως έδρες στερεών και κάνουν απλές κατασκευές αναπτυγμάτων, στη συνέχεια, στο δεύτερο κύκλο επεκτείνουν την αναγνώριση επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων ως έδρες στερεών, διερευνούν τις σχέσεις μεταξύ επίπεδων και στερεών γεωμετρικών σχημάτων (π.χ. τετραγώνου-κύβου, κύκλου-σφαίρας, κ.ά.) και γενικεύουν τη σύνδεση με όψεις και τομές, ενώ παράλληλα δημιουργούν και σχεδιάζουν αναπτύγματα στερεών (αρχικά κύβου και, στη συνέχεια, και άλλων στερεών, βλ. δραστηριότητα ΓΔ3, Δ' Δημοτικού, ΓΔ3, ΓΔ6 Ε' Δημοτικού). Τέλος, στον τρίτο κύκλο, συνδέουν τα στερεά με τα αναπτύγματά τους, όπως και τα επίπεδα και στερεά σχήματα με τις τομές.

Τέλος, στο θέμα «Ανάλυση ή σύνθεση επιπέδων και στερεών σχημάτων» οι μαθητές του πρώτου κύκλου συνθέτουν και αναλύουν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και στερεά σε δύο ή περισσότερα μέρη (απλά παζλ αποτελούμενα από δύο ή τρία κομμάτια τάνγκραμ ή πεντόμινο) και σε πραγματικό ή ψηφιακό περιβάλλον προσεγγίζοντας ιδιότητες και σχέσεις (βλ. δραστηριότητες ΓΔ4, Νηπιαγωγείο, ΓΔ6, Α' και Β' Δημοτικού). Στο δεύτερο και τρίτο κύκλο αναλύουν και συνθέτουν επίπεδα και στερεά γεωμετρικά σχήματα σε πιο σύνθετες καταστάσεις αναγνωρίζοντας ιδιότητες και σχέσεις και συνδέοντας τες με τη μέτρηση επιφάνειας (βλ. ΜΔ1, ΣΤ' Δημοτικού).

- Η **τρίτη τροχιά των Μετασχηματισμών** αφορά μετατοπίσεις, στροφές και συμμετρίες.

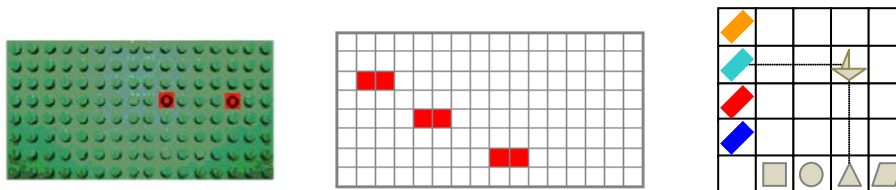
Στον πρώτο κύκλο οι μαθητές παρατηρούν μετατοπίσεις και στροφές (90, 180, 360 και 45 μοιρών) προβλέποντας το αποτέλεσμα, αναγνωρίζουν συμμετρικά σχήματα εντοπίζοντας τους άξονες συμμετρίας και κάνουν κατασκευές συμμετρικών

καταστάσεων και σχημάτων σε πραγματικά και ψηφιακά περιβάλλοντα, προσεγγίζοντας τις ιδιότητες της συμμετρίας (βλ. ΓΔ5, Νηπιαγωγείο, ΓΔ7, Α΄ Δημοτικού, ΓΔ7 και ΓΔ8, Β΄ Δημοτικού). Στο δεύτερο κύκλο, χρησιμοποιούν τους μετασχηματισμούς για σύγκριση σχημάτων και πραγματοποιούν κατασκευές με τη χρήση μετατοπίσεων και στροφών, κατασκευάζουν συμμετρικά σχήματα και σχήματα με άξονες συμμετρίας με οριζόντιους και κατακόρυφους άξονες και περιγράφουν τις ιδιότητες της αξονικής συμμετρίας (βλ. ΓΔ4, Γ΄ Δημοτικού, ΓΔ4, Ε΄ Δημοτικού, ΓΔ5 και ΓΔ7, ΣΤ΄ Δημοτικού). Τέλος, στον τρίτο κύκλο οι μαθητές δημιουργούν και συνδυάζουν μετατοπίσεις και στροφές για γεωμετρικές και άλλες κατασκευές, χρησιμοποιούν τις ιδιότητες της συμμετρίας για να εντοπίσουν τις ιδιότητες των σχημάτων και πραγματοποιούν κατασκευές συμμετρικών με διάφορους άξονες (βλ. ΓΔ5 και ΓΔ6, Β΄ Γυμνασίου και ΓΔ3, Γ΄). Στον κύκλο αυτό οι μαθητές γνωρίζουν την κεντρική συμμετρία και την ομοιότητα (βλ. ΓΔ2 και ΓΔ5, Γ΄ Γυμνασίου).

Παρακάτω, δίνονται δύο παραδείγματα για την τροχιά του χώρου και ιδιαίτερα για την ανάπτυξη της έννοιας των συντεταγμένων και για την τροχιά των μετασχηματισμών – συμμετρίας που δείχνουν πώς εξελίσσονται οι υποτροχιές στην πορεία των τάξεων του Δημοτικού και του Γυμνασίου.

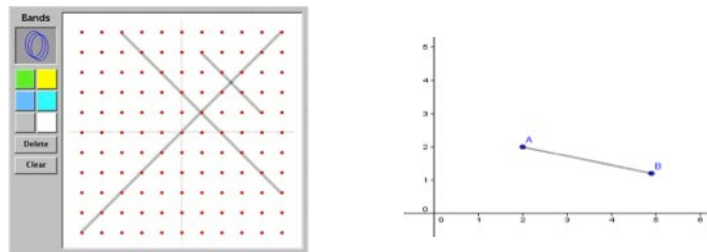
Ενδεικτικό παράδειγμα για την τροχιά «Χώρου»

Ενδεικτικό παράδειγμα διαδοχής των δράσεων σε τετραγωνισμένα περιβάλλοντα προς την κατεύθυνση της ανάπτυξης της έννοιας των συντεταγμένων αποτελούν οι δράσεις σε χειραπτικό και αναπαραστατικό τετραγωνισμένο υλικό (τουβλάκια ή τετραγωνισμένο χαρτί) στις μικρές τάξεις του Δημοτικού για τον εντοπισμό και την περιγραφή χωρικών καταστάσεων και, ουσιαστικά, για την εξοικείωση με τα χαρακτηριστικά του περιβάλλοντος αυτού, όπως και αναζήτηση τρόπων κωδικοποίησης (Α΄ και Β΄ Δημοτικού) (Εικόνα 1).



Εικόνα 1

Στη συνέχεια, οι μαθητές θα ασχοληθούν με πιο τυπικές μορφές συντεταγμένων, ξεκινώντας από τους τετραγωνισμένους καμβάδες με εκφράσεις του τύπου «το στοιχείο βρίσκεται στην 3^η γραμμή και στην 4^η στήλη (βλ. σχετική δραστηριότητα, ΓΔ1, Γ΄ Δημοτικού) για να οδηγηθούν σε ζευγάρια αριθμών όπως «3 και 4» και, τελικά, στα διατεταγμένα ζεύγη, στο γεωπίνακα ή σε συστήματα συντεταγμένων, γραφικά ή ψηφιακά (Εικόνα 2).



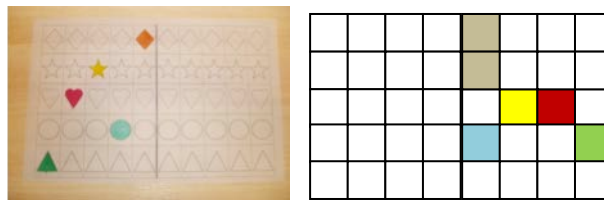
Εικόνα 2

Μεταγενέστερα, οι συντεταγμένες θα επεκταθούν και στα υπόλοιπα τεταρτημόρια και θα χρησιμοποιηθούν στην παράσταση συναρτήσεων.

Ενδεικτικό παράδειγμα για την τροχιά «Μετασχηματισμοί»

Η συμμετρία αποτελεί ένα κατάλληλο παράδειγμα εξέλιξης μιας τροχιάς. Αν και αναγνωρίζεται οπτικά από τις μικρότερες ηλικίες, η κατανόηση των ιδιοτήτων και οι κατασκευές συμμετρικών με διάφορους άξονες αποτελεί το ζητούμενο της ανάπτυξής της.

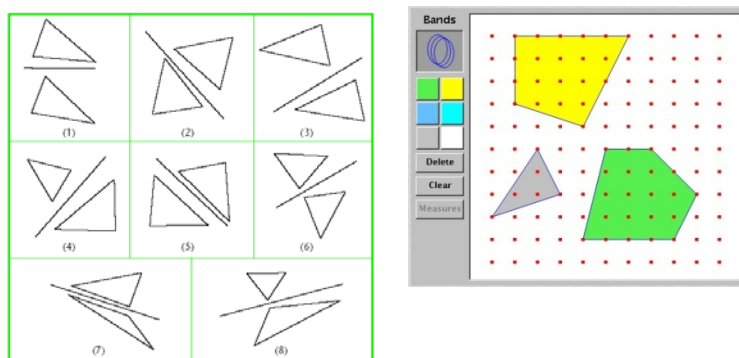
Στις πρώτες τάξεις οι μαθητές ασκούνται να αναγνωρίζουν συμμετρικά αντικείμενα ή σχήματα, να ελέγχουν με δίπλωση και να εντοπίζουν τους άξονες. Παράλληλα, ενθαρρύνονται σε απλές κατασκευές (σε απλό, τετραγωνισμένο ή και ψηφιακό περιβάλλον) για να προσεγγίσουν ιδιότητες (Εικόνα 3).



Εικόνα 3

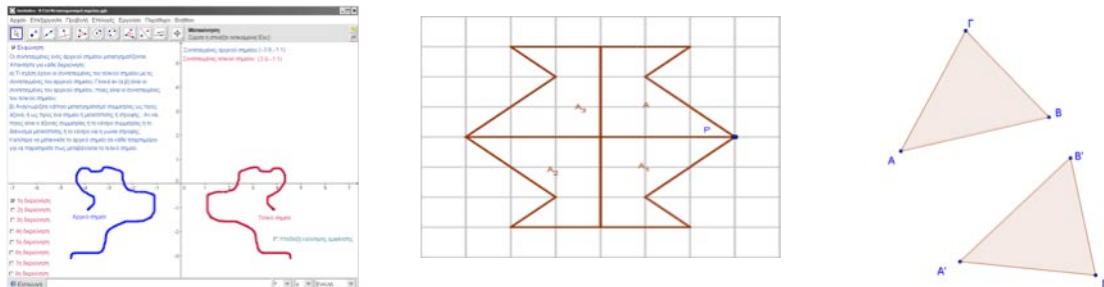
Στη συνέχεια της ανάπτυξης οι μαθητές αντιμετωπίζουν καταστάσεις, όπου άλλες είναι συμμετρικές κι άλλες όχι, και καλούνται να εξηγήσουν (βλ. ΓΔ8, Γ' Δημοτικού) γιατί δεν είναι συμμετρικές εντοπίζοντας ιδιότητες. Τέτοιες δράσεις οδηγούν στη συστηματοποίηση των ιδιοτήτων των συμμετρικών σχημάτων.

Επίσης, οι μαθητές κατασκευάζουν συμμετρικά σχήματα και σχηματισμούς σε τετραγωνισμένα και μη περιβάλλοντα με χαρτί-μολύβι και ψηφιακά (Εικόνα 4).



Εικόνα 4

Στον τρίτο κύκλο οι μαθητές, στηριζόμενοι στην προηγούμενη εμπειρία, θα συστηματοποιήσουν τη συμμετρία και τις ιδιότητές της και θα προχωρήσουν σε γεωμετρική κατασκευή της συμμετρίας με κανόνα και διαβήτη, σε άξονες με διαφορετικούς προσανατολισμούς (Εικόνα 5).



Εικόνα 5

- Η **τέταρτη τροχιά των οπτικοποιήσεων** αφορά αναγνώριση και αναπαράσταση διαφορετικών οπτικών γωνιών αντικειμένων και καταστάσεων, καθώς και δημιουργία πραγματικών και νοερών αναπαραστάσεων για αντικείμενα και καταστάσεις.

Συγκεκριμένα, στον πρώτο κύκλο οι μαθητές ασκούνται στην αναγνώριση κατασκευών από διαφορετικές οπτικές γωνίες, στη σύνδεση 2Δ και 3Δ καταστάσεων, καθώς και στη δημιουργία νοερών εικόνων και περιγραφών αλλά και πραγματικών παραστάσεων τρισδιάστατων καταστάσεων (βλ. ΓΔ6, ΓΔ7, Νηπιαγωγείο, ΓΔ9, Β' Δημοτικού). Στο δεύτερο κύκλο οι μαθητές κάνουν κατασκευές από εικόνες, σχέδια και άλλες αναπαραστάσεις, αλλά σχεδιάζουν, επίσης, σε ισομετρικό χαρτί ή σε ψηφιακό περιβάλλον δοσμένες τρισδιάστατες κατασκευές (βλ. ΓΔ5, Γ' Δημοτικού και ΓΔ5, Δ' Δημοτικού). Τέλος, στον τρίτο κύκλο αναγνωρίζουν όψεις και τομές 3Δ σχημάτων, σχεδιάζουν 3Δ σχήματα όπως και όψεις και κατόψεις, καθώς και αναπτύγματα στερεών σχημάτων.

Η θεματική ενότητα των **Μετρήσεων** αναπτύσσεται σε τέσσερις τροχιές: *Μέτρηση γωνίας, μήκους, επιφάνειας και όγκου*.

- Η **πρώτη τροχιά της Μέτρησης γωνίας** αφορά τη σύγκριση γωνιών μεταξύ τους και με την ορθή, τη μέτρηση με τυπικές μονάδες και τη χρήση εργαλείων, την εκτίμηση γωνιών όπως και εφαρμογές με τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Συγκεκριμένα, στον πρώτο κύκλο οι μαθητές αναγνωρίζουν τις ίσες γωνίες και συγκρίνουν με την ορθή και, στη συνέχεια, στο δεύτερο κύκλο συγκρίνουν με τη χρήση διαφόρων (υλικών και μη) μέσων και τις μετρούν με τυπικές μονάδες και μοιρογνωμόνιο (βλ. ΜΔ1, Δ' Δημοτικού, ΓΔ6, ΣΤ' Δημοτικού). Τέλος, στον τρίτο κύκλο κάνουν πράξεις με τις γωνίες, συγκρίνουν χρησιμοποιώντας ιδιότητες και σχέσεις, κάνουν κατασκευές γωνιών με όργανα και προσεγγίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς και την κλίση (βλ. ΜΔ1, Α' Γυμνασίου και ΜΔ5, Β' Γυμνασίου). Σε όλους τους κύκλους ενθαρρύνονται οι συγκρίσεις γωνιών κατ' εκτίμηση, ανεξάρτητα από το μήκος των πλευρών τους ή τον προσανατολισμό.

- **Η δεύτερη τροχιά της Μέτρησης μήκους** αφορά τη σύγκριση μηκών, την ανάλυση και σύνθεσή τους, την πραγματοποίηση επικαλύψεων με τυπικές και μη τυπικές μονάδες και, στη συνέχεια, τη μέτρηση όπως και την επίλυση προβλημάτων που περιέχουν μετρήσεις μηκών και εκτιμήσεις.

Η εισαγωγή στη μέτρηση μηκών ξεκινάει από τον πρώτο κύκλο όπου οι μαθητές αρχικά πραγματοποιούν άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις, διατάξεις, καθώς και αναλύσεις και συνθέσεις μηκών. Στη συνέχεια, πραγματοποιούν επικαλύψεις με επαναλήψεις με μη τυπικές και τυπικές μονάδες, διαπιστώνουν την ανάγκη χρήσης τυπικών μονάδων μέτρησης και συνδέουν το αριθμητικό αποτέλεσμα της επικάλυψης με επανάληψη με το μήκος. Από τον κύκλο αυτό πραγματοποιούν μετρήσεις με το χάρακα, επιλύουν απλά μετρικά προβλήματα και συγκρίνουν μήκη κατ' εκτίμηση (βλ. ΜΔ1, ΜΔ2, ΜΔ3, ΜΔ4, Νηπιαγωγείο, και ΜΔ1, Α' Δημοτικού).

Στο δεύτερο κύκλο οι μαθητές συστηματοποιούν τις μετρήσεις με τις τυπικές μονάδες, τις οποίες προσεγγίζουν, συγκρίνουν και επιλύουν σχετικά προβλήματα. Υπολογίζουν περιμέτρους σχημάτων και διερευνούν τις σχέσεις πλευρών και περιμέτρων, όπως και διαμέτρου και κύκλου (βλ ΜΔ2, Δ' Δημοτικού και ΜΔ1, ΜΔ2, Ε' Δημοτικού). Χρησιμοποιούν όργανα για σύγκριση και μεταφορά ευθύγραμμων τμημάτων και κάνουν συγκρίσεις κατ' εκτίμηση.

Τέλος, στον τρίτο κύκλο γενικεύουν τις προηγούμενες γνώσεις σε ιδιότητες και σχέσεις ευθύγραμμων τμημάτων και καμπύλων γραμμών, υπολογίζουν μήκη με χρήση λόγων, αναλογιών και θεωρημάτων, διερευνούν σχέσεις μηκών τόξου και επιλύουν προβλήματα μέτρησης με τη χρήση κατάλληλων μονάδων μέτρησης, αναπτύσσοντας μεθόδους και στρατηγικές προσεγγιστικού υπολογισμού της περιμέτρου ακανόνιστων σχημάτων (βλ ΜΔ2, ΜΔ3, Β' Γυμνασίου).

- **Η τρίτη τροχιά της Μέτρησης επιφάνειας** αφορά τη σύγκριση επιφανειών, την ανάλυση και σύνθεσή τους, την πραγματοποίηση επικαλύψεων με τυπικές και μη τυπικές μονάδες και, στη συνέχεια, τη μέτρησή τους όπως και την επίλυση προβλημάτων που περιέχουν μετρήσεις επιφανειών και εκτιμήσεις.

Συγκεκριμένα, στον πρώτο κύκλο οι μαθητές πραγματοποιούν άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις επιφανειών, με αναλύσεις και συνθέσεις και μετατοπίσεις, επικαλύπτουν επιφάνειες χρησιμοποιώντας μη τυπικές ή τυπικές μονάδες, δομούν τις επιφάνειες με μη τυπικές και τυπικές μονάδες σε γραμμές και στήλες και καταμετρούν συστηματικά το πλήθος των μονάδων, συνδέοντας το αριθμητικό αποτέλεσμα της μέτρησης με την επιφάνεια και τη μονάδα μέτρησης. Επιλύουν απλά προβλήματα μέτρησης επιφάνειας με τη χρήση χειραπτικού υλικού και αναπαραστάσεων και ασκούνται στην εκτίμηση επιφανειών (βλ. ΜΔ5, ΜΔ6, ΜΔ7, Νηπιαγωγείο, ΜΔ 2, ΜΔ3, Α' Δημοτικού και ΜΔ12, Β' Δημοτικού).

Στο δεύτερο κύκλο συστηματοποιούν τις παραπάνω γνώσεις πραγματοποιώντας συγκρίσεις απλών επιφανειών με τη χρήση ιδιοτήτων και σχέσεων, δομώντας ορθογώνιες επιφάνειες με γραμμές και στήλες και χρησιμοποιώντας την πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ γραμμών και στηλών για να υπολογίσουν το εμβαδόν δομημένων επιφανειών (βλ. ΜΔ1, Γ' Δημοτικού, ΜΔ2, ΜΔ3, Δ' Δημοτικού, ΜΔ2, ΜΔ3, Ε' Δημοτικού και ΜΔ1, ΜΔ2, ΜΔ4, ΜΔ5, ΣΤ' Δημοτικού). Υπολογίζουν το εμβαδόν των βασικών σχημάτων και διερευνούν τις σχέσεις πλευρών, περιμέτρου

και εμβαδού ενός γεωμετρικού σχήματος (ΜΔ3, ΜΔ6, ΣΤ΄ Δημοτικού). Προσεγγίζουν τις υποδιαιρέσεις των μονάδων και κάνουν μετατροπές. Επιλύουν προβλήματα μέτρησης επιφανειών με τη χρήση οργάνων και τύπων και πραγματοποιούν συγκρίσεις επιφανειών κατ' εκτίμηση.

Τέλος, στον τρίτο κύκλο πραγματοποιούν συγκρίσεις καμπυλόγραμμων ή μικτόγραμμων ή ακανόνιστων επιφανειών με αναλύσεις / συνθέσεις και με τη χρήση ιδιοτήτων και σχέσεων, υπολογίζουν το εμβαδόν κύκλου κι άλλων μικτόγραμμων σχημάτων χρησιμοποιώντας ποικιλία μεθόδων και στρατηγικών και επιλύουν σχετικά προβλήματα με τη χρήση κατάλληλων μονάδων μέτρησης και υπολογισμών κατ' εκτίμηση (βλ. ΜΔ1, ΜΔ2, ΜΔ4, Β΄ Γυμνασίου). Παράλληλα, υπολογίζουν το εμβαδόν επιφανειών στερεών σχημάτων.

- Η **τέταρτη τροχιά της Μέτρησης Όγκου** αφορά στη σύγκριση όγκων, την ανάλυση και σύνθεση τους, την πραγματοποίηση «γεμισμάτων» με τυπικές και μη τυπικές μονάδες και, στη συνέχεια, τη μέτρησή τους όπως και την επίλυση προβλημάτων που περιέχουν μετρήσεις όγκων και εκτιμήσεις.

Συγκεκριμένα, στον πρώτο κύκλο οι μαθητές συγκρίνουν τη χωρητικότητα δύο δοχείων, άμεσα ή με τη χρήση ενδιάμεσου, συγκρίνουν όγκους κατασκευών που αποτελούνται από μικρό αριθμό δομικών υλικών (κύβοι) και εκτιμούν τον όγκο απλών κατασκευών και το πλήθος των κύβων που γεμίζουν ένα κουτί (βλ. ΜΔ8, Νηπιαγωγείο, ΜΔ4 Α΄ Δημοτικού).

Στο δεύτερο κύκλο συστηματοποιούν τον υπολογισμό του πλήθους των κύβων ορθογώνιων κατασκευών συνδυάζοντάς τον με τις γραμμικές διαστάσεις, και εντοπίζοντας την πολλαπλασιαστική σχέση, πραγματοποιώντας μετρήσεις με πραγματικό και αναπαραστατικό υλικό. Υπολογίζουν τον όγκο στερεών με χρήση τυπικών μονάδων και υποδιαιρέσεων και επιλύουν σχετικά προβλήματα και υπολογισμούς κατ' εκτίμηση (βλ. ΜΔ2, Γ΄ Δημοτικού, ΜΔ5, ΣΤ΄ Δημοτικού).

Τέλος, στον τρίτο κύκλο οι μαθητές υπολογίζουν τους όγκους των βασικών στερεών με τη χρήση των προηγούμενων γνώσεων, όπως και σύνθετων σχημάτων με ανάλυση και σύνθεση. Διερευνούν τη σχέση γραμμικών διαστάσεων, εμβαδού επιφανειών και όγκου κι επιλύουν σχετικά προβλήματα (βλ. ΜΔ1, Γ΄ Γυμνασίου).

Παρακάτω, δίνεται ένα παράδειγμα για την τροχιά της μέτρησης του όγκου που δείχνει πώς μπορεί να εξελιχθεί στην πορεία των τάξεων του Δημοτικού και του Γυμνασίου.

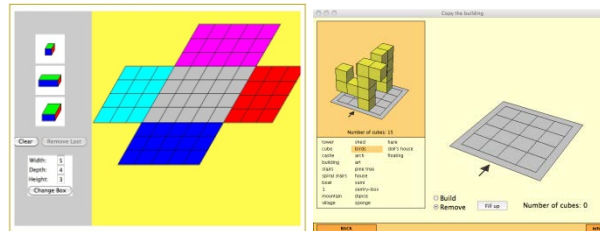
Ενδεικτικό παράδειγμα για την τροχιά «Μέτρηση του όγκου»

Οι μαθητές ξεκινούν προσεγγίζοντας το μέγεθος μέσα από συγκρίσεις χωρητικότητας και συνθέσεων με κύβους, εκτιμώντας «ποιο κουτί είναι πιο μεγάλο;» και γεμίζοντας με κύβους για να ελέγξουν την εκτίμησή τους. Η δόμηση του χώρου σε τρεις διαστάσεις και η μέτρηση των κύβων που την αποτελούν εμφανίζει δυσκολίες ακόμα και για τα μεγαλύτερα παιδιά, αλλά τα παιδιά των μικρών τάξεων μπορούν να πραγματοποιήσουν υπολογισμούς σε απλές συνθέσεις όπως οι ακόλουθες (Εικόνα 6).



Εικόνα 6

Οι μαθητές, στη συνέχεια, θα ασκηθούν περισσότερο στις ορθογώνιες κατασκευές από κύβους ώστε να μετρούν το πλήθος των κύβων με πιο συστηματικό τρόπο, χρησιμοποιώντας το πλήθος των κύβων της βάσης ως σύνθετη μονάδα την οποία επαναλαμβάνουν για να μετρούν το πλήθος των κύβων της κατασκευής, σε πραγματικό ή αναπαραστατικό υλικό (Εικόνα 7).



Εικόνα 7

Βαθμιαία, η προσέγγιση αυτή οδηγεί στον υπολογισμό των τύπων των βασικών στερεών, ως πολλαπλασιαστική σχέση των διαστάσεων και απαραίτητων μετασχηματισμών.

Στις μεγαλύτερες τάξεις οι τύποι θα χρησιμοποιηθούν στην ανάπτυξη πιο σύνθετων υπολογισμών των όγκων των στερεών και άλλων συνθέσεων.

Στοχαστικά Μαθηματικά

Η θεματική ενότητα της **Στατιστικής** αναπτύσσεται σε τρεις τροχιές: *δεδομένα, μέτρα θέσης και μεταβλητότητα*.

- Η **πρώτη τροχιά «Δεδομένα»** αναφέρεται στη συλλογή, οργάνωση, αναπαράσταση και ερμηνεία διαφορετικής ποιότητας δεδομένων και εξελίσσεται για να συμπεριλάβει:
 - κατηγορικά δεδομένα (δηλαδή, δεδομένα που οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί (π.χ. παιχνίδια, χρώματα κ.λπ., βλ. Α΄ Δημοτικού, δραστηριότητα ΣΔ1),
 - διακριτά ποσοτικά δεδομένα (δηλαδή, δεδομένα που οι τιμές τους είναι ακέραιοι αριθμοί π.χ. αριθμός δωματίων μιας κατοικίας, αριθμός παιδιών μιας οικογένειας, βλ. Β΄ Δημοτικού, δραστηριότητα ΣΔ1)
 - συνεχή ποσοτικά δεδομένα (δηλαδή, δεδομένα που οι τιμές τους δεν είναι μόνο ακέραιοι αριθμοί π.χ. ύψος, βλ. Ε΄ Δημοτικού, δραστηριότητα ΣΔ1).

Οι τρόποι αναπαράστασης των δεδομένων που χρησιμοποιούν οι μαθητές εξελίσσονται από τους πιο απλούς σε πιο σύνθετους: διαγράμματα με υλικά, εικονογράμματα, ραβδογράμματα, σημειογράμματα (Α΄ κύκλος), διπλά ραβδογράμματα (Β΄ κύκλος), κυκλικά διαγράμματα, χρονοδιαγράμματα, διαγράμματα διασποράς, ιστογράμματα (Γ΄ κύκλος). Ανάλογα, η ερμηνεία των δεδομένων που αποσκοπεί στην ανάπτυξη επιχειρηματολογίας από τους μαθητές για τα δεδομένα που έχουν συγκεντρωθεί ξεκινά από την απλή ανάγνωση και σύγκριση των πληροφοριών (Α΄ κύκλος) και προχωρά στην εξαγωγή

συμπερασμάτων (Β΄ κύκλος) και στην πραγματοποίηση προβλέψεων με βάση δείγματα πληθυσμών (Γ΄ κύκλος).

- Η **δεύτερη τροχιά «Μέτρα θέσης»** αφορά στη χρήση αριθμητικών εκφράσεων, οι οποίες επιτρέπουν τη συνοπτική περιγραφή δεδομένων και τη σύγκριση ομάδων δεδομένων. Τα μέτρα θέσης εισάγονται σταδιακά στο Β΄ κύκλο και είναι η επικρατούσα τιμή (Γ΄ Δημοτικού), η διάμεσος (Δ΄ Δημοτικού) και η μέση τιμή (Ε΄ Δημοτικού). Τα μέτρα θέσης, στην υποχρεωτική εκπαίδευση, υπολογίζονται μόνο για διακριτά ποσοτικά δεδομένα.
- Η **τρίτη τροχιά «Μεταβλητότητα»** αναφέρεται σε αριθμητικές εκφράσεις που χαρακτηρίζουν τη διασπορά των δεδομένων. Στο Β΄ κύκλο εισάγεται το εύρος (Γ΄ Δημοτικού) και στο Γ΄ κύκλο η μέση απόλυτη απόκλιση (Γ΄ Γυμνασίου). Παρακάτω, δίνεται ένα παράδειγμα για την τροχιά «Δεδομένα» που δείχνει πώς μπορεί να εξελιχθεί στην πορεία των τάξεων του Δημοτικού και του Γυμνασίου.

Ενδεικτικό παράδειγμα για την τροχιά «Δεδομένα»

Οι μαθητές συζητούν για τους σύγχρονους Ολυμπιακούς αγώνες και πραγματοποιούν μια έρευνα με αφορμή ερωτήματα όπως:

A΄ κύκλος

- Ποια είναι τα αγαπημένα αθλήματα των μαθητών της τάξης τους; (Α΄ Δημοτικού)
- Πόσες μπάλες ομαδικών αθλημάτων (π.χ. μπάσκετ, ποδοσφαίρου κ.λπ.) έχουν στο σπίτι τους; (Β΄ Δημοτικού)

B΄ κύκλος

- Πόσα μετάλλια κέρδισαν διάφορες χώρες στους τελευταίους Ολυμπιακούς αγώνες;
Πόσες χώρες κέρδισαν χάλκινα, ασημένια, χρυσά μετάλλια; (Γ΄ Δημοτικού)
- Ποια είναι τα αγαπημένα αθλήματα των κοριτσιών και των αγοριών της τάξης τους; (Δ΄ Δημοτικού)
- Ποιες είναι οι επιδόσεις των μαθητών της τάξης τους στο αγώνισμα του δρόμου; (Ε΄ Δημοτικού)
- Ποιες είναι οι επιδόσεις των μαθητών της Γ΄ Δημοτικού και της ΣΤ΄ Δημοτικού στο αγώνισμα του δρόμου; (ΣΤ΄ Δημοτικού)

Γ΄ κύκλος

- Πόσες χώρες έλαβαν μέρος στους σύγχρονους Ολυμπιακούς αγώνες (1896-σήμερα) και πόσες κέρδισαν μετάλλια; (Α΄ Γυμνασίου)
- Ποια είναι τα αγαπημένα αθλήματα των εφήβων; (Β΄ Γυμνασίου)
- Ποιες είναι οι επιδόσεις των εφήβων αθλητών στο αγώνισμα του μήκους; (Γ΄ Γυμνασίου).

Η θεματική ενότητα των **Πιθανοτήτων** αναπτύσσεται σε δύο τροχιές: *Πείραμα τύχης* και *Πιθανότητα ενδεχομένου*.

- Η **πρώτη τροχιά «Πείραμα τύχης»** αναφέρεται στην πραγματοποίηση πειραμάτων που μπορεί να επαναληφθούν πολλές φορές κάτω από τις ίδιες

- συνθήκες και των οποίων τα αποτελέσματα δεν είναι προβλέψιμα. Η εμπλοκή των μαθητών σε πειράματα τύχης εξελίσσεται σταδιακά και περιλαμβάνει:
- πραγματοποίηση απλών πειραμάτων τύχης ενός σταδίου (π.χ. ρίψη ενός ζαριού) και εύρεση του συνόλου των δυνατών αποτελεσμάτων τους (Α΄ κύκλος),
 - πραγματοποίηση πολλών δοκιμών απλών πειραμάτων τύχης και διερεύνηση των αποτελεσμάτων τους (Β΄ κύκλος, Γ΄ Δημοτικού),
 - πραγματοποίηση πειραμάτων τύχης δύο σταδίων (π.χ. ρίψη δύο ζαριών) και εύρεση του συνόλου των δυνατών αποτελεσμάτων τους (Β΄ κύκλος, ΣΤ΄ Δημοτικού),
 - πραγματοποίηση σύνθετων πειραμάτων τύχης (Γ΄ κύκλος, Α΄ Δημοτικού),
 - διάκριση ασυμβίβαστων και ανεξάρτητων ενδεχομένων (Γ΄ κύκλος, Γ΄ Δημοτικού).
- Η **δεύτερη τροχιά «Πιθανότητα ενδεχομένου»** αφορά στον υπολογισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου και αναπτύσσεται ως εξής:
 - περιγραφή ενός ενδεχομένου ως βέβαιο, πιθανό, απίθανο, αδύνατο (Α΄ κύκλος, Α΄ Δημοτικού),
 - σύγκριση ενδεχομένων ως προς την πιθανότητα εμφάνισής τους (λιγότερο πιθανό, περισσότερο πιθανό, ισοπίθανο) (Α΄ κύκλος, Β΄ Δημοτικού),
 - εκτίμηση της πιθανότητας ενός γεγονότος σε μη αριθμητική κλίμακα (Β΄ κύκλος, Γ΄ Δημοτικού),
 - υπολογισμός της πιθανότητας ενός απλού ενδεχομένου με κλάσματα (Β΄ κύκλος, Ε΄ Δημοτικού),
 - υπολογισμός της πιθανότητας ενός σύνθετου ενδεχομένου με τον κλασσικό ορισμό των πιθανοτήτων (Γ΄ κύκλος, Α΄ Δημοτικού),
 - χρήση της Βασικής Αρχής Απαρίθμησης και υπολογισμός πιθανότητας (Γ΄ κύκλος, Γ΄ Δημοτικού).

Παρακάτω, δίνεται ένα παράδειγμα για την τροχιά «Πιθανότητα ενδεχομένου» που δείχνει πώς μπορεί να εξελιχθεί στην πορεία των τάξεων του Δημοτικού και του Γυμνασίου.

Ενδεικτικό παράδειγμα για την τροχιά «Πιθανότητα ενδεχομένου»

Με αφορμή τη ρίψη ενός ζαριού που έχει 2 πλευρές κόκκινες, τρεις μπλε και 1 πράσινη, συζητούν ερωτήματα όπως:

Α΄ κύκλος

- Είναι πιθανό να τύχει μαύρο χρώμα; (Α΄ Δημοτικού)
- Είναι πιο πιθανό να τύχει το μπλε ή το κόκκινο χρώμα; (Β΄ Δημοτικού)

Β΄ κύκλος

- Πώς μπορούν να τοποθετηθούν σε μία μη αριθμητική κλίμακα τα ενδεχόμενα: μπλε, πράσινο, κίτρινο χρώμα; (Γ΄, Δ΄ Δημοτικού)
- Ποια είναι η πιθανότητα να τύχει το κόκκινο χρώμα; (Ε΄ Δημοτικού)
- Ποια είναι η πιθανότητα να τύχει το κόκκινο χρώμα και ποια είναι η συχνότητα εμφάνισης του κόκκινου χρώματος σε 20 ρίψεις του ζαριού; (ΣΤ΄ Δημοτικού)

Γ' κύκλος

- Ποια είναι η πιθανότητα, αν ρίξουμε δύο ίδια ζάρια, να τύχει και στα δύο ζάρια κόκκινο χρώμα; (Α' Γυμνασίου)
- Ποια είναι η πιθανότητα, αν ρίξουμε έξι φορές το ζάρι, να τύχει και τις έξι φορές το μπλε χρώμα; (Γ' Γυμνασίου)

Αξιολόγηση

Οι μορφές Αξιολόγησης, οι μέθοδοι, οι τεχνικές και τα εργαλεία που προτείνονται σε αυτή την ενότητα του Οδηγού του Εκπαιδευτικού έχουν στόχο να υποστηρίξουν τον εκπαιδευτικό στην εφαρμογή μέσα από τη διδακτική πράξη των βασικών αρχών της Αξιολόγησης που αναπτύσσονται στο Πρόγραμμα Σπουδών.

Τρία Εργαλεία για τρία επίπεδα αξιολόγησης

Η αξιολόγηση εστιάζεται σε τρία διαφορετικά επίπεδα και έχει διαφορετική μορφή και διαφορετικά εργαλεία σε κάθε επίπεδο. Το πρώτο επίπεδο αφορά στον ίδιο τον μαθητή και στην επίτευξη συγκεκριμένων ΠΜΑ. Το μοντέλο που προτείνεται περιλαμβάνει την κατάταξη των στρατηγικών – προσεγγίσεων που αναπτύσσουν οι μαθητές, εργαζόμενοι σε δραστηριότητες τελικής ή διαμορφωτικής αξιολόγησης. Το δεύτερο επίπεδο εστιάζεται στη διδακτική πορεία (διδασκαλία) και προτείνεται ένα εργαλείο αυτοαξιολόγησης του εκπαιδευτικού. Στο τρίτο επίπεδο δίνεται έμφαση στην εξέλιξη της κάθε διδακτικής τροχιάς και ιδιαίτερα στα σημεία μετάβασης από τον έναν κύκλο στον επόμενο. Προτείνεται η χρήση του portfolio του κάθε μαθητή σε συνδυασμό με μια λίστα ελέγχου (checklist) των σημαντικών σημείων της τροχιάς σε κάθε κύκλο.

Εργαλείο 1

Η ανάλυση και ερμηνεία των απαντήσεων των μαθητών σε κάποια κατάσταση-πρόβλημα, είτε αυτό αντιμετωπίζεται στη συζήτηση στην τάξη είτε σε κάποιο γραπτό τεστ, είναι χρήσιμα στοιχεία για τον εκπαιδευτικό της τάξης προκειμένου να αντιληφθεί τις συγκεκριμένες δυσκολίες που αντιμετωπίζει ο κάθε μαθητής και να αποφασίσει για το είδος της διδακτικής παρέμβασης που κρίνεται απαραίτητη. Είναι αναγκαίος, λοιπόν, ο εντοπισμός της κύριας μαθηματικής ιδέας/ έννοιας του προβλήματος και η ταξινόμηση των απαντήσεων των μαθητών με βάση το βαθμό επίτευξης του στόχου της δραστηριότητας, της πληρότητας στην αντίληψη της βασικής μαθηματικής ιδέας/ έννοιας και, τέλος, της πληρότητας της αιτιολόγησης που αναπτύσσει ο μαθητής.

Στην κατεύθυνση αυτή μπορεί να βοηθήσει το επόμενο εργαλείο αξιολόγησης. Το προτεινόμενο μοντέλο αναπτύσσεται σε κλίμακα 4 επιπέδων αξιολόγησης των στρατηγικών – προσεγγίσεων που αναπτύσσουν οι μαθητές σε δραστηριότητες αξιολόγησης και στηρίζεται στο μοντέλο ποιοτικής ανάλυσης των απαντήσεων των

μαθητών σε «ανοικτού» τύπου δραστηριότητες του Αναλυτικού Προγράμματος *Mathematics in Context* (Smith, 2004, p.75)².

Αξιολογική κλίμακα τελικής αξιολόγησης

4.	Πλήρης επίτευξη του στόχου της δραστηριότητας. Οι ενέργειες και οι απαντήσεις των μαθητών φανερώνουν πλήρη αντίληψη της κεντρικής μαθηματικής ιδέας της δραστηριότητας. Η αιτιολόγησή τους είναι σαφής, ολοκληρωμένη και περιλαμβάνει τη χρήση γραπτής, συμβολικής και εικονικής αναπαράστασης.
3.	Μερική επίτευξη του στόχου της δραστηριότητας. Οι ενέργειες και οι απαντήσεις των μαθητών φανερώνουν μερική αντίληψη της κεντρικής μαθηματικής ιδέας της δραστηριότητας. Η αιτιολόγησή τους κρίνεται ελλιπής μολονότι καταφέρνουν να «επικοινωνούν» την προσέγγισή που ακολουθείται.
2.	Περιορισμένη πρόοδο/ επίτευξη της δραστηριότητας. Οι ενέργειες και οι απαντήσεις των μαθητών φανερώνουν ελλιπή αντίληψη της κεντρικής μαθηματικής ιδέας της δραστηριότητας. Η αιτιολόγηση κρίνεται ανεπαρκής, προβληματική και γεμάτη ασάφειες.
1.	Ελάχιστη έως μηδενική πρόοδο στην επίτευξη της δραστηριότητας. Οι μαθητές φαίνεται να αγνοούν την κεντρική μαθηματική ιδέα της δραστηριότητας, ενώ αδυνατούν να αιτιολογήσουν τις επιλογές τους.

Η εφαρμογή του συγκεκριμένου μοντέλου από τους εκπαιδευτικούς προϋποθέτει φυσικά την ανάλυση της μαθηματικής ιδέας/ έννοιας της δραστηριότητας. Στο παράδειγμα που ακολουθεί, αρχικά γίνεται η σύνδεση της δραστηριότητας με τους στόχους του Προγράμματος Σπουδών και ακολουθεί η δραστηριότητα. Στη συνέχεια, η ανάλυση και ταξινόμηση των πιθανών στρατηγικών – προσεγγίσεων στηρίζεται στην ανάλυση της κεντρικής έννοιας της δραστηριότητας.

Παραδείγματα Δραστηριοτήτων Αξιολόγησης:

ΣΤ' Δημοτικού: Στροφή

Θεματική ενότητα: Χώρος και Γεωμετρία – Μέτρηση

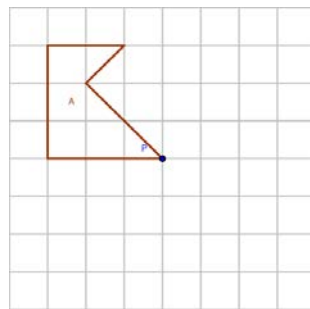
Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	Βασικά θέματα
Γ10. Περιγράφει ισοδύναμους μετασχηματισμούς που οδηγούν στην κατασκευή ίσων σχημάτων σε φυσικό και ψηφιακό περιβάλλον.	Μετασχηματισμοί και Συμμετρία <ul style="list-style-type: none"> • Μετατόπιση, στροφή και ανάκλαση • Αξονική συμμετρία • Κεντρική συμμετρία • Επικαλύψεις επιφανειών και
Γ11. Σχεδιάζει το συμμετρικό απλών γεωμετρικών σχημάτων ως προς τον κατακόρυφο και τον οριζόντιο άξονα σε τετραγωνισμένο καμβά και με τη χρήση του γνώμονα.	
Γ12. Σχεδιάζει σχήματα με κέντρο συμμετρίας για	

² Smith, M. E. (2004). Practices in Transition: A Case Study of Classroom Assessment. In T. A. Romberg (Ed.), *Standards-Based Mathematics Assessment in Middle School*. Teachers College Press.

<p>Διάφορες περιστροφές σε καμβάδες και σε ψηφιακό περιβάλλον.</p> <p>Γ13. Αναγνωρίζει ποια σχήματα μπορούν να δώσουν ψηφιδωτά και χρησιμοποιεί στοιχειώδεις μετασχηματισμούς για την κατασκευή τους.</p>	μοτίβα
---	--------

Στη δραστηριότητα αυτή θα σχεδιάσετε/ κατασκευάσετε (περιστροφές) στροφές του σχήματος A γύρω από το σημείο P.

1. Το σχήμα A_1 που είναι η στροφή (περιστροφή) του σχήματος A κατά 90° σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Σχεδιάστε και ονομάστε το σχήμα A_1 .
2. Το σχήμα A_2 που είναι η στροφή (περιστροφή) του σχήματος A κατά 180° σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Σχεδιάστε και ονομάστε το σχήμα A_2 .
3. Το σχήμα A_3 που είναι η στροφή (περιστροφή) του σχήματος A κατά 90° αντίστροφα προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Σχεδιάστε και ονομάστε το σχήμα A_3 .



Ανάλυση της δραστηριότητας – Αξιολόγηση των απαντήσεων των μαθητών

Η κύρια μαθηματική έννοια της δραστηριότητας αφορά στο μετασχηματισμό της (περι)στροφής ενός μη κυρτού 5-γωνου με σημείο περιστροφής μια κορυφή του. Ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός ανήκει στην ομάδα των μετασχηματισμών που διατηρεί το γεωμετρικό αντικείμενο αναλλοίωτο, δηλαδή διατηρεί τις ιδιότητές του αμετάβλητες. Ο μετασχηματισμός της στροφής περιλαμβάνει ένα αρχικό γεωμετρικό αντικείμενο, μια διαδικασία μετασχηματισμού και τη δημιουργία ενός νέου γεωμετρικού αντικειμένου ίσου με το αρχικό, το οποίο είναι, όμως, προϊόν του συγκεκριμένου μετασχηματισμού. Η ισότητα του τελικού αντικειμένου με το αρχικό δεν αποτελεί μοναδικό κριτήριο, καθώς η διαδικασία του μετασχηματισμού απαιτεί την ύπαρξη της 1-1 αντιστοιχίας των σημείων των δύο αντικειμένων.

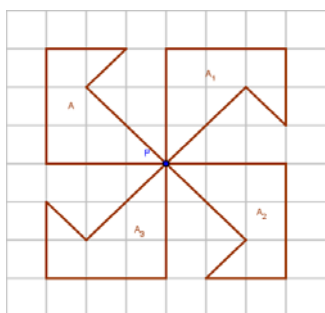
Οι πιθανές παρανοήσεις – ελλείψεις των μαθητών σχετικά με τη συγκεκριμένη μαθηματική έννοια περιλαμβάνουν είτε την ισότητα των δύο αντικειμένων (αρχικό – τελικό) είτε την ύπαρξη της 1-1 αντιστοιχίας των σημείων των δύο αντικειμένων είτε τη διαδικασία του μετασχηματισμού (φορά περιστροφής – γωνία περιστροφής – σημείο περιστροφής).

Έτσι, είναι δυνατόν να ταξινομήσουμε τις απαντήσεις – προσεγγίσεις των μαθητών σύμφωνα με την αξιολογική κλίμακα σε 4 κατηγορίες:

4.	Πλήρης επίτευξη του στόχου της δραστηριότητας. Η απάντηση-προσέγγιση των μαθητών φανερώνει ολοκληρωμένη αντίληψη της έννοιας του μετασχηματισμού της στροφής ενός γεωμετρικού σχήματος γύρω από ένα σημείο με συγκεκριμένη φορά και γωνία.
3.	<p>Μερική επίτευξη του στόχου της δραστηριότητας. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα βασικά σημεία της έννοιας του μετασχηματισμού της περιστροφής:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ισότητα των δύο σχημάτων (αρχικό – τελικό) • 1 – 1 αντιστοιχία των σημείων των δύο αντικειμένων <p>Η προσέγγισή τους, όμως, παρουσιάζει ελλείψεις σε ένα από τα παρακάτω απαραίτητα στοιχεία της διαδικασίας του μετασχηματισμού:</p> <ul style="list-style-type: none"> • φορά περιστροφής • γωνία περιστροφής • σημείο περιστροφής
2.	Περιορισμένη πρόοδος/ επίτευξη της δραστηριότητας. Οι ενέργειες και οι απαντήσεις των μαθητών φανερώνουν ελλιπή αντίληψη της μαθηματικής ιδέας του μετασχηματισμού της περιστροφής (ανισότητα των δύο σχημάτων ή/ και έλλειψη 1-1 αντιστοιχίας των σημείων τους), αν και είναι δυνατόν να ακολουθείται η εφαρμογή της διαδικασίας περιστροφής (φορά – γωνία – σημείο περιστροφής).
1.	Ελάχιστη έως μηδενική πρόοδος στην επίτευξη της δραστηριότητας. Οι μαθητές αδυνατούν να εφαρμόσουν τη διαδικασία περιστροφής ενός σχήματος γύρω από ένα σημείο. Πιθανές απαντήσεις είναι δυνατόν να περιλαμβάνουν άλλα είδη μετασχηματισμών (μεταφορά, ανάκλαση) και να δημιουργήσουν ένα νέο σχήμα ίσο με το αρχικό.

Πιθανές απαντήσεις

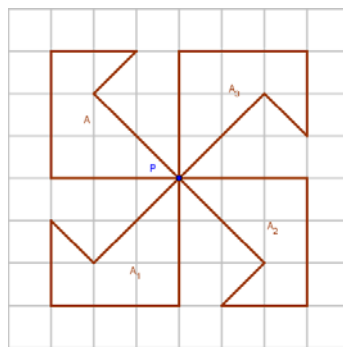
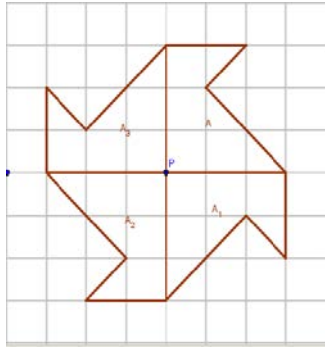
Κατηγορία 4



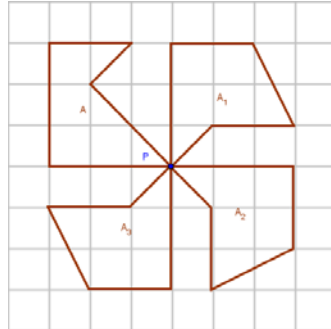
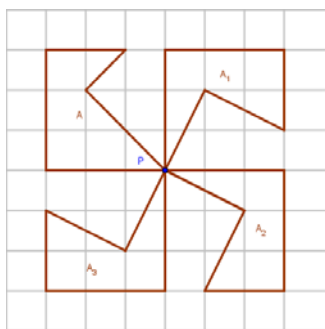
Κατηγορία 3

Σημείο περιστροφής

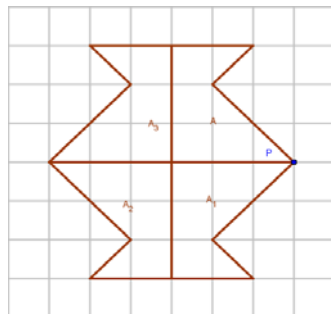
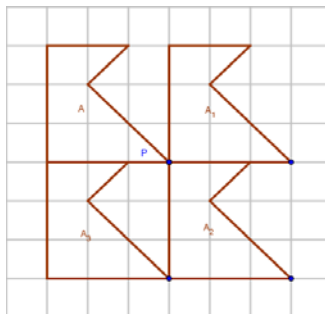
Φορά περιστροφής



Κατηγορία 2

Ισότητα σχημάτων1-1 αντιστοιχία

Κατηγορία 1

ΜεταφοράΣυμμετρία**Στ' Τάξη: «Λιγότερα λιπαρά» (ΑρΔ21, ΠΜΑ: Αρ4, Αρ8)**

Αυτή η δραστηριότητα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως δραστηριότητα τελικής αξιολόγησης. Η κύρια μαθηματική έννοια της δραστηριότητας αφορά στην έννοια των ποσοστών. Συγκεκριμένα, οι μαθητές καλούνται να αντιληφθούν ότι τα δύο διαφορετικά ποσοστά που περιλαμβάνει η δραστηριότητα είναι ποσοστά δύο διαφορετικών ποσοτήτων. Τα ποσοστά, σε αντίθεση με τα κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς, δεν αναφέρονται σε μονάδες μέτρησης, αλλά στο μέρος μιας ολόκληρης ποσότητας. Επιπλέον, η απόλυτη σύγκριση των ποσοστών είναι δυνατή μέσω της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, αλλά η σχετική σύγκρισή τους γίνεται μέσω του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Η συγκεκριμένη δραστηριότητα περιλαμβάνει και τα δύο είδη σύγκρισης ποσοστών. Το ελαφρύ γάλα περιέχει 2% λιπαρά, μια ποσότητα που είναι κατά 38% λιγότερη από εκείνη των λιπαρών που περιέχει το πλήρες γάλα. Επομένως, οι μαθητές θα πρέπει να καταλήξουν στο

συμπέρασμα ότι η ποσότητα των λιπαρών στο ελαφρύ γάλα, δηλαδή το 2%, ισοδυναμεί με το 62% (100% – 38%) της ποσότητας των λιπαρών στο πλήρες. Στη συνέχεια, μέσω της σχετικής σύγκρισης του 2% και του 62%, οι μαθητές θα υπολογίσουν μέσω διαίρεσης/ πολλαπλασιασμού το ζητούμενο συνολικό ποσοστό λιπαρών που περιέχει το πλήρες γάλα.

Μια πιθανή παρανόηση των μαθητών σε σχέση με τη συγκεκριμένη περίπτωση των ποσοστών περιλαμβάνει τη θεώρηση ότι τα δύο ποσοστά που δίνονται αναφέρονται στην ίδια ποσότητα. Άλλη παρανόηση είναι δυνατόν να αφορά την ερμηνεία της έκφρασης «... 38% λιγότερα λιπαρά...» και την ταύτισή της με την έκφραση «... 38% των λιπαρών». Τέλος, είναι πιθανόν οι μαθητές να δυσκολευτούν στον υπολογισμό της σχετικής σύγκρισης των ποσοστών 2% και 62% και να διαιρέσουν, για παράδειγμα, το 62 με το 2.

Έτσι, η ταξινόμηση των πιθανών στρατηγικών των μαθητών με βάση την αξιολογική κλίμακα έχει ως εξής:

4.	Πλήρης επίτευξη του στόχου της δραστηριότητας. Η απάντηση- προσέγγιση των μαθητών φανερώνει ολοκληρωμένη αντίληψη της έννοιας των ποσοστών και του τρόπου αξιοποίησης της σχέσης των ποσοστών για τον υπολογισμό του ζητούμενου. Συγκεκριμένα, οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις δύο διαφορετικές συγκρίσεις ποσοστών που περιλαμβάνει η δραστηριότητα. Υπολογίζουν το ποσοστό των λιπαρών που περιέχει το πλήρες γάλα και ισούται με το συνολικό ποσοστό λιπαρών που περιέχει το ελαφρύ γάλα και, τέλος, συγκρίνουν το 62% με το 2% προκειμένου να υπολογίσουν το συνολικό ποσοστό των λιπαρών που περιέχει το πλήρες γάλα.
3.	Μερική επίτευξη του στόχου της δραστηριότητας. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα βασικά σημεία της έννοιας των ποσοστών που εμπεριέχονται στη δραστηριότητα, αλλά παρατηρούνται λανθασμένες στρατηγικές υπολογισμού. Συγκεκριμένα, οι στρατηγικές τους φανερώνουν ότι κατανοούν ότι τα ποσοστά αναφέρονται σε διαφορετικές ποσότητες και υπολογίζουν ποιο ποσοστό λιπαρών που περιέχει το πλήρες γάλα ισούται με το συνολικό ποσοστό λιπαρών που περιέχει το ελαφρύ γάλα, αλλά στην προσπάθειά τους να υπολογίσουν το συνολικό ποσοστό λιπαρών που περιέχει το πλήρες γάλα αδυνατούν να αντιληφθούν ποιο είναι το μέρος και ποιο το όλο και, πιθανότατα, διαιρούν το 62% με το 2% ή το 62 με το 2.
2.	Περιορισμένη πρόοδος/ επίτευξη της δραστηριότητας. Οι ενέργειες και οι απαντήσεις των μαθητών φανερώνουν ελλιπή αντίληψη της μαθηματικής ιδέας των ποσοστών που περιέχει η δραστηριότητα. Συγκεκριμένα, οι μαθητές, μολονότι αντιλαμβάνονται ότι τα ποσοστά αναφέρονται σε δύο διαφορετικές ποσότητες, αδυνατούν να κάνουν τις συγκρίσεις είτε γιατί στην πρώτη σύγκριση παρερμηνεύουν το «38% λιγότερα» και θεωρούν ότι το 2% του ελαφρού γάλακτος ισούται με το 38% του πλήρους είτε γιατί στη δεύτερη σύγκριση θεωρούν ότι το 100% των λιπαρών του πλήρους ισούται με το 2% των λιπαρών του ελαφρού γάλακτος και προσπαθούν να υπολογίσουν το ποσοστό που ισούται με το 38% ή το 62%.

1.	Ελάχιστη έως μηδενική πρόοδος στην επίτευξη της δραστηριότητας. Οι μαθητές αδυνατούν να κατανοήσουν ότι τα ποσοστά αναφέρονται σε δύο διαφορετικές ποσότητες. Πιθανές απαντήσεις είναι δυνατόν να περιλαμβάνουν αριθμητικές πράξεις (προσθέσεις, αφαιρέσεις, πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις) με τους αριθμούς 62, 38 και 2.
-----------	--

Εργαλείο 2

Σε ένα δεύτερο επίπεδο αξιολόγησης εστιάζουμε στη διδακτική πορεία (διδασκαλία) και προτείνουμε ένα είδος αυτοαξιολόγησης του εκπαιδευτικού με τη βοήθεια ενός εργαλείου «αναστοχασμού». Αυτό το εργαλείο μπορεί να δώσει άμεσα πληροφορίες στον εκπαιδευτικό σχετικά με το αν η διδακτική πρακτική του στοχεύει στην ανάπτυξη τόσο των βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων, όπως:

- η ικανότητα αποτελεσματικής χρήσης εργαλείων,
- η ικανότητα αλληλεπίδρασης και συνεργασίας σε ετερογενείς ομάδες,
- η ικανότητα αυτόνομης και υπεύθυνης λειτουργίας,

και της μαθηματικής (δημιουργικής, αναστοχαστικής, κριτικής) σκέψης, όσο και στην ανάπτυξη των ιδιαίτερων μαθηματικών διεργασιών που προτείνονται στο Πρόγραμμα Σπουδών:

- διεργασία συλλογισμού και επιχειρηματολογίας,
- διεργασία δημιουργίας συνδέσεων,
- διεργασία επικοινωνίας,
- διεργασία επιλογής και χρήσης εργαλείων,
- διεργασία μεταγνωστικής ενημερότητας.

Ως εργαλείο για την αξιολόγηση του δεύτερου αυτού επιπέδου προτείνεται μια εσχάρα αξιολόγησης, το Εργαλείο 2.

Αυτοαξιολόγηση			
4 Πλήρης επίτευξη	3 Μερική επίτευξη	2 Περιορισμένη επίτευξη	1 Ελάχιστη επίτευξη

Χαρακτηριστικά διδασκαλίας	4 3 2 1	Παρατηρήσεις / Βελτιώσεις
1. Είναι εμφανής η σύνδεση μεταξύ των μαθησιακών δραστηριοτήτων και των διδακτικών στόχων;	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	
2. Το μαθηματικό περιεχόμενο είναι σημαντικό και περιγράφεται με ακρίβεια;	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	
3. Δημιουργείται ένα περιβάλλον πρόκλησης και εμπλοκής των μαθητών για μάθηση;	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	

4. Περιλαμβάνονται δραστηριότητες που απαιτούν διαδικασίες πειραματισμού, διερεύνησης, διατύπωσης και ελέγχου υποθέσεων;	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	
5. Δίνεται έμφαση στη διερεύνηση φαινομένων, στη διατύπωση και στον έλεγχο υποθέσεων, αλλά και στη συγκρότηση τεκμηριωμένων επιχειρημάτων;	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	
6. Παρέχονται ευκαιρίες στους μαθητές για να δημιουργούν συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών, μέσα στα μαθηματικά και μεταξύ των μαθηματικών και άλλων επιστημονικών περιοχών και του πραγματικού κόσμου.	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	
7. Αξιοποιούνται κατάλληλα χειραπτικά και ψηφιακά εργαλεία, προκειμένου να εκτελούν οι μαθητές συγκεκριμένες μαθηματικές δράσεις, να διερευνούν μαθηματικές ιδέες και να επιλύουν προβλήματα	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	
8. Αξιολογείται η επίτευξη των διδακτικών στόχων;	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	
9. Αξιολογείται το σύνολο των μαθητών;	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	
10. Παρέχονται ευκαιρίες για εμπάθυση;	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	
Σημείωση: Κάθε χαρακτηριστικό που έχει σκορ κάτω από 3 είναι υποψήφιο για βελτίωση και θα πρέπει να μελετηθεί με προσοχή.	Σύνολο: / 40	

Εργαλείο 3

Στο τρίτο επίπεδο αξιολόγησης εστιάζουμε στην εξέλιξη/ πορεία της διδακτικής τροχιάς και ιδιαίτερα στα σημεία μετάβασης από τον έναν κύκλο στον επόμενο ή από τη μια τάξη στην επόμενη. Τα σημεία/κόμβοι της κάθε τροχιάς όπου θα πρέπει ο εκπαιδευτικός να αξιολογήσει την επίτευξη ενός συνόλου ΠΜΑ στα οποία βασίζεται η εξέλιξη της τροχιάς. Επιπλέον, θα πρέπει να γνωρίζει ο εκπαιδευτικός το βαθμό επίτευξης των ΠΜΑ. Σε αυτό το επίπεδο, τα εργαλεία αξιολόγησης θα μπορούσαν να αποτελέσουν το portfolio του κάθε μαθητή και, επιπλέον, δραστηριότητες τελικής αξιολόγησης (Εργαλείο 1) σε συνδυασμό με μια λίστα

ελέγχου (checklist) των σημαντικών σημείων της τροχιάς σε κάθε κύκλο/ τάξη. Αυτού του είδους η αξιολόγηση θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και για την αξιολόγηση του Προγράμματος Σπουδών προκειμένου να έχουμε μια εικόνα για το βαθμό επίτευξης των ΠΜΑ που έχουν τεθεί.

Ε΄ Δημοτικού / Φυσικοί αριθμοί	Επίτευξη			
	Ικανοποιητική	Μερική	Περιορισμένη	Ελάχιστη
ΠΜΑ				
<i>Αρ1.</i> Διαβάζουν, γράφουν και αναγνωρίζουν αριθμούς σε μια ποικιλία από πλαίσια.				
<i>Αρ2.</i> Διερευνούν τη σχέση μεταξύ ενός ψηφίου και της αξίας του.				
<i>Αρ3.</i> Αναλύουν και συνθέτουν φυσικούς αριθμούς με διαφορετικούς τρόπους.				
<i>Αρ4.</i> Διερευνούν τη σχέση των φυσικών αριθμών με τους κλασματικούς και τους δεκαδικούς αριθμούς.				
<i>Αρ5.</i> Αναγνωρίζουν και αναπαριστούν με διαφορετικούς τρόπους καταστάσεις πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και (τέλειας και ατελούς) διαίρεσης.				
<i>Αρ6.</i> Εκτιμούν και υπολογίζουν το αποτέλεσμα αριθμητικών παραστάσεων που περιλαμβάνουν και τις τέσσερις πράξεις, συνειδητοποιώντας το ρόλο της παρένθεσης.				
<i>Αρ7.</i> Αναγνωρίζουν, διατυπώνουν και εφαρμόζουν στρατηγικές νοερών υπολογισμών των τεσσάρων πράξεων (διαίρεση: τέλεια, με μονοψήφιο διαιρέτη).				
<i>Αρ8.</i> Αναπτύσσουν και αξιοποιούν διαδικασίες εκτέλεσης/ αλγόριθμους των τεσσάρων πράξεων, χρησιμοποιώντας διάφορες στρατηγικές, μέσα (ανάμεσα στα οποία και αριθμομηχανή) και αναπαραστάσεις.				
<i>Αρ9.</i> Αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων και μοντελοποίησης/ αναπαράστασης καταστάσεων για να τις τεκμηριώσουν και να τις κοινοποιήσουν.				
<i>Αρ10.</i> Διερευνούν τον αλγόριθμο της Ευκλείδειας διαίρεσης δύο φυσικών αριθμών και τον χρησιμοποιούν για να κάνουν τη δοκιμή της διαίρεσης.				
<i>Αρ11.</i> Διατυπώνουν, αιτιολογούν και εφαρμόζουν τα κριτήρια διαιρετότητας των 2,3, 4, 5, 8, 9, 10 και 25.				

Εφαρμόζοντας εναλλακτικές μεθόδους και τεχνικές αξιολόγησης

Οι εναλλακτικές μορφές και τεχνικές αξιολόγησης αφορούν κυρίως στη διαμορφωτική αξιολόγηση, αξιοποιούνται, δηλαδή, από τον εκπαιδευτικό και τον μαθητή για ανατροφοδότηση της διδακτικής και μαθησιακής διαδικασίας. Κάτω όμως από ορισμένες συνθήκες μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για τελική αξιολόγηση, όπως, για παράδειγμα, το πορτφόλιο προς το τέλος ενός σχολικού έτους.

Το πορτφόλιο (χαρτοφυλάκιο)

Τα πορτφόλιο, ως συλλογές έργων και εργασιών των μαθητών, μπορούν να σχεδιαστούν με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι αντιπροσωπευτικά των μαθησιακών εμπειριών των μαθητών.

Η καλή χρήση των πορτφόλιο προϋποθέτει:

- Οι μαθητές να έχουν την ευκαιρία να οργανώνουν το πορτφόλιο τους μόνοι τους. Αυτό στις μικρές ηλικίες είναι δύσκολο. Θα χρειαστεί ο εκπαιδευτικός να βοηθήσει τους μαθητές περισσότερο ή λιγότερο, να δώσει κάποιες γενικές και ειδικές –ανά περίπτωση μαθητή- οδηγίες.
- Οι μαθητές να τροφοδοτούν το πορτφόλιο με υλικό τακτικά. Μπορεί να επιλέγουν να βάζουν κάθε εργασία ή μερικές από τις εργασίες τους.
- Οι εργασίες που επιλέγονται να είναι διαφορετικές ως προς το είδος, να έχουν μια ποικιλία, να παρέχουν πληροφορίες για μια ολοκληρωμένη κατά το δυνατόν εικόνα του κάθε μαθητή. Δηλαδή, οι εργασίες που ο κάθε μαθητής επιλέγει για να αντιπροσωπεύσει τη δουλειά του στα μαθηματικά να δίνουν στον εκπαιδευτικό που αξιολογεί το φάκελο μια εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο ο κάθε μαθητής ερμηνεύει τη δουλειά του, για τις διαθέσεις του απέναντι στα μαθηματικά, για το βαθμό κατανόησης συγκεκριμένων εννοιών και διαδικασιών.

Σημείωση 1: Επειδή το πορτφόλιο εμπλουτίζεται με εργασίες κατά τη διάρκεια μιας ολόκληρης χρονιάς – πιθανόν και περισσότερων χρόνων, πληρουμένων κάποιων συνθηκών - επιτρέπει στον εκπαιδευτικό, αλλά και στο μεγαλύτερο μαθητή – από Στ Δημοτικού και πάνω - να εξάγει κάποια συμπεράσματα για τα μαθησιακά του πρότυπα, τους τρόπους, δηλαδή, με τους οποίους μαθαίνει ευκολότερα και 'προσφορότερα' για τον ίδιο.

Σημείωση 2: Το πορτφόλιο μπορεί να τηρείται και ηλεκτρονικά στον υπολογιστή της τάξης ή στον υπολογιστή του εργαστηρίου Η/Υ του σχολείου και να περιλαμβάνει τόσο τις ηλεκτρονικά εκπονημένες εργασίες όσο και τις υπόλοιπες σκαναρισμένες.

Παραδείγματα εργασιών που μπορεί να περιλαμβάνει το πορτφόλιο

Γεωμετρία: Η τροχιά Γεωμετρικά Σχήματα

- Αρχικά σχέδια και αναγνώριση καθορισμένων σχημάτων (τετράπλευρο, πεντάπλευρο, κ.λπ.) από την περίοδο που οι μαθητές εισάγονται στην έννοια του σχήματος (αρχή του πρώτου ηλικιακού κύκλου – Νηπιαγωγείο, Α' Δημοτικού).

- Σχέδια και αναγνώριση σχημάτων από την περίοδο που οι μαθητές μελετούν σε μεγαλύτερο βάθος την έννοια του σχήματος (Α΄ Δημοτικού – Β΄ Δημοτικού). Παράδειγμα: εκτυπώνεται η σελίδα με τα σχήματα που οι μαθητές κατασκευάζουν στο πλαίσιο της δραστηριότητας «Γραμμές και σχήματα» <http://www.pi-schools.gr/software/dimotiko/> (ΠΣ, σ. 70-71).
- Κατασκευές με συνδυασμούς σχημάτων στο επίπεδο, όπως, για παράδειγμα, η ΓΔ6 (ΠΣ, σ. 96).
- Ομαδοποίηση επίπεδων και στερεών σχημάτων με βάση χαρακτηριστικά - ιδιότητες που ορίζει ο μαθητής.
- Τελικά σχέδια και κατασκευές που προτείνει ο εκπαιδευτικός με βάση τις ιδιότητες επίπεδων και στερεών σχημάτων που έχουν μελετηθεί στην τάξη με χρήση εμπράγματου υλικού και οργάνων, στο τέλος της διδασκαλίας της τροχιάς *Γεωμετρικά σχήματα για τον 1^ο ηλικιακό κύκλο* (τέλος της Β Δημοτικού).

Συνεχίζοντας στο 2^ο ηλικιακό κύκλο, από τη Γ Δημοτικού μπορούν να προστίθενται και νέες εργασίες σε συνέχεια της ίδιας τροχιάς, όπως για παράδειγμα:

- Σχέδια επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων πάνω σε διάφορους καμβάδες, κ.λπ.

Ημερολόγια

Τα ημερολόγια είναι ένα καλό εργαλείο για να αξιολογήσει ο εκπαιδευτικός ή και ο ίδιος ο μαθητής δεξιότητες επικοινωνίας. Επιπλέον, αποτελούν ένα ακόμη μονοπάτι για την αξιολόγηση των σκέψεων μέσα από τα γραπτά κείμενα των μαθητών σχετικά με τις ικανότητές τους να επικοινωνούν μαθηματικά, τις συμπεριφορές και τις διαθέσεις τους απέναντι στα μαθηματικά. Για να μπορεί αυτό το εργαλείο να χρησιμοποιηθεί ουσιαστικά από την πλευρά των μαθητών, ο εκπαιδευτικός χρειάζεται:

- να συζητήσει με τους μαθητές του και να μοιραστεί μαζί τους σκοπούς και τα πλεονεκτήματα της τήρησης ημερολογίου,
- να φροντίζει ώστε οι μαθητές να τηρούν συμβατικό ή ηλεκτρονικό ημερολόγιο με τακτικές ημερολογιακά καταχωρημένες σημειώσεις ώστε να μπορεί να ανατρέχει στις περασμένες σημειώσεις με άνεση,
- να δημιουργεί ευκαιρίες συζήτησης μεταξύ των μαθητών βασισμένες στις σημειώσεις τους και να ενθαρρύνει την ανταλλαγή ιδεών που έχουν αναπτύξει σε αυτές,
- να ανατροφοδοτεί τα ημερολόγια των μαθητών του με δικές του σκέψεις.

Παράδειγμα τήρησης ημερολογίου για την ΑΔ1, Γ΄ Γυμνασίου, ΠΣ σ.257

Οι μαθητές επιλέγουν να τηρήσουν ένα ημερολόγιο των ενεργειών και των σκέψεών τους για τη συγκεκριμένη δραστηριότητα. Έχουν δίπλα στον υπολογιστή που εργάζονται ένα έντυπο ημερολόγιο ή κρατούν σημειώσεις ηλεκτρονικά σε αρχείο στον υπολογιστή παράλληλα με τη δουλειά τους στο Geogebra.

Οι σημειώσεις μπορούν να αναφέρονται στα παρακάτω:

- Τοποθετούν το πρόβλημα που πρόκειται να λύσουν στην αντίστοιχη μαθηματική περιοχή (κανονικότητες-συναρτήσεις,...), προσδιορίζουν το είδος του προβλήματος (είναι μια διερευνητική διαδικασία που...), προσδιορίζουν τι πρόκειται να διερευνήσουν.
- Εκφράζουν γραπτά τα συναισθήματά τους για το πρόβλημα (αισθάνονται ότι μπορούν να το λύσουν, φαίνεται ενδιαφέρον γιατί..., πιθανόν να συναντήσουν δυσκολίες γιατί...)
- Εκπονούν ένα διάγραμμα των ενεργειών που θα ακολουθήσουν για να απαντήσουν στο πρώτο ερώτημα (1ο βήμα:... 2^ο βήμα:... κ.λπ.). Αργότερα, επανέρχονται στο ημερολόγιο για το διάγραμμα των ενεργειών προκειμένου να απαντηθεί ένα δεύτερο ερώτημα κοκ.
- Καταγράφουν εικασίες για τη μεταβολή της γραφικής παράστασης προσπαθώντας να τις αιτιολογήσουν με βάση προηγούμενες εμπειρίες.

Μετά την εκτέλεση του προγράμματος επιστρέφουν και συμπληρώνουν στο ημερολόγιό τους:

- ποιες από τις εικασίες τους επιβεβαιώθηκαν και ποιες όχι, αιτιολογώντας και αναπτύσσοντας επιχειρήματα για τα ευρήματά τους,
- σχετικά με ποιες συγκεκριμένες έννοιες και ιδιότητες που αφορούν στη συνάρτηση $y = ax^2$ διευρύνθηκαν οι γνώσεις τους και οι δεξιότητές τους,
- σκέψεις που έκαναν σχετικά με την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος.

Οι συζητήσεις που λαμβάνουν χώρα μεταξύ των μαθητών και του εκπαιδευτικού μπορούν να εστιάζουν:

- α) στους διαφορετικούς τρόπους σχεδιασμού των ενεργειών από τους μαθητές,
- β) στις διαφορετικές γραφικές παραστάσεις που προέκυψαν από τις τιμές στο x και το a που έθεσαν οι μαθητές κατά τη διερεύνησή τους και τις σχέσεις μεταξύ των γραφικών παραστάσεων,
- γ) σε επιπλέον λύσεις που πιθανόν δεν προβλέφθηκαν από τους μαθητές και προτείνει ο εκπαιδευτικός,
- δ) στην εγκυρότητα των λύσεων εφόσον τίθεται τέτοιο θέμα,
- ε) στη δημιουργία μιας λίστας των διδακτικών εργαλείων και των στρατηγικών που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση του προβλήματος.

Η ανατροφοδότηση του εκπαιδευτικού μπορεί να αναφέρεται σε ζητήματα, όπως:

- χρήση από τον μαθητή της κατάλληλης μαθηματικής γλώσσας και ορολογίας (μη γραμμική συνάρτηση, ο ρόλος της μεταβλητής a , μεταβολή του ψ , μοναδιαία μεταβολή του x κ.λπ.),
- κατανόηση των ζητούμενων του προβλήματος από τον μαθητή,
- βαθμός συνειδητοποίησης των ενεργειών από τον μαθητή μέσα από την εκπόνηση του διαγράμματος των ενεργειών,
- αιτιολογήσεις-ανάπτυξη επιχειρηματολογίας από τον μαθητή.

Συεντεύξεις

Οι συεντεύξεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τον εκπαιδευτικό για να αξιολογήσει τη γνωστική και συναισθηματική ανάπτυξη των μαθητών μέσω μιας ποικιλίας στρατηγικών:

- Επεξήγηση: οι μαθητές παρουσιάζουν σε συμμαθητές τους αναπαραστάσεις μαθηματικών εννοιών χρησιμοποιώντας κατάλληλη μαθηματική γλώσσα.
- Ανακατεύθυνση: οι μαθητές απαντούν σε εκμαιευτικές ερωτήσεις που τους οδηγούν σε πιο σύνθετες μαθηματικές έννοιες και ιδέες.
- Επιμερισμός: οι μαθητές χρησιμοποιούν παραδείγματα για να εξηγήσουν αλγορίθμους και διαδικασίες.
- Εφαρμογή: οι μαθητές εφαρμόζουν τη γνώση τους.

Παράδειγμα συέντευξης για τη θεσιακή αξία των ψηφίων (Αριθμοί, Β' Δημοτικού)

~ Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν διάφορες εκφράσεις για ένα δοσμένο αριθμό. Για παράδειγμα, ο 145: 145 μονάδες, 14 δεκάδες και 5 μονάδες, 1 εκατοντάδα, 4 δεκάδες και 5 μονάδες, 10 δεκάδες και 45 μονάδες,...). Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν χειραπτικό υλικό ή άλλο τρόπο για να αναπαραστήσουν τις διαφορετικές εκφράσεις που σκέφτηκαν.

~ Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να κάνουν το ίδιο για τον αριθμό 104, καθοδηγώντας τους με κατάλληλες ερωτήσεις να κατανοήσουν την αξία του 0 στον αριθμό 104.

~ Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να εξηγήσουν τις διαδικασίες που ακολούθησαν για να βρουν τον αριθμό που λείπει (συμπλήρωμα) στην παρακάτω αριθμητική πρόταση: $26 + \underline{\quad} = 44$

Το παρακάτω απόσπασμα είναι ένας διάλογος - συέντευξη μεταξύ της εκπαιδευτικού και μιας μαθήτριας, της Ε, που είχε βάλει 22 στην κενή θέση. Η εκπαιδευτικός ζήτησε από την Ε να πει πώς σκέφτηκε:

Ε: Από το 20 για να πάω στο 40 (έβαλα) 20, από τα 6 στα 4 (έβαλα) 2, άρα, σύνολο 22.

Δ.: Δηλαδή, Ε, $26 + 22$ μας κάνει 44;

Η Ε κάνει την πρόσθεση οριζόντια $26 + 22 = 48$.

Ε: Όχι, κάνει 48. Κάτι έκανα λάθος....

Η εκπαιδευτικός φέρνει τον άβακα.

Δ.: Θέλεις να ξανακάνουμε την πράξη με τον άβακα;

Ε: Ναι!

Δ: Δείξε μου στον άβακα το 26.

Η Ε βάζει 2 Δ (εκάδες) και 6 Μ (ονάδες).

Δ: Πόσα θέλεις τώρα;

Ε: Άλλα 20, δηλ. 2 Δ.

Δ: Πόσα έχεις τώρα;

Ε: (μετράει) 46. Θα βγάλω 2 Μ για να γίνουν 44.

Δ: Θυμάσαι τι έκανες από την αρχή;

Ε: Έβαλα 20 και έβγαλα 2.

Δ: Δηλαδή, πόσα έβαλες;

Ε: $20-2=18$.

~ Οι μαθητές κατασκευάζουν ένα μη τετριμμένο, αλλά ρεαλιστικό, λεκτικό πρόβλημα χρησιμοποιώντας τους παραπάνω αριθμούς που να λύνεται με τη συγκεκριμένη μαθηματική ισότητα. Ανταλλάσσουν τα προβλήματά τους και τα λύνουν.

Παρατήρηση

Η παρατήρηση είναι ένα σπουδαίο εργαλείο που ο εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιήσει για να αξιολογήσει τους μαθητές του στην τάξη την ώρα που δρουν. Ωστόσο, η συλλογή και διαχείριση των πληροφοριών που αποκομίζει ο εκπαιδευτικός με την παρατήρηση συνιστά μια δύσκολη και χρονοβόρα διαδικασία. Οι παρακάτω υποδείξεις μπορεί να φανούν χρήσιμες ώστε ο εκπαιδευτικός να μην 'χαθεί' στα δεδομένα:

~ Ο εκπαιδευτικός παρατηρεί έχοντας στο μυαλό του κάποιο στόχο. Έτσι, περιορίζει τον αριθμό και το εύρος των πληροφοριών από την παρατήρηση. Η παρατήρηση παρέχει στον εκπαιδευτικό την ευκαιρία να αξιολογήσει τις ικανότητες των μαθητών στο να επικοινωνούν μεταξύ τους μαθηματικά, να εφαρμόζουν μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες, να επιλύουν προβλήματα, να συνεργάζονται με άλλους συμμαθητές τους και με τον εκπαιδευτικό.

~ Δεν έχουν όλα τα παιδιά την ίδια ανάγκη παρατήρησης. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ορίσει συγκεκριμένο χρόνο που θα παρατηρήσει έναν μαθητή ώστε να επικεντρώσει την προσοχή του σε αυτόν.

~ Ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να μην ενοχλεί τους μαθητές όταν εργάζονται προσηλωμένοι. Αναλαμβάνει το ρόλο του συμμετέχοντος παρατηρητή που είναι ταυτόχρονα ενεργό μέλος της κοινότητας μάθησης, αλλά και εξωτερικός παρατηρητής του περιβάλλοντος στο οποίο η μάθηση λαμβάνει χώρα.

Μερικά αποτελεσματικά μέσα για τη συλλογή των πληροφοριών από παρατήρηση:

- Κάρτες σημειώσεων και μολύβι για την καταγραφή των παρατηρήσεων.
- Ανάπτυξη και χρήση από τον εκπαιδευτικό μια λίστας επιθυμητών συμπεριφορών και πράξεων από μέρους του μαθητή.
- Χρήση ενός μαγνητοφώνου τσέπης για τη μαγνητοφώνηση των υπαγορευόμενων παρατηρήσεων.
- Εύρεση του κατάλληλου μέρους της τάξης από όπου θα γίνουν οι παρατηρήσεις.
- Χρήση βιντεοκάμερας (εάν και εφόσον εξασφαλισθεί άδεια και συναίνεση για τη χρήση της) για την καταγραφή των παρατηρήσεων.

- Συζήτηση των πληροφοριών από παρατήρηση με τους μαθητές με σκοπό να διερευνηθούν τα αίτια πίσω από πράξεις, συμπεριφορές και μαθηματική γλώσσα που χρησιμοποίησαν, καθώς και οι όποιες παρανοήσεις τους σχετικά με συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες.

Παράδειγμα παρατήρησης για τη Μέτρηση Δ' Δημοτικού (ΜΔ1, ΜΔ2, ΜΔ3)

~ Χρήση οργάνων μέτρησης. Για παράδειγμα, ο εκπαιδευτικός παρατηρεί πώς οι μαθητές χρησιμοποιούν το χειροποίητο μοιρογνωμόνιο στη ΜΔ1 για τη μέτρηση της γωνίας και πώς υπολογίζουν το μέτρο της.

~ Επιλογή κατάλληλων μονάδων μέτρησης. Για παράδειγμα, στη ΜΔ3 ο εκπαιδευτικός παρατηρεί εάν και πώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι χρειάζεται να χρησιμοποιηθούν υποδιαίρεσεις της μονάδας μέτρησης επιφάνειας.

~ Επιλογή και χρήση άτυπης και τυπικής κατάλληλης ορολογίας. Για παράδειγμα, η γωνία είναι «μικρότερη από 90°», «οξεία».

~ Η παρατήρηση του εκπαιδευτικού για τις μετρήσεις των μαθητών κατά τη διεξαγωγή της ΜΔ1 τον οδηγεί στο να παρακινήσει τους μαθητές να παρουσιάσουν στους συμμαθητές τους τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποίησαν το μοιρογνωμόνιο, να συγκρίνουν τα αποτελέσματα των μετρήσεών τους και να εξάγουν συμπεράσματα.

~ Επέκταση της αποκτηθείσας εμπειρίας των μαθητών στην επιλογή και χρήση μονάδων και εφαρμογή δεξιοτήτων μέτρησης στην καθημερινότητα. Για παράδειγμα, χρήση του χειροποίητου μοιρογνωμονίου ΜΔ1 για τη μέτρηση των γωνιών του γνώμονά τους.

Αξιολόγηση συνθετικής εργασίας

Η αξιολόγηση μιας συνθετικής εργασίας εξετάζει το βαθμό ανάπτυξης των ιδιαίτερων μαθηματικών διεργασιών που προτείνονται στο Πρόγραμμα Σπουδών. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιεί εργαλεία και τεχνικές που περιγράφηκαν στις εναλλακτικές μεθόδους αξιολόγησης.

Αξιολόγηση συνθετικής εργασίας 2 (Α' - Β' Δημοτικού)

«Ο δικός μας κήπος: παρακολουθώντας την ανάπτυξη των φυτών στην τάξη»

(Η εκπαιδευτικός υπογραμμίζει στον παρακάτω πίνακα αυτές τις προτάσεις που ταιριάζουν σε κάθε δυάδα μαθητών και συμπληρώνει δικά της σχόλια)

Ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο	Ως προς τη συνεργασία των μαθητών μεταξύ τους, των μαθητών με τον εκπαιδευτικό, όλων στην ολομέλεια (επικοινωνία)
<p>Οι μαθητές:</p> <p>Απαριθμούν ένα-ένα, δύο-δύο, τρία-τρία, πέντε-πέντε (μέχρι το 20, 50, 100).</p> <p>Δεν απαριθμούν το ίδιο αντικείμενο δύο</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Βαθμός συνεννόησης (υψηλός – μέτριος – μικρός) • Βαθμός αυτονομίας και αυτενέργειας (δεν ζητούν βοήθεια – ζητούν λίγη

<p>φορές (αντιστοίχιση 1 προς 1)</p> <p>Ομαδοποιούν δυάδες, τριάδες,... αντικειμένων για να διευκολυνθούν στη μέτρηση</p> <p>Πραγματοποιούν μέτρηση του ύψους και</p> <ul style="list-style-type: none"> - απαγγέλουν το σωστό φυσικό αριθμό - δεν απαγγέλουν το σωστό φυσικό αριθμό³ <p>Αναγνωρίζουν την ανάγκη κοινής μονάδας μέτρησης του ύψους (ναι-όχι)</p> <p>Καταγράφουν τις μετρήσεις στο πινακάκι στο κατάλληλο κουτάκι</p> <ul style="list-style-type: none"> - με ευκολία - με μικρή βοήθεια - μόνο με βοήθεια⁴ <p>Υπολογίζουν τις διαφορές μεταξύ των διαδοχικών μετρήσεων</p> <ul style="list-style-type: none"> - με ευκολία - με μικρή βοήθεια - μόνο με βοήθεια⁵ 	<p>βοήθεια – δεν μπορούν μόνοι)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ιεράρχηση ενεργειών <p>(άριστη ιεράρχηση – καλή ιεράρχηση – δεν ξέρουν πώς και με τι να αρχίσουν)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Βαθμός ισοτιμίας στη σχέση-κατανομή ενεργειών <p>(κυριαρχεί ο ένας – μοιράζονται το έργο)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Διαφοροποίηση <p>(μαθητής με δυσκολίες συμμετέχει ενεργά – συμμετέχει λίγο – δεν συμμετέχει)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Περιμένουν τη σειρά τους για να μιλήσουν στην ολομέλεια <p>(μιλάνε μόνο μερικοί – μιλάνε όλοι)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Γίνεται διάλογος (ακούει ο ένας τον άλλον και ανταποκρίνεται) • Ακούνε προσεκτικά τις οδηγίες – υποδείξεις της εκπαιδευτικού
<p>Ως προς τις ιδέες – στρατηγικές των μαθητών (συλλογισμός και επιχειρηματολογία)</p>	<p>Ως προς την επιλογή και χρήση του υλικού (εργαλεία και μέσα) – δεξιότητες</p>
<p>Χρησιμοποίησαν στρατηγικές (για την απαρίθμηση)</p> <ul style="list-style-type: none"> - που ανακάλεσαν από την τάξη - πρωτότυπες - αποτελεσματικές - που οδήγησαν γρήγορα και άμεσα σε αποτελέσματα <p>Χρησιμοποίησαν</p> <ul style="list-style-type: none"> - άτυπη μονάδα μέτρησης ύψους 	<p>Δεξιότητες χειρισμού του χάρακα (τοποθέτηση, ανάγνωση της ένδειξης, λεπτές κινήσεις, ακριβείς μετρήσεις,...)</p> <p>Χειρισμός ψαλιδιού</p> <p>Χρήση κόλλας</p> <p>Χρήση λωρίδων (άτυπες μονάδες μέτρησης ύψους) – κόβουν ισόπαχες και ισομήκεις λωρίδες</p> <p>Χρήση αριθμητηρίου ή μικρών κύβων</p>

³ Η εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί τη μέθοδο της συνέντευξης για να διερευνήσει τη σκέψη των μαθητών. Ενδεικτικές ερωτήσεις: Πώς το υπολογίσατε; (μπορεί να διαβάζουν το χαρακάκι από πάνω προς τα κάτω, βλ. και χρήση εργαλείων)

⁴ Όπως στο 1.

⁵ Όπως στο 1.

<p>(.....) και την μέτρησαν με χαρακάκι</p> <ul style="list-style-type: none"> - μόνο χαρακάκι - κάτι άλλο <p>Μπορούσαν να εξηγήσουν τις στρατηγικές τους στους συμμαθητές τους</p> <ul style="list-style-type: none"> - εύκολα και κατανοήσιμα - με σχετική ευκολία - δύσκολα 	<p>για την απαρίθμηση των φύλλων (με αντιστοίχιση)</p> <p>για την απαρίθμηση των μίσχων (με αντιστοίχιση)</p> <p>για την εύρεση της διαφοράς – συμπληρώματος των μετρήσεων</p>
<p>Παρατηρήσεις – συμπεράσματα της εκπαιδευτικού</p>	<p>Παρατηρήσεις – συμπεράσματα της εκπαιδευτικού</p>
<p>Ως προς τις συνδέσεις με τα άλλα μαθήματα</p>	<p>Αξιολόγηση μέσα από:</p>
<p>Ελληνική Γλώσσα (... ώρες) Ανθολόγιο..... Άλλο βιβλίο.....</p>	<p>Έκφραση συναισθημάτων, ερωτήσεις-απαντήσεις, θεατρικό δρώμενο, αναπαράσταση,...</p>
<p>Μελέτη περιβάλλοντος (...ώρες) Παρακολούθηση εικόνων, φιλμ, ντοκιμαντέρ</p>	<p>Συζήτηση</p> <ul style="list-style-type: none"> • σέβονται τη σειρά • αναπτύσσουν τις ιδέες τους • εκφράζουν τα συναισθήματά τους, διατυπώνουν κρίσεις,...
<p>Εικαστικά (... ώρες) Κατασκευή λωρίδων Κατασκευή κολάζ</p>	<p>Επιλογή χρωμάτων Επιλογή εικόνων Αισθητικό αποτέλεσμα</p>
<p>Αναστοχασμός εκπαιδευτικού</p>	
<p>Η συνθετική εργασία ήταν επιτυχημένη γιατί.....</p> <p>Ιδιαίτερη εντύπωση μου έκανε.....</p> <p>Στην επόμενη συνθετική εργασία θα προσέξω να.....</p>	

Α΄ ΚΥΚΛΟΣ

Αριθμοί

Σημασία της ενότητας: Τα Προγράμματα Σπουδών των Μαθηματικών για το Δημοτικό Σχολείο αφιερώνουν μεγάλο μέρος της ύλης τους στη μελέτη των αριθμών και των πράξεων. Ωστόσο, οι έρευνες που αφορούν στην κατανόηση των αριθμητικών ιδεών από τους μαθητές καταγράφουν απογοητευτικά αποτελέσματα. Το φαινόμενο αυτό αποδίδεται συνήθως στην υπέρμετρη έμφαση που δίνεται στη διαδικαστική έναντι της εννοιολογικής κατανόησης των αριθμών και στη μη αξιοποίηση της πλούσιας, άτυπης αριθμητικής γνώσης των μαθητών.

Για το λόγο αυτά τα σύγχρονα Προγράμματα Σπουδών δίνουν μεγαλύτερη έμφαση στην κατανόηση της έννοιας των φυσικών αριθμών που σχετίζεται με την απόδοση νοήματος στους αριθμούς 0-9 και στις μεταξύ τους σχέσεις, στη δόμηση του συστήματος των φυσικών αριθμών (δεκάδες, εκατοντάδες κ.λπ.) σε σχέση με τη γραφή και τη θεσιακή αξία των ψηφίων, στην ανάπτυξη υπολογιστικών διαδικασιών που επεκτείνονται και στην επίλυση προβλημάτων με τις τέσσερις πράξεις σε διαφορετικά πλαίσια.

Η διδασκαλία των Μαθηματικών, ειδικά στις μικρές τάξεις, είναι αναγκαίο να αξιοποιεί δραστηριότητες με χρήση χειραπτικών υλικών που βάζουν τους αριθμούς σε λειτουργική θέση στην καθημερινή εμπειρία των παιδιών και αναδεικνύουν δομικά και σημασιολογικά στοιχεία του δεκαδικού συστήματος. Ακόμη, απαραίτητο είναι να δίνεται έμφαση σε δραστηριότητες που ευνοούν την ανάπτυξη της *‘μαθηματικής επιχειρηματολογίας’* από τα ίδια τα παιδιά, κυρίως όταν χρειάζεται να εξηγήσουν τις ιδέες και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν.

Προηγούμενη κι επόμενη γνώση: Η συστηματική διδασκαλία της έννοιας του αριθμού, βασισμένη στις εμπειρικές ιδέες των μαθητών, έχει ξεκινήσει από την τάξη του Νηπιαγωγείου με τις βασικές δεξιότητες που αφορούν τους αριθμούς ως το 10 (αναγνώριση και καταμέτρηση ποσοτήτων, απαγγελία και γραφή των αριθμών, σύγκριση, διάταξη και αναπαράστασή τους στην αριθμογραμμή, ανάλυση και σύνθεση των αριθμών και διερεύνηση απλών προσθετικών και αφαιρετικών καταστάσεων).

Οι μαθητές στην πρώτη τάξη θα διευρύνουν αυτές τις γνώσεις σε αριθμούς ως το 100 και στη Β΄ τάξη ως το 1000. Επίσης, με την υπέρβαση της δεκάδας, θα ασχοληθούν με τη δόμηση των σχέσεων των αριθμών ως το 100 και θα τη συνδέσουν με τη θεσιακή αξία των ψηφίων στο δεκαδικό σύστημα. Θα εξασκηθούν στην εκτίμηση ποσοτήτων και στην επαλήθευση της εκτίμησής τους με στρατηγικές καταμέτρησης και υπολογισμού. Θα εισαχθούν σε πολλαπλασιαστικές καταστάσεις μέσω της ομαδοποίησης αντικειμένων, αρχικά στην εύρεση του διπλάσιου και του μισού μιας ποσότητας.

Στις επόμενες τάξεις του δημοτικού σχολείου, οι γνώσεις των μαθητών για τους φυσικούς αριθμούς θα επεκταθούν στις δομικές ιδιότητές τους και στις σχέσεις μεταξύ τους και θα εμπλουτιστούν με τους κλασματικούς και τους δεκαδικούς αριθμούς. Ακόμη, θα αποκτήσουν δεξιότητες διεκπεραίωσης των αλγόριθμων των τεσσάρων πράξεων αρχικά με τους φυσικούς αριθμούς και κατόπιν με τους

κλασματικούς και τους δεκαδικούς αριθμούς. Τέλος, θα εξασκηθούν στην επίλυση προβλημάτων με τις τέσσερις πράξεις.

Δυσκολίες των μαθητών: Οι κυριότερες δυσκολίες που έχουν καταγραφεί από έρευνες για τις πρώτες τάξεις αφορούν στη *διάταξη των αριθμών* στην αριθμογραμμή, καθώς και στην *κατανόηση της θεσιακής αξίας*. Μια άλλη δυσκολία είναι να αντιληφθούν τους αριθμούς ως αθροίσματα μονάδων και ως ομάδες με περισσότερα στοιχεία (δυάδες, τριάδες, πεντάδες κ.λπ.). Αυτό οδηγεί σε μια αθροιστική αντίληψη των αριθμών που υστερεί σε σχέση με την πολλαπλασιαστική που είναι απαραίτητη για την ολοκλήρωση των σχέσεων ανάμεσα στους αριθμούς και τη δόμηση του δεκαδικού συστήματος (για παράδειγμα, το 6 είναι δύο τριάδες, το 8 δύο τετράδες και το 100 δέκα δεκάδες). Οι μαθητές καλούνται να κατανοήσουν όχι μόνο ότι σε μία εξάδα, μία οκτάδα ή μία δεκάδα υπάρχουν 6, 8 ή 10 μονάδες αντίστοιχα, αλλά να αντιληφθούν την εξάδα, την οκτάδα και τελικά τη δεκάδα ως μια αδιαίρετη ενότητα, μια νέα μονάδα και να μπορούν να μετρήσουν μια ποσότητα με τη νέα αυτή μονάδα. Στη Β΄ τάξη θα χρειαστεί να κάνουν το ανάλογο για την εκατοντάδα.

Επίσης, δυσκολίες καταγράφονται τόσο στη *διεκπεραίωση των πράξεων* όσο και στη *δεξιότητα διαχείρισης των προβληματικών καταστάσεων* στις οποίες εμπλέκονται. Ειδικότερα, στην Α΄ τάξη οι μαθητές εμφανίζουν συχνά δυσκολία στο να αντιληφθούν την αφαίρεση ως τη διαφορά των δύο αριθμών. Σημειώνεται ότι τα στοιχεία που εμπλέκονται στην ανάπτυξη της γνώσης για την πρόσθεση και την αφαίρεση είναι οι σταθερές σχέσεις των αριθμών της πρώτης δεκάδας και το πλαίσιο μέσα στο οποίο εμφανίζεται κάθε φορά η πράξη (συνδυασμός ποσοτήτων ή αλλαγή μιας ποσότητας). Είναι σημαντικό να έρχονται οι μαθητές αντιμέτωποι με προβληματικές καταστάσεις, οι οποίες περιλαμβάνουν διαφορετικά είδη αθροιστικών προβλημάτων (πρόσθεσης και αφαίρεσης) και στη Β΄ τάξη αντίστοιχα με προβληματικές καταστάσεις που περιλαμβάνουν πολλαπλασιαστικά προβλήματα (πολλαπλασιασμού και διαίρεσης).

Τονίζεται ότι αν δεν αντιμετωπιστούν αυτά τα στοιχεία ως σημαντικά από τις πρώτες τάξεις, θα δημιουργήσουν δυσκολίες στο μεταγενέστερο χειρισμό ανάλογων καταστάσεων με μεγαλύτερους αριθμούς.

Προτάσεις για διδακτική διαχείριση: Όπως έχει ήδη αναφερθεί, είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός να δώσει στα παιδιά πολλές ευκαιρίες να *χειριστούν υλικό* ώστε να «κατασκευάσουν» την έννοια του αριθμού, να *διατυπώσουν* με λόγια τις σκέψεις και τις ενέργειές τους, αλλά και να *εμπλακούν* σε πραγματικές καταστάσεις επίλυσης προβλημάτων και ανάπτυξης στρατηγικών. Μέσα από αυτές τις δράσεις, όπου τα παιδιά θα εμπλακούν *με το σώμα και το μυαλό τους*, θα αναγνωρίσουν και θα καταμετρήσουν ποσότητες, θα συγκρίνουν και θα διακρίνουν σχέσεις ανάμεσα σε αριθμούς, θα ομαδοποιήσουν και θα μοιράσουν αντικείμενα.

Ο εκπαιδευτικός καλείται να διακρίνει και να προτείνει με συστηματικότητα δραστηριότητες που προσεγγίζουν διαφορετικές όψεις των αριθμών και εμπλέκονται σε διαφορετικές αριθμητικές δραστηριότητες και να μην περιορισθεί σε απλές καταστάσεις αρίθμησης ή ένα προς ένα καταμέτρησης. Συστηματική ενασχόληση με τις αναγνωρίσεις δεκάδων και των μεταξύ τους σχέσεων, ανάπτυξη

στρατηγικών μέτρησης, μελέτη της αριθμητικής γραμμής και ανάπτυξη εκτιμήσεων και νοερών υπολογισμών θα βοηθήσουν τους μαθητές να βάλουν σίγουρα θεμέλια στην αριθμητική εξέλιξη.

Είναι, επίσης, σημαντικό να τονιστεί ότι οι δράσεις στις οποίες τα παιδιά θα κληθούν τα παιδιά να εμπλακούν χρειάζεται να είναι προσεκτικά επιλεγμένες ώστε να είναι κοντά στα ενδιαφέροντά τους, καθώς και να είναι 'προκλητικές' ώστε να βοηθούν τα παιδιά να αναπτύσσουν στρατηγικές για να τις διαχειριστούν. Παράλληλα, η χρήση αναπαραστατικού υλικού αναρτημένου μέσα στην τάξη, όπως είναι οι βάσεις των δεκάδων, η εκατοντάδα ή η αριθμητική γραμμή, θα πλουτίσουν τις νοερές αναπαραστάσεις και τις επεξεργασίες των μαθητών και θα στηρίξουν την αριθμητική τους σκέψη.

Ενδεικτικές δραστηριότητες:

Α΄ Τάξη: Παιχνίδια με αριθμοκάρτες (ΑρΔ1)

Χρειάζεται να έχουμε κάρτες με τους αριθμούς από το 0 ως το 9 και, επίσης, αρκετές κάρτες με εικονιζόμενα αντικείμενα ή σχηματισμούς (μέχρι 9 στοιχεία σε διαφορετικές διατάξεις).

1. «Συστήνω τον αριθμό που βρήκα»

Ο εκπαιδευτικός έχει κρύψει τις κάρτες με τους αριθμούς σε διάφορα σημεία του χώρου. Εξηγεί ότι θα παίξουν ένα παιχνίδι «κρυφτό» με τους αριθμούς.

Σε αυτό το σημείο, πριν αρχίσει η αναζήτηση, ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τα παιδιά να αναφέρουν κάποιους αριθμούς που έχουν χρησιμοποιήσει και σε τι αναφέρονταν (για παράδειγμα, είμαι 6 χρονών, έχω 1 αδελφή, έχω 2 μολύβια κ.λπ.). Μπορεί ο ίδιος να πει ένα μικρό παράδειγμα για τον εαυτό του, αν δεν ξεκινήσει κανένα παιδί.

Ξεκινώντας το παιχνίδι, ο εκπαιδευτικός λέει ότι οι αριθμοί έχουν «κρυφτεί» και τα παιδιά χωρισμένα σε ομάδες ψάχνουν να τους βρουν. Όποιο αριθμό βρει η κάθε ομάδα οφείλει να τον παρουσιάσει, λέγοντας ότι ξέρει και ότι μπορεί να φανταστεί γι' αυτόν. Κερδίζει η ομάδα που κάνει την καλύτερη παρουσίαση όλων των αριθμών που βρήκε.

Μια ενδιαφέρουσα λεπτομέρεια είναι ότι μπορεί οι αριθμοί να έχουν κρυφτεί σε σημεία που να έχουν τοποθετηθεί (ή να υπάρχουν από κατασκευής) ίσης ποσότητας αντικείμενα (για παράδειγμα, ο αριθμός 5 σε ένα κουτί κοντά στις 5 κρεμάστρες της τάξης) εφόσον αυτό είναι εφικτό.

Εναλλακτικά, μπορούν να συνδυάζουν τις αριθμοκάρτες με τις κάρτες που απεικονίζουν αντικείμενα.

2. «Παιχνίδι γρήγορης αναγνώρισης»

Ως συνέχεια του προηγούμενου παιχνιδιού ή ως αυτόνομο

Διεργασία
επικοινωνίας
(μέσω φυσικής
γλώσσας)

Διεργασία
επικοινωνίας
(χρήση διαφορετικών
αναπαραστάσεων)

παιχνίδι, τα παιδιά μπορεί να ακολουθήσουν δραστηριότητες άμεσης αναγνώρισης ποσοτήτων. Τέτοιες δραστηριότητες μπορούν να γίνουν με διαφορετικά υλικά και σχηματισμούς, με εκκίνηση από πραγματικά αντικείμενα (φασόλια, μπίλιες ή μάρκες, ξυλάκια, σχήματα ή κύβους) και μεταφορά σε εικονιστικό υλικό με βούλες, τετράγωνα και τετραγωνισμένο χαρτί.


Το πιο σημαντικό στοιχείο στην προσέγγιση που πρέπει να ακολουθείται στις δραστηριότητες είναι οι μορφές των αναπαραστάσεων να είναι τέτοιες ώστε τα παιδιά να αναπτύξουν δυναμικές εικόνες για τους 'αριθμούς' τις οποίες να μπορούν να οργανώνουν με ευελιξία και να μην εγκλωβιστούν σε μια αναπαράσταση (όπως, για παράδειγμα, αυτήν του ζαριού).



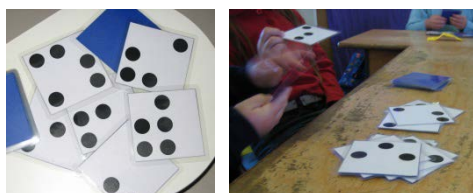
Το παιχνίδι που περιγράφεται μπορεί να συνεχιστεί με την ίδια δομή με άλλο υλικό ή άλλο πλαίσιο μέχρι τα παιδιά να πετύχουν άνετη άμεση αναγνώριση ποσοτήτων. Η χρήση των αριθμητικών λέξεων συνδέει ποσότητες και αριθμούς. Για παράδειγμα, αν πούμε να βρούμε όλα τα τρία ή αν δείξουμε το σύμβολο, τα παιδιά συνδέουν τα στοιχεία αυτά με τις σχετικές ποσότητες.

Διεργασία
επικοινωνίας
(χρήση διαφορετικών
αναπαραστάσεων)

Εναλλακτικά, τα παιδιά χωρίζονται σε ομάδες μικτής ικανότητας. Οι κάρτες με τους σχηματισμούς είναι σκορπισμένες στο πάτωμα. Οι ομάδες προσπαθούν να βρουν όσες από τις κάρτες έχουν την ποσότητα που άκουσαν με το σύνθημα του εκπαιδευτικού σε χρόνο περιορισμένο. Κερδίζει η ομάδα που θα βρει τις περισσότερες κάρτες.

Στην αρχή, οι δραστηριότητες αναγνώρισης αφορούν αριθμούς μέχρι το 10 και αργότερα μεγαλύτερες ποσότητες ή και αριθμούς σε δεκάδες (π.χ. ).

Η τάξη μπορεί να συζητήσει στρατηγικές αναγνώρισης και ακόμη μπορούν να πάρουν τις κάρτες στις ομάδες και να παίξουν μόνοι τους κάνοντας «προπόνηση», δηλαδή προετοιμασία και εξοικείωση με το υλικό που χρησιμοποιείται.

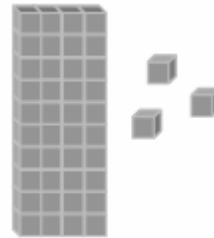


Εικόνα 1: Παιχνίδια με αριθμοκάρτες

Β΄ Τάξη: Φτιάχνω αριθμούς με τις δεκάδες (ΑρΔ3)

Στη δραστηριότητα αυτή το ενδιαφέρον στρέφεται στην κατανόηση της δημιουργίας μιας «μονάδας» ανώτερης τάξης (της δεκάδας) και την εδραίωσή της ως συστατικό στη δόμηση του αριθμητικού συστήματος, παράλληλα με τη θεσιακή αξία. Πρόκειται για δράσεις αναγνώρισης και μελέτης των δεκάδων που βοηθούν τα παιδιά να εδραιώσουν την έννοια της δεκάδας και να περάσουν σε διαφορετικές αναπαραστάσεις της (ράβδους και γραμμές). Στο πλαίσιο των δέκα, οι λωρίδες των δεκάδων υποστηρίζουν τη δυνατότητα των παιδιών να αναγνωρίσουν τις δεκάδες ως μονάδα ανώτερης τάξης. Οι δράσεις αυτές αποτελούν το πρώτο βήμα για αντίστοιχες δραστηριότητες με την επόμενη «μονάδα» ανώτερης τάξης, την εκατοντάδα.

1^η δράση: Κάνω πακέτα με δέκα: Τα παιδιά εργάζονται σε ομάδες. Η κάθε ομάδα έχει μπροστά έναν αριθμό από κυβάκια. Ο εκπαιδευτικός ζητάει να τα κάνουν πακετάκια των 10 και να πουν πόσα πακετάκια έχουν και πόσα είναι όλα τα κυβάκια μαζί (βλ. Σχήμα 1).

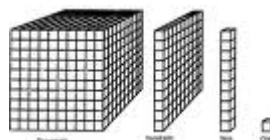


Σχήμα 1

2^η δράση: Ο εκπαιδευτικός ζητά από τα παιδιά να χρησιμοποιήσουν τα «πακέτα» με τα κυβάκια και να φτιάξουν αριθμούς (αρχικά, ολόκληρες δεκάδες και, στη συνέχεια, να πάρουν και μεμονωμένα κυβάκια και να φτιάξουν και άλλους αριθμούς (π.χ. 43).

3^η δράση: Ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει ένα εργοστάσιο που κατασκευάζει καραμέλες. Οι καραμέλες μπαίνουν σε σακουλάκια των 10. Ο εκπαιδευτικός προτείνει στους μαθητές να πάρουν διαφορετικές ποσότητες με καραμέλες (διψήφιοι ή τριψήφιοι αριθμοί).

Οι μαθητές χρησιμοποιούν υλικό (π.χ. χάντρες σε σακουλάκια) ή κυβάκια ή κύβους Dienes για να αναπαραστήσουν τις ποσότητες που έχουν πάρει. Οι κύβοι Dienes εξυπηρετούν το σχηματισμό των εκατοντάδων (Σχήμα 2). Κατόπιν γράφουν τις ποσότητες σε χαρτάκια και τις διατάσσουν στην αριθμογραμμή.



Σχήμα 2

Εναλλακτικά, για τους διψήφιους αριθμούς μπορούν να χρησιμοποιηθούν χάρτινες ράβδοι Cuisenaire. Οι χάρτινες ράβδοι Cuisenaire μπορούν να κατασκευαστούν με τη χρήση των προτύπων που βρίσκονται στο: http://isocrates.minedu.gov.gr/content_files/tsigganopaides/MATH1.pdf, σ.14).

Διεργασία
επικοινωνίας
(χρήση διαφορετικών
αναπαραστάσεων)

Είναι καλό να έχουν προηγηθεί ανάλογες δραστηριότητες με πραγματικά αντικείμενα (όπως η παρακάτω π.χ. με κουμπιά), όπου ο εκπαιδευτικός θα έχει προτρέψει τα παιδιά να κάνουν ομάδες με τα αντικείμενα (αφού αποφασίσουν τα ίδια τα παιδιά πόσα αντικείμενα θα έχει η κάθε ομάδα).

Είναι καλό να έχουν προηγηθεί ανάλογες δραστηριότητες με πραγματικά αντικείμενα (όπως η παρακάτω π.χ. με κουμπιά), όπου ο εκπαιδευτικός θα έχει προτρέψει τα παιδιά να κάνουν ομάδες με τα αντικείμενα (αφού αποφασίσουν τα ίδια τα παιδιά πόσα αντικείμενα θα έχει η κάθε ομάδα).

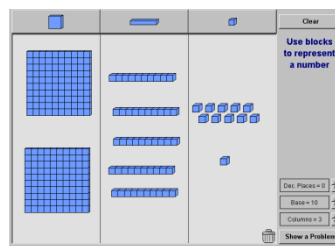
B' Τάξη: Κάνω ομάδες (ΑρΔ1)

Ο εκπαιδευτικός μοιράζει ένα φύλλο δραστηριότητας με μια απεικόνιση όπως η παρακάτω με τα κουμπιά. Ο εκπαιδευτικός ζητά από τα παιδιά να μην μετρήσουν τα κουμπιά, αλλά να «κυκλώσουν» ομάδες που περιέχουν όλες τον ίδιο αριθμό κουμπιών (όσα θέλουν). Αφού τα παιδιά κυκλώσουν τις ομάδες των κουμπιών καλούνται να εκτιμήσουν πόσα νομίζουν ότι είναι τα κουμπιά (και ρωτά «Πώς σας βοήθησαν στην εκτίμηση οι ομάδες που φτιάξατε κυκλώνοντας τα κουμπιά;»)



Εικόνα 2

Μπορεί, επίσης, να χρησιμοποιηθεί το τεχνολογικό περιβάλλον «Base Blocks» (<http://nlvm.usu.edu>).



Εικόνα 3

Το περιβάλλον προσφέρει τη δυνατότητα επιλογής αριθμού στηλών (μονάδων, δεκάδων κ.λπ.). Επίσης, παρέχει στους μαθητές τη δυνατότητα να κυκλώσουν δέκα μονάδες στη στήλη των μονάδων, να σχηματίσουν μια δεκάδα και να τη μεταφέρουν στη στήλη των δεκάδων κ.λπ. Τα δυναμικά χαρακτηριστικά του συγκεκριμένου τεχνολογικού περιβάλλοντος βοηθούν τους μαθητές να αναγνωρίσουν, να μελετήσουν και να συγκροτήσουν την έννοια της δεκάδας και της εκατοντάδας μέσα από διαφορετικές αναπαραστάσεις (κυβάρια). Ο εκπαιδευτικός αφήνει τους μαθητές να πειραματιστούν ατομικά ή ομαδικά για να σχηματίσουν αριθμούς έως το 1.000.

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας
(διερεύνηση και
γενίκευση)

Άλγεβρα

Σημασία της ενότητας: Η μαθηματική εκπαίδευση έχει στρέψει το ενδιαφέρον της από την τυπική εκμάθηση μαθηματικών εννοιών στη δυναμική προσέγγιση των τρόπων με τους οποίους δημιουργούνται και λειτουργούν τα ίδια τα Μαθηματικά. Για το λόγο αυτό επιδιώκει να αναπτύξει στους μαθητές, από τις μικρότερες ηλικίες δεξιότητες συστηματικής οργάνωσης αρχικά συγκεκριμένων και πρακτικών καταστάσεων και αργότερα πιο αφηρημένων γεωμετρικών ή αριθμητικών, προς την κατεύθυνση της αναγνώρισης κοινών ή επαναλαμβανόμενων χαρακτηριστικών. Ιδιαίτερα η μελέτη των κανονικότητων είναι εξαιρετικά σημαντική για να αρχίσουν οι μαθητές να διακρίνουν σχέσεις, να προβλέπουν εξελίξεις ή αποτελέσματα και να οδηγούνται σε γενικεύσεις.

Η έρευνα έχει καταδείξει ότι η ανάπτυξη αυτής της μορφής διαδικασιών (που βοηθούν την ανάπτυξη του αλγεβρικού συλλογισμού) είναι δυνατόν να ξεκινήσουν από τις μικρότερες ηλικίες. Τα προηγούμενα προγράμματα σπουδών δεν ανέπτυσαν με συστηματικό τρόπο στο δημοτικό σχολείο τις θεμελιώδεις για την άλγεβρα διαδικασίες ανάπτυξης κανόνων και συμβολισμών ή περιορίζονταν σε στοιχειώδεις προσεγγίσεις της στις μεγαλύτερες τάξεις του δημοτικού σχολείου ως γενικευμένη αριθμητική με την εισαγωγή της έννοιας της μεταβλητής και των εξισώσεων.

Η προσέγγιση που ακολουθήθηκε κατά τη διδασκαλία αλγεβρικών θεμάτων στο Δημοτικό (εξάσκηση στο χειρισμό συμβολικών αναπαραστάσεων με την εφαρμογή συγκεκριμένων κανόνων), είχε ως αποτέλεσμα δυσκολία των μαθητών να αναγνωρίσουν τη χρησιμότητα των θεμάτων αυτών και εντέλει να απωθούνται από την ενασχόληση με σχετικά προβλήματα. Η εισαγωγή στην αλγεβρική σκέψη περιλαμβάνει δράσεις όπως η αναγνώριση, η συμπλήρωση, η περιγραφή, η γενίκευση κανονικότητων (γεωμετρικών και αριθμητικών), η αναγνώριση των σχέσεων μεταξύ διάφορων αναπαραστάσεων (λεκτικών, υλικών, εικονικών, συμβολικών) και η μετάβαση από τη μία παράσταση στην άλλη.

Η εισαγωγή των μαθητών στις αλγεβρικές έννοιες και δομές, ειδικά στις μικρές τάξεις, είναι αναγκαίο να γίνεται με δραστηριότητες που αναδεικνύουν τις αλγεβρικές έννοιες (κανονικότητα, συνάρτηση, ισότητα, ανισότητα) μέσα από τη διερεύνηση καταστάσεων της πραγματικής ζωής (π.χ. ένα παιδί έχει δύο πόδια, δύο παιδιά έχουν τέσσερα πόδια κ.λπ. ώστε να φτάσουν σταδιακά στη γενίκευση σύμφωνα με την οποία ο αριθμός των ποδιών στην τάξη εξαρτάται από τον αριθμό των παιδιών). Ακόμη, απαραίτητο είναι να δίνεται έμφαση σε δραστηριότητες που καλούν τα παιδιά να *προβλέπουν* τη συνέχεια μιας κανονικότητας και να την *περιγράφουν*.

Προηγούμενη κι επόμενη γνώση: Η συστηματική διερεύνηση κανονικότητων και σχέσεων έχει ξεκινήσει από την τάξη του Νηπιαγωγείου με την αντιγραφή και την επέκταση μοτίβων σε διάφορα πλαίσια. Οι μαθητές προχωρούν στην Α΄ τάξη σε μελέτη επαναλαμβανόμενων κανονικότητων που αφορούν σχήματα και αριθμούς και στη Β΄ τάξη σε μεταβαλλόμενες κανονικότητες (αυξανόμενες ή μειούμενες). Σε

μεγαλύτερες τάξεις θα εισαχθούν οι αριθμητικοί κανόνες που προσδιορίζουν τις ιδιότητες των κανονικοτήτων.

Οι συναρτήσεις θα καθυστερήσουν αρκετά μέχρι την εισαγωγή των μαθητών σε έννοιες όπως η μεταβλητή, οι αλγεβρικές παραστάσεις, οι ιδιότητες και η προτεραιότητα των πράξεων. Σε μεγαλύτερες τάξεις η άλγεβρα θα στηρίξει τη μοντελοποίηση των προβλημάτων που θα συναντήσουν οι μαθητές και σε άλλες επιστημονικές περιοχές. Η συστηματική διδασκαλία της άλγεβρας ξεκινά συνήθως με τη μελέτη απλών αλγεβρικών παραστάσεων, ακολούθως επικεντρώνεται στους μετασχηματισμούς όλο και συνθετότερων αλγεβρικών παραστάσεων, στη συνέχεια (στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση) εξισώσεων και καταλήγει στη μελέτη απλών, αρχικά, συναρτήσεων και πιο πολύπλοκων στη συνέχεια.

Δυσκολίες των μαθητών: Αρκετές έρευνες έχουν επικεντρωθεί στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην άλγεβρα. Τα ευρήματα, συχνά, αποδίδουν τις δυσκολίες στη βεβιασμένη και εκτεταμένη χρήση αλγεβρικών συμβόλων που οδηγεί πολλούς μαθητές να ταυτίζουν την άλγεβρα με σύμβολα και συμβολικούς χειρισμούς.

Όπως τονίζεται, είναι σημαντικό να δοθεί χρόνος στα παιδιά από τις πρώτες κιόλας τάξεις της υποχρεωτικής εκπαίδευσης να εξοικειωθούν με τις θεμελιώδεις διαδικασίες της αναγνώρισης κανονικοτήτων και σχέσεων, οι οποίες θα αποτελέσουν το κατάλληλο υπόβαθρο για τη συστηματική, στη συνέχεια, μελέτη των αλγεβρικών ιδεών.

Ειδικές καταγεγραμμένες δυσκολίες, οι οποίες αφορούν τους μαθητές των πρώτων τάξεων του δημοτικού εστιάζονται στην αντίληψη των συμβόλων της ισότητας και της ανισότητας, καθώς και στην επίλυση προβλημάτων του τύπου «βρες τον αριθμό που λείπει» (για παράδειγμα, ένα συχνό λάθος που έχει καταγραφεί σ' αυτού του τύπου τις καταστάσεις είναι $3 + \square = 7$, κάτι που υποδεικνύει την εστίαση στο σύμβολο + και τη μη κατανόηση της έννοιας της ισότητας).

Προτάσεις για διδακτική διαχείριση: Είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός να δώσει στα παιδιά πολλές ευκαιρίες να χειριστούν υλικό ώστε να «κατασκευάσουν» τις αλγεβρικές ιδέες, αλλά και να εμπλακούν σε πραγματικές καταστάσεις επίλυσης προβλημάτων και ανάπτυξης στρατηγικών.

Η μελέτη των κανονικοτήτων (όπως και η μελέτη των συναρτήσεων και γενικά των αλγεβρικών ιδεών) περιλαμβάνει την εμπλοκή των μαθητών σε καταστάσεις αναζήτησης γεωμετρικών και αριθμητικών κανονικοτήτων και σχέσεων στο περιβάλλον και στην καθημερινή ζωή τους. Αυτές τις κανονικότητες καλούνται να τις αντιγράψουν, να τις περιγράψουν (στην αρχή προφορικά και, κατόπιν, συμβολικά) και να τις συνεχίσουν.

Σε επόμενο στάδιο τα παιδιά καλούνται να κατασκευάσουν δικές τους επαναλαμβανόμενες κανονικότητες με χρήση χειραπτικού και αναπαραστατικού υλικού. Όταν τα παιδιά κατασκευάζουν κανονικότητες με «φυσικά» υλικά (σχήματα, κυβάρια, χάντρες, κουμπιά, σφηνοτουβλάκια), έχουν τη δυνατότητα να δοκιμάσουν και να κάνουν αλλαγές με τη μορφή παιχνιδιού, δοκιμάζοντας διαφορετικές περιπτώσεις που, στη συνέχεια, μπορούν να σχεδιάσουν.

Χρειάζεται, επίσης, να κληθούν οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν αυτή τη μελέτη για να οδηγηθούν σε προβλέψεις και γενικεύσεις. Ένα σημαντικό στοιχείο που δεν πρέπει να παραλείπεται από τις δραστηριότητες είναι η διατύπωση με λόγια και η επεξήγηση των παρατηρήσεων από τους μαθητές σχετικά με τις κανονικότητες και τις σχέσεις των στοιχείων.

Ενδεικτικές δραστηριότητες:

Α΄ Τάξη: Ιδέες για επαναλαμβανόμενα μοτίβα (ΑρΔ1)

1. Δημιουργία ενός ρυθμού στην τάξη χρησιμοποιώντας κάποια απλά (ή και αυτοσχέδια) μουσικά όργανα.

Διερεύνηση
‘πραγματικών’
καταστάσεων

Κάθε παιδί που κρατά ένα μουσικό όργανο και προκαλεί τον αντίστοιχο ήχο με κάποια (προκαθορισμένη ή αυθόρμητη) σειρά. Όταν δημιουργηθεί ο επιθυμητός ρυθμός, τα παιδιά καλούνται να καταγράψουν με κάποιον τρόπο το «τραγούδι» που έφτιαξαν ώστε να μπορούν να το αναπαράγουν την άλλη μέρα ή για να το δώσουν και σε μια άλλη τάξη. Τα παιδιά είτε θα καταγράψουν το επαναλαμβανόμενο μοτίβο ζωγραφίζοντας τα όργανα με τη σειρά ή θα κολλήσουν σε ένα χαρτί εικονίδια με το κάθε όργανο (ο εκπαιδευτικός έχει προβλέψει να φέρει τα εικονίδια).

Διεργασία
δημιουργίας
συνδέσεων

2. Δημιουργία ενός επαναλαμβανόμενου μοτίβου με υλικά (χάντρες, κουμπιά, γεωμετρικά σχήματα)

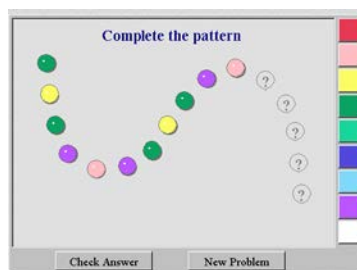
Τα παιδιά μπορούν να αντιγράψουν και να συνεχίσουν κάποιο από τα προτεινόμενα επαναλαμβανόμενα μοτίβα του εκπαιδευτικού. Για παράδειγμα:



Διεργασία
επικοινωνίας
(δημιουργία
αναπαραστάσεων)

Σε δεύτερη φάση, κάθε ομάδα μπορεί να δημιουργήσει ένα δικό της μοτίβο και να εξηγήσει (χωρίς να το δείξει) στις άλλες ομάδες από ποια στοιχεία αποτελείται το μοτίβο αυτό, ώστε κάθε ομάδα να προσπαθήσει να αντιγράψει και τα μοτίβα των άλλων ομάδων.

Το τεχνολογικό περιβάλλον «Color Patterns» (διαδικτυακός τόπος <http://nlvm.usu.edu>) προσφέρει ιδέες για επαναλαμβανόμενα μοτίβα διαφόρων χρωμάτων χαντρών. Οι μαθητές αναγνωρίζουν, περιγράφουν και επεκτείνουν το μοτίβο που κάθε φορά εμφανίζεται.



Εικόνα 3

Διεργασία
επικοινωνίας
(μέσω φυσικής
γλώσσας)

Ο εκπαιδευτικός αφήνει τους μαθητές να ασχοληθούν ατομικά

ή ομαδικά με τις δραστηριότητες του τεχνολογικού περιβάλλοντος, να αναγνωρίσουν, να περιγράψουν, να επεκτείνουν το μοτίβο και να ελέγξουν μόνοι τους την ορθότητα της απάντησής τους.

Διερεύνηση και γενίκευση

Α΄ Τάξη: Ιδέες για κατασκευή, καταγραφή και περιγραφή δεδομένων συμμεταβολής (ΑρΔ2)

1. Οι δραστηριότητες αυτές πρέπει να πραγματοποιούνται αφού έχουν προηγηθεί δραστηριότητες αναγνώρισης, αντιγραφής και δημιουργίας επαναλαμβανόμενων κανονικοτήτων (μοτίβων).

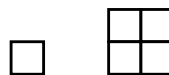
Ο εκπαιδευτικός θέτει την ερώτηση «Για να γίνει ένα κομπολόι χρειάζονται 2 κόκκινες χάντρες, και 4 πράσινες. Για να γίνουν 2 κομπολόγια;» Για να γίνει πιο εύκολη η δραστηριότητα, κάθε ομάδα μπορεί πρώτα να φτιάξει ένα τέτοιο κομπολόι και να το έχει μπροστά της. Οπότε, ο εκπαιδευτικός μπορεί να ρωτήσει στη συνέχεια «Πόσες χάντρες θα χρειαστούν για να γίνουν 3 κομπολόγια; 4 κομπολόγια;». Κάθε ομάδα καταγράφει τις απόψεις της και τις παρουσιάζει στην ολομέλεια.

Επίλυση προβλήματος

2. Ο εκπαιδευτικός μοιράζει σε κάθε ομάδα τον ίδιο αριθμό από κυβάκια (για παράδειγμα 20 κυβάκια) και προτείνει στα παιδιά να φτιάξουν πύργους χρησιμοποιώντας όλα τα κυβάκια. Ανάλογα με τους πύργους που έχουν φτιάξει οι ομάδες, κάθε ομάδα πλησιάζει και ζητά οι πύργοι που έφτιαξαν να είναι όλοι ίσοι. Κατόπιν, κατευθύνει τη συζήτηση στις ερωτήσεις «Αν χρησιμοποιήσουμε τα κυβάκια για να φτιάξουμε ένα πύργο, πόσα πατώματα θα έχει αυτός;» «Αν τα χρησιμοποιήσουμε για να φτιάξουμε 2 πύργους, 3 πύργους»

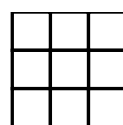
Β΄ Τάξη: Ιδέες για κατασκευή αναπτυσσόμενου μοτίβου, αναζήτηση κανόνα, γενίκευση (ΑρΔ1Β)

1. Ο εκπαιδευτικός φέρνει στην τάξη ένα κουτί με τετραγωνάκια, πλαστικά ή χάρτινα (καλύτερα να είναι μεγαλύτερα από 2 εκ. x 2 εκ., για να μπορούν να τα χειριστούν τα παιδιά εύκολα). Μοιράζει σε κάθε ομάδα 4 τετραγωνάκια. Ζητά από τα παιδιά να τα συνδυάσουν έτσι ώστε να δημιουργηθεί ένα μεγάλο τετράγωνο (Σχήμα 1).



Σχήμα 1

Ο εκπαιδευτικός ζητά από τα παιδιά να σκεφτούν στην ομάδα τους και να πάρουν από το κουτί όσα τετραγωνάκια νομίζουν ότι χρειάζονται για να φτιάξουν ένα άλλο τετράγωνο που να είναι «λίγο» μεγαλύτερο από το προηγούμενο (Σχήμα 2).



Σχήμα 2

Επίλυση προβλήματος

Διεργασία επικοινωνίας (μέσω φυσικής γλώσσας)

Τους καλεί να συζητήσουν με βάση τη διαπίστωση ότι για να «γεμίσουν» το πρώτο τετράγωνο χρειάζονται 4 μικρά τετραγωνάκια. Για να γεμίσουν το δεύτερο τετράγωνο χρειάζονται 9 τετραγωνάκια. Αν προσθέσουν στην άκρη ακόμα ένα τετραγωνάκι, πόσα χρειάζονται ακόμα για να συμπληρώσουν το τετράγωνο;

2. Ο εκπαιδευτικός καλεί τα παιδιά να φτιάξουν μια λωρίδα με κάποιο επαναλαμβανόμενο μοτίβο, χρησιμοποιώντας τετραγωνάκια σε δύο χρώματα. Όταν το φτιάξουν, ανάλογα με το πού έχει σταματήσει κάθε ομάδα, τους ζητά να σκεφτούν τη συνέχεια του μοτίβου, χωρίς να ζητά τον κανόνα, τους ρωτά για παράδειγμα «Μπορείτε να βρείτε ποιο χρώμα θα είναι το 20^ο τετραγωνάκι;»

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας
(διερεύνηση και
γενίκευση)

Χώρος και Γεωμετρία

Χώρος

Σημασία της ενότητας: Τα προηγούμενα προγράμματα σπουδών δεν ανέπτυξαν με συστηματικό τρόπο τις έννοιες χώρου ή περιορίζονταν σε στοιχειώδεις προσεγγίσεις (πάνω- κάτω, μέσα- έξω κ.λπ.). Η έρευνα, όμως, έχει δείξει ότι η ανάπτυξη του *χωρικού συλλογισμού*, μιας δηλαδή αντίληψης των σχέσεων και δημιουργίας νοερών εικόνων για το χώρο, εκτός από το να είναι απαραίτητη για τη λειτουργία του ατόμου μέσα στο χώρο αποτελεί σημαντική πηγή ανάπτυξης εννοιών, διεργασιών και ικανοτήτων.

Ο χωρικός συλλογισμός στηρίζει πολλές μαθηματικές έννοιες όπως τις γεωμετρικές, τις γραφικές αναπαραστάσεις, τα διαγράμματα, πίνακες, χάρτες κι άλλες μορφές γραφικής μοντελοποίησης. Παράλληλα, όμως, η χωρική αντίληψη είναι απαραίτητη για την κατανόηση σχηματισμών, για τη σχηματοποίηση αριθμητικών σχέσεων (αριθμητική γραμμή), για την κατανόηση της θεσιακής αξίας και των πράξεων, καθώς και για τη σχηματοποίηση στη λύση προβλημάτων. Η δημιουργία νοερών εικόνων στην αντίληψη δισδιάστατων και τρισδιάστατων καταστάσεων, δηλαδή η 'οπτικοποίηση', η χωρική μνήμη και η αντίληψη των οπτικών γωνιών αποδεικνύεται ότι αποκτούν μεγάλη σημασία στη μαθηματική ανάπτυξη.

Προηγούμενη κι επόμενη γνώση: Οι μαθητές ξεκινούν με εμπειρικές ιδέες για το χώρο και τις ιδιότητές του μέσα από τις καθημερινές τους λειτουργίες σε αυτόν, τις οποίες καλούνται να συστηματοποιήσουν. Η επιδιωκόμενη προσέγγιση είναι αρκετά πιο σύνθετη από τις παλαιότερες προσεγγίσεις και στοχεύει να δώσει εμπειρίες που βοηθούν τους μαθητές να συστηματοποιήσουν τον προσανατολισμό στο χώρο (τοποθετήσεις, διευθύνσεις και ορόσημα) και να εισαχθούν στους χάρτες, να προσεγγίσουν χωρικές ιδιότητες μέσα από επικαλύψεις και να ασκηθούν σε τετραγωνισμένα περιβάλλοντα (πλακόστρωτο, σκακιέρες, τετραγωνισμένο χαρτί) που δομούν το χώρο και εισάγουν σε πιο συστηματικές οργανώσεις, όπως είναι το σύστημα συντεταγμένων. Τα επόμενα χρόνια οι μαθητές, βασισμένοι σε αυτές τις πρώτες εμπειρίες, θα δουλέψουν πιο συστηματικά με τους χάρτες και τις ιδιότητές τους, καθώς και με τα συστήματα συντεταγμένων που θα τα προσεγγίσουν βαθμιαία.

Δυσκολίες των μαθητών: Οι έρευνες δείχνουν ότι οι μαθητές αν και έχουν σημαντικές χωρικές δεξιότητες (γνωρίζουν βασικές έννοιες, μπορούν να προσανατολιστούν, αναπτύσσουν ορόσημα και συστήματα αναφοράς), δεν εμφανίζουν την ίδια άνεση, καθώς δοκιμάζουν να συστηματοποιήσουν αυτές τις λειτουργίες.

Χρειάζονται προσεκτικές εμπειρίες και δραστηριότητες για να δημιουργήσουν με συστηματικό τρόπο συστήματα αναφοράς, να αναπτύξουν χωρική μνήμη, να κατανοήσουν τη δομή των τετραγωνισμένων περιβαλλόντων και να εξοικειωθούν με την αντίληψη και τη χρήση απλών χαρτών.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι οι δράσεις των μαθητών παρουσιάζουν διαφορετικό επίπεδο δυσκολιών στους χειρισμούς ανάλογα με το μέγεθος του χώρου (από το μικρο, στο μεσο και μακρο- χώρο), όπως και το πέρασμα από το ένα στο άλλο. Κατάλληλες δράσεις θα τους βοηθήσουν να αναπτυχθούν και στα τρία πλαίσια. Για παράδειγμα, οι μαθητές μελετούν τοποθετήσεις στο πλακόστρωτο (μεσο- χώρος), όπως και στη σκακιέρα ή στο τετραγωνισμένο χαρτί (μικρο- χώρος) ή δοκιμάζουν να αποτυπώσουν μια κατάσταση από το πλακόστρωτο της αυλής σε ένα τετραγωνισμένο σχέδιο. Η έλλειψη άσκησης σε αυτή την αντιστοίχιση, από τις μικρές ηλικίες, δημιουργεί μεταγενέστερα δυσκολίες στη μελέτη χαρτών. Γενικότερα, η έλλειψη ανάπτυξης εμπειριών και δράσεων στο χώρο εμφανίζεται ακόμα και στην ενήλικη ζωή των ατόμων μέσω της αδυναμίας κατανόησης χωρικών σχέσεων, προσανατολισμού και δυνατότητας οπτικοποίησης.

Προτάσεις για διδακτική διαχείριση: Όπως αναφέρθηκε ήδη, στην ενότητα αυτή επιδιώκεται η συστηματοποίηση χωρικών εμπειριών. Ο εκπαιδευτικός αποφεύγει απλοϊκές προσεγγίσεις εννοιών χώρου και πραγματοποιεί βιωματικές δραστηριότητες που οδηγούν τους μαθητές να ορίσουν μόνοι τους συστήματα αναφοράς για τον προσανατολισμό στο χώρο, να είναι σε θέση να ανακαλούν και να περιγράφουν χωρικές διευθετήσεις ή διαδρομές, τόσο σε μη οργανωμένα όσο και σε οργανωμένα περιβάλλοντα (με κάποια μορφή οργάνωσης, δόμησης ή τετραγωνισμένο πλαίσιο), και τελικά να δοκιμάζουν να οργανώσουν το χώρο. Ο εκπαιδευτικός αφήνει τους μαθητές να αναπτύξουν και να παρουσιάσουν τρόπους εντοπισμού π.χ. 'κρυμμένων αντικειμένων' ή συγκεκριμένων διαδρομών ή 'θέσεων', να τις περιγράφουν ή ακόμα και να τις αποτυπώνουν σε ένα σχέδιο.

Ενδεικτικές δραστηριότητες:

A΄ Τάξη: «Ψάχνω να βρω» (ΠΜΑ: ΓΔ1)

Η δραστηριότητα επιδιώκει να οδηγήσει τους μαθητές να αναζητήσουν και να περιγράψουν θέσεις αντικειμένων στο χώρο και με τον τρόπο αυτό να προσεγγίσουν πιο συστηματικά ιδιότητές του και σχέσεις όπως ορόσημα, διευθύνσεις, τοποθετήσεις.

Η παιγνιώδης μορφή της δραστηριότητας ενθαρρύνει την αναζήτηση και δημιουργεί κίνητρα συμμετοχής.

Η περιγραφή και η αναζήτηση της θέσης οδηγεί τους μαθητές να 'βγουν' έξω από τη δική τους θεώρηση και να κατανοήσουν τον τρόπο με τον οποίο οι άλλοι αντιλαμβάνονται το χώρο. Η προσέγγιση αυτή στηρίζει μεταγενέστερα τη συστηματοποίηση των εμπειριών προς την κατεύθυνση της ανάπτυξης πιο συστηματικών μορφών, όπως είναι τα συστήματα συντεταγμένων και η αντίληψη τρισδιάστατων καταστάσεων.

Ο εκπαιδευτικός βοηθάει τα παιδιά να χωριστούν σε ομάδες και να παίξουν με τη σειρά κρύβοντας ένα αντικείμενο, καθώς και να τηρούν τους κανόνες περιγραφής. Μετά το τέλος του παιχνιδιού ενθαρρύνει την ανάπτυξη διαλόγου για τις

Διεργασία
επικοινωνίας
(μέσω φυσικής
γλώσσας)

δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, καθώς και την εξαγωγή συμπερασμάτων για βέλτιστους τρόπους περιγραφής.

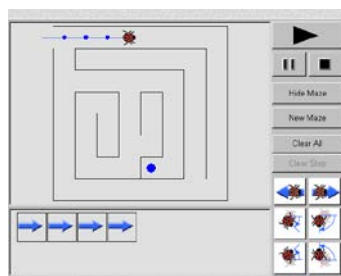
Στην εύρεση θέσεων και διαδρομών η σύγχρονη τεχνολογία μπορεί να αλλάξει τα χαρακτηριστικά προσέγγισης (π.χ. GPS).

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας
(διερεύνηση και
γενίκευση)

Α΄ Τάξη: Τεχνολογικό περιβάλλον «Ladybug Mazes» (ΠΜΑ: ΓΔ2)

Το τεχνολογικό περιβάλλον «Ladybug Mazes» βρίσκεται στο διαδικτυακό τόπο <http://nlvm.usu.edu>.

Το περιβάλλον προσφέρει δύο πλεονεκτήματα: αρχικά, βοηθάει το παιδί να αναλύσει την κίνηση σε 'μπρος-πίσω' και 'δεξιά-αριστερά' με σχηματικό τρόπο και, στη συνέχεια, να 'σχεδιάσει' το σύνολο των κινήσεων που χρειάζεται να ακολουθήσει χωρίς να περιορίζεται στο 'βλέπω πού πάει και ανάλογα διορθώνω'. Οι διαδικασίες αυτή βοηθάει στην οργάνωση των χωρικών ιδιοτήτων (μεγέθη, προσανατολισμοί).



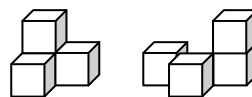
Εικόνα 1

Ο εκπαιδευτικός αφήνει τους μαθητές να ασχοληθούν ατομικά ή ομαδικά για να κατευθύνουν την πασχαλίτσα στο σημείο – στόχο και να καταλήξουν σε αποτελεσματικούς τρόπους.

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας
(διερεύνηση και
γενίκευση)

Α΄ Τάξη: «Περιγράψω ό,τι βλέπω» (ΠΜΑ: ΓΔ3)

Η δραστηριότητα οδηγεί τους μαθητές να περιγράψουν με χωρικές σχέσεις την κατασκευή που έχουν μπροστά τους, ώστε οι υπόλοιποι μαθητές να την ανακατασκευάσουν χωρίς να τη βλέπουν. Οι δράσεις αυτού του τύπου ενθαρρύνουν τη λεκτική διατύπωση καταστάσεων και την επικοινωνία.



Σχήμα 1

Ο εκπαιδευτικός αφήνει τους μαθητές να αναπτύξουν κανόνες επικοινωνίας και τους ενθαρρύνει να ελέγξουν την ορθότητα της επικοινωνίας συγκρίνοντας το αποτέλεσμα.

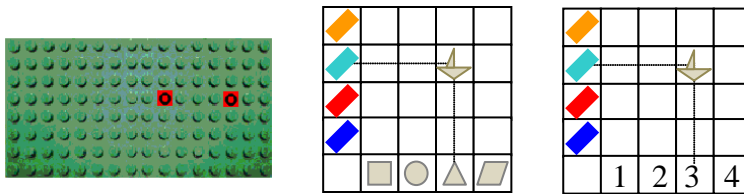
Διεργασία
επικοινωνίας
(μέσω φυσικής
γλώσσας)

Α΄ Τάξη: «Ναυμαχία» (ΠΜΑ: ΓΔ4)

Με τη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές εξοικειώνονται με τα χαρακτηριστικά του τετραγωνισμένου περιβάλλοντος. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ξεκινήσει την προσέγγιση ζητώντας από τους μαθητές να περιγράψουν θέσεις σε πλάκες ή σε τετραγωνισμένο χαρτί, καθώς και να θέσει ως πρόβλημα την αναζήτηση συμβόλων για να μπορεί να περιγραφεί αυτή η

Διεργασία
επικοινωνίας
(με σύμβολα)

θέση (για παράδειγμα, χρώματα και σχήματα ή χρώματα και αριθμοί ή τέλος αριθμοί και γράμματα).



Εικόνα 4: Ναυμαχία σε πλάκα και τετραγωνισμένο χαρτί

Β΄ Τάξη: (ΠΜΑ: ΓΔ1)

Ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει στους μαθητές το χάρτη της γειτονιάς τους ή της γειτονιάς του σχολείου. Ενθαρρύνει τους μαθητές να εντοπίσουν το σπίτι τους ή άλλο χαρακτηριστικό σημείο και τη διαδρομή μέχρι εκεί και προτείνει δραστηριότητες όπου οι μαθητές δίνουν οδηγίες προσανατολισμού ή παρουσιάζουν μια θέση.

Διεργασία
επικοινωνίας
(μέσω φυσικής
γλώσσας)

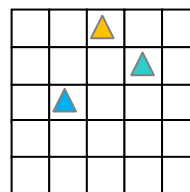
Β΄ Τάξη: (ΠΜΑ: ΓΔ2)

Ο εκπαιδευτικός προτείνει το «Γεωπίνακα» (και ψηφιακό) ή «Τετραγωνικό πλέγμα (γραμμές)» και οι μαθητές καλύπτουν την επιφάνεια με τετράγωνα ή άλλα σχήματα για να εντοπίσουν σχέσεις ή μετρικές ιδιότητες. Ενδιαφέρουσα επέκταση της δράσης είναι η αλλαγή της πλευράς (διπλάσια, μισή, τριπλάσια) και ο υπολογισμός των τετραγώνων που επικαλύπτουν με την αναζήτηση της σχετικής σχέσης (διπλάσια πλευρά, τετραπλάσιος αριθμός τετραγώνων).

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας
(διερεύνηση και
γενίκευση)

Β΄ Τάξη: (ΠΜΑ: ΓΔ3)

Στο προτεινόμενο παιχνίδι «ναυμαχίας» το ενδιαφέρον είναι να ενθαρρύνει ο εκπαιδευτικός την αναζήτηση τρόπων κωδικοποίησης της θέσης, με γράμματα ή αριθμούς. Π.χ. α, β, γ οριζόντια και 1, 2, 3, .. κατακόρυφα οπότε μία θέση περιγράφεται ως β, 3. Η προσέγγιση αυτή μπορεί να οδηγήσει στη γενίκευση με δύο αριθμούς.



Εικόνα 5

Διεργασία
επικοινωνίας
(με σύμβολα)

Γεωμετρία

Σημασία της ενότητας: Η ανάπτυξη γεωμετρικού συλλογισμού έχει μεγάλη σημασία για την αντίληψη του χώρου που μας περιβάλλει αλλά και για την κατανόηση της μορφής οργάνωσης που προτείνει το γεωμετρικό μοντέλο (όπως είναι τα σχήματα και οι ιδιότητές τους, οι σχηματισμοί και γενικότερα οι γεωμετρικές σχέσεις). Η προσέγγιση αυτή απαιτεί να ξεπεράσουν οι μαθητές τη γενικότερη ολιστική αντίληψη των μορφών που έχουν και να συστηματοποιήσουν μια αναλυτική κατανόηση των γεωμετρικών σχημάτων με βάση τις ιδιότητες και τις σχέσεις τους. Τα γεωμετρικά σχήματα αποτελούν αφηρημένες οντότητες που προσεγγίζουν βαθμιαία οι μαθητές από τις μικρότερες ηλικίες, κάνοντας συνδέσεις ανάμεσα σε αυτό που βλέπουν με τα στοιχεία και τις ιδιότητες που το προσδιορίζουν.

Μια τέτοια προσέγγιση θα τους επιτρέψει να οικοδομήσουν σταδιακά μια γενικότερη αναλυτικο-συνθετική σκέψη που μπορεί να υποστηριχθεί από την οπτική αμεσότητα της Γεωμετρίας και να επεκταθεί και σε άλλες ενότητες των μαθηματικών.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, το ενδιαφέρον της διδασκαλίας της Γεωμετρίας ξεπερνά τις παλαιότερες μορφές που πρότειναν απλή παρατήρηση και ονομασία των σχημάτων και στοχεύει στην αντίληψη των σχημάτων και σχηματισμών, με τρόπο ώστε τα παιδιά να μπορούν να αναλύουν, να συνθέτουν και να μετασχηματίζουν τα γεωμετρικά αντικείμενα για να τα χρησιμοποιήσουν σε διάφορες εφαρμογές.

Προηγούμενη κι επόμενη γνώση: Οι μαθητές μαθαίνουν να αναγνωρίζουν τα βασικά γεωμετρικά σχήματα (επίπεδα και στερεά) από τις μικρές ηλικίες. Η αναγνώριση αυτή αφορά ένα πρώτο στάδιο (από τα πέντε που σύμφωνα με τους Van Hiele (1986) ακολουθεί η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης) και σχετίζεται με μία ολιστική αντίληψη χωρίς διαχωρισμό στοιχείων και ιδιοτήτων. Στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού επιδιώκεται να αναπτυχθεί μια αντίληψη των μερών των σχημάτων και των ιδιοτήτων που οι μαθητές θα είναι, επίσης, σε θέση να περιγράψουν.

Στη συνέχεια της ανάπτυξής τους οι μαθητές θα ασκηθούν στο να κατηγοριοποιούν τα σχήματα με βάση τις ιδιότητες και τις μεταξύ τους σχέσεις, να εξαγουν συμπεράσματα για τις ιδιότητες και τις σχέσεις, για να οδηγηθούν στο τέλος σε ένα μελλοντικό πιο θεωρητικοποιημένο επίπεδο.

Δυσκολίες των μαθητών: Η έρευνα δείχνει ότι οι μαθητές, αν και δεν δυσκολεύονται στην (ολιστική) αναγνώριση χαρακτηριστικών σχημάτων όπως τετράγωνα, τρίγωνα κ.λπ., παραμένουν, χωρίς την κατάλληλη διδακτική προσέγγιση, στο επίπεδο αυτό ανεξάρτητα από την ηλικία που βρίσκονται. Οι περισσότεροι αντιλαμβάνονται τα σχήματα ολιστικά και δεν καταφέρνουν να περιγράψουν τα στοιχεία και τις ιδιότητές τους ή τις προσεγγίζουν με γενικό τρόπο.

Οι έρευνες έδειξαν, επίσης, ότι η αρχική ευκολία αναγνώρισης μειώνεται όταν τα σχήματα δεν είναι οικεία ή δεν έχουν μια συγκεκριμένη μορφή, προσανατολισμό ή μέγεθος, γενικότερα δεν ανταποκρίνονται στις μη στερεοτυπικές μορφές, όπως τα σχήματα που ακολουθούν.



Σχήμα 1

Τα μικρότερα παιδιά δεν αντιλαμβάνονται τα γεωμετρικά σχήματα στα αντικείμενα που βλέπουν ή δεν αποδίδουν σε αυτά γεωμετρικά χαρακτηριστικά. Αντίθετα, τους δίνουν ένα νόημα με βάση τη χρήση ή το ρόλο τους, για παράδειγμα, μια μπάλα είναι μπάλα κι όχι σφαίρα. Έτσι, τα συγκεκριμένα και πρακτικά αντικείμενα δεν μετασχηματίζονται εύκολα σε γεωμετρικές έννοιες, γεγονός με το οποίο θα χρειαστεί να είναι πολύ προσεκτικοί οι εκπαιδευτικοί.

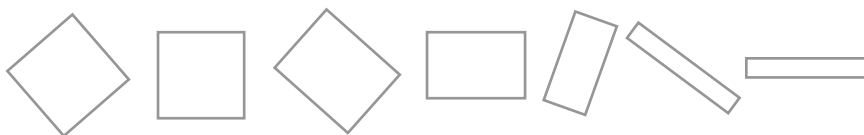
Επιπλέον, τα ιδιαίτερα μέρη των σχημάτων όπως οι πλευρές, οι κορυφές ή οι γωνίες γίνονται αντιληπτές με πρακτικό τρόπο, για παράδειγμα, οι μαθητές θεωρούν τη γωνία ως «μύτη» ή μέρος συνάντησης ή σπαστή γραμμή ή κίνηση, δηλαδή της δίνουν αρκετά νοήματα που κατά περίπτωση είναι διαφορετικά από τη γεωμετρική τους διάσταση. Τα γεωμετρικά στοιχεία επηρεάζονται σημαντικά από τη φυσική τους υπόσταση στις πρακτικές εμπειρίες και δημιουργούν λανθασμένες αντιλήψεις που ξεπερνιούνται δύσκολα. Τα ευρήματα αυτά ενισχύουν την άποψη ότι για την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης σε επίπεδο μερών και ιδιοτήτων των σχημάτων είναι σημαντικό οι μαθητές να έχουν τις κατάλληλες δράσεις και, κατά συνέπεια, προσανατολισμένες εμπειρίες.

Ομοίως, η έρευνα δείχνει ότι αν και οι μικροί μαθητές αναγνωρίζουν χωρίς δυσκολία τις γενικές κατηγορίες σχημάτων, δεν διαχωρίζουν με την ίδια ευκολία τα σχήματα της ίδιας κατηγορίας, κυρίως τρίγωνα και τετράπλευρα, και ιδιαίτερα αν αυτά δεν βρίσκονται σε οριζόντιες και κατακόρυφες διευθύνσεις. Επίσης, σε επίπεδο κατασκευών, αν και οι μαθητές είναι σε θέση να παράγουν πολλά σχήματα με διάφορα υλικά, δεν βλέπουν τα αντικείμενα ως γεωμετρικά, δηλαδή αναγνωρίζουν σε αυτά τη γενική μορφή κι όχι δομικά τους χαρακτηριστικά. Με άλλα λόγια, τα παιδιά πραγματοποιούν τις κατασκευές κιναισθητικά (δηλαδή, με τη δράση των χεριών) και τις περιγράφουν ως δράσεις, αλλά δεν οδηγούνται αυτονόητα σε γεωμετρικές ιδιότητες.

Οι συνθέσεις και οι αναλύσεις σχημάτων αναδεικνύονται ιδιαίτερα σημαντικές στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης, αλλά οι δράσεις αυτές δεν είναι, επίσης, αυτονόητες. Οι ερευνητές κατηγοριοποιούν τα επίπεδα ικανοτήτων των παιδιών στην ανάλυση και σύνθεση σχημάτων σε πέντε κατηγορίες, από τις αρχικές όπου οι μαθητές απλά συνδυάζουν χωρίς συστηματικό τρόπο τα σχήματα, σε επικαλύψεις περιγραμμάτων με δοκιμή και πλάνη, μέχρι τις τελικές όπου πραγματοποιούν σχηματισμούς σχημάτων, εικόνων ή μορφών με τη χρήση ιδιοτήτων και νοερών μετασχηματισμών.

Η άσκηση των παιδιών στους μετασχηματισμούς των σχημάτων, κυρίως στη μετακίνηση, τη στροφή και τη συμμετρία, κρίνεται απαραίτητη για την εννοιολογική ολοκλήρωση της γεωμετρικής τους σκέψης. Η παραδοσιακή διδασκαλία με τα σχήματα να παρουσιάζονται ξεχωριστά αλλά και να μην εντοπίζονται οι μεταξύ τους σχέσεις (που ακολουθεί τα παιδιά και σε μεγαλύτερες ηλικίες) εμποδίζει την αντίληψη των μετασχηματισμών και των αλλαγών που μπορεί να υποστεί ένα

σχήμα παραμένοντας στην ίδια κατηγορία, όπως για παράδειγμα το ακόλουθο ορθογώνιο:



Σχήμα 2

Ερευνητικά αποτελέσματα δείχνουν ότι οι μαθητές παρακολουθούν κάποιες στροφές ή μετακινήσεις και μπορούν να βελτιώσουν την οπτική τους ευλυγισία με τα κατάλληλα έργα.

Αντίστοιχα, οι μαθητές αναγνωρίζουν τη συμμετρία από τη μικρότερη ηλικία και διαφοροποιούνται στις επιδόσεις με βάση τη συνθετότητα του σχήματος και τη τοποθέτηση του άξονα (οριζόντιο, κατακόρυφο, πλάγιο), αλλά διδακτικές παρεμβάσεις για την ανάπτυξη της έννοιας της συμμετρίας δίνουν θετικά αποτελέσματα.

Η δυσκολία αντίληψης και σύνθεσης των οπτικών γωνιών και των όψεων των αντικειμένων και των καταστάσεων, ως αποτέλεσμα έλλειψης άσκησης και εμπειριών, ακολουθεί το άτομο και στην ενήλικη ζωή του, όπως δείχνουν έρευνες με περιστροφές αντικειμένων ή αντίληψη της παράστασης τρισδιάστατων αντικειμένων σε μεγαλύτερες ηλικίες. Συνήθως οι αναπαραστάσεις τόσο χωρικών και γεωμετρικών όσο και άλλων καταστάσεων απεικονίζουν μέρος της πραγματικότητας ή της ιδέας που περιγράφουν οι μαθητές, αλλά και οι ενήλικες περιορίζονται σε ό,τι θεωρούν ότι 'βλέπουν' και σπάνια προχωρούν σε μια πιο δυναμική αντίληψη, για το λόγο αυτό οι σχετικές δραστηριότητες που λείπουν συστηματικά από τα προηγούμενα προγράμματα κρίνονται απαραίτητες.

Προτάσεις για διδακτική διαχείριση: Σύμφωνα με τα ευρήματα που αναφέρθηκαν, οι εκπαιδευτικοί καλούνται να προτείνουν δραστηριότητες που εμπλέκουν μια ποικιλία σχημάτων σε διαφορετικές θέσεις, μεγέθη και προσανατολισμούς και βοηθούν τους μαθητές να αναζητήσουν χαρακτηριστικά ξεπερνώντας τα ολιστικά πρωτοτυπικά σχήματα. Ομοίως, χρειάζεται να ενθαρρύνουν τους μαθητές σε κατηγοριοποιήσεις σχημάτων της ίδιας μορφής από τις μικρότερες ηλικίες (τρίγωνα και τετράπλευρα) ώστε να ξεπεράσουν τη γενική αντίληψη (τρεις πλευρές, τρεις κορυφές) και να συστηματοποιήσουν ιδιότητες και σχέσεις.

Οι κατασκευές των σχημάτων με διάφορα υλικά όπως και με τα ψηφιακά προγράμματα στον Η/Υ δίνουν ευκαιρίες στους μικρούς μαθητές να περάσουν από την ολιστική αντίληψη σε μια αντίληψη των μερών των σχημάτων και άρα και των ιδιοτήτων και, μέσα από μια αναλυτική συζήτηση πάνω στις κατασκευές αυτές, να τις συστηματοποιήσουν διακρίνοντας πλευρές, γωνίες, μεγέθη, οριζόντιες και κατακόρυφες τοποθετήσεις όπως και παραλληλίες και καθετότητες, στοιχεία απαραίτητα σε μία κατασκευή. Όμοια αποτελέσματα επιφέρουν οι συστηματικές αναλύσεις και συνθέσεις σχημάτων, η εξοικείωση με τις οπτικοποιήσεις μετασχηματισμών, οι αλλαγές οπτικών γωνιών και η σύνδεση πραγματικών καταστάσεων με διαφορετικές μορφές αναπαραστάσεων. Εμπειρίες με νοερές

περιστροφές ή αντιστροφές, διπλώσεις ή άλλους μετασχηματισμούς δημιουργούν δυναμικές αναπαραστάσεις που ενισχύουν τις εσωτερικές αναπαραστάσεις των μαθητών και τις νοερές επεξεργασίες.

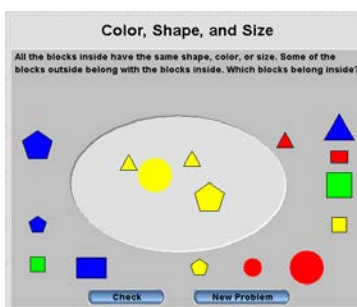
Ενδεικτικές δραστηριότητες:

Α΄ Τάξη: (ΠΜΑ: ΓΔ5)

Δραστηριότητες όπως οι γρήγορες αναγνωρίσεις σχημάτων διαφορετικών κατηγοριών (όπως τρίγωνα, τετράγωνα, κύκλοι, ορθογώνια, εξάγωνα, πεντάγωνα, τραπέζια, απλά τετράπλευρα κ.λπ.) σε διαφορετικές θέσεις, μεγέθη και προσανατολισμούς βοηθούν τα παιδιά να επικεντρωθούν σε χαρακτηριστικά και να ξεφύγουν από στερεοτυπικές αντιλήψεις. Ομοίως, γρήγορες αναγνωρίσεις της ίδιας κατηγορίας σχημάτων (π.χ. τριγώνων ή τετραπλεύρων) επιτρέπουν στους μαθητές να μελετήσουν και να συγκρίνουν ιδιότητες όπως και να εντοπίσουν σχέσεις ανάμεσα στα σχήματα (π.χ. Τι κοινό έχει ένα ορθογώνιο με ένα ρόμβο, με ένα τετράγωνο; Τι διαφορετικό;).

Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί το τεχνολογικό περιβάλλον «Attribute Blocks» (<http://nlvm.usu.edu>).

Το περιβάλλον προσφέρει στους μαθητές τη δυνατότητα να αναγνωρίσουν σχήματα διαφορετικών κατηγοριών (τρίγωνα, τετράγωνα, κύκλους, ορθογώνια, εξάγωνα, πεντάγωνα, τραπέζια κ.λπ.) σε διαφορετικές θέσεις, μεγέθη και χρώματα.



Εικόνα 6

Ο εκπαιδευτικός αφήνει τους μαθητές να μπορούν να ασχοληθούν ατομικά ή ομαδικά με τις δραστηριότητες του τεχνολογικού περιβάλλοντος και να ελέγξουν μόνοι τους την ορθότητα της απάντησής τους.

Δραστηριότητες όπως «Βρες τον κανόνα μου» επικεντρώνουν τους μαθητές στα κριτήρια (δηλαδή, στις ιδιότητες) με βάση τα οποία έγινε μια κατηγοριοποίηση (π.χ. γιατί αυτά τα τρίγωνα, αυτά τα τετράπλευρα;) και να περιγράψουν ρητά αυτά τα κριτήρια.

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας
(διερεύνηση και
γενίκευση)

Διεργασία
επικοινωνίας
(μέσω φυσικής
γλώσσας)

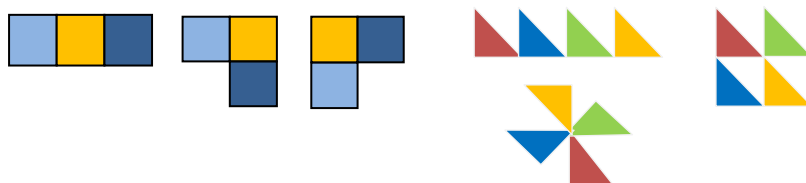
Α΄ Τάξη: (ΠΜΑ: ΓΔ6)

Εξηγήσαμε ήδη ότι οι αναλύσεις και οι συνθέσεις επιτρέπουν τους μαθητές να διερευνήσουν ιδιότητες και σχέσεις, αλλά και να επεξεργαστούν συνθέσεις σχημάτων και να κάνουν νοερούς μετασχηματισμούς.



Σχήμα 1

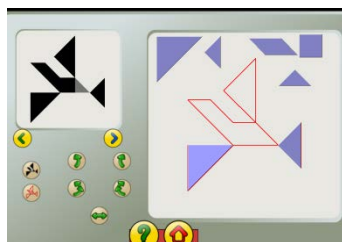
Στην ενότητα αυτή μπορούν να προταθούν δράσεις του τύπου «πόσους συνδυασμούς μπορούμε να κάνουμε με 3 τετράγωνα ή με 4 τρίγωνα» όπου οι μαθητές επεξεργάζονται και τους πιθανούς μετασχηματισμούς στις θέσεις, αλλά και σχέσεις των σχημάτων (αν τα σχήματα δεν είχαν χρώματα, πόσοι είναι όλοι οι συνδυασμοί;)



Σχήμα 2

Ομοίως, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ψηφιακά περιβάλλοντα:

GCompris Ελεύθερο Λογισμικό / Λογισμικό Ανοικτού Κώδικα, (ΕΛ/ΛΑΚ) «Παιχνίδι Τάνγκραμ», <http://gcompris.net/-el->



Εικόνα 2

Πηγές με on- line λογισμικό από το National Council of Teachers of Mathematics (NCTM):

"Patch Tool"

<http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=27>

"Shape Cutter"

<http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=72>

"Shape Tool"

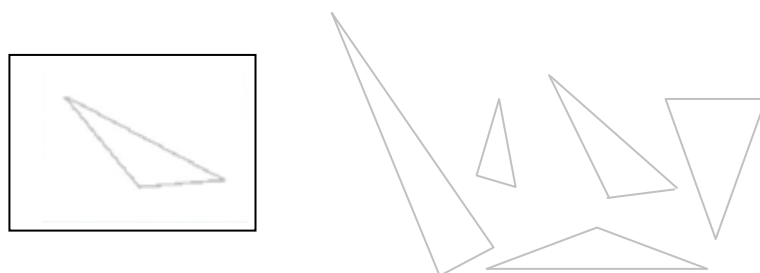
<http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=35>

Β΄ Τάξη: (ΠΜΑ: ΓΔ4)

Στις δραστηριότητες τύπου 'φλας' οι μαθητές βλέπουν για μερικά δευτερόλεπτα ένα σχήμα και, στη συνέχεια, προσπαθούν να το εντοπίσουν ανάμεσα σε πολλά άλλα. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να δοκιμάσει ποικιλία μορφών και θέσεων όπως, επίσης, και να μειώσει το χρόνο. Οι μαθητές ασκούνται στο να εντοπίζουν γρήγορα χαρακτηριστικά και να

Διεργασία
επικοινωνίας
(χρήση νοερών
αναπαράστασεων)

μετασχηματίζουν νοερά το σχήμα για να αντιστοιχηθεί με το ζητούμενο:



Σχήμα 3

Β΄ Τάξη: (ΠΜΑ: ΓΔ5)

Στις δραστηριότητες περιγραφής οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να εντοπίσουν και να περιγράψουν ιδιότητες. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να προτείνει ποικιλία σχημάτων για να στραφεί η περιγραφή σε άλλες ιδιότητες.

Διεργασία
επικοινωνίας
(χρήση νοερών
αναπαραστάσεων/
μετασχηματισμών)

Β΄ Τάξη: (ΠΜΑ: ΓΔ7)

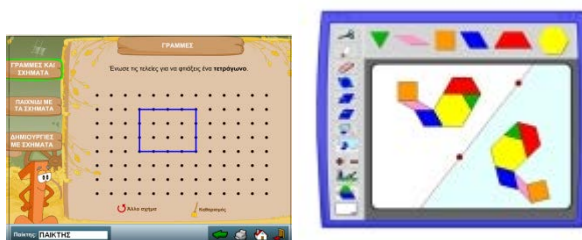
Στις δραστηριότητες άσκησης σε μετασχηματισμούς ο εκπαιδευτικός προτείνει καταστάσεις όπως αυτή του περιστρεφόμενου κουτιού που δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να κάνουν νοερές αλλαγές και να εντοπίσουν θέσεις πριν ή μετά το μετασχηματισμό.

Β΄ Τάξη: (ΠΜΑ: ΓΔ8)

Ο εκπαιδευτικός προτείνει μια ποικιλία συμμετρικών και μη καταστάσεων και καλεί τους μαθητές να εξηγήσουν ποιες είναι και ποιες όχι, τεκμηριώνοντας την απάντησή τους. Η συζήτηση πάνω στις απαντήσεις μπορεί να επιτρέψει στους μαθητές να συστηματοποιήσουν άτυπα τις ιδιότητες των συμμετρικών σχημάτων.

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας
(αιτιολόγηση
/διερεύνηση και
γενίκευση)

Αξιοποιούν το ψηφιακό περιβάλλον από την ενότητα της Γεωμετρίας, «Γραμμές και σχήματα», <http://www.pi-schools.gr/software/dimotiko/> και τα αντίστοιχα από το on-line λογισμικό του National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), για συμμετρικά (Shape Tool, <http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=35>).



Εικόνα 3

Μετρήσεις

Σημασία της ενότητας: Μετρήσεις και γενικότερα άτυπες και τυπικές συγκρίσεις μεγεθών πραγματοποιούν οι μαθητές συχνά στην καθημερινή τους ζωή. Με τις αυθόρμητες ποιοτικές συγκρίσεις επιδιώκουν να αντιληφθούν, για παράδειγμα, ποια διαδρομή είναι πιο μεγάλη, πόσο ψηλά είναι ή μπορούν να φθάσουν ή ποιο αντικείμενο είναι πιο μεγάλο.

Αυτή η αυθόρμητη και φαινομενικά απλή διαδικασία ποιοτικής σύγκρισης και αργότερα 'μέτρησης' με τη χρήση οργάνων (χαράκακι, μεζούρα ή μέτρο) κρίνεται συχνά επαρκής και οδηγεί την εκπαίδευση σε ελλιπή διδακτική προσέγγιση της μέτρησης με την ένταξή της στο γεωμετρικό περιεχόμενο ως μέτρησης μηκών, επιφανειών και όγκων.

Στο παρόν πρόγραμμα οι μετρήσεις αποτελούν έναν από τους πέντε άξονες του μαθηματικού περιεχομένου και στοχεύουν στην ουσιαστική κατανόηση της διαδικασίας μέτρησης με την προσέγγιση και χρήση μεθόδων και εργαλείων, την ανάπτυξη δεξιοτήτων εκτίμησης και υπολογισμών κατά προσέγγιση.

Η διδακτική αυτή πρόταση ξεκινά από άμεσες συγκρίσεις για την κατανόηση του προς μέτρηση μεγέθους, τις έμμεσες συγκρίσεις με συστηματικές επικαλύψεις με μονάδες όπως και τη σύνδεση των επικαλύψεων ή στη συνέχεια των επαναλήψεων των μονάδων με ένα αριθμητικό αποτέλεσμα. Μια τέτοια διαδικασία βοηθά τους μαθητές να συνδέσουν τα *συνεχή* χαρακτηριστικά των γεωμετρικών αντικειμένων, όπως είναι το μήκος, η επιφάνεια ή ο όγκος, με διακριτά μεγέθη που αποτελούν τις μονάδες.

Προηγούμενη κι επόμενη γνώση: Αναφέραμε ήδη ότι οι μαθητές πραγματοποιούν αυθόρμητες συγκρίσεις από τις μικρότερες ηλικίες. Οι διαδικασίες αυτές απέχουν σημαντικά από τις συστηματικές διαδικασίες μέτρησης, αλλά μπορούν να βοηθήσουν στην εισαγωγή σε αυτές.

Στη διάρκεια του πρώτου κύκλου οι μαθητές εισάγονται στη διαδικασία μέτρησης με την εννοιολογική προσέγγιση του *μετρούμενου μεγέθους* (μήκους, επιφάνειας ή όγκου) ως ιδιαίτερου χαρακτηριστικού των αντικειμένων που παραμένει *αμετάβλητο* και με την πραγματοποίηση *άμεσων* και *έμμεσων συγκρίσεων* με τη χρήση ενδιάμεσων (άτυπων ή στη συνέχεια τυπικών). Η χρήση μονάδων με επανάληψη κάνει, επίσης, απαραίτητη την εννοιολογική κατανόηση της *διαίρεσης* ενός μεγέθους σε ίσα μέρη, η οποία ολοκληρώνεται με την *επανάληψη των μονάδων* ή με την καταμέτρηση των ίσων μερών και τη *σύνδεση της επανάληψης με έναν αριθμό*.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι η εισαγωγή στη μέτρηση είναι μια αρκετά σύνθετη, αλλά σημαντική για την κατανόηση, διαδικασία. Επίσης, κάνει απαραίτητη τη δημιουργία βασικών αναπαραστάσεων με καλύψεις του μεγέθους με ομοειδή μεγέθη ή μονάδες ή 'γεμίσματα' με διάφορα υλικά για την αντίληψη της έννοιας της επανάληψης. Ομοίως, η προσέγγιση των τρισδιάστατων αντικειμένων

υποστηρίζεται από την έννοια της χωρητικότητας και την πρώτη επαφή της έννοιας του όγκου με ‘γεμίσματα’ με τουβλάκια ή κύβους.

Δυσκολίες των μαθητών: Οι πρώτες (κυρίως πιαζετιανές) ερευνητικές προσεγγίσεις υποστήριζαν ότι οι μαθητές των μικρών ηλικιών δεν ήταν σε θέση να συγκροτήσουν μετρικές έννοιες χωρίς απαραίτητα λογικά προηγούμενα, όπως η *διατήρηση του μεγέθους*, η *μεταβατικότητα* και η *αντιστροφή της σύγκρισης*. Μεταγενέστερες, όμως, έρευνες τεκμηριώνουν ότι οι μαθητές των ηλικιών αυτών, αν και δεν είναι σε θέση να κατανοήσουν τη διατήρηση του μήκους όπως την περιγράφει ο Piaget, πετυχαίνουν σε έργα που σχετίζονται με μέτρηση, ιδιαίτερα όταν έχουν την ανάγκη να συγκρίνουν μεγέθη και μάλιστα αν χρησιμοποιούν τυπικές μονάδες όπως το μέτρο, ο χάρακας κ.λπ.

Οι μικροί μαθητές επιτυγχάνουν σε μεγάλο βαθμό τις άμεσες συγκρίσεις, αλλά η σύγκριση με τη βοήθεια επικαλύψεων δεν είναι αυτονόητη κι απαιτεί ένα πέρασμα από ένα στάδιο «ψευδο-επικάλυψης» για να φτάσουν σταδιακά σε πιο συστηματικές μορφές ως την ολοκληρωμένη επικάλυψη. Η διαδικασία αυτή, επίσης, δεν συνδέεται χωρίς κατάλληλες δράσεις με το αριθμητικό αποτέλεσμα.

Ομοίως, η χρήση των τυπικών συμβατικών μονάδων γίνεται συχνά χωρίς την κατανόηση της διαδικασίας μέτρησης και αποτελεί μια μάλλον διαδικαστική συγκριτικά με την εννοιολογική μάθηση που επιδιώκεται. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν ένα μέτρο και να διαβάσουν το αποτέλεσμα πάνω σε αυτό, αλλά δεν αντιλαμβάνονται τι είναι μέγεθος, μέτρηση ή μέτρο.

Οι μαθητές χρειάζονται να κατανοήσουν τη γραμμικότητα των μηκών ή αντίστοιχα να αντιληφθούν την επιφάνεια και τον όγκο, την έννοια της ισότητας και της επανάληψης των μονάδων και να τη συνδέσουν με τη μέτρηση με το χάρακα. Δεν επαρκεί να καταμετρούν με αυθαίρετες ή τυπικές μονάδες ούτε να διαβάζουν μια ένδειξη στο χάρακα, αλλά απαιτείται μια σύνδεση των διαδικασιών με το μέγεθος που μετράται και του αριθμού με τη επανάληψη της μονάδας πάνω στο μέγεθος.

Η *δόμηση του χώρου* είναι σημαντική στη σύνδεση των επικαλύψεων των επιφανειών με τον πολλαπλασιαστικό υπολογισμό του εμβαδού. Τα παιδιά αρχίζουν να δομούν το χώρο αρχικά πραγματοποιώντας επιστρώσεις με τετράγωνα υλικά και, στη συνέχεια, ζωγραφίζοντας τετράγωνα ή χαράζοντας οριζόντιες και κάθετες γραμμές.

Η μέτρηση των επιφανειών εμπλέκουν ουσιαστικά στοιχεία που σχετίζονται με τις επικαλύψεις επιπέδων και συστηματική οργάνωση αυτών των επικαλύψεων στα οποία τα παιδιά εμφανίζουν δυσκολίες, αλλά μπορούν να αναπτύξουν από νωρίς με την κατάλληλη διδακτική παρέμβαση μέσω σχετικών δραστηριοτήτων.

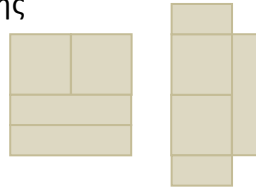
Προτάσεις για διδακτική διαχείριση: Η εισαγωγή στη διαδικασία της μέτρησης πραγματοποιείται μέσα από δράσεις που βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν τόσο τις έννοιες όσο και τις διαδικασίες. Ο εκπαιδευτικός χρειάζεται να επιδιώξει να προσεγγίσουν οι μαθητές τα διαφορετικά στάδια της μέτρησης (άμεση σύγκριση μεγεθών, επικάλυψη με μονάδες, χρήση συμβατικών μονάδων και σύνδεση με το αριθμητικό αποτέλεσμα). Η προοδευτική κατάκτηση των στοιχείων αυτών απαιτεί

κατάλληλες δράσεις με νόημα και ενδιαφέρον για τους μαθητές και η ολοκλήρωσή τους είναι απαραίτητη για την εισαγωγή στη διαδικασία μέτρησης.

Ενδεικτικές δραστηριότητες:

Α΄ Τάξη: (ΠΜΑ: ΜΔ2)

Οι δραστηριότητες σύγκρισης επιφανειών σε τετραγωνικές ή άλλες οργανώσεις που μπορούν να πραγματοποιήσουν οι μαθητές κόβοντας και μετακινώντας επιτρέπει την ουσιαστικότερη αντίληψη της έννοιας της επιφάνειας και της μέτρησης στις δύο διαστάσεις. Τα στοιχεία αυτά μεταγενέστερα θα επιτρέψουν τον υπολογισμό των εμβαδών σε διάφορες μορφές.

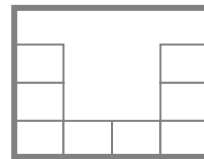


Σχήμα 1

Διεργασία μαθηματικού συλλογισμού και επιχειρηματολογίας (διερεύνηση και γενίκευση)

Α΄ Τάξη: (ΠΜΑ: ΜΔ3)

Οι δράσεις συμπλήρωσης των επιφανειών αρχικά με εμπράγματα τετράγωνα σχήματα και, στη συνέχεια, σχεδιαστικά βοηθούν τους μαθητές να οδηγηθούν στην αντίληψη γραμμών και στηλών που είναι απαραίτητη για τη δόμηση του χώρου και την προσέγγιση των σχετικών τύπων. Στο χώρο αυτό ο εκπαιδευτικός μπορεί να αξιοποιήσει και ψηφιακές εφαρμογές.



Σχήμα 2

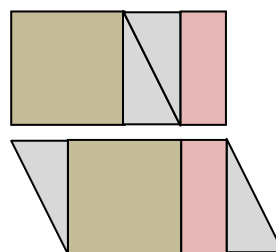
Διεργασία επικοινωνίας (χρήση νοερών αναπαραστάσεων)

Β΄ Τάξη: (ΠΜΑ: ΓΔ12)

Στη Β τάξη ο εκπαιδευτικός συνεχίζει τις δράσεις με τις συγκρίσεις επιφανειών, οι οποίες μπορούν να είναι χωρισμένες σε μέρη ή να αφεθεί στους μαθητές ή οργάνωσή τους. Όπως αναφέραμε ήδη, οι δράσεις βοηθούν τους μαθητές να αντιληφθούν το αμετάβλητο της επιφάνειας όπως και των τρόπων μέτρησής της.



Σχήμα 3



Σχήμα 4

Διεργασία επικοινωνίας (χρήση νοερών αναπαραστάσεων/ μετασχηματισμών)

Στοχαστικά Μαθηματικά

Στατιστική

Σημασία της ενότητας: Η εισαγωγή της Στατιστικής στην πρώτη σχολική ηλικία αποτελεί ένα νέο στοιχείο στο πρόγραμμα σπουδών. Η γνώση αυτή είναι σημαντική, καθώς η ερμηνεία και η αξιολόγηση δεδομένων με σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων και τη λήψη αποφάσεων αποτελεί βασική δεξιότητα στη σύγχρονη κοινωνία. Στον Α΄ κύκλο οι μαθητές μαθαίνουν να γνωρίζουν ποια δεδομένα χρειάζεται να συλλέξουν για να απαντήσουν σε ένα ερώτημα, πώς θα τα αποκτήσουν, με ποιους τρόπους μπορούν να τα οργανώσουν και να τα παρουσιάσουν για να εξηγήσουν το νόημά τους.

Προηγούμενη και επόμενη γνώση: Τα παιδιά στο νηπιαγωγείο πραγματοποιούν μικρές έρευνες στην τάξη τους σε κλειστά ερωτήματα, δηλαδή ερωτήματα που υπάρχει περιορισμός στον αριθμό των απαντήσεων, ενώ στην Α΄ και Β΄ Δημοτικού τα ερωτήματα είναι ανοιχτά. Στο νηπιαγωγείο και στην Α΄ Δημοτικού οι απαντήσεις στα ερωτήματα που διατυπώνονται δεν είναι αριθμοί (πρόκειται, δηλαδή, για κατηγορικά δεδομένα). Η συλλογή ποσοτικών δεδομένων πραγματοποιείται στη Β΄ τάξη. Στο νηπιαγωγείο, τα παιδιά αποκτούν εμπειρία στην κατασκευή διαγραμμάτων με υλικά και εικονογραμμάτων, στην Α΄ Δημοτικού επεκτείνουν τις γνώσεις τους στην αναπαράσταση δεδομένων μέσω της κατασκευής και ερμηνείας ραβδογραμμάτων και στη Β΄ Δημοτικού μέσω της κατασκευής και ερμηνείας σημειογραμμάτων. Σε επόμενες τάξεις οι μαθητές μελετούν πιο πολύπλοκους τρόπους αναπαράστασης και ερμηνείας δεδομένων.

Δυσκολίες των μαθητών: Σε άλλες μαθηματικές ενότητες τα ερωτήματα που θέτουν τα παιδιά μπορεί να απαντηθούν άμεσα (π.χ. πόσα παιδιά έχει η τάξη μου;), χωρίς τη συλλογή δεδομένων. Ανάλογα με τα ερωτήματα που διατυπώνονται, οι μαθητές αρχίζουν να αποκτούν εμπειρίες για να διακρίνουν ερωτήματα που δεν μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο στατιστικής επεξεργασίας. Επιπλέον, οι μαθητές σταδιακά μαθαίνουν ότι η συλλογή δεδομένων εξαρτάται από το ερώτημα που έχει τεθεί. Τα προτεινόμενα διαγράμματα αποτελούν τις πιο απλές μορφές αναπαράστασης δεδομένων. Σε αυτόν τον κύκλο, οι μαθητές δυσκολεύονται μερικές φορές να αντιληφθούν ότι ο αριθμός των μονάδων του πληθυσμού (π.χ. ο αριθμός των μαθητών που συμμετέχουν σε μια έρευνα) είναι ίδιος με τον αριθμό των δεδομένων (π.χ. κάθε μαθητής απαντά μία φορά). Στην περίπτωση των ποσοτικών δεδομένων οι μαθητές χρειάζεται να κατανοήσουν τα διαφορετικά νοήματα των αριθμών κατά την περιγραφή των δεδομένων: κάποιιοι αριθμοί δείχνουν την τιμή των δεδομένων και κάποιιοι άλλοι πόσο συχνά εμφανίζεται μία τιμή.

Προτάσεις για διδακτική διαχείριση: Ο εκπαιδευτικός εμπλέκει τα παιδιά στην πραγματοποίηση μιας μικρής έρευνας στην τάξη τους για ένα ερώτημα που προκαλεί το ενδιαφέρον τους. Η διατύπωση του ερωτήματος από τα παιδιά είναι σημαντική, καθώς τα εμπλέκει ενεργητικά στην ερευνητική διαδικασία και τα

εισάγει στην ανάπτυξη προβληματισμών για τον τρόπο συλλογής και οργάνωσης των δεδομένων. Επίσης, είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός να βοηθήσει τα παιδιά να συνδέσουν τα αποτελέσματα της έρευνάς τους με την καθημερινότητά τους.

Ενδεικτικές Δραστηριότητες:

Α΄ Τάξη: «Γνωρίζουμε τους συμμαθητές μας» (ΠΜΑ: ΣΔ1, ΣΔ2)

Η δραστηριότητα αποσκοπεί στην εμπλοκή των μαθητών σε μια μικρή έρευνα στην τάξη τους προκειμένου να διατυπώσουν ερωτήματα, να συλλέξουν, να οργανώσουν, να αναπαραστήσουν κατηγορικά δεδομένα και να τα ερμηνεύσουν.

Σ1. Οι μαθητές σε μικρές ομάδες διατυπώνουν γραπτά ένα ερώτημα προκειμένου να γνωρίσουν τις προτιμήσεις των συμμαθητών τους: «Ποιο είναι το αγαπημένο σου ... (π.χ. φαγητό, παιχνίδι, χρώμα, άθλημα, μουσικό όργανο κ.λπ.);». Ανακοινώνουν τα ερωτήματά τους στην τάξη και αποφασίζουν να ασχοληθούν με ένα ερώτημα (π.χ. παιχνίδι).

Διεργασία
επικοινωνίας
(μέσω φυσικής
γλώσσας)

Σ2. Η συλλογή των δεδομένων για το συγκεκριμένο ερώτημα μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους (μπορούν να γράψουν όλοι οι μαθητές σε ένα κοινό χαρτί τα ονόματά τους και δίπλα να γράφουν το αγαπημένο τους παιχνίδι ή να γράψει κάθε μαθητής σε ένα χαρτί το όνομά του, το ερώτημα και την απάντησή του). Συζητούν πώς θα ελέγξουν αν απάντησαν όλοι οι μαθητές και πώς θα οργανώσουν τα δεδομένα τους για να βρουν ποια είναι τα πιο αγαπημένα τους παιχνίδια: Ένας τρόπος είναι να καταγράψουν όλα τα παιχνίδια που αναφέρθηκαν και να φτιάξουν ένα πίνακα, όπως φαίνεται παρακάτω (δίπλα σε κάθε παιχνίδι βάζουν μία γραμμή για κάθε παιδί):

Διεργασία
επικοινωνίας
(χρήση
αναπαραστάσεων)

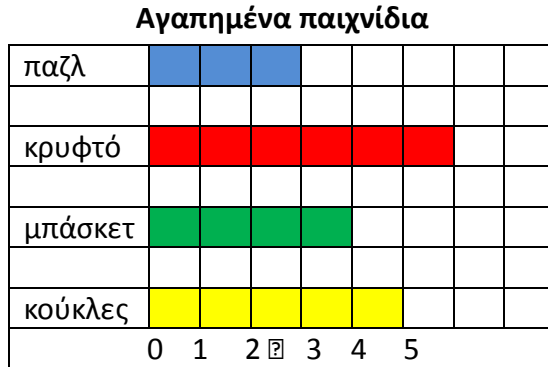
Αγαπημένα Παιχνίδια	Μετράω	Σύνολο (με αριθμούς)
κούκλες	IIII	5
μπάσκετ	IIII	4
κρυφτό	IIIIII	6
παζλ	III	3

Πίνακας 1

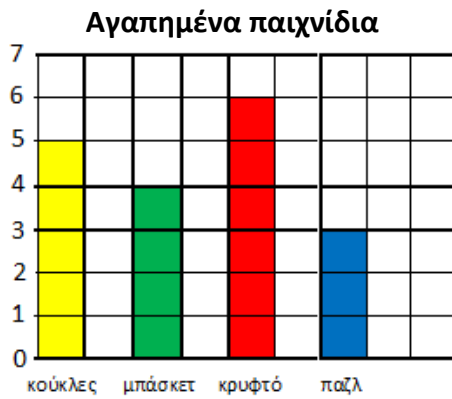
Μπορούν να οργανώσουν τα δεδομένα τους και με άλλους τρόπους (π.χ. να χωρίσουν τα παιχνίδια σε ομαδικά και ατομικά, σε παιχνίδια που παίζονται στο σπίτι και σε παιχνίδια που παίζονται έξω από το σπίτι). Ο διαφορετικός τρόπος οργάνωσης των δεδομένων επιτρέπει να διατυπώνουν διαφορετικά ερωτήματα στα οποία απαντούν.

Σ3. Εισάγονται στην κατασκευή ενός ραβδογράμματος σε

τετραγωνισμένο χαρτί (ο εκπαιδευτικός μπορεί να έχει έτοιμα τετραγωνισμένα χαρτιά και να δώσει από ένα σε κάθε ομάδα παιδιών). Το ραβδόγραμμα που θα προκύψει θα είναι, για παράδειγμα, όπως τα παρακάτω:



Σχήμα 1: Ραβδόγραμμα 1



Σχήμα 2: Ραβδόγραμμα 2

Διεργασία
επικοινωνίας
(χρήση
αναπαραστάσεων)

Διερεύνηση και
επιχειρηματολογία

Σ4. Με αφορμή το ραβδόγραμμα συζητούν διάφορα ερωτήματα για να συγκρίνουν δεδομένα (π.χ. Πόσα περισσότερα παιδιά προτιμούν το μπάσκετ σε σχέση με το κρυφτό; Ποια παιχνίδια προτιμούν περισσότερα από 5 παιδιά;) και να διατυπώσουν προτάσεις για τα δεδομένα ως σύνολο (π.χ. Ποιο παιχνίδι προτιμούν τα περισσότερα παιδιά; Ποιο παιχνίδι προτιμούν τα λιγότερα παιδιά; Αν αύριο υπάρχει ελεύθερη ώρα στο πρόγραμμα του σχολείου, ποιο παιχνίδι θα επέλεγαν να παίζουν;)

Η δραστηριότητα επιτρέπει στους μαθητές να κάνουν μετατροπές από μία μορφή αναπαράστασης δεδομένων σε μία άλλη. Στο ερώτημα «Με ποιον άλλο τρόπο μπορούμε να δείξουμε τις πληροφορίες του κειμένου;», μπορούν να κατασκευάσουν έναν πίνακα με καταμέτρηση με γραμμές ή ένα ραβδόγραμμα σε τετραγωνισμένο χαρτί. Βρίσκοντας τις ομοιότητες και τις διαφορές ανάμεσα στο εικονόγραμμα και το ραβδόγραμμα (π.χ. έχουν και τα δύο τον ίδιο τίτλο και τις ίδιες κατηγορίες, στο ραβδόγραμμα δεν υπάρχουν εικόνες αλλά το κάθε τετραγωνάκι αντιστοιχεί σε ένα παιδί) κατανοούν τον

Διεργασία
επικοινωνίας
(χρήση
αναπαραστάσεων)

Διεργασία
δημιουργίας
συνδέσεων

τρόπο κατασκευής των διαγραμμάτων. Συζητούν αν το εικονόγραμμα θα ήταν το ίδιο αν ρωτούσαν τα παιδιά μιας άλλης Α΄ τάξης, καθώς αυτό το ερώτημα τους βοηθά να συνειδητοποιήσουν ότι τα δεδομένα μεταβάλλονται σε διαφορετικούς πληθυσμούς.

Β΄ Τάξη: «Γνωρίζουμε την οικογένειά μας» (ΠΜΑ: ΣΔ1, ΣΔ2)

Η δραστηριότητα αποσκοπεί στην εμπλοκή των μαθητών σε μια μικρή έρευνα στην τάξη τους προκειμένου να διατυπώσουν ερωτήματα, να συλλέξουν, να οργανώσουν, να αναπαραστήσουν ποσοτικά δεδομένα και να τα ερμηνεύσουν.

Για τη διδακτική διαχείριση της δραστηριότητας βλ. Δρ. ΣΔ1, Α΄ τάξη.

Η δραστηριότητα οδηγεί τους μαθητές να κατανοήσουν ότι ένα διάγραμμα ερμηνεύεται ανάλογα με το ερώτημα που διερευνάται. Οι μαθητές σε ομάδες προτείνουν έναν τίτλο για το διάγραμμα και γράφουν ερωτήματα που αναφέρονται στις πληροφορίες του διαγράμματος.

Διερεύνηση και
επιχειρηματολογία

Διεργασία
επικοινωνίας
(χρήση
αναπαραστάσεων)

Πιθανότητες

Σημασία της ενότητας: Η εισαγωγή των Πιθανοτήτων στην πρώτη σχολική ηλικία είναι σημαντική, καθώς επιτρέπει στους μαθητές να αρχίσουν να αντιλαμβάνονται την αβεβαιότητα διαφόρων γεγονότων και να αναπτύσσουν την ικανότητα της πρόβλεψης. Στον Α΄ κύκλο οι μαθητές αναπτύσσουν άτυπα τη γλώσσα των πιθανοτήτων για να περιγράψουν γεγονότα και να συγκρίνουν την εμφάνιση ενδεχομένων σε απλά πειράματα τύχης.

Προηγούμενη και επόμενη γνώση: Τα παιδιά στο νηπιαγωγείο εμπλέκονται σε απλές πιθανολογικές καταστάσεις, προκειμένου να κατανοήσουν όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, περιγράφουν ένα γεγονός της καθημερινής τους εμπειρίας ως βέβαιο, αδύνατο, πιθανό, απίθανο και χαρακτηρίζουν ένα παιχνίδι τύχης ως δίκαιο ή άδικο. Στην Α΄ τάξη οι μαθητές αποκτούν μια καλύτερη κατανόηση του δειγματικού χώρου σε περισσότερο πολύπλοκα πειράματα και παιχνίδια τύχης και μαθαίνουν να συνδυάζουν μικρό αριθμό αντικειμένων. Στη Β΄ τάξη επεκτείνουν τις γνώσεις τους στη σύγκριση της πιθανότητας εμφάνισης ενός ενδεχομένου σε ένα ή δύο δειγματικούς χώρους. Σε επόμενες τάξεις οι μαθητές μελετούν πιο συστηματικά τον υπολογισμό πιθανοτήτων.

Δυσκολίες των μαθητών: Η βασική δυσκολία των μαθητών του Α΄ κύκλου είναι ότι οι απαντήσεις τους βασίζονται σε υποκειμενικές κρίσεις. Για παράδειγμα, οι μαθητές δεν κάνουν μια ολοκληρωμένη περιγραφή των δυνατών αποτελεσμάτων σε ένα πείραμα τύχης που πραγματοποιείται σε ένα στάδιο (π.χ. τη ρίψη ενός ζαριού),

αλλά αναφέρουν συνήθως τα αποτελέσματα που θεωρούν ότι είναι πιο πιθανά να συμβούν σύμφωνα με τις προσωπικές τους επιθυμίες ή κρίσεις (π.χ. απαντούν ότι ο μόνος αριθμός που προκύπτει κατά τη ρίψη ενός ζαριού είναι το 6, διότι είναι ο τυχερός τους αριθμός). Η ίδια δυσκολία εμφανίζεται όταν προβλέπουν λιγότερο ή περισσότερο πιθανά γεγονότα σε ένα ή δύο διαφορετικούς δειγματικούς χώρους (π.χ. από ένα κουτί με 3 κόκκινους και 5 μπλε κύβους θεωρούν ότι είναι πιο πιθανό να τραβήξουν ένα κόκκινο κύβο γιατί το κόκκινο είναι το αγαπημένο τους χρώμα).

Προτάσεις για διδακτική διαχείριση: Ο εκπαιδευτικός εμπλέκει ενεργά τα παιδιά στην πραγματοποίηση ενός πειράματος τύχης. Είναι σημαντικό οι μαθητές να έχουν την ευκαιρία : α) να εκφράζουν και να δικαιολογούν τις αρχικές τους προβλέψεις, β) να πραγματοποιούν έναν ικανοποιητικό αριθμό δοκιμών του πειράματος και να καταγράφουν τα αποτελέσματα και γ) να αξιολογούν τη διαφορά ανάμεσα στις προβλέψεις τους και τα εμπειρικά αποτελέσματα που προκύπτουν κατά την πραγματοποίησή του προκειμένου να οδηγηθούν σε ένα συμπέρασμα.

Ενδεικτικές Δραστηριότητες:

A΄ Τάξη: (ΠΜΑ: ΠΔ1, ΠΔ2)

Στη δραστηριότητα οι μαθητές εμπλέκονται σε ένα παιχνίδι που τους επιτρέπει να προβληματιστούν για όλα τα πιθανά αποτελέσματα δύο διαφορετικών δειγματικών χώρων (των δύο ζαριών) και τη σχέση μεταξύ αυτών των αποτελεσμάτων για την έκβαση του παιχνιδιού. Το ερώτημα «Πώς μπορεί το παιχνίδι να γίνει δίκαιο;» μπορεί να απαντηθεί με πολλούς τρόπους (π.χ. να επιλέξουν και οι δύο ομάδες το ένα από τα δύο ζάρια ή να κατασκευαστεί ένα άλλο ζάρι) δίνοντας την ευκαιρία στα παιδιά να κατανοήσουν ότι τα αποτελέσματα σε ένα παιχνίδι τύχης επηρεάζονται από τις συνθήκες πραγματοποίησής του. (Σε ανάλογο παιχνίδι μπορεί να χρησιμοποιηθούν τροχοί με 3 ή περισσότερα διαφορετικά χρώματα.)

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας
(διερεύνηση και
επιχειρηματολογία)

Η δραστηριότητα επιτρέπει στους μαθητές να εμπλακούν μέσα από ένα σενάριο που συνδέεται με την καθημερινότητά τους (κατασκευή τιμοκαταλόγου) στην εύρεση των συνδυασμών 3 και 4 αντικειμένων.

Διεργασία
επικοινωνίας
(Επικοινωνία μέσω
φυσικής γλώσσας)

B΄ Τάξη: (ΠΜΑ: ΠΔ1, ΠΔ2)

Στη δραστηριότητα οι μαθητές δημιουργούν τις διατάξεις 2 και 3 αριθμητικών στοιχείων. Στην περίπτωση αυτή έχει σημασία η σειρά με την οποία τοποθετούνται τα στοιχεία. Οι μαθητές μπορεί να ακολουθήσουν μια συστηματική καταγραφή των διαφορετικών διατάξεων. (Σε ανάλογη δραστηριότητα μπορούν να βρουν τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να καταταχθούν 3 διαφορετικές χώρες που συμμετέχουν σε

Διεργασία
επικοινωνίας
(μέσω συμβολικής
γλώσσας)

Διεργασία

ένα διαγωνισμό τραγουδιού).

Η δραστηριότητα εισάγει τους μαθητές στην εύρεση του περισσότερου ή λιγότερου πιθανού ενδεχομένου σε ένα πείραμα τύχης και την αιτιολόγησή του. Είναι σημαντικό να δοθεί η ευκαιρία σε όλους τους μαθητές να πραγματοποιήσουν το πείραμα τύχης.

(Η δραστηριότητα μπορεί να πραγματοποιηθεί με περισσότερα από δύο ενδεχόμενα ή με περισσότερους από ένα δειγματικούς χώρους).

επικοινωνίας

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας
(διερεύνηση και
επιχειρηματολογία)

Β' ΚΥΚΛΟΣ

Αριθμοί

Βασικά θέματα: Αξία θέσης ψηφίου και πράξεις με φυσικούς αριθμούς

Σημασία της ενότητας: Ο φυσικός αριθμός αποτελεί μία από τις πλέον θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες, με τις οποίες έρχεται σε επαφή το παιδί από την αρχή της ζωής του και σε όλη τη διάρκειά της, με αποτέλεσμα να έχει ιδιαίτερη αξία για τη μαθηματική του εκπαίδευση. Αναγνωρίζοντας αυτήν ακριβώς την αξία, οι συντάκτες των Προγραμμάτων Σπουδών των μαθηματικών αποδίδουν ιδιαίτερη σημασία στην έννοια του φυσικού αριθμού και, κατ' επέκταση, στο σύνολο των φυσικών αριθμών, κυρίως στον πρώτο και στο δεύτερο κύκλο εκπαίδευσης (5 – 8 και 8 – 12 αντιστοίχως).

Καθώς η κοινωνία μας στηρίζεται προοδευτικά όλο και περισσότερο στην ποσοτική κωδικοποίηση της πληροφορίας και στα υπολογιστικά περιβάλλοντα, οι καταστάσεις όπου το άτομο καλείται να διαχειριστεί επιτυχώς αριθμητικά δεδομένα (όχι μόνο αναφορικά με φυσικούς, αλλά και με άλλους αριθμούς) αυξάνονται σημαντικά στην καθημερινή ζωή, στη συμμετοχή στα δρώμενα της κοινότητας, στην εργασία, στο σχολείο. Σήμερα, η εκπαίδευση που αφορά στους φυσικούς αριθμούς και, γενικότερα, στους αριθμούς επικεντρώνεται στο να διαμορφώσει πολίτες που είναι σε θέση να αξιοποιήσουν τις αριθμητικές τους γνώσεις για να ανταποκριθούν με επιτυχία σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης δράσης.

Προηγούμενη και επόμενη γνώση: Όταν οι μαθητές εισέρχονται στο δεύτερο κύκλο της σχολικής τους εκπαίδευσης, αναμένεται να είναι σε θέση να χειρίζονται με σχετική ευχέρεια τον φυσικό αριθμό ως έννοια μέχρι το 1.000, ορισμένες ιδιότητές του (π.χ. αντιμεταθετικότητα, προσεταιριστικότητα), τις τέσσερις πράξεις με φυσικούς αριθμούς, καθώς και να επιλύουν απλά και σύνθετα προβλήματα με τέσσερις πράξεις. Με το τέλος της δημοτικής εκπαίδευσης, οι παραπάνω γνώσεις αναμένεται να έχουν επεκταθεί στο σύνολο των φυσικών αριθμών και να έχουν εδραιωθεί.

Δυσκολίες μαθητών: Η αξία θέσης ψηφίου είναι πιθανόν να μην έχει αποσαφηνιστεί ακόμη και μέχρι το τέλος της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, γεγονός που μπορεί να επιφέρει δυσκολίες στους μαθητές κατά την εκτέλεση πράξεων με φυσικούς αριθμούς. Συνεπώς, είναι σημαντικό να διασφαλιστεί η κατανόηση της θεσιακής αξίας των ψηφίων από όλους τους μαθητές, μέσω κατάλληλα οργανωμένων δραστηριοτήτων που αναδεικνύουν δομικά και σημασιολογικά στοιχεία του δεκαδικού συστήματος γραφής και ανάγνωσης αριθμών.

Αναφορικά με τις πράξεις, με το τέλος της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης δεν παρατηρούνται ιδιαίτερες δυσκολίες στην πλειονότητα των μαθητών ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση, ωστόσο, στην περίπτωση της αφαίρεσης, τα λάθη και τα προβλήματα κατανόησης είναι συχνότερα σε σχέση με την πρόσθεση και συνδέονται με ζητήματα ελλιπούς κατανόησης της διαδικασίας δανεισμού, της αξίας θέσης ψηφίου και του μηδενός. Στον πολλαπλασιασμό τα λάθη των μαθητών

είναι λιγότερα, ωστόσο ο αλγόριθμος της διαίρεσης θεωρείται ο δυσκολότερος, καθώς η κατανόησή του απαιτεί την κατανόηση της θεσιακής αξίας των ψηφίων και τη δυνατότητα εκτέλεσης πράξεων.

Γενικά, η σύγχρονη επιστημονική βιβλιογραφία υποδεικνύει ότι, για να μπορέσει ένας μαθητής να ανταποκριθεί επιτυχώς σε καταστάσεις με φυσικούς αριθμούς είναι ανάγκη:

α) να διαθέτει καλή γνώση του μαθηματικού περιεχομένου (π.χ., αναπαράσταση ενός μεγάλου φυσικού αριθμού, ιδιότητες πράξεων),

β) να κατανοεί τον τρόπο που το πλαίσιο καθορίζει το μαθηματικό νόημα (π.χ., ο αριθμός 40 ως θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου είναι υψηλός αλλά ως έκφραση του βάρους ενός ενήλικα είναι χαμηλός), και

γ) να επιλέγει και να διαχειρίζεται αποτελεσματικά στρατηγικές επίλυσης προβλήματος (π.χ., διατύπωση της κατάλληλης ερώτησης).

Επιπλέον, ο μαθητής είναι σημαντικό να μπορεί να δραστηριοποιείται με επιτυχή τρόπο σε τρία επίπεδα:

- της άμεσης και με ευχέρεια εφαρμογής αριθμητικών γνώσεων (π.χ., υπολογισμός της τιμής μιας αριθμητικής παράστασης),
- της δημιουργικής αξιοποίησής τους για τη διερεύνηση νέων καταστάσεων (π.χ., η επιλογή της κατάλληλης στρατηγικής ανάπτυξης μιας πόλης), και
- της κριτικής θεώρησής τους (π.χ., τα κριτήρια μιας ‘καλής’ στρατηγικής ανάπτυξης μιας πόλης δεν είναι μόνο πληθυσμιακά/ οικονομικά, δηλαδή, μόνο αριθμητικά).

Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση: Ο εκπαιδευτικός χρειάζεται να ενθαρρύνει τον μαθητή να κατανοήσει την έννοια της πράξης και να τη διακρίνει από τον αλγόριθμο της εκτέλεσής της. Επίσης, είναι σημαντικό, στο πλαίσιο της διδασκαλίας, να επιτρέπει να αναδειχτούν οι διαφορετικές επιλογές που μπορεί να προκύψουν κατά την εκτέλεση μιας πράξης, να αιτιολογηθούν και να συνδεθούν με τις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών, ώστε να οδηγήσουν προοδευτικά στην ουσιαστική κατανόηση του αριθμητικού συστήματος.

Η διδασκαλία των αλγόριθμων εκτέλεσης των πράξεων με φυσικούς αριθμούς πραγματοποιείται σε ένα πρώιμο στάδιο, όταν η αντίληψη της έννοιας του αριθμού, της αναπαράστασής του με συμβολικό τρόπο, καθώς και των εννοιών των πράξεων και των ιδιοτήτων τους (π.χ., της προσεταιριστικότητας) από τους μαθητές είναι ακόμη αρκετά περιορισμένη. Επιπλέον, το γεγονός ότι οι αριθμητικές πράξεις είναι το αποτέλεσμα μιας σειράς σύνθετων και εκτενών διαδικασιών δυσκολεύει την πρόσβαση του μαθητή στη μαθηματική γνώση που εμπλέκεται σε αυτές τις διαδικασίες. Ως αποτέλεσμα των παραπάνω, πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να ακολουθήσουν τη λογική αυτών των διαδικασιών και, στην καλύτερη περίπτωση, τις υιοθετούν με μηχανικό τρόπο. Αυτή η μηχανιστική προσέγγιση συμβάλλει ελάχιστα στην περαιτέρω ανάπτυξη των αριθμητικών τους γνώσεων και, ειδικότερα, αυτών που σχετίζονται με την αξιοποίηση ανάλογων τεχνικών, ενώ συχνά προκαλεί αρνητικά συναισθήματα για τα μαθηματικά.

Μια πολλαπλώς τεκμηριωμένη δυσκολία των μαθητών στα μαθηματικά αφορά στην αδυναμία τους να ‘μεταφέρουν’ τις γνώσεις που αποκτούν εντός ενός

ορισμένου πλαισίου σε ένα άλλο. Η αναγνώριση αυτής της δυσκολίας οδήγησε τη διδασκαλία προς την κατεύθυνση της αξιοποίησης καταστάσεων σχετικών με τα ενδιαφέροντα των μαθητών, οι οποίες έχουν νόημα για αυτούς. Ωστόσο, όπως γρήγορα διαπιστώθηκε, οι καταστάσεις αυτές αφενός δεν ήταν 'ρεαλιστικές' (π.χ., ένα ρεαλιστικό πρόβλημα δεν έχει απαραίτητα μία και μοναδική λύση) και αφετέρου, αποτελούσαν απλό πρόσχημα για την εκτέλεση κλασικών μαθηματικών διαδικασιών. Κάτι ανάλογο συνέβη και με την αξιοποίηση διαθεματικών δραστηριοτήτων, όπου συχνά τα μαθηματικά επιβάλλονταν με τεχνητό τρόπο, ενώ, ταυτόχρονα, δεν ήταν σαφές πώς μέσω αυτών θα μπορούσε ο μαθητής να αναπτύξει ένα καλά δομημένο σώμα μαθηματικών γνώσεων. Αναγνωρίζοντας τους παραπάνω περιορισμούς, οι σύγχρονες αντιλήψεις προτείνουν την εστίαση σε στρατηγικές διεργασίες που καθορίζουν τη μαθηματική γνώση που θα αξιοποιηθεί για την επίλυση προβλημάτων και σε μια παιδαγωγική που ενθαρρύνει την από κοινού εργασία, τα ανοιχτά έργα, την αναζήτηση μαθηματικών εφαρμογών αλλά και δεσμών μεταξύ μαθηματικών ιδεών και διαφορετικών περιστάσεων.

Ενδεικτικές δραστηριότητες:

Γ' Τάξη: Πίνακας Gattegno (ανάγνωση, γραφή και κατανόηση φυσικών αριθμών)

Ο παρακάτω πίνακας του Gattegno μπορεί να σχηματιστεί στο μαυροπίνακα της τάξης, να δοθεί σε φωτοτυπία στους μαθητές ή να προβληθεί σε μια επιφάνεια. Αυτό καθιστά εύκολη την κάλυψη (με όποιο τρόπο θεωρηθεί καταλληλότερος, π.χ., με ένα χαρτί) των αριθμών που είναι κάθε φορά επιθυμητή.

Υπάρχει μεγάλη ποικιλία ερωτήσεων και δραστηριοτήτων που θα ήταν δυνατόν να τεθούν στους μαθητές με αναφορά στο συγκεκριμένο πίνακα, σχετικές με την κατανόηση της έννοιας του φυσικού αριθμού, την αξία θέσης ψηφίων, την ανάγνωση και τη γραφή, τη διάταξη και τη σύγκριση στους φυσικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, θα μπορούσε ο εκπαιδευτικός να ξεκινήσει δείχνοντας το σύμβολο «7000», και ζητώντας από τους μαθητές να το εκφράσουν λεκτικά («επτά χιλιάδες»). Η ανάγνωση αριθμών στην τάξη υποστηρίζει τον μαθητή που δεν γνωρίζει, καθώς τον βοηθά να εξοικειωθεί με τον αποδεκτό/νόμιμο τρόπο ανάγνωσής τους. Επιπλέον, ενθαρρύνει τους μαθητές εκείνους που δεν νιώθουν αυτοπεποίθηση, όταν ασχολούνται με τη συγκεκριμένη δραστηριότητα. Στη συνέχεια, θα μπορούσε να ζητηθεί από τους μαθητές να υποδείξουν ποια κελιά του πίνακα θα πρέπει να καλυφθούν, ώστε να αναπαρασταθεί ένας συγκεκριμένος φυσικός αριθμός, ο οποίος είτε ανακοινώνεται προφορικά από κάποιο μαθητή είτε αναγράφεται στον πίνακα της τάξης από τον εκπαιδευτικό (π.χ., 30.452). Ή αντιστρόφως, ποιος αριθμός αναπαρίσταται από ορισμένα καλυμμένα/χρωματισμένα κελιά (εδώ θα ήταν σκόπιμο να χρησιμοποιηθούν και αριθμοί που παρουσιάζουν κάποια ιδιαιτερότητα και δυσκολεύουν αρκετούς μαθητές,

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας

Διεργασία
επικοινωνίας μέσω
της χρήσης

όπως, για παράδειγμα, οι αριθμοί 100010, 99999, κτλ).

Ακόμη, μπορεί οι μαθητές να εμπλακούν σε μια δραστηριότητα τύπου παιχνιδιού «σκέφτομαι έναν αριθμό», στο πλαίσιο της οποίας ένας μαθητής (ή και ο εκπαιδευτικός) αναφέρει έναν ή δύο αριθμούς και οι υπόλοιποι προσπαθούν να εντοπίσουν τον επόμενο/ προηγούμενο ή κάποιον ενδιάμεσο αριθμό αντιστοίχως. Και σε αυτήν την περίπτωση είναι σημαντικό να ενθαρρυνθεί η αξιοποίηση 'ιδιαίτερων' αριθμών, όπως, για παράδειγμα, 9999 ή 10001.

Σε όλες τις περιπτώσεις, ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να απαντήσουν, χρησιμοποιώντας μόνο τις εκφράσεις του προσώπου του, χειρονομίες και τη γλώσσα του σώματος. Αν διατυπωθούν συγχρόνως μια σωστή και μια λανθασμένη ή μη ακριβής απάντηση, σταματά, ενθαρρύνει τους μαθητές να επαναλάβουν, να ακούσουν ο ένας τον άλλο και να συζητήσουν. Επιβεβαιώνει τις σωστές απαντήσεις, χωρίς να επικρίνει τις λανθασμένες, επιδιώκοντας τη συμμετοχή όλων των μαθητών.

Στη συγκεκριμένη προσέγγιση, ο εκπαιδευτικός διδάσκει χωρίς να μιλά (γι' αυτό και αποκαλείται «σιωπηρή»). Μέσω αυτής, η προσοχή του εκπαιδευτικού εστιάζεται στις απαντήσεις των μαθητών. Μοιάζει με τη διδασκαλία που θα έκανε, αν είχε χάσει τη φωνή του. Σε αυτή τη συνθήκη, οι μαθητές, παραδόξως, αισθάνονται υπό έλεγχο και ο εκπαιδευτικός τους παρακολουθεί να ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις του και να αναζητούν σημάδια επιδοκμασίας. Αυτός ο κύκλος ανατροφοδότησης συνιστά ένα ισχυρό εργαλείο μάθησης.

εργαλείων/ πινάκων

Διεργασία
δημιουργίας
συνδέσεων/ δεσμών

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	20	30	40	50	60	70	80	90
100	200	300	400	500	600	700	800	900
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
10000	20000	30000	40000	50000	60000	70000	80000	90000
100000	200000	300000	400000	500000	600000	700000	800000	900000
1000000	2000000	3000000	4000000	5000000	6000000	7000000	8000000	9000000

Πίνακας 1. Ο πίνακας του Gattegno από το 1 μέχρι το 9 999 999.

Γ' Τάξη: Εργασία με αριθμογραμμές (στρατηγικές νοερών υπολογισμών)

Ένα από τα σημαντικά γνωρίσματα των διαδικασιών νοερού υπολογισμού είναι ο ιδιοσυγκρασιακός τους χαρακτήρας,

δηλαδή, το γεγονός ότι επιλέγονται με βάση τη συμβατότητά τους προς τον εκάστοτε τρόπο σκέψης του κάθε μαθητευόμενου. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της αφαίρεσης, άλλοτε υιοθετείται η μέτρηση προς τα εμπρός, άλλοτε η αφαίρεση και άλλοτε η διαφορά. Αυτήν ακριβώς την ευελιξία στην υπολογιστική σκέψη των μαθητών είναι που επιδιώκει να επιτύχει η σχετική διδασκαλία και προς αυτήν την κατεύθυνση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη η αριθμογραμμή. Όταν οι μαθητές αποκτήσουν ευχέρεια στη χρήση στρατηγικών υπολογισμού, μπορούν να επιλέξουν με μεγαλύτερη επιτυχία την κατάλληλη στρατηγική για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος.

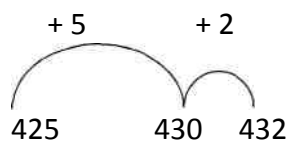
Διεργασία
επικοινωνίας μέσω
της χρήσης εργαλείων

Οι κάθετες πράξεις «με μολύβι και χαρτί» εμπεριέχουν στρατηγικές, το εύρος των οποίων είναι περιορισμένο. Οι μαθητές, καθώς εξοικειώνονται με την εκτέλεση κάθετων πράξεων, είναι πιθανόν να σκεφτούν ότι η αξιοποίηση άλλων, κατεχοχόν νοερών μεθόδων, δεν είναι επιτρεπτή. Η αξιοποίηση της ‘κενής’ αριθμογραμμής μπορεί να συμβάλλει σημαντικά προς την κατεύθυνση της ‘νομιμοποίησης’ εναλλακτικών στρατηγικών εκτέλεσης των τεσσάρων πράξεων, ενθαρρύνοντας πιο ευέλικτες προσεγγίσεις και αναγνωρίζοντας αφενός την ποικιλότητα και τη δυναμική της ανθρώπινης σκέψης και αφετέρου το δικαίωμα της σύγκρισης και της επιλογής με σαφή κριτήρια του μαθητευόμενου στο συγκεκριμένο ζήτημα. Αυτό που, τελικά, επιδιώκεται με τη χρήση της αριθμογραμμής είναι ο εντοπισμός της πιο κατάλληλης, δηλαδή, της πλέον ακριβούς, απλής, γρήγορης και χωρίς λάθη μεθόδου υπολογισμού. Στα παραδείγματα που δίνονται παρακάτω, οι αριθμοί μπορούν να αντικατασταθούν προοδευτικά και ανάλογα με τις δυνατότητες των μαθητών από μεγαλύτερους.

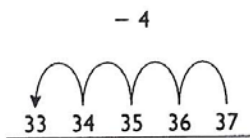
Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας

Διεργασία
μεταγνωστικής
ενημερότητας

Μέτρηση προς τα εμπρός: Είναι χρήσιμη για τους αριθμούς που έχουν μικρή διαφορά, για παράδειγμα, 432 - 425:



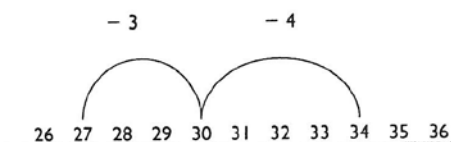
Μέτρηση προς τα πίσω: Η μέτρηση προς τα πίσω αποτελεί μια χρήσιμη στρατηγική για την επίλυση αφαιρέσεων με μεγάλη διαφορά, ιδιαίτερα όταν ο ένας από τους αριθμούς είναι μικρός. Η διαδικασία αυτή απαιτεί μια αναζήτηση του μικρότερου στοιχείου της αριθμογραμμής που είναι απαραίτητο για τη επίλυση του προβλήματος. Για παράδειγμα, 37 - 4:



Ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε να εμπλέξει τους μαθητές με ένα κάλεσμα του τύπου: «Φανταστείτε ότι το μολύβι που χρησιμοποιείτε λειτουργεί μόνο του. Σκεφτείτε το 'τριάντα επτά μείον τέσσερα'. Τώρα, δείξτε μου με το δάκτυλό σας πού θα πάει το μολύβι. Τώρα, σχεδιάστε το στον πίνακα».

Είναι πιθανόν οι μαθητές να υιοθετήσουν για τη μέτρηση προς τα πίσω τέσσερα άλματα του ενός βήματος. Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να επικροτήσει αυτήν την επιλογή, προσκαλώντας τους, ταυτόχρονα, να φανταστούν άλλα άλματα, πριμοδοτώντας, αν δεν αναδειχτεί από τους μαθητές, ένα άλμα τεσσάρων βημάτων. Αν οι μαθητές αδυνατούν να ανταποκριθούν, θα μπορούσε να τους ενθαρρύνει προς αυτήν την κατεύθυνση με 'βολικά' παραδείγματα, όπου ο μικρότερος από τους δύο όρους δεν θα ξεπερνά τη δεκάδα: $86 - 5$, $34 - 2$, $69 - 8$. Αργότερα, θα μπορούσε να επεκταθεί και σε περιπτώσεις αλλαγής της δεκάδας, για παράδειγμα, σε $34 - 7$.

Γέφυρα με την πλησιέστερη δεκάδα: Η στρατηγική αυτή στηρίζεται στον επιμερισμό του μικρότερου από τους δύο όρους της πράξης με κατάλληλο τρόπο. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της αφαίρεσης $34 - 7$, η 'γεφύρωση' αυτή θα είχε ως εξής:



Πρόκειται για μια τεχνική που απαιτεί ευχέρεια στον επιμερισμό, στην άμεση ανάκληση από τη μνήμη των δυνατών τριάδων των αριθμών και στην επιλογή αυτής που ταιριάζει. Για παράδειγμα, στην παραπάνω περίπτωση, οι δυνατές τριάδες είναι: $(0, 7, 7)$ & $(7, 0, 7)$, $(1, 6, 7)$ & $(6, 1, 7)$, $(2, 5, 7)$ & $(5, 2, 7)$ και $(3, 4, 7)$ & $(4, 3, 7)$ αλλά κατάλληλη είναι μόνο η τελευταία, καθώς η δεκάδα (30) είναι 4 μακριά από το 34. Ανάλογα, για τον υπολογισμό του $34 - 9$, η κατάλληλη τριάδα είναι η $(4, 5, 9)$. Η στρατηγική της 'γέφυρας' μπορεί, φυσικά, να χρησιμοποιηθεί και με σημείο αναφοράς τις εκατοντάδες [π.χ., $236 - 140 = 236 - (100+36+4)$], τις χιλιάδες, κτλ.

Δ' Τάξη: Εργασία με πλέγματα

Οι πίνακες/ τα πλέγματα αριθμών μπορούν να προσφέρουν

ευκαιρίες για ενδιαφέρουσες εμπειρίες κατανόησης της έννοιας του φυσικού αριθμού και των πράξεων με φυσικούς αριθμούς.

Σε αυτήν την προοπτική, προτείνεται η χρήση σεναρίων δραστηριοτήτων με 'σύννεφα' και 'σταγόνες' που κρύβουν μια μικρή, αρχικά, και μεγαλύτερη, αργότερα, περιοχή του πλέγματος αριθμών (Εικόνα 1).

Το μάθημα μπορεί να ξεκινήσει με συζήτηση στην τάξη σχετικά με τα ορατά μέρη του πλέγματος. Στο πλαίσιο αυτής της συζήτησης, ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν ό,τι γνωρίζουν για τη δομή του πλέγματος, για να εργαστούν με τους κρυμμένους αριθμούς. Μπορεί να δημιουργήσει συνθήκες εργασίας σε διαφορετικά επίπεδα δυσκολίας και να καλέσει τους μαθητές διαφορετικών ομάδων να εργαστούν στις αντίστοιχες συνθήκες ενός, μερικών ή και όλων αυτών των επιπέδων. Για παράδειγμα, μια ομάδα θα μπορούσε να επιχειρήσει να αποκαλύψει τους αριθμούς που καλύπτουν κάποιες σταγόνες σε ένα πλέγμα με αριθμούς, ενώ άλλες ομάδες θα μπορούσαν να μελετήσουν τους συγκεκριμένους αριθμούς σε γραπτούς αλγορίθμους ή σε προβλήματα ή σε σχέση με τις πράξεις που διέπουν το πλέγμα.

Διεργασία
επικοινωνίας μέσω
της χρήσης εργαλείων

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας

72	73	74	75	76	77	78	79	80	81
71	42	43	44	45	46	47	48	49	83
70	41	20	21	22	23	24	25	50	83
69	40	19	6	7	8	9	10	51	84
68	39	18	5	0	?			52	85
67	38	17	4	3	2	11	28	53	86
66	37	16	15	14	13	12	29	54	87
65	36	35	34	33	32	31	30	55	88
64	63	62	61	60	59	58	57	56	89
99	98	97	96	95	94	93	92	91	90

Εικόνα 7

Για την προβολή των πλεγμάτων θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ένας overhead προτζέκτορας και σύννεφα από χαρτί, για να καλυφθούν συγκεκριμένοι αριθμοί ή ένας διαδραστικός πίνακας. Επίσης, μια αφίσα τοίχου και σύννεφα από χαρτόνι. Οι αφίσες μπορούν να διατηρήσουν το ενδιαφέρον των παιδιών για πολλά μαθήματα.

Δραστηριότητες επέκτασης: Οι διαδραστικοί πίνακες δίνουν τη δυνατότητα αξιοποίησης πλεγμάτων με αριθμούς, μέρος των οποίων μπορεί να μην εμφανίζεται ή να εμποδίζεται η ανάγνωσή του μέσω της τοποθέτησης μιας άλλης εικόνας πάνω του, π.χ., ενός σύννεφου. Ακόμη, στα πλέγματα αυτά δίνεται η δυνατότητα φωτισμού μικρού μόνο μέρους της εικόνας. Οι παραπάνω δυνατότητες μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε οποιοδήποτε κείμενο (πεζό, ποίημα, συνταγή...) ή σε μια γραφική παράσταση (εικόνα, γραφικά,

Διεργασία
επικοινωνίας μέσω
της χρήσης
εργαλείων/ πινάκων

αριθμογραμμή, πλέγματα με αριθμούς, διαγράμματα, γεωμετρικά σχήματα). Έτσι, δημιουργούνται ποικίλες και ενδιαφέρουσες συνθήκες εργασίας σχετικά με την έννοια των φυσικών αριθμών, των πράξεων με φυσικούς αριθμούς αλλά και των αντίστοιχων ιδιοτήτων σε όποιο επίπεδο δυσκολίας είναι επιθυμητό.

Διεργασία
επικοινωνίας μέσω
της χρήσης
εργαλείων/ πινάκων

Διεργασία
δημιουργίας
συνδέσεων

Ε' Τάξη: 'Αριθμό-γωννά'

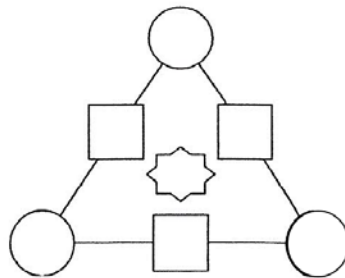
Τα 'αριθμό-γωννά' είναι πολύγωνα αριθμών που χρησιμοποιούνται για την άσκηση σε υπολογισμούς πρόσθεσης, αφαίρεσης και πολλαπλασιασμού και για τη μελέτη των ιδιοτήτων των συγκεκριμένων πράξεων (Σχήμα 1). Σε κάθε πλευρά ενός τέτοιου πολυγώνου, οι αριθμοί στα τετράγωνα είναι το άθροισμα, η διαφορά ή το γινόμενο των αριθμών στους κύκλους. Ο βαθμός δυσκολίας συμπλήρωσης των 'αριθμο-γώνων' εξαρτάται από το μέγεθος και το είδος των αριθμών, καθώς και από την πράξη που χρησιμοποιείται.

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας

Διεργασία
επικοινωνίας μέσω
της χρήσης εργαλείων

Πρόσθεση: Θα μπορούσε να ζητηθεί η συμπλήρωση του 'αριθμο-γώνου' που ακολουθεί σε καθεμία από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Υπάρχει ένας αριθμός σε κάθε κύκλο
- Υπάρχουν αριθμοί σε δύο κύκλους και σε ένα τετράγωνο
- Υπάρχουν αριθμοί σε δύο τετράγωνα και σε έναν κύκλο
- Υπάρχουν αριθμοί και στα τρία τετράγωνα (μπορεί να συμπληρωθεί το 'αριθμό-γωννό';)



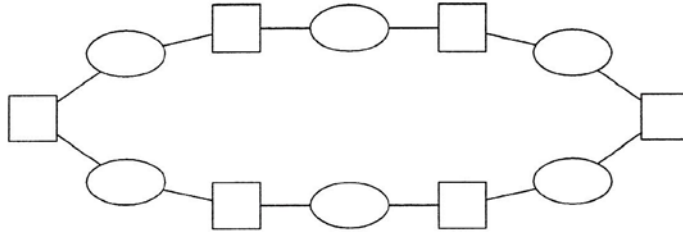
Σχήμα 4

Αφαίρεση: Ο αριθμός στο τετράγωνο είναι η διαφορά και όχι το άθροισμα των δύο αριθμών στους κύκλους, σε καθεμία πλευρά. Για να αυξηθεί η δυσκολία, μπορεί να χρησιμοποιηθούν διψήφιοι, τριψήφιοι, κτλ αριθμοί (αλλά και κλάσματα, ποσοστά ή δεκαδικοί αριθμοί).

Πολλαπλασιασμός: Ο αριθμός στο τετράγωνο είναι το γινόμενο των δύο αριθμών στους κύκλους κάθε πλευράς. Θα μπορούσε να δοθεί ο αριθμός στο κεντρικό αστέρι (αριθμός-στόχος) και

έναν ακόμη αριθμός.

Αντί τριγώνου ή άλλου κανονικού σχήματος, το 'αριθμό-γωνο' θα μπορούσε να έχει σχήμα βρόγχου ή περιδέραιο, όπως το παρακάτω (Σχήμα 2). Θα είχε ενδιαφέρον να ζητήσει ο εκπαιδευτικός από τους μαθητές να εργαστούν δεξιόστροφα αλλά και αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού στο



Σχήμα 5

ίδιο περιδέραιο και να συζητήσει μαζί τους τις παρατηρήσεις τους.

Τέλος, ως συνέχεια και επέκταση των παραπάνω δραστηριοτήτων, θα μπορούσε να δοθεί στους μαθητές ένα ολοκληρωμένο 'αριθμό-γωνο' και να ζητηθεί να βρουν τον κανόνα. Το 'αριθμο-γωνο' θα μπορούσε να είναι τετραγωνικό, πενταγωνικό ή και εξαγωνικό.

Διεργασία
δημιουργίας
συνδέσεων/ δεσμών

ΣΤ' Τάξη: Δραστηριότητες με το 24 (ιδιότητες αριθμών)

Ο εκπαιδευτικός συζητά με τους μαθητές για το ρόλο του 24 στη ζωή μας. Για παράδειγμα, έχουμε 24 ώρες σε μία ημέρα, χρησιμοποιούμε ένα ρολόι με 24 ώρες, το οποίο δεν δείχνει ποτέ 24.00 και αγοράζουμε τα αυγά σε δωδεκάδες. Με βάση τις ιδέες που θα αναπτύξουν οι μαθητές, μπορεί να κατασκευαστεί μια αφίσα για τον αριθμό 24, η οποία να αποτελέσει σταθερό σημείο αναφοράς της τάξης.

Διεργασία
δημιουργίας
συνδέσεων/ δεσμών

Η εργασία με αριθμούς, όπως ο 24, προσφέρει:

- ευκαιρίες διερεύνησης των ιδιοτήτων των αριθμών
- εξοικείωση με διάφορους τρόπους αναπαράστασης ενός αριθμού
- ευκαιρίες για συζήτηση, σχεδίαση, δόμηση και αποδόμηση, καθώς και για συσχετίσεις αναφορικά με τον αριθμό
- μελέτη των κανονικοτήτων σε έναν αριθμό
- συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών μαθηματικών περιοχών
- εργασία με το εμβαδόν, την περίμετρο, την άλγεβρα και την ανάλυση δεδομένων
- ευκαιρίες ανάπτυξης της ευέλικτης σκέψης, της δημιουργικότητας, της φαντασίας και της επιμονής των

μαθητών.

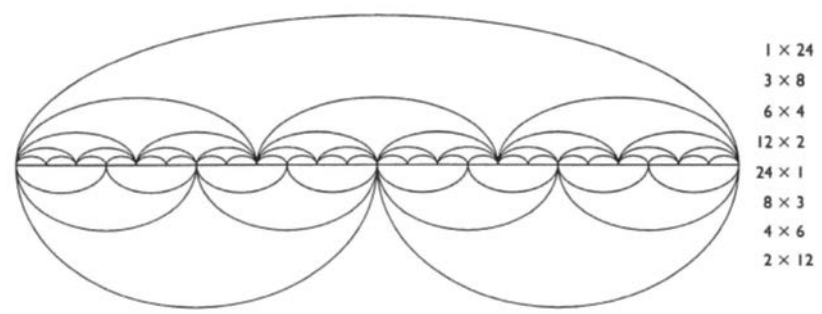
Στη φάση που οι μαθητές παρουσιάζουν όσα γνωρίζουν για τον αριθμό 24, είναι χρήσιμο να ενθαρρυνθούν ώστε να ολοκληρώσουν δηλώσεις για τις ιδιότητές του, του τύπου «το 24 είναι/ έχει/ μπορεί/ δεν μπορεί/ δεν είναι ...». Ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε να αρχίσει με κάποιες δηλώσεις, ενθαρρύνοντάς τους να διατυπώσουν άλλες.

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας

Το 24 είναι ζυγός αριθμός	Το 24 έχει τους παρακάτω παράγοντες...
Το 24 είναι πολλαπλάσιο του...	Το 24 μπορεί να διαιρεθεί με...
Το 24 είναι το γινόμενο του...	Το 24 είναι το άθροισμα του...
Το 24 είναι μεγαλύτερο από...	Το 24 είναι λιγότερο από ...
Το 24 δεν είναι ίσο με...	Το 24 δεν είναι πρώτος/ μονός αριθμός
Το 24 δεν μπορεί να διαιρεθεί με...	Το 24 δεν είναι πολλαπλάσιο του ...

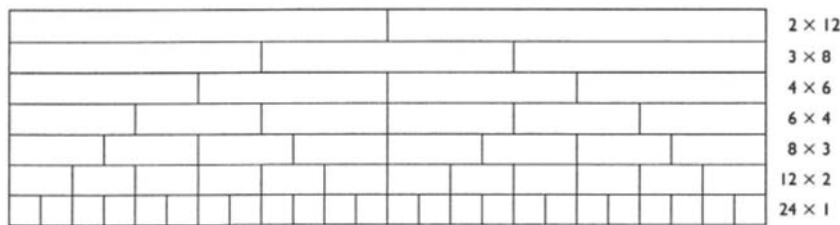
Στη συνέχεια, θα μπορούσε να ζητηθεί από τους μαθητές να αναπαραστήσουν τους παράγοντες του 24 στην αριθμογραμμή και να σχεδιάσουν καμπύλες γραμμές για να ενώσουν όλα τα κοινά πολλαπλάσια, όπως παρακάτω, χρησιμοποιώντας χρώματα, για να υποδείξουν τους κοινούς παράγοντες (Σχήμα 3).

Διεργασία
επικοινωνίας μέσω
της χρήσης εργαλείων



Σχήμα 6

Τέλος, ο εκπαιδευτικός μπορεί να αξιοποιήσει το ακόλουθο διάγραμμα, για να αναδείξει τις σχέσεις μεταξύ ορισμένων από τις δηλώσεις που καταγράφηκαν παραπάνω για τον αριθμό 24 (Σχήμα 4).



Σχήμα 7

ΣΤ' Τάξη: Ψηφία που λείπουν (αξία θέσης ψηφίων & αντιστροφή πράξεων)

Η σύνδεση της αξίας θέσης ψηφίων με την αντιστροφή των αριθμητικών πράξεων συμβάλλει στην απόκτηση της 'αίσθησης του αριθμού', στην εξοικείωση με την εκτέλεση

πράξεων, καθώς και στην ενασχόληση με αριθμούς σε ανώτερο επίπεδο. Κρύβοντας ένα ψηφίο σε μια αριθμητική παράσταση (π.χ., $23^* + 56 = 290$), οι μαθητές ενθαρρύνονται να εστιάσουν την προσοχή τους στις μαθηματικές ιδέες που εμπλέκονται. Η δραστηριότητα ισχυροποιείται, αν δύο ή περισσότερα ψηφία είναι κρυμμένα ($23^* + 56 = 2^*0$). Σε αυτή την περίπτωση, η αριθμητική παράσταση πρέπει να εξεταστεί ως ολότητα σε συνδυασμό με τον τρόπο σύνδεσης των επιμέρους στοιχείων της.

Διεργασία
δημιουργίας
συνδέσεων/ δεσμών

Όταν οι μαθητές καλούνται να συνδυάσουν δύο φυσικούς αριθμούς χρειάζεται να δράσουν σε δύο επίπεδα δομής. Το πρώτο σχετίζεται με την πράξη που τους συνδέει. Η κατανόηση της σχέσης αποτελέσματος και αντιστρεψιμότητας μιας τέτοιας πράξης (π.χ., αυξάνεται ή ελαττώνεται το αποτέλεσμα με την αντιστροφή, έχει σημασία η σειρά των δύο αριθμών κ.ά.) αποτελεί αναγκαία προϋπόθεση επιτυχίας.

Το δεύτερο επίπεδο αφορά τον ίδιο τον αριθμό, τα ψηφία του οποίου αντιπροσωπεύουν διαφορετικές αξίες, ανάλογα με τη θέση τους. Στο δεκαδικό σύστημα το μέγεθος καθορίζεται από τη διάταξη των ψηφίων από δεξιά προς τα αριστερά, καθώς και από το μέγεθος του κάθε ψηφίου. Οι μαθητές χρειάζεται να συνδέσουν την αίσθηση που έχουν για την αξία του κάθε ψηφίου με την πραγματική αξία της θέσης που κατέχει, ώστε να αποκτήσουν την αίσθηση του συνολικού μεγέθους του αριθμού.

Η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού είναι δυνατόν να επιταχυνθεί μέσω δραστηριοτήτων ανάλογων με αυτές που προτείνονται παρακάτω. Μπορούν να υπάρξουν περισσότερα από ένα σημεία εκκίνησης στην προσπάθεια επίλυσης των αριθμητικών παραστάσεων στις οποίες λείπει ένα ψηφίο, καθώς επίσης και περισσότερες από μία δυνατότητες σε μια πορεία προς την κατεύθυνση της σωστής επίλυσης. Αυτή η ευελιξία επιτρέπει εξατομικευμένες προσεγγίσεις και κατασκευές από μαθητές, βασισμένες στις προσωπικές τους προτιμήσεις. Αυτές πρέπει να αναδειχθούν και να αναγνωριστούν, καθώς ένας από τους στόχους της συζήτησης στην τάξη είναι να τονιστεί ότι υπάρχουν πολλά σχήματα και δομές που βασίζονται σε κοινές μαθηματικές έννοιες.

Υλικό για την πραγματοποίηση των δραστηριοτήτων:
Αριθμομηχανές (για ατομική χρήση ή σε ζεύγη).

Ενδεικτική πορεία διδασκαλίας:

- Παραδείγματα στον πίνακα. Η γλώσσα των ψηφίων, των αριθμών και των αντίστροφων πράξεων.
- Ζεύγη/ ομάδες εργασίας στις ερωτήσεις 1-3 στο φύλλο

εργασίας 1.

- Συζήτηση στην τάξη. Γνώση των σχέσεων των αριθμών. Εκτέλεση της αντίθετης πράξης, το μέγιστο πιθανό αποτέλεσμα δύο ψηφίων. Παραστάσεις με πολλές λύσεις.
- Ζεύγη/ ομάδες εργασίας στις ερωτήσεις 4 και 5.
- Συζήτηση στην τάξη. Πρόσθεση ψηφίων σύμφωνα με την αξία τους. Το μεγαλύτερο αποτέλεσμα με τη χρήση μεγαλύτερων ψηφίων στις υψηλότερες θέσεις ψηφίων και το αντίστροφο. Γιατί υπάρχουν δύο πιθανές παραστάσεις που δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα;
- Ζεύγη/ ομάδες εργασίας στις ερωτήσεις 1-3 του φύλλου εργασίας 2.
- Συζήτηση στην τάξη. Πίνακας πολλαπλασιασμού. Η διαίρεση ως αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού. Η αίσθηση του μεγέθους.
- Ζεύγη/ ομάδες εργασίας στις ερωτήσεις 4 και 5.
- Συζήτηση στην τάξη. Πώς πρέπει να σκεφτείς για να αποδείξεις ότι μια αριθμητική παράσταση είναι αδύνατη; Εκτέλεση του πολλαπλασιασμού χωριστά για μονάδες και δεκάδες και, στη συνέχεια, πρόσθεση των αποτελεσμάτων.

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας

Φύλλο εργασίας 1: Ψηφία που λείπουν

Κάθε ερωτηματικό (;) είναι ένα ψηφίο που λείπει, από το 0 μέχρι το 9. Το ψηφίο σε κάθε ερωτηματικό (;) μπορεί να είναι διαφορετικό.

1. Να εξηγήσεις πώς βρίσκεις τα ψηφία που λείπουν σε κάθε άθροισμα.

$$\begin{aligned} 12 + ; &= 19 \\ ;;; + 150 &= 257 \\ ; + 8 &= ;4 \end{aligned}$$

2. Τι παρατηρείς σχετικά με τα παρακάτω αθροίσματα; Μπορείς να εξηγήσεις γιατί;

$$\begin{aligned} ; + 8 &= 2; \\ 2; + 4 &= 1; \end{aligned}$$

3. Πόσες λύσεις υπάρχουν γι' αυτό το άθροισμα; Γιατί;

$$33 + ; = 4;$$

(Συζήτηση στην τάξη)

4. Να βρεις τα ψηφία που λείπουν. Ποιες ερωτήσεις έκανες στον εαυτό σου για να βρεις τα ψηφία που λείπουν;

$$3;6 + 5; = 383$$

Διεργασία
μεταγνωστικής
ενημερότητας

$$8?3 - 7; = 915$$

5. Σε αυτήν την άσκηση τα ψηφία πρέπει να είναι διαφορετικά:

$$;; + ;; =$$

Να βρεις το μεγαλύτερο δυνατό άθροισμα. Να εξηγήσεις γιατί είναι το μεγαλύτερο.

Να βρεις το μικρότερο δυνατό άθροισμα και να το εξηγήσεις.

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας

Φύλλο εργασίας 2: Ψηφία που λείπουν

1. Δύο λύσεις είναι πιθανές. Να εξηγήσεις γιατί.

$$8; x ;6 = 2158$$

$$;7 x 4; = 1188$$

2. Να εξηγήσεις πώς βρίσκεις καθένα από τα ψηφία που λείπουν:

$$8; x ;6 = 2158$$

$$;7 x 4; = 1188$$

3. Να βρεις το ψηφίο που λείπει: $5;2 : 1; = 28$

Γιατί σε αυτήν την άσκηση σκέφτηκες με διαφορετικό τρόπο από ότι στην προηγούμενη; (Συζήτηση στην τάξη)

4. Τι παρατηρείς σχετικά με το αποτέλεσμα της πράξης $980 : ; = 2;$

5. Σε αυτήν την άσκηση κάθε ερωτηματικό (;) είναι ένα διαφορετικό ψηφίο.

$$;; x ;;$$

Να βρεις το μεγαλύτερο αποτέλεσμα και να εξηγήσεις γιατί είναι το μεγαλύτερο.

Να βρεις το μικρότερο αποτέλεσμα και να το εξηγήσεις.

Επέκταση 1

Να χρησιμοποιήσεις μόνο τα πέντε ψηφία 1, 2, 3, 4 και 5 και τις πράξεις της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης. Να φτιάξεις προβλήματα με ψηφία που λείπουν για να τα λύσουν οι συμμαθητές σου.

(Σημείωση: Οι μαθητές θα πρέπει να κατανοήσουν ότι σε μια πρόσθεση, για να υπάρχει μοναδική λύση, θα πρέπει να λείπει μόνο ένα ψηφίο. Σχετικά με την αφαίρεση, θα πρέπει να εργαστούν συστηματικά και να αποσαφηνίσουν κάθε βήμα.)

Επέκταση 2

Ποιες αριθμητικές προτάσεις μπορείς να φτιάξεις χρησιμοποιώντας μόνο τα πέντε ψηφία και μία μόνο πράξη για να δημιουργήσεις το μεγαλύτερο αποτέλεσμα; Να κάνεις το

ίδιο και για το μικρότερο αποτέλεσμα.

(Σημείωση: Οι μαθητές, χρησιμοποιώντας μόνο τα ψηφία 1, 2, 3, 4 και 5, θα μπορούσαν να βρουν τον καλύτερο τρόπο διαχωρισμού για να κάνουν την πρόσθεση και να εξηγήσουν στην πορεία το σκεπτικό τους.)

Διεργασία
μεταγνωστικής
ενημερότητας

Άλγεβρα

Βασικά θέματα: Αλγεβρικές Παραστάσεις, Μεταβλητές, Εξισώσεις

Σημασία της ενότητας: Η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης θεωρείται ιδιαίτερα σημαντική για την καλλιέργεια της ικανότητας ανάλυσης καταστάσεων με τη βοήθεια συμβόλων. Ωστόσο, μικρός αριθμός μαθητών αλλά και εκπαιδευτικών κατανοούν τη σκοπιμότητα διδασκαλίας της άλγεβρας, με αποτέλεσμα την περιορισμένη πρόσβαση των πρώτων σε βασικές αλγεβρικές έννοιες και δομές. Η πρόσβαση αυτή δυσχεραίνεται ακόμη περισσότερο από τις σπάνιες 'αυθεντικές', αλγεβρικές «εμπειρίες» που βιώνουν οι μαθητές κατά τη διδασκαλία, δηλαδή, εμπειρίες συνειδητοποίησης των σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων, οι οποίες αποτελούν σημείο αφετηρίας της αλγεβρικής σκέψης. Οποιαδήποτε προσπάθεια μαθησιακής εξέλιξης στην άλγεβρα προϋποθέτει την κατανόηση της σημασίας των αλγεβρικών συμβολισμών και των αντίστοιχων χειρισμών τους.

Η έρευνα έχει δείξει ότι, όταν οι μαθητές εργάζονται σε 'αλγεβρικά περιβάλλοντα', μαθαίνουν να χρησιμοποιούν σύμβολα για να αναπαραστήσουν αριθμούς, να γράφουν αλγεβρικές παραστάσεις, να εργάζονται με αγνώστους και να εκφράζουν σχέσεις μεταξύ μεταβλητών. Επιπλέον, ωθούνται να χρησιμοποιήσουν μια συμβολική γλώσσα, με αποτέλεσμα να ασχολούνται με δραστηριότητες μετασχηματισμού, οι οποίες βασίζονται σε κανόνες. Ειδικότερα, μαθαίνουν να εκφράζουν τις κανονικότητες που συναντούν στα μαθηματικά με μεταβλητές, δραστηριότητα που προσφέρει ευκαιρίες χρήσης των μαθηματικών συμβόλων ως εργαλείων σκέψης και ως βοηθημάτων για την καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών ιδεών.

Προηγούμενη και επόμενη γνώση: Κατά τη διάρκεια του πρώτου κύκλου εκπαίδευσης (5 – 8 ετών) οι μαθητές ασχολήθηκαν σε ικανοποιητικό βαθμό με τη μελέτη μοτίβων, κυρίως σε επίπεδο περιγραφής και διερεύνησης, καθώς και με την επεξεργασία απλών αριθμητικών σχέσεων (ισότητες και ανισότητες). Στις τάξεις Γ' - Στ' του Δημοτικού Σχολείου, οι μαθητές θα έχουν την ευκαιρία να αναπτύξουν την αλγεβρική τους σκέψη στο πλαίσιο των παρακάτω δραστηριοτήτων:

- Παρατήρηση, πρόβλεψη, εξήγηση και γενίκευση μοτίβων με λέξεις και σύμβολα.
- Εξερεύνηση και χρήση σχέσεων, απεικονίσεων και συναρτήσεων.
- Εξερεύνηση, ερμηνεία και κατασκευή διαγραμματικών αναπαραστάσεων. αριθμητικής πληροφορίας.
- Έκφραση συναρτήσεων και των γραφικών τους αναπαραστάσεων με λέξεις και γράμματα.
- Κατασκευή, ερμηνεία και επίλυση απλών εξισώσεων και τύπων.
- Αλγεβρικός συλλογισμός.
- Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση αλγεβρικών εννοιών και δεξιοτήτων.

Ως συνέπεια της παραπάνω εμπειρίας, οι μαθητές αναμένεται να αναπτύξουν επαρκώς την κατανόηση των δομικών χαρακτηριστικών της αριθμητικής και να την αξιοποιούν ικανοποιητικά, για να μετασχηματίζουν απλές αλγεβρικές παραστάσεις και σχέσεις. Στο Γυμνάσιο, η νοητική αυτή δράση αναμένεται να εδραιωθεί και να αναπτυχθεί περαιτέρω, ώστε οι μαθητές να είναι σε θέση, προοδευτικά, να λειτουργούν με ευχέρεια αλλά και να επιτυγχάνουν την κατανόηση σε καθαρώς συμβολικό επίπεδο.

Δυσκολίες των μαθητών: Η εξαιρετικά εκτεταμένη έρευνα αναφορικά με τις δυσκολίες των μαθητών στην άλγεβρα είναι ιδιαίτερα αποκαλυπτική (βλέπε και σχετική ενότητα στο κείμενο του νέου Προγράμματος Σπουδών). Παρακάτω, επισημαίνονται επιγραμματικά ορισμένες μόνο από αυτές τις δυσκολίες για τους μαθητές του β΄ κύκλου της υποχρεωτικής εκπαίδευσης.

Αναφορικά με τον αλγεβρικό συμβολισμό, η έρευνα δείχνει ότι οι μαθητές, ακόμη και μετά το τέλος της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, τείνουν είτε να χειρίζονται τα γράμματα ως συγκεκριμένα αντικείμενα είτε να τα αγνοούν, ενώ αρκετοί τα θεωρούν ως συγκεκριμένους αγνώστους. Ελάχιστοι μαθητές είναι σε θέση να αντιληφθούν τα γράμματα ως μεταβλητές. Η σχετική βιβλιογραφία αποδίδει αυτήν τη δυσκολία στην περιορισμένη κατανόηση από μέρους τους ορισμένων δομικών χαρακτηριστικών της αριθμητικής, υποδεικνύοντας την ανάγκη εστίασης της διδασκαλίας σε αυτά ακριβώς τα στοιχεία σε όλη τη διάρκεια του β΄ κύκλου. Εξάλλου, η διδασκαλία της άλγεβρας, στη συνέχεια (γ΄ κύκλος), επικεντρώνεται στους μετασχηματισμούς σύνθετων αλγεβρικών παραστάσεων, κάτι που απαιτεί ικανότητα χειρισμού των παραστάσεων ως αντικειμένων αυτών καθαυτών (δηλαδή, εφαρμογής ιδιοτήτων σε παραστάσεις και όχι πλέον σε αριθμούς).

Σε σχέση με τις αλγεβρικές παραστάσεις, η έρευνα έχει δείξει ότι συχνά οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν ή δεν αποδέχονται ότι ο συνολικός αριθμός αντικειμένων σε δύο σύνολα που περιέχουν 3 και 5 αντικείμενα αντιστοίχως, είναι $3+5$ (και όχι 8), γεγονός που μπορεί να οδηγήσει στην αδυναμία αναγνώρισης του ότι η έκφραση $k+l$ παριστάνει το σύνολο των αντικειμένων σε δύο σύνολα με k και l αντικείμενα αντιστοίχως. Δηλαδή, η ικανότητα χειρισμού της παράστασης $k+l$ ως αντικειμένου εξαρτάται από το αν ο μαθητής έχει συνειδητοποιήσει, έστω και ενστικτωδώς, τη συγκεκριμένη πραγματικότητα στο αριθμητικό περιβάλλον.

Πολλές έρευνες έχουν εντοπίσει τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές με τους μετασχηματισμούς αλγεβρικών παραστάσεων. Ορισμένες από αυτές έχουν ως εξής:

- Ασυνέπεια στον έλεγχο των προϋποθέσεων που πληρούν οι όροι της παράστασης, πριν από την έναρξη της εργασίας με αυτήν, καθώς και στη διαδικασία μετασχηματισμού που υιοθετείται.
- Αδυναμία συνεπούς εφαρμογής κάποιας στρατηγικής εργασίας και μεταφοράς γνώσεων από έναν τύπο αλγεβρικών παραστάσεων σε έναν άλλο (ακόμη και από μαθητές που έχουν διδαχτεί σημαντικό μέρος της άλγεβρας).
- Συχνά λάθη κατά την απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων του τύπου $3x-2=2x$, που αποδίδονται στην υπερ-γενίκευση μαθηματικά έγκυρων πράξεων.
- Μικρός βαθμός εξοικείωσης με τις συμβάσεις της αλγεβρικής σύνταξης. Για παράδειγμα, δυσκολία κατανόησης της χρησιμότητας της παρένθεσης ή ότι,

αν στην παράσταση $\alpha\beta$, το β αντικατασταθεί από το $-\beta$, η παράσταση δεν γίνεται $\alpha-\beta$, αλλά $\alpha(-\beta)$.

- Την τοποθέτηση του «=0» μετά από μια αλγεβρική παράσταση που ζητείται να απλοποιηθεί.

Τέλος, σε σχέση με τις εξισώσεις και, ειδικότερα, με τον τρόπο που οι μαθητές αντιλαμβάνονται το σύμβολο της ισότητας, πολλοί μαθητές θεωρούν το «=» ως ένα σημάδι που δηλώνει ότι πρέπει να κάνουν κάτι και συχνά να δώσουν μια απάντηση, έναν αριθμό, και όχι ως το σύμβολο που δηλώνει ίση αξία μεταξύ δεξιού και αριστερού μέλους της ισότητας. Αυτό γίνεται φανερό και από τη δυσκολία με την οποία αποδέχονται ισότητες, όπως $2+3=1+4$ ή $7=7$.

Προτάσεις για διδακτική διαχείριση: Οι σύγχρονες αντιλήψεις προτείνουν την εγκατάλειψη της διδασκαλίας της άλγεβρας ως γενίκευσης της αριθμητικής και την προσέγγισή της στην τάξη, ήδη από το δημοτικό σχολείο, μέσω της ανάδειξης δεσμών μεταξύ των δύο αυτών πεδίων στο πλαίσιο:

- της μελέτης σχέσεων μεταξύ αριθμών που μπορούν να εκφραστούν με γενικό τρόπο
- της εύρεσης αριθμών που λείπουν (αγνώστων) σε ισότητες και ταυτότητες
- της εργασίας με συναρτήσεις σε κάθε ευκαιρία και έκφρασής τους με λέξεις και γράμματα.

Η μελέτη των μοτίβων αποτελεί έναν από τους πλέον αναγνωρισμένους τρόπους ανάδειξης των δεσμών της αριθμητικής και της άλγεβρας και, επομένως, της εισαγωγής στην άλγεβρα και της εξοικείωσης του μαθητή με τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης. Μια τέτοια προσέγγιση θα πρέπει να περιλαμβάνει εργασία προοδευτικής δυσκολίας με μοτίβα, όπως, για παράδειγμα:

- Αντιγραφή, συνέχιση και επινόηση επαναλαμβανόμενων μοτίβων.
- Ανάπτυξη των εννοιών της 'κανονικότητας' και της 'ακολουθίας'.
- Αριθμητικές ακολουθίες που περιλαμβάνουν και ακολουθίες με περιττούς και άρτιους αριθμούς.
- Μοτίβα πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης.
- Μοτίβα σε πίνακες πολλαπλασιασμού.
- Εξήγηση μοτίβων και χρήση τους για τη διατύπωση προβλέψεων.
- Ερμηνεία και γενίκευση μοτίβων και έκφραση γενικεύσεων με λέξεις και σύμβολα.
- Εξήγηση μοτίβων που χρησιμοποιούνται σε νοητικές μεθόδους.
- Μοτίβα τετράγωνων και τριγωνικών αριθμών.
- Διερεύνηση πρώτων αριθμών.

Για την εργασία με μοτίβα, όπως περιγράφεται παραπάνω, μέσα αποτύπωσής τους, όπως πίνακες, πλέγματα, χαρτί μιλιμετρέ και άλλα μπορεί να αποτελέσουν ιδιαίτερα χρήσιμα εργαλεία ανάδειξης των επιθυμητών δομών. Σε οποιαδήποτε περίπτωση, οι μαθητές θα πρέπει να ενθαρρύνονται να περιγράφουν μοτίβα, να

εκφράζουν με λέξεις ή με άλλους τρόπους τη γενίκευση ενός μοτίβου και να εξηγούν γιατί μια ακολουθία συμβόλων συνιστά μοτίβο.

Η έκφραση του κανόνα που διέπει ένα μοτίβο οδηγεί αναπόφευκτα, σε κάποιο σημείο, στην ανάγκη αξιοποίησης γραμμάτων, δηλαδή, μεταβλητών. Διαπιστώνοντας τη δυσκολία πολλών μαθητών με την έννοια της μεταβλητής, η σύγχρονη βιβλιογραφία προτείνει την εμπλοκή τους σε δραστηριότητες όπου τα γράμματα χρησιμοποιούνται προοδευτικά ως συγκεκριμένοι άγνωστοι, ως γενίκευση ενός προτύπου και, τέλος, για να αναπαραστήσουν μια ποσότητα που μεταβάλλεται.

Τέλος, αν και η ρητή αναφορά σε συναρτήσεις είναι σπάνια στα Προγράμματα Σπουδών των μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, η έννοια της συνάρτησης είναι έμμεσα παρούσα στη μελέτη σχέσεων και απεικονίσεων και, ειδικότερα, στην:

- εξερεύνηση, χρήση και εξήγηση σχέσεων,
- ερμηνεία, γενίκευση και χρήση απεικονίσεων,
- εύρεση συντεταγμένων,
- αναγνώριση σχέσεων μεταξύ συντεταγμένων ενός γραφήματος,
- χρήση μηχανών αριθμών.

Η σύγχρονη βιβλιογραφία αποδίδει ιδιαίτερη σημασία στην παροχή ευκαιριών στους μαθητές αυτής της βαθμίδας για να συνειδητοποιήσουν την αξία της συνάρτησης τόσο στην καθημερινή ζωή όσο και στα ίδια τα μαθηματικά. Προς αυτήν την κατεύθυνση, η σχετική διδασκαλία είναι σημαντικό να αξιοποιήσει τις άτυπες εμπειρίες των μαθητών και να τους ενθαρρύνει να μελετούν σχέσεις σε διαγραμματικές απεικονίσεις, σε πίνακες, σε γραφήματα και σε συμβολικές αναπαραστάσεις.

Ενδεικτικές Δραστηριότητες:

Γ΄ Τάξη: Μυστικός κώδικας

Διεργασία
επικοινωνίας μέσω
της χρήσης εργαλείων

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24

A B Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο Π Ρ Σ Τ Υ Φ Χ Ψ Ω

Να αντιγράψεις και να συμπληρώσεις τον κώδικα.

Παρατήρησε:

19	13	9	12	5
↓	↓	↓	↓	↓
T	N	I	M	E

Παρακάτω, υπάρχουν κάποια μουσικά μηνύματα. Τι λένε;

- (1)

8	1
---	---

18	5
----	---

4	24
---	----

19	15
----	----

2	17	1	4	20
---	----	---	---	----
- (2)

10	1	11	5	18	5
----	---	----	---	----	---

19	7	13
----	---	----

1	18	19	20	13	15	12	9	1
---	----	----	----	----	----	----	---	---
- (3)

15

22	17	20	18	15	18
----	----	----	----	----	----

5	9	13	1	9
---	---	----	---	---

8	1	12	12	5	13	15	18
---	---	----	----	---	----	----	----
- | | | | | |
|---|---|----|----|---|
| 4 | 9 | 16 | 11 | 1 |
|---|---|----|----|---|

18	19	15
----	----	----

4	5	13	4	17	15
---	---	----	---	----	----
- (4)

16	7	3	1	9	13	5
----	---	---	---	---	----	---

18	19	15
----	----	----

10	1	21	5
----	---	----	---

18	19	9	18
----	----	---	----

4	5	10	1
---	---	----	---
- (5)

5	9	12	1	9
---	---	----	---	---

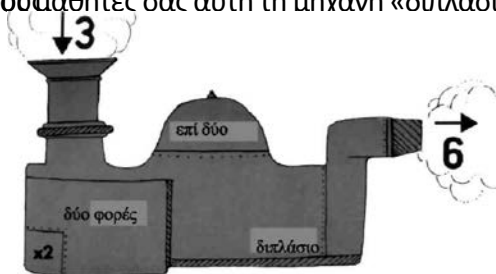
1	16	15	10	24	4	9	10	15	16	15	9	7	19	7	18
---	----	----	----	----	---	---	----	----	----	----	---	---	----	---	----
- | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|
| 16 | 17 | 24 | 19 | 15 | 20 |
|----|----|----|----|----|----|

2	1	8	12	15	20
---	---	---	----	----	----

Να φτιάξεις ένα δικό σου μήνυμα. Να το δώσεις σε ένα φίλο σου για να το αποκωδικοποιήσει.

Δ' Τάξη: Μηχανές απεικόνισης

Δείξε στον παππού σου αυτή τη μηχανή «διπλασιασμού» και

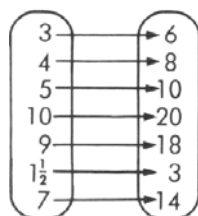


Εικόνα 1

Διεργασία δημιουργίας συνδέσεων/ δεσμών

Τι αποτέλεσμα θα έχεις όταν βάλεις μέσα το 4;

Αν το αποτέλεσμα είναι 20, ποιος αριθμός μπήκε στη μηχανή;



Αυτό το διάγραμμα δείχνει πώς η μηχανή αλλάζει κάποιους αριθμούς.

Διεργασία επικοινωνίας μέσω της χρήσης διαφορετικής μορφής εργαλείων

Να σχεδιάσεις ένα άλλο διάγραμμα, για να δείξεις πώς αλλάζουν κάποιοι άλλοι αριθμοί.

Να σχεδιάσεις διαφορετικά διαγράμματα, για να δείξεις τι συμβαίνει στους αριθμούς 3, 4, 5 και σε κάποιους άλλους αριθμούς, όταν χρησιμοποιείς:

- (α) Μια μηχανή «τριπλασίασε».
- (β) Μια μηχανή «πρόσθεσε 7».
- (γ) Μια μηχανή «αφαίρεσε 2».

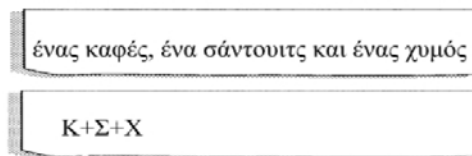
(δ) Μια μηχανή «πολλαπλασίασε με το 5 και μετά πρόσθεσε τρία».

Δ΄ Τάξη: Μίνι γεύματα

Παρακάτω, παρουσιάζεται το μενού ενός Καφέ.

Μενού	Φαγητό στο κατάστημα	Φαγητό σε πακέτο
Σάντουιτς	1,40	1,20
Πίτα	1,10	1,00
Μπισκότο	0,70	0,60
Καφές	1,00	0,90
Τσάι	0,90	0,70
Χυμός	1,00	0,90

Επειδή το Καφέ έχει πολύ κόσμο, το προσωπικό, αντί να γράφει ολόκληρη την παραγγελία, χρησιμοποιεί έναν κώδικα, στον οποίο οι τιμές των προϊόντων συμβολίζονται με γράμματα (Εικόνα 2).



Εικόνα 8

Αντί να γράφουν «ένας καφές, ένα σάντουιτς και ένας χυμός», γράφουν: **K+Σ+X**

Το κόστος αυτής της παραγγελίας είναι:

Φαγητό στο κατάστημα: $1,00+1,40+1,00=3,40$
 Φαγητό σε πακέτο: $0,90+1,20+0,90=3,00$

1. Να γράψεις τους κωδικούς των τιμών και να βρεις το κόστος της παραγγελίας στο κατάστημα και σε πακέτο για καθεμία από τις παρακάτω παραγγελίες.

- (α) ένα τσάι, ένα σάντουιτς.
- (β) ένας καφές, ένα μπισκότο και μία πίτα.
- (γ) ένας χυμός, ένα τσάι, ένα σάντουιτς και δύο πίτες.

Πώς έγραψες την παραγγελία της ερώτησης 1(γ) σε κώδικα;

Θα μπορούσες ίσως να γράψεις $X+T+Σ+Π+Π$

Ένας πιο σύντομος τρόπος είναι: $X+T+Σ+2Π$

Μια παραγγελία για 25 φλιτζάνια τσάι θα μπορούσε να γραφεί:

ή
$$\begin{matrix} T+T+T+T+T+T+T+T+T+T+T+T+T+T+T \\ +T+T+T+T+T+T+T+T+T+T+T+T+T+T+T \end{matrix} \quad 25T$$

Διεργασία δημιουργίας συνδέσεων/ δεσμών

Διεργασία επικοινωνίας μέσω της χρήσης διαφορετικής μορφής εργαλείων

Με τη δεύτερη μέθοδο εξοικονομείς χρόνο.

Παράδειγμα	
Παραγγελία	μία πίτα, έξι σάντουιτς, δύο φλιτζάνια τσάι, τέσσερις καφέδες και ένας χυμός.
Κωδικός παραγγελίας	$\Pi+6\Sigma+2\Gamma+4\text{K}+\text{X}$
Κόστος φαγητού στο κατάστημα	$1,10+(6\times 1,40)+(2\times 0,90)+(4\times 1,00)+1,00$ $=1,10+8,4+1,8+4,00+1,00= 16,3$ ευρώ
Κόστος φαγητού σε πακέτο	$1,10+(6\times 1,20)+(2\times 0,70)+(4\times 0,90)+0,90$ $1,10+7,2+1,4+3,6+0,90=14,2$ ευρώ

Εικόνα 9

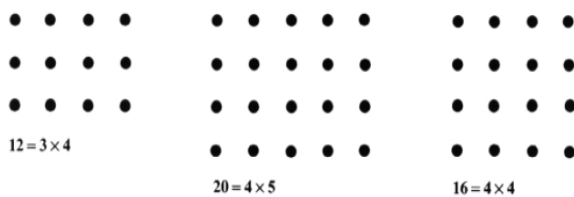
2. Να υπολογίσεις το κόστος στο κατάστημα και σε πακέτο για τις παρακάτω παραγγελίες:

- (α) πέντε καφέδες, τρία φλιτζάνια τσάι και τέσσερα μπισκότα.
- (β) τρεις χυμοί, δύο φλιτζάνια τσάι, τέσσερα μπισκότα και ένα σάντουιτς.
- (γ) $7\Sigma+\Pi+5\Gamma+\text{X}$

Ε' Τάξη: Τετράγωνοι και τριγωνικοί αριθμοί

Τετράγωνοι αριθμοί

Θα χρειαστείς έναν πίνακα με καρφάκια και πινέζες.



Ποιο ειδικό σχήμα είναι το τελευταίο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο;

Να φτιάξεις τετράγωνα σχέδια χρησιμοποιώντας:

- α) 4 καρφάκια,
- β) 9 καρφάκια και
- γ) 25 καρφάκια.

Μπορούμε να φτιάξουμε τετράγωνα σχέδια για τους αριθμούς: 4, 9, 16, 25.

Οι αριθμοί αυτοί λέγονται τετράγωνοι αριθμοί.

Διεργασία
δημιουργίας
συνδέσεων/ δεσμών

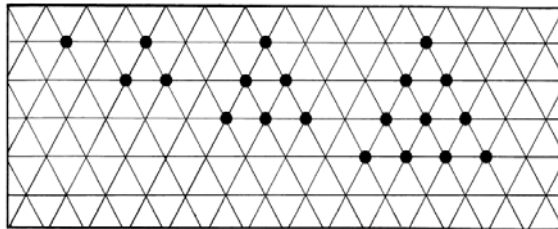
1) Να βρεις τουλάχιστον 5 ακόμη τετράγωνους αριθμούς.

Να φτιάξεις και να ονομάσεις το τετράγωνο σχέδιο για καθέναν από αυτούς.

2) Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι τετράγωνοι; 28, 49, 62, 64, 78

Τριγωνικοί αριθμοί

Θα χρειαστείς ισομετρικό χαρτί και τετραγωνισμένο χαρτί.



Εικόνα 10: Ισομετρικό χαρτί

Αυτά τα σχήματα από κουκίδες δείχνουν τους πρώτους τέσσερις τριγωνικούς αριθμούς.

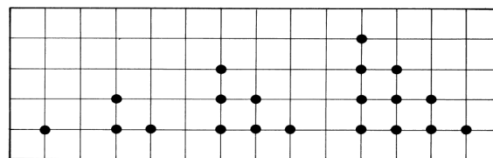
Να τα μεταφέρεις σε ισομετρικό χαρτί.

α) Να σημειώσεις τον αριθμό των κουκίδων κάτω από κάθε σχήμα.

β) Κάθε τριγωνικός αριθμός σχηματίστηκε από τον προηγούμενο. Με ποιον τρόπο;

γ) Ποιοι είναι οι επόμενοι τρεις τριγωνικοί αριθμοί;

Να χρησιμοποιήσεις τετραγωνισμένο χαρτί, για να αντιγράψεις τους παρακάτω αριθμούς και να σχεδιάσεις τους επόμενους τέσσερις.



Εικόνα 11: Τετραγωνισμένο χαρτί

Διεργασία
επικοινωνίας μέσω
της χρήσης
διαφορετικής μορφής
εργαλείων

ΣΤ' Τάξη: x για πρωινό

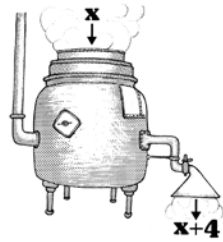
Τι είδους «μηχανή» είναι αυτή; (Το x μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός)

Η εικόνα δείχνει ότι αν μπει το x στη μηχανή, τότε βγαίνει το $x + 4$.

Δηλαδή, αν μπει το 7 στη μηχανή, τότε βγαίνει το $7 + 4$, δηλαδή

Διεργασία
δημιουργίας
συνδέσεων/ δεσμών

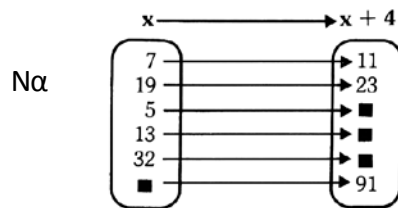
βγαίνει το 11. Και αν μπει το 19, τότε βγαίνει το $19 + 4$, δηλαδή βγαίνει το 23.



Εικόνα 12: Μηχανή του 4

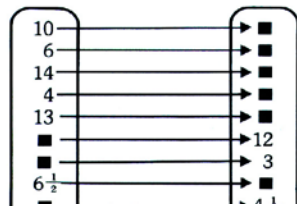
Διεργασία
επικοινωνίας μέσω
της χρήσης
διαφορετικής μορφής
εργαλείων

Το $x \rightarrow x+4$ είναι ένας απλός τρόπος για να πεις: «Να χρησιμοποιήσεις μια "μηχανή" που προσθέτει τέσσερα». αντιγράψεις και να συμπληρώσεις:

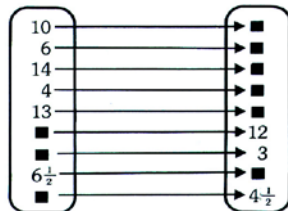


Να αντιγράψεις και να συμπληρώσεις τα παρακάτω διαγράμματα.

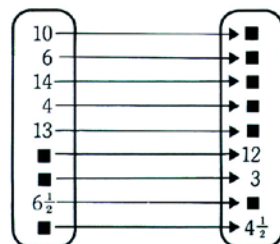
() $x \longrightarrow x + 2$



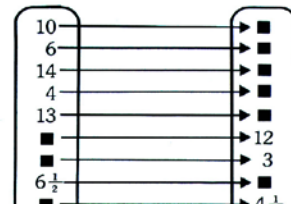
() $x \longrightarrow 2x$



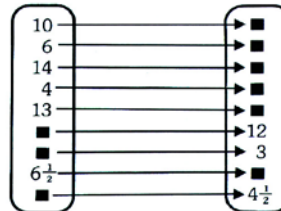
() $x \longrightarrow x \div 2$



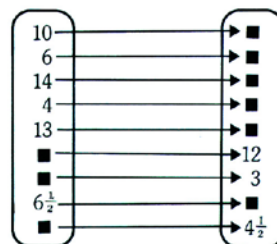
() $x \longrightarrow x - 6$



() $x \longrightarrow 3x$



() $x \longrightarrow 3x + 3$



ΣΤ' Τάξη: Ερμηνεία γραμμάτων

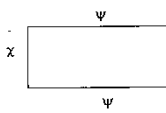
Στη δραστηριότητα Α, τα σχήματα 1, 2 δίνονται για να διαπιστωθεί ο τρόπος με τον οποίο η πρόσθετη πληροφορία επηρεάζει τον τρόπο σκέψης των παιδιών. Το ίδιο ισχύει και για τα σχήματα 3, 4 αλλά εδώ είναι επιθυμητό να διαπιστωθεί, επιπλέον, ο βαθμός στον οποίο η χρήση γραμμάτων δυσκολεύει τη σκέψη των μαθητών. Το ίδιο επιδιώκεται και με τα σχήματα 5, 6 αλλά με μια επιπρόσθετη δυσκολία, η μία πλευρά του ορθογωνίου να είναι άθροισμα δύο ευθύγραμμων τμημάτων.

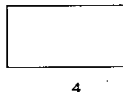
Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας

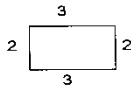
Διεργασία
δημιουργίας
συνδέσεων/ δεσμών

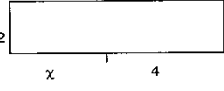
Ανάλογη είναι και η προσέγγιση της δραστηριότητας Β, ενώ η δραστηριότητα Γ προσφέρει μια ακόμη ευκαιρία έμμεσης επεξεργασίας της έννοιας της μεταβλητής.

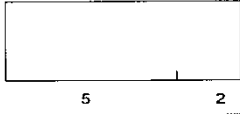
Α. Τι μπορείς να γράψεις για το εμβαδόν των παρακάτω


1. 

2. 

3. 

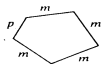
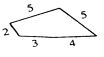

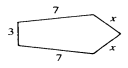
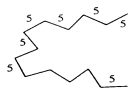
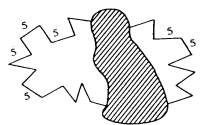
4. 

5. 

6. 

ορθογωνίων;

Β. Τι μπορείς να γράψεις για την περίμετρο των παρακάτω σχημάτων;

1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	

Το δίπλα σχήμα έχει n πλευρές. Κάθε πλευρά έχει μήκος 5 μονάδες.

Γ. Η σχέση $x + \psi + z = x + p + z$ είναι αληθής:

Πάντοτε Ποτέ Μερικές φορές

Πότε;

ΣΤ' Τάξη: Διμελείς σχέσεις

Η δραστηριότητα αφορά στο συμβολισμό των σχέσεων μεταξύ δύο μεταβλητών, κάθε μία από τις οποίες παίρνει τιμές από το σύνολο των φυσικών αριθμών. Η γραμμική σχέση της μορφής $y = ax + b$ προσεγγίζεται μέσα από συγκεκριμένο πλαίσιο, όπου συσχετίζεται ο αριθμός των λευκών πλακιδίων με τον αριθμό των μαύρων πλακιδίων σε ένα σχέδιο (π.χ. δαπέδου) και διατυπώνεται με διαφορετικούς τύπους, οι οποίοι στη συνέχεια συγκρίνονται.

Στόχος της δραστηριότητας είναι η μετάβαση των μαθητών από τις λεκτικές στις συμβολικές αναπαραστάσεις των σχέσεων, οι οποίες, στη συνέχεια, συγκρίνονται για να βρεθούν οι ομοιότητες και οι διαφορές τους.

Οι μαθητές καλούνται να εξάγουν τις σχέσεις, τις οποίες θα αναπαραστήσουν συμβολικά, από συγκεκριμένα δεδομένα που προσφέρονται για οπτική επεξεργασία. Η χρήση φυσικών αριθμών κάνει τη δραστηριότητα προσιτή σε όλους. Σε μαθητές με υψηλές επιδόσεις μπορεί να χρησιμοποιηθούν συνεχείς αντί για διακριτές

μεταβλητές.

Οι μαθητές διαλέγουν τα ζεύγη των αριθμών σχεδόν στην τύχη, ενώ η σχέση μεταξύ των μεταβλητών είναι προτιμότερο να προκύψει άμεσα και όχι με τη βοήθεια κάποιου πίνακα, εκτός και αν ένας τέτοιος προσανατολισμός αναδειχθεί στο πλαίσιο της εργασίας των μαθητών ή υποδειχθεί από τον εκπαιδευτικό σε σημείο που θα κρίνει κατάλληλο.

Σχετικά με το συμβολισμό ζητείται από τους μαθητές να εκφράσουν λεκτικά τη σχέση με απευθείας αναφορά στις εμπειρίες τους, στη συνέχεια, να χρησιμοποιήσουν ένα συνδυασμό λέξεων και συμβόλων και, τέλος, να χρησιμοποιήσουν μόνο σύμβολα. Αυτή η διαδικασία ακολουθεί μια ευρέως αποδεκτή αρχή, σύμφωνα με την οποία η μάθηση μιας ιδέας μπορεί να μεγιστοποιηθεί, όταν συναντάται μέσα σε μια ποικιλία καταστάσεων, όπου αυτή εμπιρεύεται (βεβαίως, πρόκειται για αρχή που χρήζει προσοχής και εξαρτάται τόσο από τις συνθήκες μελέτης όσο και από το δυναμικό της τάξης).

Προτεινόμενη πορεία εργασίας

Τα παιδιά εργάζονται σε ζεύγη και προσπαθούν να διατυπώσουν με λέξεις τον τρόπο με τον οποίο θα βρουν τον αριθμό των πλακιδίων, στην περίπτωση των διμελών σχέσεων τις οποίες διερευνούν.

Στη συνέχεια, προχωρούν στη διατύπωση της σχέσης με τη χρήση λέξεων και συμβόλων, κατόπιν στην πλήρη συμβολική διατύπωση και, τέλος, στη δημιουργία ενός πίνακα. Με τη συζήτηση στην τάξη επιχειρείται να αποσαφηνιστεί η μετάβαση από τις λέξεις στα σύμβολα και να καταδειχθούν οι διαφορετικές μορφές αναπαράστασης της σχέσης. Είναι σημαντικό να χρησιμοποιηθούν όλες οι δυνατές μορφές: λέξεις, λέξεις αναμειγμένες με σύμβολα, σύμβολα και πίνακες τιμών.

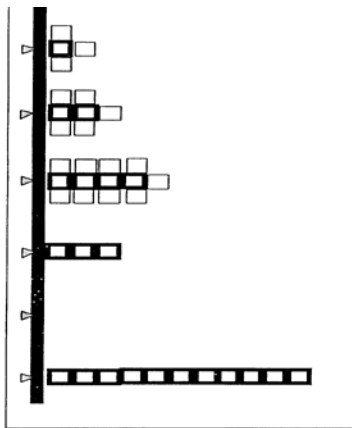
Η δομή της διμελούς σχέσης θα πρέπει να αναδειχτεί τόσο από την εργασία των ομάδων όσο και από τη συζήτηση στην τάξη.

Δραστηριότητα: Μαύρα και άσπρα πλακίδια

Να βρεις τη σχέση και να συμπληρώσεις τους αριθμούς των άσπρων και των μαύρων πλακιδίων.

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας

Διεργασία
δημιουργίας
συνδέσεων/ δεσμών



Άσπρα.....
 Μαύρα.....
 Άσπρα.....
 Μαύρα.....
 Άσπρα.....
 Μαύρα.....
 Άσπρα.....
 Μαύρα 0
 Άσπρα.....

1. Πόσα άσπρα πλακίδια θα χρειαστούν για 100 μαύρα πλακίδια:

17 μαύρα πλακίδια:.....

333 μαύρα πλακίδια:

2. Να εξηγήσεις με λέξεις πώς βρήκες τον αριθμό των άσπρων πλακιδίων, όταν ξέρεις πόσα είναι τα μαύρα:.

3. Να συμπληρώσεις:

Αριθμός άσπρων πλακιδίων = _____ + _____

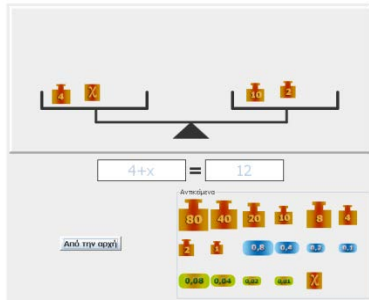
4. Να γράψεις μια παράσταση, χρησιμοποιώντας **α** για τον αριθμό των άσπρων πλακιδίων και **μ** για τον αριθμό των μαύρων πλακιδίων.

5. Να συμπληρώσεις τον πίνακα με τα αποτελέσματα:

Μαύρα πλακίδια		1							
Άσπρα πλακίδια									

Εκπαιδευτικό λογισμικό του Π.Ι. για την Ε΄ και Στ΄ τάξη του Δημοτικού

(<http://www.pi-schools.gr/software/dimotiko/>)



Εικόνα 13: Η Ζυγαριά Εξισώσεων

Ο μικρόκοσμος – applet – του λογισμικού «Ζυγαριά Εξισώσεων» είναι ένα περιβάλλον που βοηθά τους μαθητές να λύνουν με εικονικό τρόπο απλές εξισώσεις της μορφής: $\chi + \beta = \gamma$.

Ο εκπαιδευτικός αφήνει τους μαθητές να ασχοληθούν ατομικά ή ομαδικά με το μικρόκοσμο, σχηματίζοντας εξισώσεις συμβολικά και εικονικά και, στη συνέχεια, να τις λύσουν τοποθετώντας γνωστές και άγνωστες μάζες στα τάσια με σκοπό να εντοπίσουν την άγνωστη μάζα χ .

Διεργασία μαθηματικού συλλογισμού και επιχειρηματολογίας

Διεργασία επικοινωνίας μέσω της χρήσης διαφορετικής μορφής εργαλείων

Στ΄ Τάξη: Μοτίβα – Συναρτήσεις

Τεχνολογικό περιβάλλον «Function Machine» (<http://nlvm.usu.edu>)

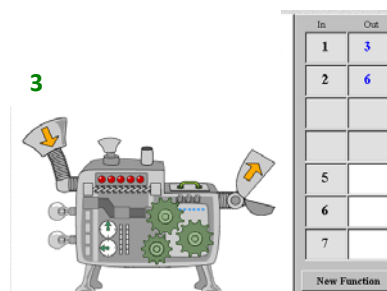
Το περιβάλλον προσφέρει τη δυνατότητα στους μαθητές να αναγνωρίσουν τα αριθμητικά μοτίβα που προκύπτουν από τη μηχανή και, στη συνέχεια, να περάσουν σε γενικεύσεις διατυπώνοντας λεκτικά τον κανόνα και συμβολικά τη συνάρτηση.

Ο εκπαιδευτικός αφήνει τους μαθητές να ασχοληθούν ατομικά ή ομαδικά με το τεχνολογικό περιβάλλον, να αναγνωρίσουν, να περιγράψουν, να επεκτείνουν το αριθμητικό μοτίβο και να ελέγξουν μόνοι τους την ορθότητα της απάντησής τους.

«Να σύρεις και να ρίξεις κάθε αριθμό στην υποδοχή της 'μηχανής συναρτήσεων'. Να αναζητήσεις τον κανόνα που θα σου επιτρέψει να συμπληρώσεις τον πίνακα».

Διεργασία επικοινωνίας μέσω της χρήσης διαφορετικής μορφής εργαλείων

Διεργασία δημιουργίας συνδέσεων/ δεσμών



Εικόνα 14: Η Μηχανή Συναρτήσεων

Χώρος και Γεωμετρία

Γεωμετρία

Βασικά θέματα: Γεωμετρικά Σχήματα

Σημασία της ενότητας: Η γεωμετρία εκφράζει και εκφράζεται μέσα από το αγκάλιασμα του χώρου μέσα στον οποίο ζούμε, αναπνέουμε και κινούμαστε. Ένα χώρο που οι μαθητές πρέπει να γνωρίσουν, να διερευνήσουν και να κατακτήσουν, ώστε να ζουν, να αναπνέουν και να κινούνται καλύτερα μέσα σε αυτόν. Η γεωμετρία, λοιπόν, είναι ταυτόχρονα ένα εργαλείο ανάλυσης, σχολιασμού αλλά και ερμηνείας του καθημερινού μας κόσμου. Στον αντίποδα αυτής της άποψης βρίσκονται αντιλήψεις που ταυτίζονται σε σημαντικό βαθμό με την ετυμολογία της λέξης *γεωμετρία* και την απλή ταξινόμηση, ονοματολογία και περιγραφή γεωμετρικών σχημάτων. Οι τελευταίες αντιλήψεις έχουν καθορίσει τον τρόπο διδασκαλίας και μάθησης των γεωμετρικών σχημάτων σε ελληνικό αλλά και σε διεθνές επίπεδο, αν και στο πλαίσιο της διδασκαλίας αυτής της ενότητας οι μαθητές θα πρέπει πρωτίστως να έχουν τις ευκαιρίες να αναλύσουν γεωμετρικά σχήματα και στερεά στα στοιχεία και τις ιδιότητες τους.

Προηγούμενη και επόμενη γνώση: Από τις τάξεις της πρώτης σχολικής ηλικίας οι μαθητές περιμένουμε να έχουν πλούσιες εμπειρίες που θα σχετίζονται με την αναγνώριση και ονοματολογία βασικών γεωμετρικών σχημάτων και στερεών αλλά και των χαρακτηριστικών τους. Τα αντικείμενα της σκέψης των μαθητών στις τάξεις αυτές περιμένουμε να είναι κυρίως η μορφή μεμονωμένων σχημάτων, δηλαδή με τι μοιάζουν. Έτσι ένα σχήμα είναι τετράγωνο «επειδή μοιάζει με τετράγωνο». Η ενασχόληση όμως των μαθητών στις τάξεις του πρώτου κύκλου σπουδών με δραστηριότητες κατασκευής, ανάλυσης και σύνθεσης των γεωμετρικών σχημάτων και στερεών σε άλλα σχήματα ή μέρη, περιμένουμε, επίσης, να έχουν θεμελιώσει μια σκέψη που θα αναδείξει μελλοντικά ομάδες σχημάτων που μοιάζουν μεταξύ τους λόγω συγκεκριμένων χαρακτηριστικών. Αυτές ακριβώς οι ομάδες ή οι κλάσεις των σχημάτων θα είναι τα αντικείμενα της σκέψης των παιδιών για τις τάξεις του δεύτερου κύκλου σπουδών. Έτσι, ένα σχήμα είναι τετράγωνο «γιατί έχει τέσσερις ίσες πλευρές, τέσσερις ορθές γωνίες, τις απέναντι πλευρές παράλληλες, ίσες διαγωνίους που τέμνονται κάθετα...». Με την ολοκλήρωση του δεύτερου κύκλου σπουδών στόχος μας είναι να έχουμε αναδείξει τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητες των σχημάτων ως τα προϊόντα της σκέψης των μαθητών. Έτσι, ένα σχήμα είναι τετράγωνο «αν έχει τέσσερις ίσες πλευρές και μία ορθή γωνία». Αυτή ακριβώς είναι η σκέψη που περιμένουμε να κατακτήσουν οι μαθητές στον τρίτο κύκλο σπουδών, στο γυμνάσιο.

Δυσκολίες των μαθητών: Οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στα χρόνια που καλύπτουν τις τάξεις του δεύτερου κύκλου σπουδών σχετίζονται με προτυπικά φαινόμενα. Αυτά τα φαινόμενα, που έχουν κάνει την εμφάνισή τους από τις τάξεις του πρώτου κύκλου σπουδών για συγκεκριμένες έννοιες, αναφέρονται στην

προσθήκη μη κρίσιμων χαρακτηριστικών στη γεωμετρία ενός σχήματος. Έτσι, για παράδειγμα, ο προσανατολισμός της αναπαράστασης ενός σχήματος στη σελίδα ή στον πίνακα επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό την αναγνώριση του σχήματος από τους μαθητές. Αντίστροφα με τις προηγούμενες περιπτώσεις, τα προτυπικά φαινόμενα μπορεί να οδηγήσουν στην αφαίρεση κρίσιμων χαρακτηριστικών από τις έννοιες. Σπανιότερα, λοιπόν, θα αναγνωρίσουν οι μαθητές ένα τρίγωνο ως ορθογώνιο και ισοσκελές από ότι ένα μόνο ορθογώνιο ή ένα μόνο ισοσκελές τρίγωνο. Η εμφάνιση προτυπικών φαινομένων είναι άμεσα συνδεδεμένη με τον τρόπο διδασκαλίας των γεωμετρικών εννοιών.

Προτάσεις για διδακτική διαχείριση: Ακούμε συχνά ότι «μια εικόνα είναι χίλιες λέξεις». Πόσο μάλλον πολλές εικόνες μαζί. Κάθε φορά που αναπαριστούμε μια γεωμετρική έννοια, όμως, υπάρχει απώλεια πληροφοριών, καθώς είναι αδύνατον να σχεδιάσουμε μια γενικευμένη αναπαράσταση ακόμη και της πιο 'απλής' έννοιας. Η πειστικότητα των αναπαραστάσεων στη γεωμετρία σε συνδυασμό με τη διδασκαλία που ασχολείται κυρίως με την ταξινόμηση και την ονοματολογία των εννοιών περιορίζει τη σκέψη των μαθητών σε προτυπικές εννοιολογήσεις. Η διδασκαλία των γεωμετρικών σχημάτων θα πρέπει λοιπόν να εστιαστεί στην ανάπτυξη μιας σκέψης που θα στηρίζεται στις κλάσεις και στις ιδιότητες των σχημάτων. Οι μαθητές θα πρέπει να έχουν την ευκαιρία να συναρμολογήσουν και να αποσυναρμολογήσουν σχήματα και να τα σχεδιάσουν σε διάφορους καμβάδες. Παράλληλα, και ιδιαίτερα προς το τέλος του δεύτερου κύκλου σπουδών, οι μαθητές θα πρέπει να διερευνήσουν τις ιδιότητες των σχημάτων χρησιμοποιώντας περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας. Σε ανάλογα περιβάλλοντα οι μαθητές μπορούν να τροποποιούν τις ιδιότητες των σχημάτων εικάζοντας κάθε φορά τις αλλαγές που θα επέλθουν στη γεωμετρία τους. Τέλος, εκτός από τα φυσικά, τα χειραπτικά και τα ψηφιακά υλικά αναπαράστασης, η γλώσσα που θα χρησιμοποιήσουν οι μαθητές για να περιγράψουν τις εμπειρίες τους και να αναπτύξουν υπόθεσεις και συλλογισμούς είναι εξίσου σημαντική. Η διδασκαλία σε αυτόν τον κύκλο σπουδών θα πρέπει να στοχεύει, λοιπόν, εκτός από την κατάκτηση της ορολογίας που αφορά στις ιδιότητες των σχημάτων, στην ανάπτυξη μιας ανεπίσημης παραγωγικής γλώσσας (όλα, μερικά, κανένα, αν... τότε..., κ.ο.κ.).

Ενδεικτικές δραστηριότητες:

Γ' Τάξη: Κατασκευάζοντας τετράπλευρα (παραλλαγή της ΓΔ2, ΠΜΑ: Γ3, Γ4, Γ8)

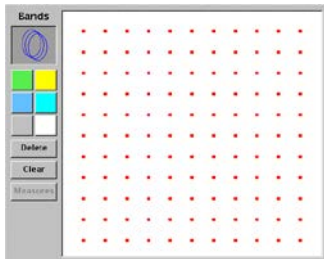
Για αυτή τη δραστηριότητα ο εκπαιδευτικός θα χρειαστεί χνουδωτά σύρματα (Εικόνα 1), καλαμάκια αναψυκτικού (Εικόνα 2), ψαλίδι, γεωπίνακες, κοινούς και ισομετρικούς, καθώς και τους αντίστοιχους καμβάδες. Εναλλακτικά ή συνοδευτικά, ο εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιήσει εικονικούς γεωπίνακες από έτοιμες εφαρμογές στο διαδίκτυο (Εικόνες 3 και 4 αντίστοιχα).



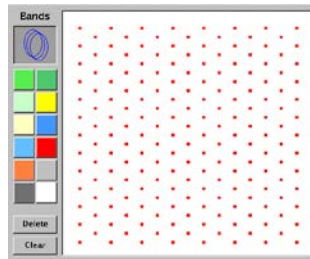
Εικόνα 1



Εικόνα 2



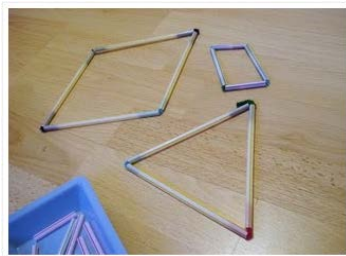
Εικόνα 3



Εικόνα 4

Διάφορους
γεωπίνακες σε
εικονική μορφή
μπορούμε να βρούμε
στη διεύθυνση
<http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html>

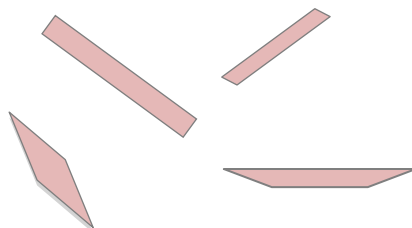
Ο εκπαιδευτικός, στην πρώτη φάση της δραστηριότητας, μοιράζει σε κάθε ομάδα μαθητών καλαμάκια και χνουδωτά σύρματα και τους ζητά να κατασκευάσουν τετράπλευρα χρησιμοποιώντας τα υλικά με τον τρόπο που φαίνεται στην Εικόνα 5.



Εικόνα 5

Ο εκπαιδευτικός έχει κόψει κατάλληλα τα καλαμάκια σε διαφορετικά μήκη ώστε να «προσκαλούν» στη δημιουργία «ασυνήθιστων» ως προς τις διαστάσεις τους τετραπλεύρων, όπως αυτών που φαίνονται στο Σχήμα 1.

Ανάδειξη μη
προτυπικών
αναπαραστάσεων των
τετραπλεύρων



Σχήμα 1

Όταν οι μαθητές θα έχουν πια στη διάθεσή τους αρκετά τετράπλευρα, τα ταξινομούν σε κατηγορίες, τα ονοματίζουν και συντάσσουν σύντομες, γραπτές περιγραφές για τα χαρακτηριστικά των τετραπλεύρων που ανήκουν σε κάθε μία από αυτές. Περιμένουμε οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν στις

Διεργασία
επικοινωνίας
(επιλογή και χρήση
εργαλείων)

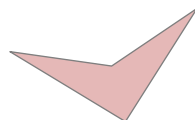
Διεργασία

περιγραφές τους χαρακτηριστικά όπως ο αριθμός ίσων πλευρών ή ίσων γωνιών ή και ορθών γωνιών. Ο έλεγχος της ισότητας των γωνιών μπορεί να γίνει με χαρτί ιχνογραφίας ή με υλικά της δραστηριότητας (δύο καλαμάκια ενωμένα με ένα χνουδωτό σύρμα), καθώς ακριβέστερες μετρήσεις μπορούν να αποπροσανατολίσουν τους μαθητές από τη διαδικασία διερεύνησης των χαρακτηριστικών των τετραπλεύρων.

Κατά τη σύνταξη των αναφορών ο εκπαιδευτικός ενισχύει τη χρήση της απαραίτητης ορολογίας από τα παιδιά (κορυφές, πλευρές, γωνίες, παράλληλες και κάθετες πλευρές, ίσες πλευρές και γωνίες), αν και προτεραιότητα έχει η επικοινωνία των αντιλήψεων των παιδιών ακόμη και με ισχνότερες μαθηματικά εκφράσεις.

Έχοντας καλαμάκια διαφορετικού μήκους στις συλλογές τους, περιμένουμε οι μαθητές να φτιάξουν τετράπλευρα διαφορετικού μεγέθους, τα οποία ανήκουν στην ίδια κλάση. Οι μαθητές εδώ θα έχουν την ευκαιρία να συζητήσουν για το ρόλο του μεγέθους στην ταξινόμηση των τετραπλεύρων. Επίσης μπορούν να διερευνήσουν σχέσεις μεταξύ του αριθμού των ίσων πλευρών και των ίσων γωνιών και να διερευνήσουν με πρακτικό τρόπο, χρησιμοποιώντας καλαμάκια και κοινούς γεωπίνακες, ερωτήματα όπως: «ένα τετράπλευρο με 2 ορθές γωνίες σε ποια κλάση μπορεί να ανήκει;», «πώς θα έμοιαζε ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο ή ένας ρόμβος με 1 ορθή γωνία;», «με τι θα έμοιαζε ένα τραπέζιο με 4 ίσες πλευρές;», «υπάρχει τετράπλευρο με 1 ορθή γωνία και 2 ζεύγη ίσων πλευρών;» κ.ο.κ. Εδώ οι μαθητές καλούνται, διατηρώντας ορισμένα χαρακτηριστικά των τετραπλεύρων αναλλοίωτα, να μεταβάλλουν με δυναμικό τρόπο κάποια άλλα και να πραγματοποιήσουν τη διερεύνηση.

Οι προηγούμενες ερωτήσεις θα είναι η βάση μιας πρώτης συζήτησης για τις σχέσεις που μπορεί να υπάρχουν μεταξύ των κλάσεων των τετραπλεύρων (και όχι απαραίτητα μια αυστηρή ταξινόμησή τους). Έτσι, οι μαθητές θα μπορέσουν να διευρύνουν τις γνώσεις τους για τα τετράπλευρα, συνδέοντας ουσιαστικά ιδιότητες και χαρακτηριστικά που ως τότε έμοιαζαν ξένα μεταξύ τους. Επίσης, η τελευταία ερώτηση θα δώσει την ευκαιρία στον εκπαιδευτικό να συζητήσει τα μη κυρτά τετράπλευρα, καθώς μόνο σε αυτήν την κλάση μπορούμε να απαντήσουμε θετικά (βλ. Σχήμα 2).



Σχήμα 2

Στην τρίτη και τελευταία φάση της δραστηριότητας οι μαθητές θα πρέπει να αναπαραστήσουν εκπροσώπους των κλάσεων των τετραπλεύρων στους γεωπίνακες. Εδώ, η πρόκληση για τους

επικοινωνίας

Ο εκπαιδευτικός προσθέτει στη συλλογή περιπτώσεις τετραπλεύρων που δεν εμφανίστηκαν με αυθόρμητο τρόπο από τα παιδιά.

Διεργασία μαθηματικού συλλογισμού και επιχειρηματολογίας

Αυτή η διερεύνηση μπορεί να πραγματοποιηθεί με τα υλικά της δραστηριότητας ή σε ψηφιακό περιβάλλον (Cabri, Goegebra, ή Geometer's Sketchpad)

Διεργασία δημιουργίας συνδέσεων

μαθητές είναι να επιχειρηματολογήσουν σχετικά με εκείνες τις κλάσεις των τετραπλεύρων που δεν μπορούμε να αναπαράστησουμε και στα δύο είδη γεωπινάκων.

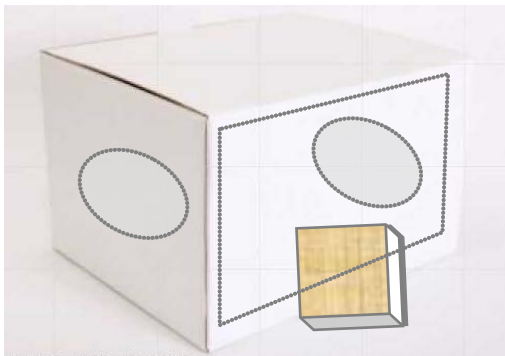
Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας

Δ΄ Τάξη: Γεωμετρία «με κλειστά μάτια» (ΓΔ3, ΠΜΑ: Γ3, Γ5, Γ8)

Όταν λέμε ότι γνωρίζουμε κάτι «με κλειστά μάτια» εννοούμε ότι το γνωρίζουμε αρκετά καλά. Τι θα σήμαινε, όμως, η προηγούμενη δήλωση στο πλαίσιο της διδασκαλίας της γεωμετρίας στη σχολική τάξη; Ιδιαίτερα μάλιστα της γεωμετρίας, αφού δύσκολα ίσως θα μπορούσαμε να διαχωρίσουμε τις γεωμετρικές έννοιες από μια σχηματογραφική αναπαράστασή τους.

Για αυτή τη δραστηριότητα ο εκπαιδευτικός θα χρειαστεί ένα χαρτόκουτο, μια συλλογή από στερεά ή και άλλα καθημερινά αντικείμενα, γεωπίνακες, καμβάδες και το υλικό Polydron (Σχήμα 3, Εικόνες 6 και 7). Από το χαρτόκουτο ο εκπαιδευτικός θα χρειαστεί να αφαιρέσει μία έδρα του και να ανοίξει δύο τρύπες, τη μία απέναντι στην άλλη, όπως φαίνονται στην Σχήμα 3.

Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να ψηλαφήσουν διάφορα στερεά δίχως να τα βλέπουν. Ακολούθως, οι μαθητές απαντούν σε ερωτήσεις που μπορεί να σχετίζονται με τα χαρακτηριστικά των στερεών, το σχήμα των εδρών τους, τον αριθμό των κορυφών, των ακμών και των εδρών, την ισότητα ορισμένων εδρών, την καθετότητα γωνιών, κ.ο.κ. Ο εκπαιδευτικός επιμένει στην ορθή χρήση των όρων «κορυφή», «ακμή» και «έδρα».



Σχήμα 3: Κουτί ψηλάφησης



Εικόνα 6: Διάφορα στερεά



Εικόνα 7: Υλικό Polydron

Όχι σπάνια τα παιδιά χρησιμοποιούν τους όρους «ακμή/ πλευρά» και «πλευρά/ έδρα» δίχως διάκριση. Παράλληλα, ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να αποδώσουν το σχήμα των εδρών των στερεών σε καμβάδες ή με τη βοήθεια γεωπίνακα, καθώς και του στερεού με Polydron. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει ακριβέστερη αναπαράσταση των εδρών ή του στερεού, αν έχει κατασκευάσει τη συλλογή των στερεών από το υλικό Polydron.

Οι στρατηγικές ψηλάφησης ακολουθούν σε μεγάλο βαθμό την εξέλιξη της γεωμετρικής σκέψης. Οι μαθητές θα κληθούν να αναπτύξουν αποτελεσματικότερες στρατηγικές ώστε να κάνουν ακριβέστερες υποθέσεις κατά την ψηλάφηση των χαρακτηριστικών των στερεών.

Για παράδειγμα, σε ένα στερεό με πολλές έδρες, χρησιμοποιώντας την πιθανή συμμετρία του σχήματος, θα μπορέσουν να απαριθμήσουν με ακρίβεια τον αριθμό των εδρών ή των ακμών. Για τον έλεγχο της παραλληλίας δύο εδρών, μπορούν να αγκαλιάσουν το στερεό χρησιμοποιώντας τις παλάμες τους τοποθετημένες σαν δύο παράλληλα επίπεδα. Παρόμοια, το θρανίο ως επίπεδο μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον έλεγχο παραλληλίας εδρών ή και της καθετότητας ακμών. Όσον αφορά στον έλεγχο ή στη σύγκριση του μήκους ακμών, οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν τα δάχτυλά τους σαν χάρακα ή σαν μονάδα μέτρησης (η δεύτερη επιλογή είναι αποτελεσματικότερη). Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τα παιδιά να υποστηρίξουν τις εικασίες τους στηριζόμενα σε στρατηγικές όπως οι προηγούμενες (οι δύο ακμές δεν είναι ίσες αφού η μία έχει 4 δάχτυλα μήκος και η άλλη έχει 6).

Διεργασία
επικοινωνίας
(επιλογή και χρήση
εργαλείων)

Διεργασία
επικοινωνίας

Ανάδειξη μη
προτυπικών
αναπαραστάσεων
μιας και κατά την
ψηλάφηση
αποφεύγουμε
συγκεκριμένους
προσανατολισμούς

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας

Ε' Τάξη: Όλα τα διαφορετικά τετράγωνα στον γεωπίνακα (ΓΔ7, ΠΜΑ: Γ12, Μ7)

Ο εκπαιδευτικός μοιράζει στους μαθητές κοινούς γεωπίνακες που αποτελούνται από 5x5 καρφάκια και τους ζητά να αναπαραστήσουν σε αυτούς όσο περισσότερα διαφορετικά τετράγωνα (διαφορετικού εμβαδού) μπορούν. Οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι από προηγούμενες χρονιές με την αναπαράσταση σχημάτων στο γεωπίνακα και περιμένουμε ότι, σε πρώτη φάση,

θα βρουν με ευκολία τετράγωνα με εμβαδόν 1 τ.μ. (το πορτοκαλί), 4 τ.μ. (το κίτρινο), 9 τ.μ. (το πράσινο) και 16 τ.μ. (το κόκκινο) (βλ. Εικόνα 8).

Διεργασία
επικοινωνίας
(επιλογή και χρήση)
εργαλείων

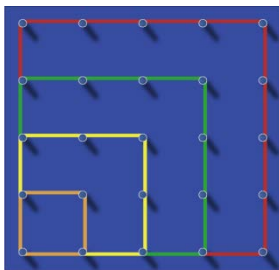
Παράλληλα, ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να μεταφέρουν τις «λύσεις» που εντοπίζουν σε ένα διάστικτο καμβά. Με αυτόν τον τρόπο ο γεωπίνακας μπορεί να παραμείνει καθαρός για μια νέα προσπάθεια, ενώ οι μαθητές εξασκούνται με ένα διαφορετικό αναπαραστατικό μέσο.

Διεργασία
επικοινωνίας

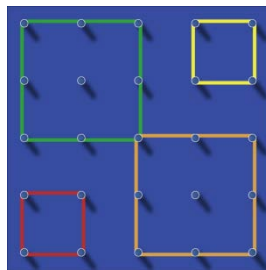
Στην προσπάθειά τους να βρουν άλλα διαφορετικά τετράγωνα, οι μαθητές συνήθως σχηματίζουν τετράγωνα ίσα με τα προηγούμενα (βλ. Εικόνα 9). Με άλλα λόγια, «εγκλωβίζονται» σε προτυπικά φαινόμενα που σχετίζονται με τον οριζόντιο και κατακόρυφο προσανατολισμό των σχημάτων πάνω στο γεωπίνακα, ενώ ταυτόχρονα θεωρούν ότι η αλλαγή της θέσης σε ένα σχήμα αλλάζει και το σχήμα αυτό καθαυτό.

Διερεύνηση και
υπέρβαση προτυπικών
αναπαραστάσεων.

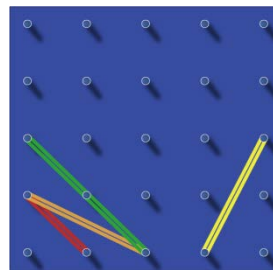
Για να μπορέσουν να συνεχίσουν τη διερεύνηση, οι μαθητές πρέπει να κινηθούν «διαγωνίως», με πιθανές πλευρές όπως αυτές που φαίνονται στην Εικόνα 10.



Εικόνα 8

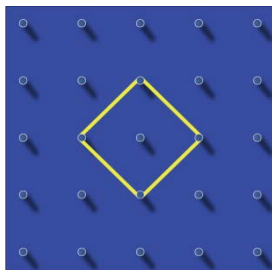


Εικόνα 9

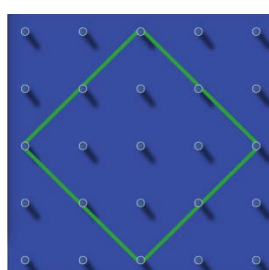


Εικόνα 10

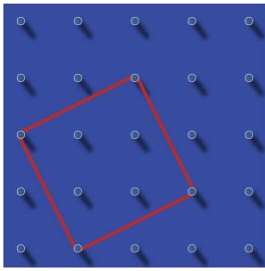
Οι μαθητές, μετά από πειραματισμούς, περιμένουμε να εντοπίσουν τα τετράγωνα που φαίνονται στις Εικόνες 11, 12, 13 και 14 ή τουλάχιστον ορισμένα από αυτά.



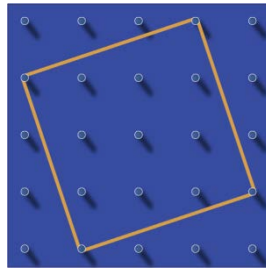
Εικόνα 11



Εικόνα 12



Εικόνα 13



Εικόνα 14

Σε αυτό το σημείο η δραστηριότητα εισέρχεται σε μια δεύτερη ενδιαφέρουσα φάση. Για τα τέσσερα πρώτα τετράγωνα (Εικόνα 1) οι μαθητές δεν έπρεπε να προσπαθήσουν πολύ για να υπολογίσουν το εμβαδόν τους, καθώς δεν χρειαζόταν παρά να πολλαπλασιάσουν - ή να προσθέσουν- ολόκληρες τετραγωνικές μονάδες. Με τα τέσσερα τετράγωνα που υπολείπονται, όμως, οι μαθητές θα πρέπει να ακολουθήσουν διαφορετική προσέγγιση. Αρχικά, ορισμένοι θα προτείνουν ότι το κίτρινο τετράγωνο της Εικόνας 4 έχει εμβαδόν 1 τ.μ. ή το πράσινο της Εικόνας 5 έχει εμβαδόν 4 τ.μ., παρότι και «με το μάτι» φαίνονται μεγαλύτερα από εκείνα που είχαν εμβαδόν 1 τ.μ. και 4 τ.μ. στην πρώτη φάση. Σαφώς εδώ οι μαθητές θεωρούν ότι η απόσταση μεταξύ δύο καρφιών είναι η ίδια ανεξαρτήτως της διεύθυνσης του λάστιχου.

Για τον υπολογισμό του εμβαδού οι μαθητές θα πρέπει να αναλύσουν και να συνθέσουν τα τετράγωνα βάσει άλλων ορθογώνιων σχημάτων (ορθογώνια τρίγωνα, ορθογώνια παραλληλόγραμμα, άλλα τετράγωνα), των οποίων το εμβαδόν μπορεί εύκολα να υπολογιστεί (Εικόνες 15, 16, 17 και 18). Για παράδειγμα, το πορτοκαλί τετράγωνο της Εικόνας 14 μπορεί να αναλυθεί σε ένα τετράγωνο και τέσσερα ίσα ορθογώνια τρίγωνα (Εικόνα 18). Το πράσινο τετράγωνο έχει εμβαδόν 4 τ.μ. (γνωστό κι από την πρώτη φάση της δραστηριότητας), ενώ το καθένα από τα ορθογώνια τρίγωνα έχει εμβαδόν 1,5 τ.μ. (ως μισό του κόκκινου ορθογωνίου με εμβαδόν 3 τ.μ.).

Εναλλακτικά, οι μαθητές μπορούν να «περιγράψουν» το προς υπολογισμό τετράγωνο χρησιμοποιώντας ένα μεγαλύτερο, ήδη γνωστού εμβαδού τετράγωνο και να αφαιρέσουν τα απαραίτητα μέρη (Εικόνες 19 και 20). Έτσι, για παράδειγμα, το κόκκινο τετράγωνο της Εικόνας 13 περιγράφεται από ένα τετράγωνο με εμβαδόν 9 τ.μ. από το οποίο αρκεί να αφαιρέσουμε 4 ορθογώνια τρίγωνα με εμβαδόν 1 τ.μ. (Εικόνα 20).

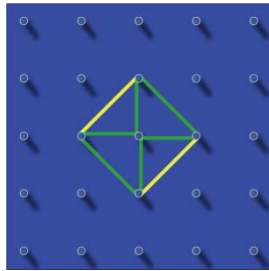
Στην ανάπτυξη της δραστηριότητας είναι σαφής η προσπάθεια αποφυγής της χρήσης μετρήσεων μήκους και τύπων εμβαδού, καθώς στόχος του εκπαιδευτικού είναι ο υπολογισμός εμβαδού μέσω της ανάλυσης και σύνθεσης σχημάτων. Με άλλα λόγια, προτάσσεται η ανάδειξη της έννοιας του εμβαδού ως κάλυψη επιφάνειας κι όχι ως εφαρμογή τύπων. Παράλληλα, ο εκπαιδευτικός μπορεί να ενισχύσει τις μη προτυπικές αναπαραστάσεις της έννοιας

Ο εντοπισμός όλων των τετραγώνων δεν είναι αυτοσκοπός. Σημαντική είναι η διαδικασία ανάλυσης και σύνθεσης των τετραγώνων κατά τον υπολογισμό των εμβαδών τους

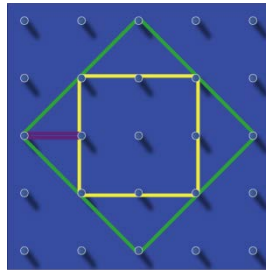
Διεργασία μαθηματικού συλλογισμού και επιχειρηματολογίας

του τετραγώνου.

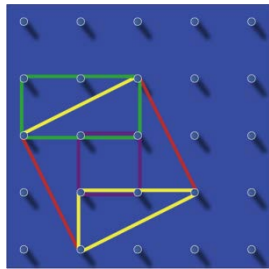
Η δραστηριότητα θα μπορούσε να επαναληφθεί με όλα τα διαφορετικά ορθογώνια παραλληλόγραμμα στο γεωπίνακα, κ.ο.κ.



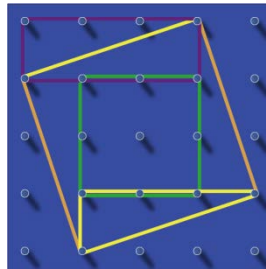
Εικόνα 15



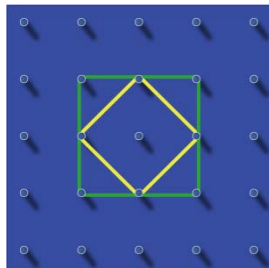
Εικόνα 16



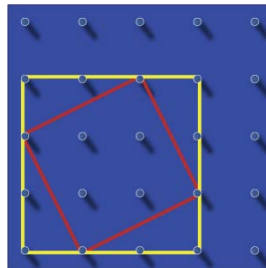
Εικόνα 17



Εικόνα 18



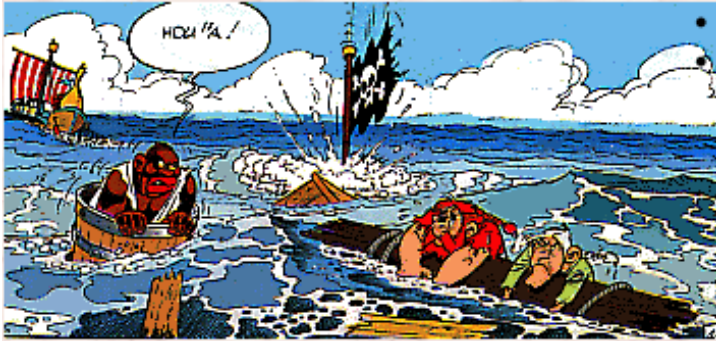
Εικόνα 19



Εικόνα 20

ΣΤ΄ Τάξη: Πειρατές στη θάλασσα! (ΠΜΑ: Γ3, Γ6, Γ9)

Για άλλη μια φορά οι πειρατές επιτέθηκαν σε λάθος πλοίο - αυτό των Αστερίξ και Οβελίξ! Μετά το πέρασμα των Γαλατών, οι πειρατές προσπαθούν να εντοπίσουν ένα ξύλινο κιβώτιο γεμάτο με λάφουρα σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου μέσα από τα πολλά απομεινάρια του πλοίου τους που επιπλέουν στη θάλασσα (Εικόνα 21). Το πρόβλημά τους είναι, όμως, ότι μόνο ένα μέρος του κιβωτίου ξεμυτίζει πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας. Πώς μπορούμε να βοηθήσουμε τους πειρατές να βρουν το κιβώτιο;

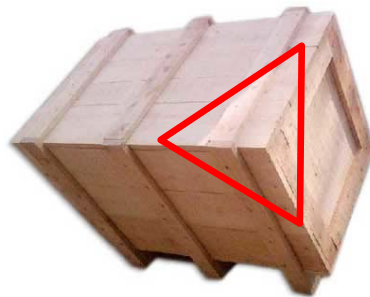


Εικόνα 21: Οι πειρατές στη θάλασσα

Για το ξεκίνημα αυτής της δραστηριότητας ο εκπαιδευτικός θα μοιράσει στα παιδιά ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο κατασκευασμένο από ξύλο ή άλλο υλικό. Με τη βοήθεια της προηγούμενης εικόνας οι μαθητές μπορούν να αρχίσουν να φαντάζονται και να επιχειρηματολογούν αναφορικά με το σχήμα που θα μπορούσε να έχει το ορατό μέρος του κιβωτίου (πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας). Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ζητήσει από τους μαθητές να σχεδιάσουν, στην εξωτερική επιφάνεια του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, το επίπεδο εκείνο που ουσιαστικά χωρίζει το ορατό τμήμα του κιβωτίου από το βυθισμένο. Έτσι, για παράδειγμα, οι μαθητές μπορεί να σχεδιάσουν τη γραμμή που βλέπουμε στο Σχήμα 4.

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας

Διεργασία
επικοινωνίας



Σχήμα 4

Ο εκπαιδευτικός μπορεί, επίσης, να ζητήσει από τους μαθητές να επιχειρηματολογούν και για το σχήμα της τομής του επιπέδου της επιφάνειας της θάλασσας και του κιβωτίου. Στη συνέχεια, οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν το μέρος του κιβωτίου που προεξέχει με κατάλληλα κομμάτια από το υλικό Polydron και να ονομάσουν το σχήμα του στερεού.

Μόνο μετά από τη διατύπωση εικασιών και την ανάπτυξη επιχειρημάτων - ή αν οι μαθητές δυσκολεύονται ιδιαίτερα στην αναζήτησή τους- ο εκπαιδευτικός μπορεί να δώσει στους μαθητές υποστηρικτικό χειραπτικό ή ψηφιακό υλικό ώστε να επιβεβαιώσουν τις εικασίες τους ή και να διευρύνουν την αναζήτησή τους. Αν η χρήση του υλικού προηγηθεί της διαδικασίας παραγωγής εικασιών, η εκπαιδευτική αξία της

Διεργασία
επικοινωνίας (επιλογή
και χρήση εργαλείων)

Διεργασία

δραστηριότητας μειώνεται σημαντικά. Οι μαθητές δεν αναζητούν, δεν επιχειρηματολογούν, ενώ δεν εξασκούνται στην ανάλυση και σύνθεση στερεών και στη δημιουργία νοερών οπτικών εικόνων.

Το χειραπτικό υλικό Power Solids ή άλλα διαφανή κουτιά, μπορεί να φανούν ιδιαίτερα χρήσιμα. Το χειραπτικό υλικό Power Solids είναι μια συλλογή από διαφανή στερεά που έχουν τη δυνατότητα να γεμίζουν με υγρά ή με στερεά υλικά. Έτσι, προσθέτοντας μια ποσότητα υγρού και γέρνοντας κατάλληλα το στερεό οι μαθητές μπορούν να επιβεβαιώσουν ή όχι μια εικασία τους.



Εικόνα 22: Υλικό Power Solids

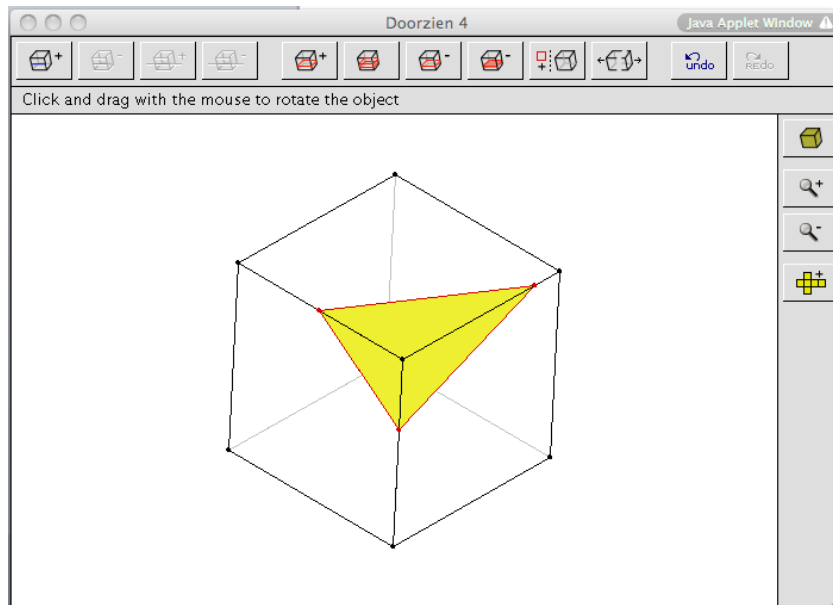
Μια εφαρμογή που μπορεί, επίσης, να στηρίξει τη σκέψη των μαθητών σε αυτή τη δραστηριότητα είναι η Seeing Through Objects (Βλέποντας Μέσα Από Αντικείμενα, βλ. Εικόνα 23). Οι μαθητές μπορούν να σχεδιάζουν ευθείες και επίπεδα ώστε να κόβουν κατάλληλα τον κύβο, ενώ ο τελευταίος έχει τη δυνατότητα να περιστρέφεται.

Η διερεύνηση βέβαια μπορεί να συνεχιστεί, καθώς η τριγωνική πυραμίδα είναι μία από τις πιθανές απαντήσεις. Πότε, για παράδειγμα, η πυραμίδα θα είναι τετράεδρο; Θα μπορούσε να ήταν τετραγωνική; Πενταγωνική; Ποια άλλα στερεά θα μπορούσαμε να βλέπουμε πάνω στην επιφάνεια της θάλασσας; Ή πόσο θα άλλαζαν τα πράγματα αν το κιβώτιο που αναζητούσαν οι πειρατές είχε σχήμα τετραγωνικής πυραμίδας; Τότε, τι σχήματα θα μπορούσαμε να βλέπουμε πάνω από το επίπεδο της θάλασσας; Για το καθένα από αυτά, τι σχήμα θα είχε η τομή με το επίπεδο της επιφάνειας της θάλασσας;

επικοινωνίας

Το υλικό Power Solids μπορεί να βοηθήσει αρκετά στη διερεύνηση των σχέσεων μεταξύ των όγκων διάφορων στερεών και στο γυμνάσιο.

Εδώ αναφερόμαστε στα πρίσματα όπως κύβο, ορθογώνια παραλληλεπίπεδα (με διαφορετικές διαστάσεις από αυτές του κιβωτίου) και σε πρίσματα με βάση τρίγωνο.



http://www.fi.uu.nl/toepassingen/00349/toepassing_wisweb.en.html

Διεργασία
επικοινωνίας
(επιλογή και χρήση
εργαλείων)

Διεργασία
επικοινωνίας

Εικόνα 23: Η εφαρμογή Βλέποντας Μέσα Από Αντικείμενα

Δ' Τάξη: Σχέσεις... εμβαδού περιμέτρου. (ΠΜΑ: ΓΔ7)

Χρησιμοποιώντας το λογισμικό Geogebra ο εκπαιδευτικός δίνει στους μαθητές ένα σχήμα και τους ζητά να υπολογίσουν την περίμετρο και το εμβαδόν του (δραστηριότητα 1). Πριν προχωρήσουν, οι μαθητές μπορούν να ελέγξουν τις απαντήσεις τους. Στη συνέχεια, τους ζητά να φτιάξουν σχήματα με περίμετρο 16 και να υπολογίζουν κάθε φορά το εμβαδόν του σχήματος (δραστηριότητα 2). Ο εκπαιδευτικός, χρησιμοποιώντας τα σχήματα των μαθητών, συζητά το ενδεχόμενο δύο σχήματα με την ίδια περίμετρο να έχουν και το ίδιο εμβαδόν. Τέλος, στην τελευταία δραστηριότητα (επέκταση), ο εκπαιδευτικός καλεί τους μαθητές να προσπαθήσουν να εντοπίσουν εκείνο το σχήμα με περίμετρο 16 που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν (τετράγωνο με πλευρά 4).

Ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε να επαναλάβει τη δραστηριότητα ζητώντας από τους μαθητές να κατασκευάσουν σχήματα με περίμετρο 13 και να συγκρίνουν το εμβαδόν τους. Η συγκεκριμένη διερεύνηση θα οδηγήσει σε μη κανονικές απαντήσεις εδραιώνοντας έτσι την ισχύ της σχέσης.

Η διερεύνηση μπορεί να συνεχιστεί και αντίστροφα με τη μελέτη της περιμέτρου ισεμβαδικών σχημάτων.

ΣΤ' Τάξη: Χωρίζοντας ένα τετράγωνο στα δύο με μια μαχαιριά (ΠΜΑ: ΓΔ7)

Οι μαθητές καλούνται να ανακαλύψουν τρόπους χωρισμού ενός τετραγώνου σε δύο ίσα μέρη κατασκευάζοντας μια ευθεία που να περνά από ένα συγκεκριμένο σημείο στο εσωτερικό του τετραγώνου.

Δ Δημ ΜΔ2-
Περίμετρος και
εμβαδόν.ggb

Διεργασία
επικοινωνίας και
διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού
επιχειρηματολογίας

(χρήση ψηφιακών
εργαλείων για
διερεύνηση και
επίλυση
προβλημάτων)

ΣΤ Δημ-ΓΔ7-Το μισό
τετράγωνο.ggb

Μια πιθανή αρχική εκτίμηση των μαθητών θα είναι ότι το σημείο ανήκει στη διαγώνιο του τετραγώνου, η οποία το τέμνει σε δύο ίσα μέρη. Το αρχείο του Geogebra δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να πειραματιστούν και να διερευνήσουν τη σχέση του σημείου με τις υπόλοιπες ιδιότητες του τετραγώνου.

Οι μαθητές ανακαλύπτουν ότι για να χωρίσουν ένα τετράγωνο σε δύο ισεμβαδικά τετράπλευρα με μία ευθεία που διέρχεται από ένα τυχαίο σημείο M στο εσωτερικό τετραγώνου και ένα σημείο που ανήκει στις πλευρές του, θα πρέπει η συγκεκριμένη ευθεία να διέρχεται από το κέντρο του τετραγώνου.

Οι μαθητές μπορούν να εξετάσουν αν τα δύο ισεμβαδικά τετράπλευρα είναι και συμμετρικά ως προς την ευθεία αυτή. Μια κοινή παρανόηση των μαθητών είναι ότι θεωρούν πως αρκεί για δύο σχήματα να είναι συμμετρικά, αν είναι απλώς ίσα. Το λογισμικό εμφανίζει τη σύγκριση των δύο εμβαδών και το συμμετρικό του ενός τετραπλεύρου ώστε να μπορεί να διαπιστωθεί ότι η συγκεκριμένη ευθεία δεν αποτελεί άξονα συμμετρίας και να κατανοηθεί η ισότητα των δύο τετραπλεύρων μέσα από τη δυνατότητα περιστροφής του ενός γύρω από το κέντρο του τετραγώνου.

Διεργασία
επικοινωνίας και
διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού
επιχειρηματολογίας
(χρήση ψηφιακών
εργαλείων για
διερεύνηση και
επίλυση
προβλημάτων)

Μετρήσεις

Βασικά θέματα: Μέτρηση Επιφάνειας

Σημασία της ενότητας: Οι μετρήσεις είναι ένα σημαντικό κομμάτι του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών με πολλές συνδέσεις με τη γεωμετρία και την αριθμητική. Η σχέση τους με την αριθμητική και οι πολλές εφαρμογές τους σε καθημερινές καταστάσεις καθιστούν συχνά τις μετρήσεις ως ένα από τα επιχειρήματα αναφορικά με την αναγκαιότητα των μαθηματικών ως σχολικού αντικειμένου. Μια απλοποιητική ταύτιση, όμως, των μετρήσεων με αριθμητικούς υπολογισμούς μπορεί να οδηγήσει, όπως θα δούμε παρακάτω, σε διδακτικές στρεβλώσεις και ισχνές εννοιολογήσεις από την πλευρά των μαθητών.

Προηγούμενη και επόμενη γνώση: Οι μαθητές, από τις τάξεις του πρώτου κύκλου σπουδών, έχουν αποκτήσει εμπειρίες που σχετίζονται με τη μέτρηση χαρακτηριστικών όπως του μήκους, της επιφάνειας, της γωνίας, της χωρητικότητας και του χρόνου. Περιμένουμε, μέσω αυτών των εμπειριών, να έχουν προχωρήσει στην ανάδειξη του κάθε χαρακτηριστικού, στην εξοικείωση με την επιλογή και χρήση μη τυπικών και τυπικών μονάδων μέτρησης και με τη διαδικασία κάλυψης του προς μέτρηση χαρακτηριστικού με αυτές τις μονάδες. Στις τάξεις του δεύτερου κύκλου σπουδών οι εμπειρίες των μαθητών περιλαμβάνουν μετρήσεις με χρήση τυπικών μονάδων μέτρησης, την πραγματοποίηση εκτιμήσεων σε διαφορετικά πλαίσια, την κατασκευή και χρήση τυπικών οργάνων μέτρησης και την επίλυση προβλημάτων. Με την ολοκλήρωση του δεύτερου κύκλου σπουδών οι μαθητές θα πρέπει να έχουν αρχίσει να αντιλαμβάνονται τον προσεγγιστικό χαρακτήρα της μέτρησης και την απαίτηση για ακρίβεια ή την «επιείκιά» μας όσον αφορά στο μέγεθος του σφάλματος, ανάλογα με το πλαίσιο της εκάστοτε μέτρησης. Στις τάξεις του τρίτου κύκλου σπουδών δίνεται έμφαση στη μέτρηση της γωνίας μέσω εννοιών της τριγωνομετρίας, ενώ οι μαθητές υπολογίζουν το εμβαδόν της επιφάνειας και του όγκου πρισμάτων, πυραμίδων, κυλίνδρων, κώνων, σφαιρών, καταλήγουν σε τύπους και λύνουν προβλήματα χρησιμοποιώντας αυτούς τους τύπους.

Δυσκολίες των μαθητών: Οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στις τάξεις του δεύτερου κύκλου σπουδών αφορούν, αρχικά, στην κατανόηση της μέτρησης αυτής καθαυτής, ως μιας διαδικασίας κάλυψης ανεξάρτητης από το προς μέτρηση χαρακτηριστικό. Έτσι, η μέτρηση του μήκους μπορεί να φαντάζει διαφορετική από αυτήν του όγκου και ακόμη περισσότερο από εκείνη του χρόνου. Δυσκολίες συναντούν, επίσης, στην κατανόηση της διατήρησης ενός μεγέθους συγχέοντάς το με το μέτρο του. Με άλλα λόγια, το μέγεθος είναι ανεξάρτητο από τη μονάδα μέτρησης που θα επιλέξουμε για να το μετρήσουμε. Παρομοίως, ο τρόπος ή τα βήματα που θα επιλέξουμε για να καλύψουμε το μέγεθος δεν επηρεάζει την τελική μέτρηση. Έτσι, για παράδειγμα, για να υπολογίσουμε το εμβαδόν μιας επιφάνειας μπορούμε να την χωρίσουμε με «βολικό» τρόπο σε επιμέρους κομμάτια και να υπολογίσουμε το εμβαδόν του καθενός χωριστά. Η κατανόηση της διατήρησης ενός μεγέθους συνδέεται άμεσα και με μια άλλη σημαντική και επίμονη δυσκολία που συναντούν οι μαθητές, τη σχέση περιμέτρου και εμβαδού. Δύο διαφορετικά ισεμβαδικά σχήματα δεν είναι απαραίτητα και ισοπεριμετρικά και το αντίστροφο.

Άλλες δυσκολίες συναντούν οι μαθητές στη χρήση τυπικών οργάνων μέτρησης, όπως του χάρακα και του μοιρογνωμονίου, καθώς και σε καταστάσεις που απαιτούν εκτίμηση. Για παράδειγμα, αν ζητήσουμε από τους μαθητές να εκτιμήσουν την επιφάνεια του πίνακα της τάξης σε τετραγωνικά μέτρα, περιμένουμε να δυσκολευτούν αφού απουσιάζει η αντίληψη σημείων αναφοράς για το πόση επιφάνεια καταλαμβάνει ένα τετραγωνικό μέτρο.

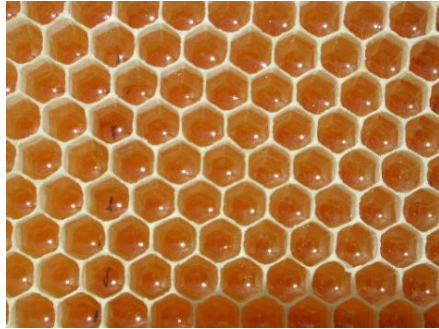
Προτάσεις για διδακτική διαχείριση: Συχνά οι μαθητές θεωρούν ότι η μέτρηση ενός χαρακτηριστικού είναι μια ακριβής διαδικασία που ταυτίζεται με τη χρήση ενός οργάνου μέτρησης ή την εφαρμογή ενός τύπου (υπολογισμός εμβαδού και όγκου). Η διδασκαλία, αντιθέτως, θα πρέπει να εστιάζεται σε αυτή καθαυτή τη διαδικασία «γεμίματος» ενός χαρακτηριστικού με τις κατάλληλες μονάδες μέτρησης. Ο εκπαιδευτικός θα αναδείξει αυτή τη διαδικασία μέσα από ευκαιρίες που θα δώσει στους μαθητές για να μετρήσουν χαρακτηριστικά αντικειμένων όπως είναι το μήκος, η επιφάνεια, η γωνία, ο όγκος και ο χρόνος. Η μέτρηση, αρχικά, μπορεί να στηρίζεται σε μη τυπικές μονάδες μέτρησης, ώστε οι συζητήσεις να εστιάζονται στην επιλογή της μονάδας, στον τρόπο επανάληψής της, στις πιθανές υποδιαιρέσεις της που θα χρειαστούν ώστε να ολοκληρωθεί η μέτρηση, στο αμετάβλητο του μεγέθους ανεξάρτητα από την επιλογή της μονάδας και στη σύνδεση του αριθμού που εκφράζει το μέτρο του μεγέθους με την επανάληψη της μονάδας. Η κατασκευή και χρήση μη τυπικών οργάνων μέτρησης μπορούν επίσης να βοηθήσουν προς την ίδια κατεύθυνση, ενώ θα προετοιμάσουν την εισαγωγή των τυπικών μονάδων και των οργάνων μέτρησης. Τέλος, δεν μπορούμε παρά να τονίσουμε την αξία των εκτιμήσεων στη διδασκαλία των μετρήσεων. Η εκτίμηση, τόσο με άτυπες όσο και με τυπικές μονάδες, συνδυάζει νοητικές και οπτικές πληροφορίες και δεν στηρίζεται σε όργανα μέτρησης. Η εκτίμηση βοηθά, επομένως, τους μαθητές να εστιάσουν στο χαρακτηριστικό και στη διαδικασία μέτρησής του, ενώ παράλληλα τους εξοικειώνει με τις τυπικές μονάδες αφού η εκτίμηση ενός μεγέθους θα απαιτήσει την αξιοποίησή τους ως σημεία αναφοράς. Με άλλα λόγια, ο μαθητής θα πρέπει να γνωρίζει πόσο «μεγάλο» είναι ένα μέτρο, ένα τετραγωνικό μέτρο ή ένα κυβικό μέτρο, τι ζυγίζει περίπου ένα κιλό, πόσο διαρκεί περίπου ένα λεπτό, κ.ο.κ. Η διδασκαλία των μετρήσεων σε όλες τις φάσεις θα πρέπει να στηριχθεί σε μια πληθώρα φυσικών, χειραπτικών και ψηφιακών υλικών αναπαράστασης.

Ενδεικτικές δραστηριότητες:

Ε' Τάξη: Μαθηματικά μωσαϊκά - πλακοστρώσεις (ΜΔ1, ΠΜΑ: Μ1, Γ8, Γ9, Γ13)

Για αυτή τη δραστηριότητα ο εκπαιδευτικός θα αξιοποιήσει το εκπαιδευτικό λογισμικό Geogebra ή κάποιο άλλο δυναμικό περιβάλλον Γεωμετρίας (Cabri, Sketchpad). Εισαγωγικά στη δραστηριότητα, προτείνεται η αναζήτηση στο διαδίκτυο έργων τέχνης του Ολλανδού καλλιτέχνη Maurits Cornelis Escher στα οποία παρουσιάζονται πλακοστρώσεις με μοναδική τεχνοτροπία (<http://www.mcescher.com>). Η προβολή και ο σχολιασμός των έργων του καλλιτέχνη θα κεντρίσει το ενδιαφέρον των μαθητών και θα δημιουργήσει ένα πλαίσιο αναζήτησης και περαιτέρω διερεύνησης. Η αναζήτηση περιπτώσεων μαθηματικών μωσαϊκών - πλακοστρώσεων στη φύση και στην καθημερινότητα θα

οδηγήσει πιθανόν στη μελέτη συγκεκριμένων περιπτώσεων, όπως για παράδειγμα η κυψέλη των μελισσών (Εικόνα 1), η πλακόστρωση των πεζοδρομίων, των δωματίων ή και των τοίχων του σπιτιού. Στις περιπτώσεις αυτές, η διερεύνηση αφορά κανονικές πλακοστρώσεις όπου ένα κανονικό πολύγωνο επαναλαμβάνεται χωρίς να υπάρχουν κενά και επικαλύψεις. Είναι σημαντικό να μελετήσουν οι μαθητές σε ποιες περιπτώσεις κανονικών πολυγώνων είναι δυνατή η επικάλυψη του επιπέδου και σε ποιες όχι.



Εικόνα 1: Κυψέλη μελισσών

1η φάση

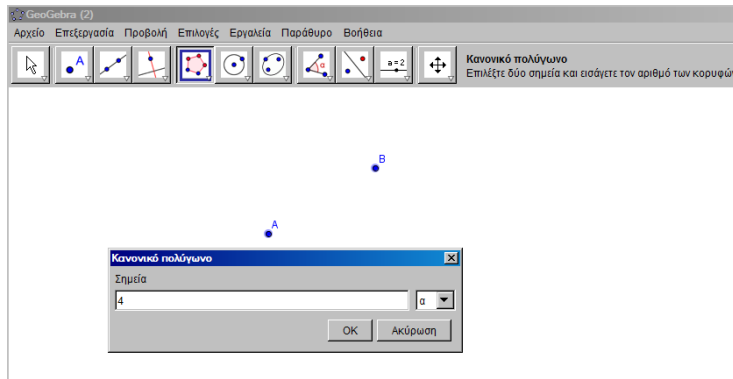
Αρχικά, με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra, οι μαθητές θα πειραματιστούν στη δημιουργία κανονικών πολυγώνων αξιοποιώντας την ενσωματωμένη λειτουργικότητα του λογισμικού.

Αφού επιλέξουν από το εικονίδιο «Κανονικό πολύγωνο», θα ορίσουν δύο σημεία στο επίπεδο που θα αποτελούν δύο συνεχόμενες κορυφές του κανονικού πολυγώνου και, στη συνέχεια, στο παράθυρο διαλόγου που θα εμφανιστεί θα καθορίσουν τον αριθμό των πλευρών του κανονικού πολυγώνου (Εικόνα 2).

Στη συνέχεια, καλούνται να δημιουργήσουν τα παρακάτω κανονικά πολύγωνα αξιοποιώντας την ενσωματωμένη λειτουργικότητα:

- τρίγωνο,
- τετράγωνο,
- πεντάγωνο
- εξάγωνο,
- οκτάγωνο και
- δωδεκάγωνο.

Διεργασία
επικοινωνίας
(επιλογή και χρήση
εργαλείων)



Εικόνα 2

2η φάση

Σε αυτή τη φάση ο εκπαιδευτικός καλεί τους μαθητές να υπολογίσουν το μέτρο των γωνιών κάθε πολυγώνου. Οι περιπτώσεις του ισόπλευρου τριγώνου και του τετραγώνου δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερη δυσκολία. Στις περιπτώσεις των κανονικών πολύγωνων με περισσότερες από 4 πλευρές είναι πιθανόν οι μαθητές να οδηγηθούν σε αδιέξοδο. Ο εκπαιδευτικός παροτρύνει τους μαθητές να χωρίσουν το πολύγωνο σε σχήματα που τους είναι ήδη γνωστά. Μέσα από τον πειραματισμό οι μαθητές κατασκευάζουν τις διαγωνίους του πολυγώνου χωρίζοντας με αυτό τον τρόπο το κάθε πολύγωνο σε τρίγωνα (Εικόνα 3).

Οι μαθητές ανακαλώντας το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου (180°), υπολογίζουν το άθροισμα των γωνιών κάθε κανονικού πολυγώνου και, κατά συνέπεια, το μέτρο κάθε γωνίας του. Στη συνέχεια, επιβεβαιώνουν τους συλλογισμούς τους αξιοποιώντας την λειτουργικότητα του λογισμικού. Επιλέγουν το εικονίδιο «Γωνία» και ορίζουν τρία σημεία - κορυφές του πολυγώνου θέτοντας ως δεύτερη-μεσαία επιλογή την κορυφή της γωνίας που θέλουν να υπολογίσουν (ένα αντίστοιχο παράδειγμα φαίνεται στην Εικόνα 3).

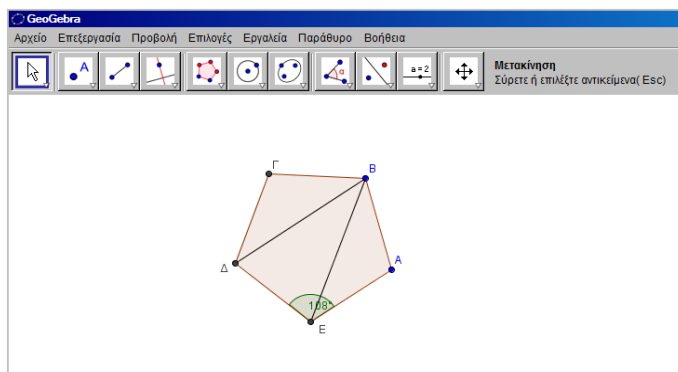
Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας

Διεργασία
δημιουργίας
συνδέσεων

Οι μαθητές δεν θα πρέπει να μπουκν στον πειρασμό να χρησιμοποιήσουν τη λειτουργικότητα πριν από τη διερεύνηση που περιλαμβάνει την ανάλυση του σχήματος σε τρίγωνα

Διεργασία
επικοινωνίας
(επιλογή και χρήση εργαλείων)

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας

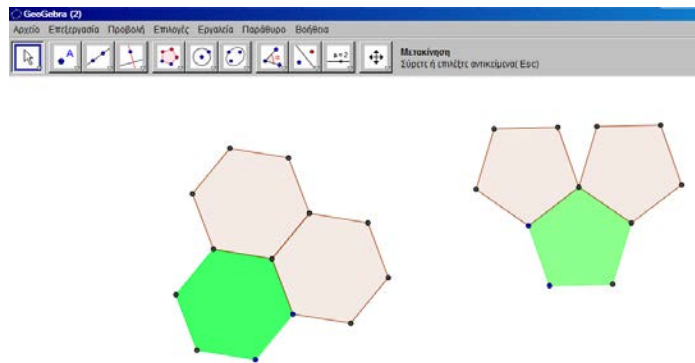


Εικόνα 3

3η φάση

Ο εκπαιδευτικός καλεί τους μαθητές να μελετήσουν, αν είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουν έναν αριθμό ίδιων πολυγώνων, για να καλύψουν το χώρο γύρω από ένα σημείο στο επίπεδο χωρίς κενά και επικαλύψεις. Η κάθε ομάδα μαθητών θα μπορούσε να πειραματιστεί με διαφορετικό πολύγωνο. Κατασκευάζουν το αρχικό κανονικό πολύγωνο καθορίζοντας το μήκος της πλευράς του (δύο γειτονικές κορυφές) και το πλήθος των πλευρών του. Στη συνέχεια, κατασκευάζουν ένα ίσο με το αρχικό κανονικό πολύγωνο με μία πλευρά και δύο κορυφές κοινές. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να καλυφθεί τελείως το επίπεδο χωρίς κενά και επικαλύψεις.

Δύο παραδείγματα επικάλυψης με ένα κανονικό εξάγωνο και ένα κανονικό πεντάγωνο παρουσιάζονται στην Εικόνα 4. Τα αρχικά πολύγωνα (εξάγωνο και πεντάγωνο) διακρίνονται με το πράσινο χρώμα.



Εικόνα 4

Ο εκπαιδευτικός θέτει τις παρακάτω ερωτήσεις στους μαθητές:

α. Με ποια πολύγωνα είναι δυνατή η επικάλυψη του επιπέδου γύρω από ένα σημείο. Ποιος είναι ο αριθμός των πολυγώνων που χρησιμοποιήσατε σε κάθε περίπτωση;

β. Σε ποιες από τις περιπτώσεις δημιουργούνται κενά;

γ. Σε ποιες από τις περιπτώσεις δεν είναι δυνατή η επικάλυψη του επιπέδου; Δημιουργήθηκαν κενά ή επικαλύψεις; Ποιος ήταν ο αριθμός των πολυγώνων που χρησιμοποιήσατε σε κάθε περίπτωση;

δ. Πώς συσχετίζεται (στις περιπτώσεις επιτυχημένης επικάλυψης) ο αριθμός των πολυγώνων και το μέγεθος της γωνίας του πολυγώνου;

ε. Υπάρχει περίπτωση επικάλυψης του επιπέδου με τη χρήση διαφορετικών πολυγώνων; Μπορείτε να περιγράψετε το μοτίβο που δημιουργείται;

Με τις παραπάνω ερωτήσεις ο εκπαιδευτικός ζητά ουσιαστικά

Διεργασία
επικοινωνίας

Διεργασία
δημιουργίας
συνδέσεων

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας

Διεργασία
δημιουργίας
συνδέσεων

Διεργασία
επικοινωνίας

μωσαϊκά 1.ggb
μωσαϊκά 2.ggb

από τους μαθητές να διερευνήσουν τη σχέση ανάμεσα στο μέτρο της γωνίας του κανονικού πολυγώνου και στη δυνατότητα επικάλυψης του επιπέδου. Μέσα από τον πειραματισμό και την ανταλλαγή απόψεων ο εκπαιδευτικός στοχεύει στο να φανταστούν το χώρο γύρω από ένα σημείο σαν ένα κύκλο με 360° και, συνεπώς, η επικάλυψη είναι εφικτή μόνο από τα κανονικά πολύγωνα των οποίων η γωνία διαιρεί ακριβώς το 360° . Τέλος, η τελευταία ερώτηση αποτελεί ουσιαστικά μια επέκταση του προβλήματος, καθώς οι μαθητές καλούνται να συνδυάσουν δύο ή περισσότερα διαφορετικά πολύγωνα για να επιτύχουν την επικάλυψη.

μωσαϊκά 3.ggb
μωσαϊκά 4.ggb
μωσαϊκά 5.ggb
μωσαϊκά 6.ggb
μωσαϊκά 7.ggb
μωσαϊκά 8.ggb
μωσαϊκά 9.ggb

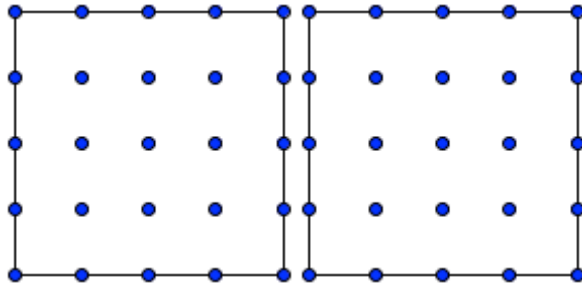
Τα συνοδευτικά αρχεία λογισμικού περιλαμβάνουν παραδείγματα επικαλύψεων.

Ε' Τάξη: Μοιράζοντας ένα τετράγωνο κέικ (ΜΔ2, ΠΜΑ: Μ5, Γ9, Γ10)

Σε αυτήν τη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνται να ανακαλύψουν διαφορετικούς τρόπους για να χωρίσουν ένα τετράγωνο σε τέσσερα ίσα μέρη. Μέσα από τον πειραματισμό, από τη μια μεριά θα διερευνήσουν τις ιδιότητες του τετραγώνου και από την άλλη θα διερευνήσουν τις ιδιότητες ισεμβαδικών σχημάτων που δεν έχουν απαραίτητα το ίδιο σχήμα. Επιπλέον, εμπλέκονται η ικανότητα των μαθητών για οπτικοποίηση, καθώς καλούνται να φανταστούν τρόπους ώστε να προκύψουν τέσσερα ισεμβαδικά σχήματα από το χωρισμό του αρχικού τετραγώνου, αλλά και η ικανότητά τους να κάνουν νοερούς μετασχηματισμούς στην προσπάθειά τους να συγκρίνουν τα τέσσερα κομμάτια που έχουν προκύψει από το χωρισμό.

Ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε να μοιράσει στους μαθητές γεωπίνακες ή τετράγωνα πλαίσια (Εικόνα 5) προκειμένου να πειραματιστούν και να σχεδιάσουν το χωρισμό του τετραγώνου. Επιπλέον, οι μαθητές θα μπορούσαν να πειραματιστούν και με τα λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας (Sketchpad, Cabri, Geogebra) δημιουργώντας ένα τετράγωνο πλέγμα και αξιοποιώντας τις δυναμικές λειτουργικότητες των λογισμικών που τους επιτρέπουν να προτείνουν τις διαφορετικές στρατηγικές που ανέπτυξαν μέσα από τη χρήση του διαδραστικού πίνακα. Όποιο μέσο και αν χρησιμοποιηθεί ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να φροντίσει ώστε οι μαθητές να καταγράψουν τις διαφορετικές λύσεις που προκύπτουν ως αποτέλεσμα της διερεύνησής τους.

Διεργασία
επικοινωνίας
(επιλογή και χρήση
εργαλείων)

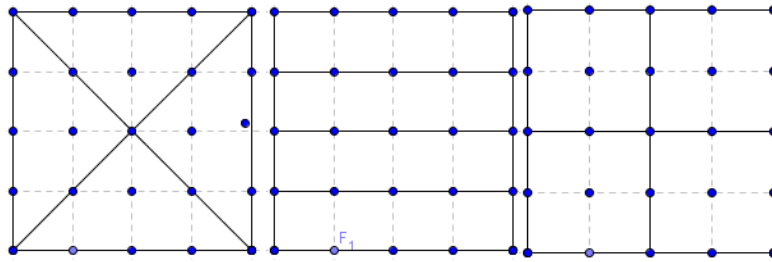


Εικόνα 5

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας

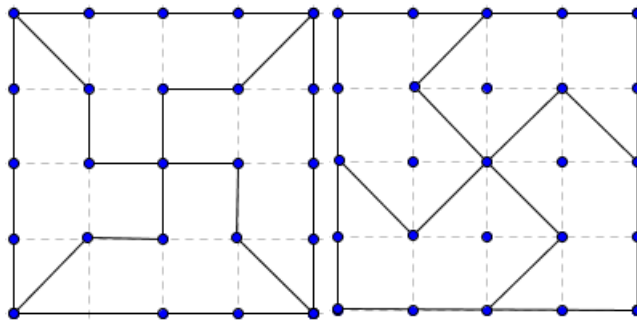
Διεργασία
επικοινωνίας

Οι μαθητές αναμένεται αρχικά να χρησιμοποιήσουν κάθετες, τις διαγωνίους ή τις μεσοκαθέτους των πλευρών του τετραγώνου προκειμένου να χωρίσουν το τετράγωνο σε τέσσερα ίσα σχήματα (Εικόνα 6). Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να παροτρύνει τους μαθητές να ανακαλύψουν περισσότερους «μη συμβατικούς τρόπους χωρισμού».



Εικόνα 6

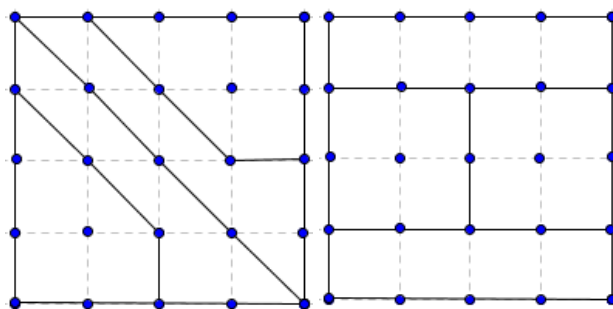
Στη συνέχεια, θα αναζητήσουν πιθανότατα μη συμβατικά σχήματα, τα οποία είναι και τα τέσσερα ίδια (Εικόνα 7).



Εικόνα 7

Διεργασία
δημιουργίας
συνδέσεων

Ο συνεχής πειραματισμός πιθανότατα θα ενεργοποιήσει/ αναπτύξει την ικανότητα των μαθητών για οπτικοποίηση και θα αναζητήσουν ζευγάρια συμμετρικών σχημάτων (Εικόνα 8).

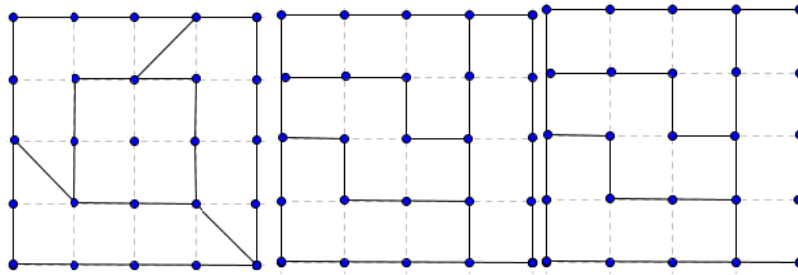


Εικόνα 8

Διεργασία
δημιουργίας

Και τέλος, θα καταλήξουν σε ένα ζευγάρι συμμετρικών σχημάτων ή σε τρία ίδια σχήματα (Εικόνα 9).

συνδέσεων



Εικόνα 9

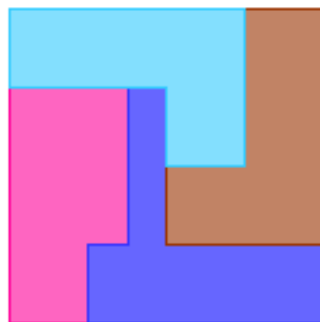
Διεργασία δημιουργίας συνδέσεων

Διεργασία μαθηματικού συλλογισμού και επιχειρηματολογίας

Σε κάθε περίπτωση, ο συνεχής πειραματισμός και η αναζήτηση νέων μοτίβων, καθώς και η αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών στην προσπάθειά τους να παρουσιάσουν τα αποτελέσματα των διερευνήσεών τους, αναμένεται να αναπτύξει την ικανότητα των μαθητών να κατασκευάζουν νοερά σχήματα και να τα μετασχηματίζουν.

Στο δεύτερο ερώτημα της δραστηριότητας οι μαθητές καλούνται να υπερβούν τους περιορισμούς που θέτει το εργαλείο με τον προκαθορισμένο χωρισμό σε μικρά τετράγωνα και να αναζητήσουν τρόπους για να συγκρίνουν τα τέσσερα κομμάτια (Εικόνα 6).

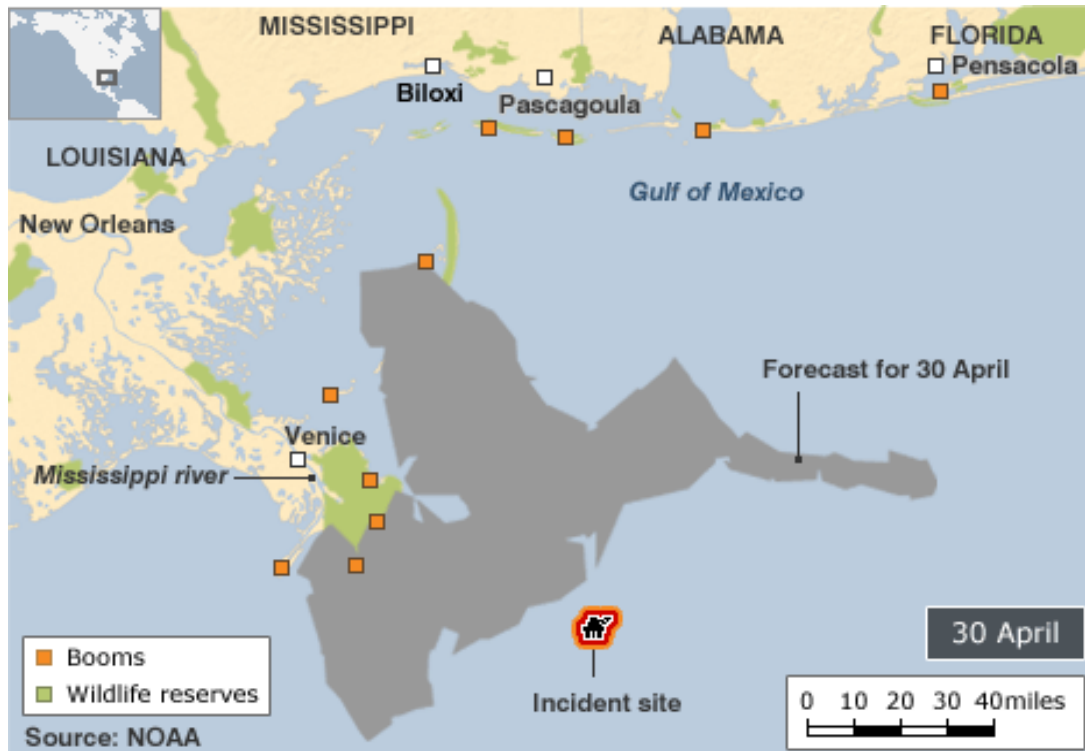
Διεργασία μαθηματικού συλλογισμού και επιχειρηματολογίας



Εικόνα 10

ΣΤ' Τάξη: Πετρελαιοκηλίδες—ο καρκίνος της θάλασσας (ΜΔ5, ΠΜΑ: Μ5)

Οι κηλίδες πετρελαίου χαρακτηρίζονται από μερικούς ως ο καρκίνος της θάλασσας, καθώς οι επιπτώσεις τους στο περιβάλλον (θάλασσα και ακτογραμμές) και τον άνθρωπο είναι ανυπολόγιστες, ενώ δεν γίνεται λόγος για «θεραπεία» από τις επιπτώσεις αυτές. Στην Εικόνα 11 αποτυπώνεται η πετρελαιοκηλίδα που είχε δημιουργηθεί στον Κόλπο του Μεξικό μετά από ατύχημα σε θαλάσσια μονάδα εξόρυξης πετρελαίου σε μια συγκεκριμένη ημερομηνία.



Εικόνα 11: Η πετρελαιοκηλίδα στον Κόλπο του Μεξικό, 30 Απριλίου 2010

Ο εκπαιδευτικός, αρχικά, ζητά από τους μαθητές να υπολογίσουν σε τετραγωνικά χιλιόμετρα την έκταση που καταλάμβανε η πετρελαιοκηλίδα την 30η Απριλίου. Θα ήταν καλό οι μαθητές να εργαστούν σε μικρές ομάδες. Σύμφωνα με την πληροφορία που δίνεται στον χάρτη, τα 4 χιλιοστά είναι όσο 10 πραγματικά μίλια. Είναι σαφές ότι η μέτρηση της έκτασης θα είναι κατά προσέγγιση. Οι μαθητές, συνήθως, ταυτίζουν τη μέτρηση ενός μεγέθους με μια «ακριβή» διαδικασία που περιλαμβάνει την εφαρμογή του κατάλληλου τύπου.

Περιμένουμε, λοιπόν, να δυσκολευτούν στο ξεκίνημα της δραστηριότητας, καθώς ουσιαστικά ο μόνος τρόπος για να ανταπεξέλθουν είναι η ανάλυση του σχήματος σε άλλα μικρότερα. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να μοιράσει στους μαθητές διαφάνειες με τετραγωνισμένους καμβάδες 4x4 τετραγωνικών χιλιοστών για να βοηθήσει τη διερεύνηση. Εναλλακτικά, μπορεί να αναπαράγει τους καμβάδες σε χαρτί ιχνογραφίας. Οι μαθητές περιμένουμε να απαριθμήσουν αρχικά τα ολόκληρα τετράγωνα και, κατόπιν, να προβληματιστούν για τον τρόπο που θα υπολογίσουν τα μέρη που θα απομείνουν. Οι ομάδες των μαθητών μπορούν να παρουσιάσουν τον τρόπο που εργάστηκαν και να συζητήσουν για την ομάδα που πέτυχε την καλύτερη προσέγγιση.

Επειδή η έκταση της κηλίδας είναι αρκετά μεγάλη, οι μαθητές είναι καλό να αναζητήσουν οικείες σε αυτούς γεωγραφικές

Διεργασία
επικοινωνίας
(επιλογή και χρήση
εργαλείων)

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας

Διεργασία
επικοινωνίας

περιοχές και να τις συγκρίνουν ως προς την έκτασή τους με αυτήν της κηλίδας (για παράδειγμα, ένα νησί ή ένα νομό της Ελλάδας).

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να τροφοδοτήσει τη διερεύνηση χρησιμοποιώντας μια σειρά από στοιχεία/ ερωτήσεις όπως οι παρακάτω:

α. Όταν 100 λίτρα αργού πετρελαίου απελευθερώνονται στη θάλασσα, καταλαμβάνουν επιφάνεια περίπου 1.000 τ.μ. Πόσα λίτρα περίπου υπολογίζετε ότι βρίσκονταν στην επιφάνεια της θάλασσας, στον Κόλπο του Μεξικό, την 30η Απριλίου του 2010;

β. Κάθε βαρέλι πετρελαίου περιέχει περίπου 160 λίτρα και ζυγίζει περίπου 140 κιλά. Αν θέλαμε να υπολογίσουμε τη διαρροή σε βαρέλια, πόσα περίπου βαρέλια αργού πετρελαίου θα είχαν απελευθερωθεί στη θάλασσα μέχρι εκείνη τη μέρα;

γ. Ανάλογα με την ποσότητα του πετρελαίου που απελευθερώνεται στη θάλασσα οι πετρελαιοκηλίδες κατατάσσονται σε μικρές (λιγότερο από 7 τόνους), μεσαίες (7-700 τόνους) και μεγάλες (περισσότερο από 700 τόνους). Σε ποια κατηγορία θα κατατάσσατε την παραπάνω πετρελαιοκηλίδα;

δ. Με βάση τις καιρικές συνθήκες ήταν δυνατόν να εφαρμοστούν δύο τεχνικές απορρύπανσης: ο μηχανικός καθαρισμός, ο οποίος κοστίζει από 80 έως 750€ για κάθε βαρέλι, και η επιτόπια καύση που κοστίζει 40€ για κάθε βαρέλι πετρελαίου. Πόσο θα κόστιζε η απορρύπανση της θάλασσας σε κάθε περίπτωση;

Είναι σαφές ότι η συγκεκριμένη δραστηριότητα θα μπορούσε εύκολα να ενταχθεί σε ένα ευρύτερο, διαθεματικό σχέδιο μαθήματος που θα σχετιζόταν με τις επιπτώσεις των πετρελαιοκηλίδων στο περιβάλλον.

Διεργασία
δημιουργίας
συνδέσεων
(ενδομαθηματικών)

Διεργασία
δημιουργίας
συνδέσεων
(με άλλα μαθήματα)

ΣΤ' Τάξη: Μεγεθύνοντας σχήματα και στερεά (ΠΜΑ: Μ6)

Για αυτή τη δραστηριότητα ο εκπαιδευτικός θα χρειαστεί το μικρόκοσμο «Γεωπίνακας» του εκπαιδευτικού λογισμικού του Π.Ι. για τα Μαθηματικά της Ε' και ΣΤ' τάξης (ψηφιακοί γεωπίνακες υπάρχουν σε διάφορες μορφές και στο διαδίκτυο, όπως για παράδειγμα στο <http://nlvm.usu.edu/>).

Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να κατασκευάσουν στο γεωπίνακα ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαστάσεων 3x5. Στη συνέχεια, τους ζητά να κατασκευάσουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που να είναι διπλάσιο του πρώτου. Οι μαθητές θα πρέπει να προσδώσουν νόημα στην έκφραση «διπλάσιο του πρώτου», συζητώντας για τον τρόπο με τον οποίο θα πρέπει να αλλάξουν τα χαρακτηριστικά του σχήματος. Στη προσπάθειά τους να εξαγάγουν συμπεράσματα και να γενικεύσουν, οι μαθητές μπορούν να πειραματιστούν τριπλασιάζοντας το αρχικό ορθογώνιο ή ξεκινώντας από ένα ορθογώνιο διαφορετικών διαστάσεων. Τροφοδοτώντας τη διερεύνηση, ο εκπαιδευτικός μπορεί να ρωτήσει τους μαθητές:

ΣΤ Δημ-Μ6-
Τετράγωνο.bmp

Διεργασία
επικοινωνίας και
διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού
επιχειρηματολογίας
(χρήση ψηφιακών
εργαλείων για
διερεύνηση και
επίλυση
προβλημάτων)

ΣΤ Δημ-Μ6-
κύβος1.bmp

«Τι συμβαίνει κάθε φορά με την περίμετρο και το εμβαδόν του ορθογωνίου;». Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ζητήσει από τους μαθητές να αιτιολογήσουν την απάντησή τους, εξηγώντας δηλαδή γιατί, ενώ η περίμετρος του τετραγώνου διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται, κ.λπ., το εμβαδόν του τετραπλασιάζεται, εννεαπλασιάζεται, κ.λπ.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να επεκτείνει τη δραστηριότητα στις τρεις διαστάσεις με τη βοήθεια του μικρόκοσμου «Εξερευνητής τρισδιάστατων σχημάτων (Στερεοπίνακας)» του εκπαιδευτικού λογισμικού του Π.Ι. για τα Μαθηματικά της Ε' και ΣΤ' τάξης. Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να δημιουργήσουν έναν κύβο ακμής 2 στο μικρόκοσμο και χρησιμοποιώντας το μεταβολέα του μικρόκοσμου να διπλασιάσουν και να τριπλασιάσουν την ακμή του κύβου (στις θέσεις 4 και 6 αντίστοιχα). Οι μαθητές πειραματίζονται με την εφαρμογή και εξάγουν τα συμπεράσματά τους σχετικά με τις αλλαγές που συμβαίνουν στον κύβο κάθε φορά. Ο εκπαιδευτικός, ακολούθως, τους ρωτά: «Με ποιον τρόπο αλλάζουν τα στοιχεία του κύβου; Μεγαλώνουν ή μικραίνουν και κατά πόσο; Τι θα συμβεί αν σε ένα κύβο με όγκο 125 μειώσω την ακμή του κατά 3;» Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ζητήσει από τα παιδιά να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους.

ΣΤ Δημ-M6-
κύβος2.bmp

ΣΤ Δημ-M6-
κύβος3.bmp

Διεργασία
επικοινωνίας και
διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού
επιχειρηματολογίας

(χρήση ψηφιακών
εργαλείων για
διερεύνηση και
επίλυση
προβλημάτων)

Στοχαστικά Μαθηματικά

Στατιστική

Βασικά θέματα: Δεδομένα – Μέτρα θέσης – Μεταβλητότητα

Σημασία της ενότητας: Στον Β' κύκλο οι μαθητές εισάγονται στην ανάλυση δεδομένων χρησιμοποιώντας απλά στατιστικά μέτρα. Η γνώση αυτή είναι σημαντική, καθώς τους επιτρέπει να αξιολογούν ένα σύνολο δεδομένων λαμβάνοντας υπόψη διάφορα χαρακτηριστικά τους για την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Προηγούμενη και επόμενη γνώση: Στον Α' κύκλο οι μαθητές έχουν αποκτήσει εμπειρίες στη διατύπωση ερωτημάτων, τη συλλογή, οργάνωση και αναπαράσταση κατηγορικών και ποσοτικών δεδομένων. Στο Β' κύκλο οι μαθητές επεκτείνουν τη συλλογή δεδομένων σε δύο πληθυσμούς, καθώς και στη συλλογή συνεχών ποσοτικών δεδομένων (μέσω ερευνών ή πειραμάτων ή μετρήσεων). Η έμφαση δίνεται στη σύγκριση ομάδων δεδομένων και στην ανάλυσή τους χρησιμοποιώντας μέτρα θέσης (σταδιακά, επικρατούσα τιμή, διάμεσο, μέση τιμή) και μεταβλητότητας (εύρος). Η αναπαράσταση δεδομένων περιλαμβάνει την κατασκευή και ερμηνεία και διπλών ραβδογραμμάτων. Σε επόμενες τάξεις οι μαθητές εξάγουν συμπεράσματα για πιο πολύπλοκα ερωτήματα που αφορούν στις σχέσεις δείγματος και πληθυσμού.

Δυσκολίες των μαθητών: Οι μαθητές μπορεί να δυσκολευτούν στην κατασκευή διαγραμμάτων στα οποία η εικόνα ή το σύμβολο αντιπροσωπεύουν πολλαπλάσια του 1, καθώς αυτός ο τύπος διαγράμματος απαιτεί την ανάπτυξη πολλαπλασιαστικής σκέψης. Η διάμεσος και η μέση τιμή είναι δύσκολες έννοιες, οι οποίες γίνονται κατανοητές από τους μαθητές μέσα από πολλές εμπειρίες στη διάρκεια της σχολικής τους ζωής. Η διάμεσος και η μέση τιμή δεν είναι πάντα τιμές της ποσοτικής μεταβλητής και οι μαθητές σε αυτόν τον κύκλο χρειάζεται να τις ερμηνεύουν πάντα στο πλαίσιο της αντίστοιχης δραστηριότητας. Η μέση τιμή, σε αυτόν τον κύκλο, γίνεται αντιληπτή ως δίκαιη μοιρασιά (π.χ. πόσα γράμματα θα είχαν τα ονόματα των μαθητών, αν όλα τα ονόματα είχαν τον ίδιο αριθμό γραμμάτων;) και σε μεγαλύτερες τάξεις ως σημείο ισορροπίας. Οι σχετικές συχνότητες βοηθούν στη σύγκριση ομάδων ποσοτικών δεδομένων, ιδιαίτερα όταν το πλήθος των δεδομένων είναι διαφορετικό.

Προτάσεις για διδακτική διαχείριση: Ο εκπαιδευτικός εμπλέκει ενεργά τα παιδιά στην πραγματοποίηση ερευνών για τη συλλογή και οργάνωση δεδομένων. Η διδασκαλία των μέτρων θέσης και μεταβλητότητας εστιάζεται κυρίως στην ερμηνεία τους σε συγκεκριμένα σύνολα δεδομένων και σε σχέση με τα χαρακτηριστικά του συνόλου των δεδομένων. Είναι σημαντικό να δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να ερμηνεύουν τα δεδομένα αξιοποιώντας όλα τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που μαθαίνουν.

Ενδεικτικές δραστηριότητες















Γ΄ Τάξη:

1. ΣΔ1. Η δραστηριότητα ΣΔ1 αποσκοπεί στην εμπλοκή των μαθητών σε μια μικρή έρευνα για ένα θέμα προκειμένου να διατυπώσουν ερωτήματα, να συλλέξουν δεδομένα, να τα οργανώσουν, να τα αναπαραστήσουν και να τα ερμηνεύσουν. Οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να παρατηρήσουν ότι διαφορετικοί τρόποι οργάνωσης των δεδομένων αποκαλύπτουν διάφορες πληροφορίες. Για τη διδακτική διαχείριση της δραστηριότητας βλ. Δρ. ΣΔ1, Α΄ τάξη.

2. Η δραστηριότητα 2 εισάγει τους μαθητές στη μελέτη διαγραμμάτων στα οποία μία εικόνα αντιπροσωπεύει πολλαπλάσια του 1. Ο εκπαιδευτικός δίνει στους μαθητές σε μικρές ομάδες το παρακάτω διάγραμμα, το οποίο παρουσιάζει τις προτιμήσεις των μαθητών ενός σχολείου σε σχέση με τα είδη μουσικών οργάνων. Η κάθε εικόνα αντιπροσωπεύει 20 μαθητές. Οι μαθητές συζητούν σε τι διαφέρει το συγκεκριμένο διάγραμμα σε σχέση με όσα διαγράμματα έχουν ήδη μελετήσει και καταγράφουν σε ομάδες τις πληροφορίες που παρουσιάζει.

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας
(διερεύνηση και
επιχειρηματολογία)

Διεργασία
επικοινωνίας
(χρήση
αναπαραστάσεων)

		
		
		
		
		
		
έγχορδα	πνευστά	κρουστά

Πίνακας 1: Προτιμήσεις των μαθητών σε είδη μουσικών οργάνων

3. ΣΔ2. Η δραστηριότητα ΣΔ2 επιτρέπει στους μαθητές να περιγράψουν άτυπα το σχήμα της κατανομής ενός συνόλου δεδομένων. Μέσω διάφορων ερωτημάτων οι μαθητές παρατηρούν ένα σύνολο δεδομένων ως μια ολότητα και αντιλαμβάνονται ότι υπάρχουν διάφορα χαρακτηριστικά που μπορούν να επισημάνουν, όπως ασυνήθιστες τιμές, τιμές χωρίς δεδομένα, τιμές συγκέντρωσης πολλών δεδομένων.

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας
(διερεύνηση και
επιχειρηματολογία)

Διεργασία
επικοινωνίας
(χρήση
αναπαραστάσεων)

Δ΄ Τάξη:

1. Η δραστηριότητα 1 εισάγει τους μαθητές στη σύγκριση ομάδων δεδομένων. Οι μαθητές πραγματοποιούν μια έρευνα στα αγόρια και στα κορίτσια (δύο πληθυσμοί) της τάξης τους με θέμα την κατάταξη τριών μαθημάτων (που οι ίδιοι θα επιλέξουν) με βάση τη σειρά προτίμησης και συγκρίνουν τα αποτελέσματα. Οι δύο πληθυσμοί πρέπει να περιλαμβάνουν τον ίδιο αριθμό ατόμων. Η αναπαράσταση των δεδομένων γίνεται με διπλό ραβδόγραμμα. Για τη διδακτική διαχείριση της δραστηριότητας βλ. Δρ. ΣΔ1, Α΄ τάξη.

2. **ΣΔ1.** Στη δραστηριότητα ΣΔ1 οι μαθητές γράφουν μια μικρή ιστορία ερμηνεύοντας τα δεδομένα του διαγράμματος που αναφέρονται σε μια έρευνα που αφορά δύο πληθυσμούς. Οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να καταγράψουν με το δικό τους τρόπο τις πληροφορίες και να εξάγουν συμπεράσματα για τους δύο πληθυσμούς, βασιζόμενοι στα δεδομένα.

3. Η δραστηριότητα εισάγει τους μαθητές στην εύρεση της διαμέσου. Στον επόμενο πίνακα καταγράφονται οι απαντήσεις των μαθητών μιας Δ΄ τάξης στο ερώτημα: Πόσες ώρες παρακολουθούν τηλεόραση το Σαββατοκύριακο;

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας
(διερεύνηση και
επιχειρηματολογία)

Διεργασία
επικοινωνίας
(χρήση
αναπαραστάσεων)

ΩΡΕΣ ΠΟΥ ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΤΗΛΕΟΡΑΣΗ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΗΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΚΑΘΕ ΜΕΡΑ	
ΜΑΡΙΑ Α.	1
ΝΙΚΟΣ	2
ΓΙΑΝΝΗΣ	2
ΔΗΜΗΤΡΑ	2
ΚΛΕΙΩ	1
ΘΑΝΑΣΗΣ	0
ΧΡΗΣΤΟΣ	2
ΓΙΩΡΓΟΣ	1
ΜΑΡΙΟΣ	1
ΝΙΚΗ	2
ΧΡΙΣΤΙΝΑ	1
ΘΕΑΝΩ	1
ΜΑΡΙΑ Κ.	2
ΕΛΕΝΑ	3
ΑΝΔΡΕΑΣ	4
ΓΡΗΓΟΡΗΣ	2
ΜΑΡΙΑ Λ.	3

Πίνακας 2: Απαντήσεις των μαθητών

Συζητούν το ερώτημα: Πόσες ώρες βλέπουν τηλεόραση οι μισοί περίπου μαθητές; (δηλ. ποια είναι η τιμή που βρίσκεται στη μέση των δεδομένων). Τα παιδιά διατάσσουν τους αριθμούς των ωρών σε αύξουσα σειρά σύμφωνα με τις τιμές του πίνακα (μπορούν να καταγράψουν σε μία λωρίδα χωρισμένη σε ίσα μέρη τους αριθμούς σε αύξουσα σειρά και να τη διπλώσουν στη μέση). Βρίσκουν τη διάμεσο των δεδομένων εντοπίζοντας τον αριθμό των ωρών που βρίσκεται στη μέση της σειράς (σε περίπτωση που υπάρχουν δύο τιμές βρίσκουν το άθροισμα και διαιρούν με το 2). Συζητούν τους λόγους για τους οποίους είναι διαφορετικά τα δεδομένα (π.χ. γιατί ο Θανάσης δεν βλέπει τηλεόραση).

Ε΄ Τάξη:

1.ΣΔ1. Η δραστηριότητα ΣΔ1 αποσκοπεί στην εμπλοκή των μαθητών σε μια έρευνα προκειμένου να διατυπώσουν ερωτήματα, να συλλέξουν, να οργανώσουν, να αναπαραστήσουν συνεχή ποσοτικά δεδομένα και να τα ερμηνεύσουν. Στα συνεχή ποσοτικά δεδομένα οι τιμές δεν είναι φυσικοί αριθμοί. Κατά την αναπαράσταση των δεδομένων, αν υπάρχουν μεγάλες διαφοροποιήσεις, μπορεί να γίνει μια απλή ομαδοποίηση (π.χ. 1 ώρα, 2-3 ώρες, περισσότερες από 3 ώρες). Η αναπαράσταση μπορεί να γίνει με διπλό ραβδόγραμμα ή με σημειογράμματα. Οι δύο πληθυσμοί πρέπει να περιλαμβάνουν τον ίδιο αριθμό ατόμων. Για τη διδακτική διαχείριση της δραστηριότητας βλ. Δρ. ΣΔ1, Α΄ τάξη.

(Ανάλογη δραστηριότητα μπορεί να γίνει για το ύψος των μαθητών δύο τάξεων)

ΣΤ΄ Τάξη:

1.ΣΔ1. Η δραστηριότητα ΣΔ1 αποσκοπεί στην εμπλοκή των μαθητών σε μια έρευνα προκειμένου να συλλέξουν, να οργανώσουν, να αναπαραστήσουν δεδομένα και να τα ερμηνεύσουν, χρησιμοποιώντας και τα τρία μέτρα θέσης. Η εισαγωγή ενός πίνακα σχετικών συχνοτήτων επιτρέπει στα παιδιά να συγκρίνουν ομάδες δεδομένων ανεξάρτητα από το πλήθος των δεδομένων σε κάθε πληθυσμό. Για τη διδακτική διαχείριση της δραστηριότητας βλ. Δρ. ΣΔ1, Α΄ τάξη.

Πιθανότητες

Βασικά θέματα: Πείραμα τύχης – Πιθανότητα ενδεχομένου

Σημασία της σχετικής ενότητας: Στον Β' κύκλο οι μαθητές διερευνούν τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης όταν αυτό επαναλαμβάνεται πολλές φορές (εμπειρική πιθανότητα) και προσδιορίζουν αριθμητικά την πιθανότητα σε πειράματα τύχης (θεωρητική πιθανότητα). Η σύγκριση της εμπειρικής και της θεωρητικής πιθανότητας επιτρέπει στους μαθητές να αρχίσουν να αντιλαμβάνονται τη διαφορά ανάμεσα στο προβλεπόμενο και στο πραγματικό αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης.

Προηγούμενη και επόμενη γνώση: Τα παιδιά στον Α' κύκλο έχουν εμπλακεί σε απλές πιθανολογικές καταστάσεις και έχουν μάθει να περιγράφουν ένα γεγονός ως βέβαιο, αδύνατο, πιθανό, απίθανο. Στο Β' κύκλο οι μαθητές αρχίζουν να αντιλαμβάνονται τη σχέση του αριθμού των δοκιμών ενός πειράματος τύχης με τα αποτελέσματα που προκύπτουν. Επίσης, προσεγγίζουν την πιθανότητα ως μέτρο εμφάνισης ενός ενδεχομένου. Ο υπολογισμός της πιθανότητας ενός ενδεχομένου γίνεται σταδιακά μέσω εκτίμησης με χρήση κλίμακας και, στη συνέχεια, με κλάσματα. Σε μεγαλύτερες τάξεις επεκτείνουν τις γνώσεις τους στον υπολογισμό πιθανοτήτων σε πιο σύνθετα πειράματα τύχης.

Δυσκολίες των μαθητών: Είναι δύσκολο για τους μαθητές να αντιληφθούν ότι δεν μπορεί να προβλεφθεί η εμφάνιση ενός ενδεχομένου σε κάθε δοκιμή κατά την πραγματοποίηση ενός πειράματος τύχης, όμως μπορούν να κάνουν προβλέψεις για τη συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου σε πολλές δοκιμές. Επίσης, η έκφραση της πιθανότητας με κλάσματα προϋποθέτει καλή γνώση των ρητών αριθμών. Οι μαθητές πιθανά δυσκολεύονται να αντιληφθούν τις διαφορές στα πειράματα ενός και δύο σταδίων κατά την καταγραφή όλων των δυνατών αποτελεσμάτων.

Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση: Ο εκπαιδευτικός εμπλέκει ενεργά τα παιδιά στην πραγματοποίηση ενός πειράματος τύχης. Είναι σημαντικό οι μαθητές να έχουν την ευκαιρία : α) να εκφράζουν και να αιτιολογούν τις αρχικές τους προβλέψεις, β) να πραγματοποιούν ένα πείραμα πολλές φορές και να καταγράφουν τα αποτελέσματα και γ) να αξιολογούν τη διαφορά ανάμεσα στις προβλέψεις τους και στα εμπειρικά αποτελέσματα που προκύπτουν κατά την πραγματοποίησή του προκειμένου να οδηγηθούν σε ένα συμπέρασμα.

Ενδεικτικές Δραστηριότητες:

Γ' Τάξη: (ΠΜΑ: ΠΔ1, ΠΔ2)

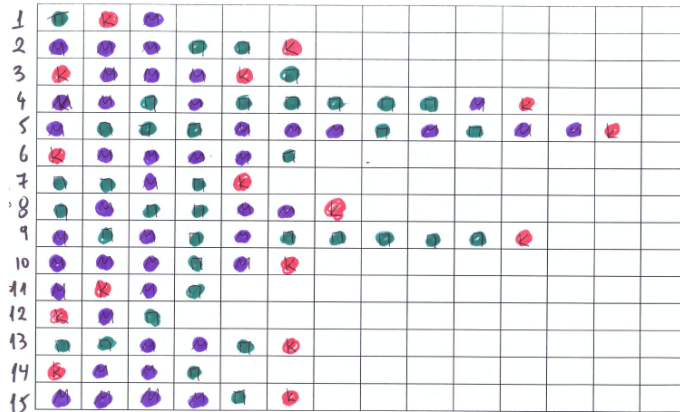
1. Η δραστηριότητα επιτρέπει στους μαθητές να επιχειρηματολογήσουν για τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης πολλών δοκιμών. Ωστόσο, στα πειράματα τύχης υπάρχει πάντα η περίπτωση τα πραγματικά αποτελέσματα να μην συμφωνούν με τις σωστές προβλέψεις των μαθητών (π.χ. σε μία ομάδα μπορεί οι μαθητές να προβλέψουν ότι πιο συχνά εμφανίζεται το πράσινο χρώμα αλλά δεν είναι σίγουρο ότι τα

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας

πραγματικά αποτελέσματα στην ομάδα τους θα είναι ανάλογα).

(διερεύνηση και επιχειρηματολογία)

Η καταγραφή των αποτελεσμάτων στη συγκεκριμένη δραστηριότητα μπορεί να γίνει με τον ακόλουθο τρόπο για κάθε ομάδα:



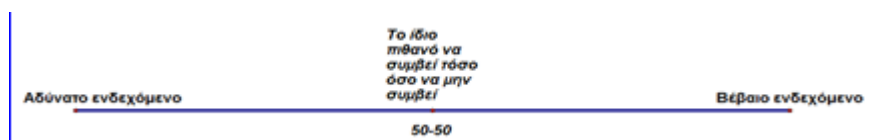
Εικόνα 1: Καταγραφή αποτελεσμάτων

Τα αποτελέσματα των ομάδων δεν θα είναι τα ίδια ούτε ανά γύρο ούτε συνολικά. Γι΄ αυτό το λόγο στα ερωτήματα που συζητούν οι μαθητές χρησιμοποιούνται εκφράσεις όπως «τις περισσότερες φορές» ή «τις λιγότερες φορές». Η συνολική καταγραφή των αποτελεσμάτων ανά ομάδα και στην τάξη μπορεί να γίνει και με τη χρήση ραβδογράμματος.

2. Η δραστηριότητα επιτρέπει στους μαθητές να προβλέψουν, με βάση τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης πολλών δοκιμών, τους δειγματικούς χώρους που έχουν χρησιμοποιηθεί. Στο συγκεκριμένο πείραμα, οι μαθητές θα αντιστοιχίσουν τη σακούλα που περιέχει 5 κόκκινους και 5 άσπρους βόλους με τα αποτελέσματα, όπου θα προκύπτουν περίπου ίδιοι αριθμοί βόλων των δύο χρωμάτων. Ωστόσο, όπως και στη δραστηριότητα ΠΔ1, υπάρχει πάντα η περίπτωση τα πραγματικά αποτελέσματα να μην συμφωνούν με τις σωστές προβλέψεις των μαθητών.

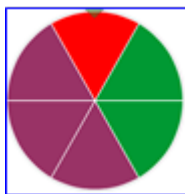
Διεργασία μαθηματικού συλλογισμού και επιχειρηματολογίας (διερεύνηση και επιχειρηματολογία)

3. Η δραστηριότητα εισάγει τους μαθητές στην εκτίμηση της πιθανότητας ενός ενδεχομένου με βάση την παρακάτω κλίμακα.



Σχήμα 1

Οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες και κάθε ομάδα χρησιμοποιεί ένα τροχό τριών διαφορετικών χρωμάτων.



Εικόνα 2: Τροχός της τύχης

Οι μαθητές σχολιάζουν διάφορες προτάσεις χρησιμοποιώντας την κλίμακα, όπως οι παρακάτω:

- Μπορεί να προκύψει κίτρινο χρώμα.
- Μπορεί να μην προκύψει ποτέ πράσινο.
- Μπορεί να προκύψει κόκκινο ή πράσινο ή μοβ χρώμα.
- Μπορεί να προκύψει μοβ χρώμα.

Συζητούν τις εκτιμήσεις τους.

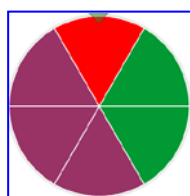
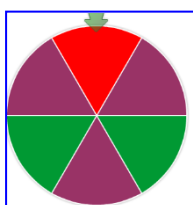
Διεργασία
επικοινωνίας
(μέσω φυσικής
γλώσσας)

Δ' Τάξη: (ΠΜΑ: ΠΔ1)

1. Η δραστηριότητα δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να αντιληφθούν ότι ο αριθμός των δοκιμών ενός πειράματος τύχης επηρεάζει τα εμπειρικά αποτελέσματα που προκύπτουν. Επιπλέον, οι μαθητές αρχίζουν να εκφράζουν τις προβλέψεις τους αριθμητικά (π.χ. θα έρθει 2 φορές κεφάλι στις 6 ρίψεις).

Για τη διδακτική διαχείριση της δραστηριότητας βλ. Γ' τάξη, δραστ. ΠΔ1.

2. Οι μαθητές σε ομάδες χρησιμοποιούν τους παρακάτω τροχούς για να εκτιμήσουν την πιθανότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου σε κάθε τροχό.



Εικόνα 3: Τροχοί της τύχης

Για τη διδακτική διαχείριση της δραστηριότητας βλ. Γ' τάξη, δραστ. 3.

Ε' Τάξη:

1. Η δραστηριότητα εισάγει τους μαθητές στον υπολογισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου με κλάσματα και την αιτιολόγησή του. Οι μαθητές σε ομάδες έχουν ένα τροχό με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και ένα τροχό με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 όπως φαίνεται παρακάτω.

Διεργασία
επικοινωνίας
(μέσω φυσικής
γλώσσας)

Διεργασία
επικοινωνίας
(μέσω συμβολικής
γλώσσας)



Εικόνα 4: Τροχοί

Διεργασία
δημιουργίας
συνδέσεων

Τα παιδιά συζητούν ποιον τροχό θα χρησιμοποιήσουν, αν ήθελαν να παίξουν ένα παιχνίδι στο οποίο κερδίζουν μόνο αν τύχει ο αριθμός 4. Ο εκπαιδευτικός βοηθά τις ομάδες να αιτιολογήσουν την απόφασή τους με αριθμητικές εκφράσεις (π.χ. γιατί στον ένα τροχό είναι 1 περίπτωση στις 4 να τύχει 4, ενώ στον άλλο είναι 1 περίπτωση στις 8). Ο εκπαιδευτικός εισάγει τη χρήση κλασμάτων για την έκφραση της πιθανότητας.

Στη συνέχεια, οι μαθητές πραγματοποιούν το πείραμα τύχης παίζοντας 20 φορές με τον κάθε τροχό και καταγράφουν τα αποτελέσματα. Εκφράζουν τα αποτελέσματα με σχετικές συχνότητες (π.χ. το 4 έτυχε 5 φορές στις 20 δοκιμές στον έναν τροχό ($5/20$) και 1 φορά στις 20 στον άλλον τροχό ($1/20$)). Συγκρίνουν τα πραγματικά αποτελέσματα του πειράματος με την αρχική τους πρόβλεψη στηριζόμενοι στα κλάσματα.

Διεργασία
επικοινωνίας
(μέσω συμβολικής
γλώσσας)

2. ΠΔ1 Οι μαθητές υπολογίζουν τη πιθανότητα ενός ενδεχομένου με τη χρήση κλασμάτων και τα τοποθετούν σε κλίμακα 0 έως 1.

Διεργασία
δημιουργίας
συνδέσεων

ΣΤ' Τάξη: (ΠΜΑ: ΠΔ2)

1. Η δραστηριότητα εισάγει τους μαθητές στην περιγραφή όλων των δυνατών αποτελεσμάτων σε ένα πείραμα τύχης δύο σταδίων. Οι μαθητές σε ομάδες έχουν δύο ζάρια με τους αριθμούς 1-6 σε διαφορετικά χρώματα (κόκκινο ζάρι και μπλε ζάρι). Βρίσκουν ποια αθροίσματα προκύπτουν, αν τα ρίξουν ταυτόχρονα. Η καταγραφή των αθροισμάτων μπορεί να καταλήξει σε ένα πίνακα, όπως φαίνεται παρακάτω:

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας
(διερεύνηση και
επιχειρηματολογίας)

						6+1						
					5+1	5+2	6+2					
				4+1	4+2	4+3	5+3	6+3				
			3+1	3+2	3+3	3+4	4+4	5+4	6+4			
		2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5		
	1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	

Πίνακας 3

Με αφορμή τον πίνακα η συζήτηση μπορεί να αφορά θέματα όπως ποιο ενδεχόμενο είναι περισσότερο ή λιγότερο πιθανό να εμφανιστεί και γιατί, το πλήθος όλων των δυνατών ενδεχομένων, τον υπολογισμό της πιθανότητας του κάθε ενδεχομένου κ.λπ.

Διεργασία
μαθηματικού
συλλογισμού και
επιχειρηματολογίας
(διερεύνηση και
επιχειρηματολογίας)

2. Η δραστηριότητα δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να συγκρίνουν τη θεωρητική με την εμπειρική πιθανότητα σε ένα πείραμα τύχης δύο σταδίων. Για τη διδακτική διαχείριση της δραστηριότητας βλ. δραστηριότητα 1, Ε΄ Δημοτικού.

Συνθετική Εργασία Β΄ Κύκλου

ΣΤ΄ Δημοτικού: Το πράσινο σχολείο (συνθετική εργασία 13)

Η εργασία συνδέει τον πραγματικό κόσμο με τα μαθηματικά και δημιουργεί συνδέσεις διαφορετικών περιοχών των μαθηματικών. Ενσωματώνει λειτουργικά και ουσιαστικά τις νέες Τεχνολογίες.

Θέμα: Μέσα από ένα πραγματικό πρόβλημα κατασκευής ενός παρτεριού στον κήπο του σχολείου, οι μαθητές του Β΄ κύκλου θα διερευνήσουν ένα πλήθος ζητημάτων που αφορούν τις διαστάσεις του παρτεριού, την αναζήτηση της κατασκευής με το μικρότερο κόστος, της προμήθειας και της αγοράς της κατασκευής, την προμήθεια των φυτών και τον τρόπο που θα φυτευτούν. Η παρούσα εργασία αφορά την ΣΤ΄ τάξη που θα σχεδιάσει τις διαστάσεις του πλαισίου και τον υπολογισμό της οικονομικότερης λύσης.

Πλαίσιο εφαρμογής: Η συνθετική εργασία προτείνεται να διεξαχθεί εξ΄ ολοκλήρου στο εργαστήριο υπολογιστών. Στη διάρκεια της υλοποίησης ο διδάσκων θα καθοδηγεί τις ομάδες, θα διευκολύνει την κοινωνική αλληλεπίδραση, θα υπενθυμίζει τους κανόνες συνεργασίας, θα ενθαρρύνει, θα παροτρύνει, θα κατανέμει το λόγο. Αν οι μαθητές δεν έχουν προηγούμενη εμπειρία με το λογισμικό του Χελωνόκοσμου θα μπορούσε ο διδάσκων να αφιερώσει μία διδακτική ώρα για μια πρώτη εξοικείωση των μαθητών με το περιβάλλον και τις βασικές λειτουργίες του λογισμικού. Στους μαθητές θα μοιραστούν τα Φύλλα Εργασίας που παρατίθεται στο τέλος του παρόντος συνοπτικού κειμένου (όπου υπάρχουν κάποιες βασικές οδηγίες για τη χρήση του λογισμικού) ενώ οι μαθητές θα έχουν πρόσβαση στα αρχεία [13-φάση 1η-Δρ2.mwd](#), [13-φάση 1η-Δρ3.mwd](#), [13-φάση 2η-δρ3.mwd](#).

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Ως προς τα μαθηματικά οι μαθητές γνωρίζουν: τον υπολογισμό της περιμέτρου και του εμβαδού ενός ορθογώνιου, τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά, τα ποσοστά, τις μετατροπές μονάδων επιφανείας, τον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων. Ως προς την τεχνολογία οι μαθητές καλό θα ήταν να γνωρίζουν: τα παράθυρα της εφαρμογής και το ρόλο τους και βασικές εντολές όπως: σβήσε γραφικά, μπροστά, πίσω, αριστερά, δεξιά, τύπωσε.

Ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων

1^η φάση

1^η δραστηριότητα: Οι μαθητές σχεδιάζουν ορθογώνια με χειραπτικά υλικά και υπολογίζουν τα εμβαδά τους και την περίμετρό τους. Αυτό θα βοηθήσει να ανακαλέσουν προγενέστερες γνώσεις τους και να εισαχθούν καλύτερα στο ψηφιακό περιβάλλον. Στη συνέχεια υπολογίζουν το εμβαδόν του κήπου (55,125 τ.μ.) και το μέγιστο δυνατό εμβαδόν του παρτεριού (1,1025 τ.μ.).

Ενδομαθηματικές
συνδέσεις

χρήση χειραπτικού
υλικού

[13-φάση 1η-Δρ2.mwd](#)

χρήση ψηφιακών
εργαλείων

2^η δραστηριότητα: Χρησιμοποιώντας ένα έτοιμο αρχείο που σε μία απλή διαδικασία κατασκευάζουν ένα ορθογώνιο, εισάγονται

στο περιβάλλον του λογισμικού και εξοικειώνονται με απλές εντολές του. Μαθαίνουν να ορίζουν διαδικασίες και να τις εκτελούν. Για μεγαλύτερη κατανόηση των εντολών της χελώνας θα μπορούσε ο διδάσκων να προτείνει σε κάθε ομάδα να διαβάσουν τις εντολές της χελώνας και ένας συμμαθητής τους να εκτελεί. Μετατρέπουν μονάδες επιφανείας από μία μονάδα σε άλλη.

Ενδομαθηματικές
συνδέσεις
[13-φάση 1η-Δρ3.mwd](#)
χρήση ψηφιακών
εργαλείων για
διερεύνηση,
γενίκευση και
επικοινωνία

3^η δραστηριότητα: Οι μαθητές μέσα από ένα έτοιμο αρχείο διερευνούν το ρόλο της κάθε εντολής και εισάγονται στη χρήση των μεταβλητών στο Χελωνόκοσμο. Χρησιμοποιούν τη δυνατότητα του λογισμικού να βρίσκουν γρήγορα το εμβαδόν και την περίμετρο ορθογωνίων αλλάζοντας τις τιμές των μεταβλητών. Καταλήγουν στο γενικευμένο τύπο του εμβαδού και της περιμέτρου ενός ορθογωνίου με πλευρές χ και ψ .

Προστιθέμενη αξία: Οι μαθητές θα έχουν την ευκαιρία να διερευνήσουν τη λύση πραγματικών προβλημάτων και να τα συνδέσουν με ένα εκτεταμένο εννοιολογικό πεδίο μαθηματικών εννοιών και διασυνδεδεμένων αναπαραστάσεων. Οι μαθητές θα κατανοήσουν ότι μπορούν να εξοικονομήσουν πολύτιμο χρόνο χρησιμοποιώντας το λογισμικό για τον υπολογισμό μετρήσεων με τη δυναμική σύνδεση των παράθυρων του λογισμικού, την εμφάνιση της κατασκευής στον καμβά εντολών της Logo και το γρήγορο υπολογισμό ποσοτήτων που εξαρτώνται από μεταβλητές. Κάθε ενέργεια του μαθητή ακολουθείται από μια ενέργεια του προγράμματος και αντίστροφα. Αυτή η συνεχής αλληλεπίδραση παρέχει στο μαθητή ανατροφοδότηση και ευκαιρίες για ερμηνεία και διαπραγματεύση.

2^η φάση

1^η δραστηριότητα: Οι μαθητές ανακαλούν τις γνώσεις τους για τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά και διερευνούν πώς μπορούν να γράψουν τη μία ως προς την άλλη πλευρά ενός ορθογωνίου που έχει σταθερό εμβαδόν. Πιθανόν να δυσκολέψει τους μαθητές αλλά θα βοηθήσει στην κατανόηση της επόμενης δραστηριότητας.

ενδο-μαθηματικές
συνδέσεις

2^η δραστηριότητα: Σ' αυτή τη δραστηριότητα οι μαθητές θα αναγνωρίσουν ότι η ελαχιστοποίηση του κόστους εξαρτάται από την ελαχιστοποίηση της περιμέτρου και θα μαθηματικοποιήσουν το πρόβλημα καταλήγοντας στην έκφραση της παράστασης που δίνει το κόστος όταν η μία πλευρά είναι χ και το εμβαδόν σταθερό και ίσο με 1,1.025 τ.μ. ($55 \cdot 2 \cdot (\chi + 1,1025/\chi)$).

διερεύνηση γενίκευση
και επιχειρημα-
τολογία

μοντελοποίηση μιας
κατάστασης

3^η δραστηριότητα: Δίνεται ένα αρχείο όπου οι μαθητές σύμφωνα με αυτά που έχουν ήδη διαπραγματευτεί θα αναγνωρίσουν στο (α) ερώτημα ότι κατασκευάζει ένα ορθογώνιο με σταθερό εμβαδόν (11025 τ.ε.) και με μία μεταβλητή (πλευρά χ σε τ.ε.). Στο (β) ερώτημα θα εκτελέσουν τη διαδικασία και θα ανατροφοδοτήσουν τις απόψεις τους. Στο (γ) ερώτημα θα χρησιμοποιήσουν το δυναμικό χειρισμό της μεταβλητής χ για να συμπεράνουν ότι τελικά η ελάχιστη περίμετρος του ορθογωνίου (420 εκ.) προκύπτει όταν η πλευρά χ είναι 105 εκ. και το σχήμα που προκύπτει είναι

[13-φάση 2η-Δρ3.mwd](#)

χρήση ψηφιακών
εργαλείων για
διερεύνηση,
γενίκευση και
επικοινωνία

τετράγωνο. Τέλος στο (δ) ερώτημα θα απαντήσουν στο αρχικό ερώτημα για την ελαχιστοποίηση του κόστους.

Προστιθέμενη αξία: Με τη δυνατότητα δυναμικού χειρισμού με το μεταβολέα, την ταυτόχρονη απεικόνιση του σχήματος και τον υπολογισμό του εμβαδού και της περιμέτρου, ο μαθητής έχει ευκαιρίες να διερευνήσει το πρόβλημα. Η χρήση του λογισμικού ενισχύει την ικανότητα μαθηματικής αιτιολόγησης και απόδειξης και βοηθά τους μαθητές να διερευνήσουν τις ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων και τις μεταξύ τους σχέσεις.

Φύλλα εργασίας

1η Φάση

1η δραστηριότητα: Οι διαστάσεις του κήπου του σχολείου είναι 5,25 μ πλάτος και 10,50 μ μήκος. Το ορθογώνιο πλαίσιο του παρτεριού που θέλουμε να κατασκευάσουμε δεν πρέπει να ξεπερνά το 2% του κήπου του σχολείου.

α) Σχεδιάζουμε τρία διαφορετικά ορθογώνια και υπολογίζουμε το εμβαδόν και την περίμετρό τους. Καταγράφουμε τα δεδομένα για κάθε περίπτωση:

Μήκος ορθογωνίου	Πλάτος ορθογωνίου	Εμβαδόν ορθογωνίου	Περίμετρος ορθογωνίου

β) Υπολογίζουμε το εμβαδόν του κήπου του σχολείου.

γ) Ποιο είναι το μέγιστο εμβαδόν που μπορεί να καταλαμβάνει το παρτέρι;

2^η δραστηριότητα: Ανοίγουμε το αρχείο του Χελωνόκοσμου [13-φάση 1η-Δρ2.mwd](#)

α) Εκτελούμε τη διαδικασία «ορθογώνιο1» (πατώντας insert όταν ο δείκτης του ποντικιού είναι στην ίδια γραμμή). Αν υποθέσουμε ότι κάθε βήμα της χελώνας είναι 1 εκατοστό, τι εμβαδόν έχει το ορθογώνιο που κατασκευάστηκε σε τετραγωνικά εκατοστά και τετραγωνικά μέτρα;

β) Αλλάζουμε τις πλευρές του ορθογωνίου και εκτελούμε πάλι τη διαδικασία (πρέπει να ορίσουμε ξανά τη διαδικασία επιλέγοντάς την και πατώντας το πλήκτρο insert).

3^η δραστηριότητα: Ανοίγουμε το αρχείο του Χελωνόκοσμου [13-φάση 1η-Δρ3.mwd](#).

α) Διαβάζουμε την παρακάτω διαδικασία «ορθογώνιο2» . Εδώ έχουν οριστεί δύο μεταβλητές, το :μήκος και το :πλάτος (τις μεταβλητές τις ορίζουμε μαζί με το όνομα της διαδικασίας). Συζητάμε στα πλαίσια της ομάδας μας και στη συνέχεια καταθέτουμε τις απόψεις μας στην ολομέλεια της τάξης για το ρόλο της κάθε εντολής.

για ορθογώνιο2 :μήκος :πλάτος

μ :μήκος δ 90 μ :πλάτος δ 90 μ :μήκος δ 90 μ :πλάτος δ 90

τύπωσε [Εμβαδόν]

τύπωσε :μήκος*:πλάτος

τύπωσε [Περίμετρος]

τύπωσε $2*(\text{μήκος} + \text{πλάτος})$

τέλος

σβγ

ορθογώνιο2 50 60

β) Εκτελούμε τη διαδικασία «ορθογώνιο2» για τις τιμές μήκους και πλάτους (σε βήματα χελώνας) του παρακάτω πίνακα. Το λογισμικό υπολογίζει το εμβαδόν και την περίμετρο τα οποία αντιγράφουμε στον πίνακα.

Μήκος ορθογωνίου	Πλάτος ορθογωνίου	Εμβαδόν ορθογωνίου	Περίμετρος ορθογωνίου
50	20		
100	30		
200	60		
25.5	85.7		

γ) Αν ένα ορθογώνιο έχει μήκη πλευρών χ και ψ (σε μ.) από ποιους τύπους δίνονται το εμβαδόν και η περίμετρος του ορθογωνίου; Συζητάμε με την ομάδα μας και προσπαθούμε να καταλήξουμε σε συμφωνία. Καταθέτουμε τα συμπεράσματά μας στην ολομέλεια της τάξης.

2η Φάση

1^η δραστηριότητα: Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι 100 τ.μ.

α) Συμπληρώνουμε το μήκος του ορθογωνίου στον παρακάτω πίνακα, όπου δίνονται διάφορες τιμές που μπορεί να πάρει το πλάτος.

Πλάτος ορθογωνίου	Μήκος ορθογωνίου	Εμβαδόν ορθογωνίου
1		100
2		100
8		100
25		100

β) Τι ποσά είναι το μήκος και το πλάτος ενός ορθογωνίου με σταθερό εμβαδόν;

γ) Πόσα διαφορετικά ορθογώνια μπορούμε να κατασκευάσουμε με αυτό το εμβαδόν;

δ) Αν παραστήσουμε τη μία πλευρά με x τότε πώς πρέπει να παραστήσουμε την άλλη πλευρά;

Συζητάμε με την ομάδα μας και προσπαθούμε να καταλήξουμε σε συμφωνία. Καταθέτουμε τις απόψεις μας στην ολομέλεια της τάξης.

2^η δραστηριότητα: Κάθε μέτρο του πλαισίου που θα κατασκευάσουμε κοστίζει 55 ευρώ. Έχουμε αποφασίσει το παρτέρι να γίνει ορθογώνιο εκμεταλλευόμενοι τις μεγαλύτερες δυνατές διαστάσεις που βρήκαμε στην 1^η φάση.

α) Από τι εξαρτάται η ελαχιστοποίηση του κόστους;

β) Αν συμβολίσουμε το μήκος του ορθογωνίου με x (σε μ.), ποια παράσταση συμβολίζει το κόστος του παρτεριού; Συζητάμε με την ομάδα μας και καταθέτουμε τις απόψεις μας στην ολομέλεια της τάξης.

3^η δραστηριότητα: Ανοίγουμε το αρχείο [13-φάση 2η-Δρ3.mwd](#).

α) Διαβάζουμε την παρακάτω διαδικασία και συζητάμε τις υποθέσεις μας σχετικά με τι κατασκευάζει.

για μυστήριο :μήκος

επανάλαβε 2[μ :μήκος δ 90 μ 11025/(:μήκος) δ 90]

τύπωσε [Εμβαδόν]

τύπωσε (:μήκος)*(11025/:μήκος)

τύπωσε [Περίμετρος]

τύπωσε 2*(:μήκος + 11025/:μήκος)

τέλος

Η εντολή «τύπωσε» εμφανίζει στο κάτω πλαίσιο της Logo είτε ότι έχουμε γραμμένο μέσα σε αγκύλη είτε τις πράξεις των μεταβλητών που ακολουθούν της εντολής.

β) Εκτελούμε τη διαδικασία και παρατηρούμε αν οι υποθέσεις μας ήταν σωστές ή όχι.

γ) Με το δυναμικό χειρισμό (κάνουμε κλικ στο πλήκτρο «επιλογή γραμμής χελώνας» και μετά κάνουμε διπλό κλικ στην κατασκευή που θέλουμε να εισάγουμε δυναμικό χειρισμό μεταβλητών) παρατηρούμε τις μεταβολές στο εμβαδόν και στην περίμετρο. Ποιες διαστάσεις μας δίνουν το ορθογώνιο με το ελάχιστο κόστος; (Μπορούμε να αλλάξουμε τα όρια του μεταβολέα από 60 έως 130). Πώς ονομάζεται το σχήμα που προκύπτει;

δ) Ποιο είναι το ελάχιστο κόστος (σε €) που θα διαθέσει το σχολείο για την αγορά του παρτεριού;