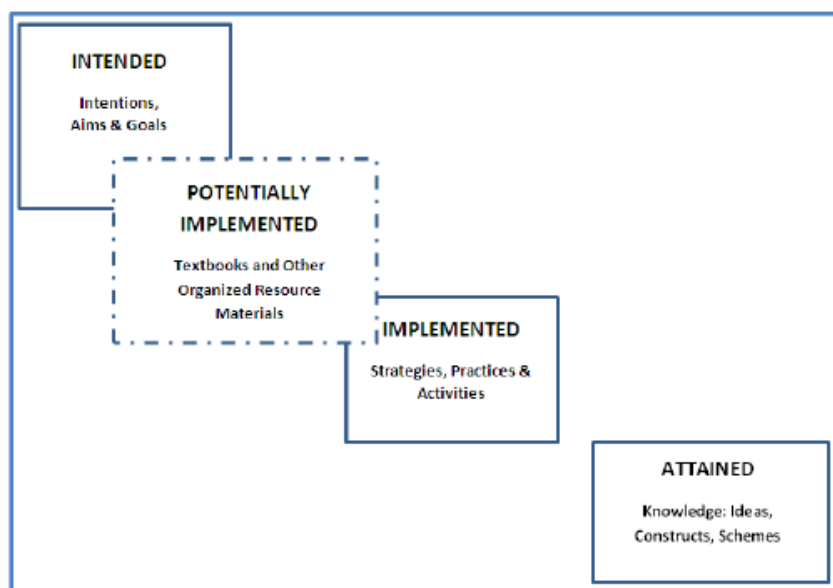


Τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών

Το σχολικό εγχειρίδιο είναι ο κύριος «μετακομιστής» των ιδεών του Προγράμματος Σπουδών και διαδραματίζει κυρίαρχο ρόλο στη σύγχρονη εκπαιδευτική σκηνή στα διάφορα σχολικά μαθήματα. Οι Robitaille και Travers (1992), υποστηρίζουν ότι η εξάρτηση από τα σχολικά βιβλία είναι ίσως περισσότερο χαρακτηριστική στη διδασκαλία των Μαθηματικών από οποιοδήποτε άλλο διδακτικό αντικείμενο.

Η σχέση των σχολικών εγχειριδίων με το Πρόγραμμα Σπουδών είναι ιδιαίτερα σημαντική, διότι το εγχειρίδιο συνδέει μεταξύ τους το προβλεπόμενο και το εφαρμοσμένο Πρόγραμμα Σπουδών. Το προβλεπόμενο (intended) Πρόγραμμα Σπουδών διαμορφώνεται από το εκπαιδευτικό σύστημα και την εθνική πολιτική, που περιλαμβάνει πρότυπα περιεχομένου, οδηγούς προγραμμάτων σπουδών, πλαίσια ή άλλα παρόμοια έγγραφα (Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt, & Houang, 2002). Το εφαρμοσμένο (implemented) Πρόγραμμα Σπουδών δημιουργείται από το συνδυασμό πρακτικής που εφαρμόζεται στην τάξη και του εκπαιδευτικού. Οι Valverde et al., (2002) όρισαν τα σχολικά εγχειρίδια ως ένα ξεχωριστό Πρόγραμμα Σπουδών, το δυνητικά εφαρμοσμένο (potentially implemented), δημιουργώντας έναν ισχυρό σύνδεσμο μεταξύ του προβλεπόμενου και του εφαρμοσμένου Προγράμματος Σπουδών. Ως εκ τούτου, το TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) θέτει και αναπτύσσει έναν ισχυρό σύνδεσμο μεταξύ του Προγράμματος Σπουδών και του σχολικού βιβλίου, τον οποίο ενισχύουν περιγράφοντας το σχολικό βιβλίο ως «υποκατάστατο του Προγράμματος Σπουδών» (Okeeffe, 2013).

Σε σύγκριση με την επίδραση των Προγραμμάτων Σπουδών, τα σχολικά εγχειρίδια διαδραματίζουν έναν ακόμη πιο άμεσο ρόλο. Καθορίζουν τις αποφάσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με την επιλογή του περιεχομένου και των στρατηγικών διδασκαλίας συμβάλλοντας με αυτόν τον τρόπο στη διαμόρφωση της διδασκαλίας.



Σχήμα 1. Σχολικά εγχειρίδια και τριμερές μοντέλο Προγράμματος Σπουδών (Valverde et al. 2002, σελ. 13)

Επομένως, τα εγχειρίδια θεωρούνται ότι καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό τις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών. Ως *ευκαιρία μάθησης (Opportunity to Learn – OTL)* ορίζεται το εάν οι μαθητές έχουν λάβει την εκπαίδευση που τους επιτρέπει να αποκτήσουν τις ικανότητες που εκφράζονται μέσω συγκεκριμένων στόχων (Wijaya, van den Heuvel – Panhuizen & Doorman, 2015). Αυτή η έννοια αποδείχθηκε ιδιαίτερα χρήσιμη στην εξασφάλιση εγκυρότητας διεθνών συγκριτικών μελετών σχετικά με την απόδοση των μαθητών. Πρόσφατα, οι Wijaya et al. (2015) έδειξαν πόσο καρποφόρα είναι η έννοια της OTL όταν ερεύνησαν τη σχέση μεταξύ των έργων που προσφέρονται στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της Ινδονησίας και των δυσκολιών των ινδονήσιων μαθητών να λύσουν μαθηματικά έργα που βασίζονται σε πλαίσιο.

Ο τρόπος επιλογής καθώς και η χρήση του σχολικού εγχειριδίου ποικίλει από χώρα σε χώρα, ακόμη και από σχολείο σε σχολείο. Έτσι, σε χώρες όπου το εκπαιδευτικό σύστημα είναι διοικητικά αποκεντρωμένο, όπως είναι π.χ. οι ΗΠΑ, παρατηρείται μεγάλη ποικιλία σχολικών εγχειριδίων που χρησιμοποιούνται στα σχολεία σε ολόκληρη τη χώρα και οι εκπαιδευτικοί επιλέγουν το εγχειρίδιο που θα διδάξουν στην τάξη. Ομοίως, στην Αυστραλία δεν υπάρχει συγκεκριμένο σχολικό εγχειρίδιο και οι επιλογές διαφέρουν ανάλογα την πολιτεία. Στη Γερμανία οι μαθητές αγοράζουν μόνοι τους τα διδακτικά βιβλία, τα οποία επιλέγονται από τα σχολεία και τους δασκάλους από έναν κατάλογο διδακτικών βιβλίων εγκεκριμένων από το Υπουργείο. Στη

Γαλλία κάθε μαθητής έχει ένα διδακτικό βιβλίο, το οποίο διανέμεται από το σχολείο και χρησιμοποιείται κατά την διάρκεια της σχολικής χρονιάς στο σχολείο και στο σπίτι. Παραδοσιακά, κάθε χρόνο αγοράζονται και ανανεώνονται τα διδακτικά βιβλία μιας σχολικής τάξης (Perin, 2008).

Αντίθετα, σε συγκεντρωτικά εκπαιδευτικά συστήματα, όπως το ελληνικό, σε όλα τα σχολεία γίνεται χρήση ενός και δεσμευτικού σχολικού βιβλίου που ορίζεται από το Υπουργείο Παιδείας της Ελλάδας. Η βαρύτητα που έχει το σχολικό βιβλίο στην ελληνική εκπαίδευση ήταν πάντα και είναι και σήμερα ιδιαίτερα αισθητή, γιατί αποτελούσε έως πρόσφατα αφετηρία για τη σύνταξη του αναλυτικού προγράμματος. Γενικά είναι αδιανόητο το ελληνικό σχολείο χωρίς το σχολικό βιβλίο· ενδεικτικά παραδείγματα για του λόγου του αληθές είναι ο πανικός που επικρατεί στην Ελλάδα στην αρχή της χρονιάς, όταν καθυστερούν τα σχολικά βιβλία, ή η στενή σύνδεση του σχολικού βιβλίου με τις πανελλήνιες εξετάσεις (Ξωχέλλης, 2009).

Ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών

Τα εγχειρίδια των Μαθηματικών, ως υποστηρικτικά υλικά για τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών, υπάρχουν σχεδόν από τότε που υπάρχει η εκπαίδευση. Παρόλο αυτή τη μακροχρόνια ύπαρξη η μελέτη και η ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών έχει πολύ μικρότερη ιστορία. Ο Cronbach (1955), σημειώνει ότι αν και τα σχολικά εγχειρίδια ήταν τα πιο διαδεδομένα στις αίθουσες διδασκαλίας, η έρευνα που επικεντρώθηκε σε αυτά ήταν «διάσπαρτη, ασαφής και συχνά ασήμαντη». Τη δεκαετία του 1980, γίνεται πλέον αντιληπτή από τους ερευνητές η ανάγκη εξερεύνησης αυτού του πεδίου με αποτέλεσμα η έρευνα για τα σχολικά βιβλία να παρουσιάσει ραγδαία αύξηση διεθνώς τις τελευταίες τέσσερις δεκαετίες.

Οι Fan Zhu, & Miao (2013) διεξήγαγαν μια βιβλιογραφική ανασκόπηση που εστιάζει στα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών με στόχο τη συστηματική εξέταση, ανάλυση και επανεξέταση της έρευνας. Η ταξινόμηση των άρθρων της επιλεγμένης βιβλιογραφίας σε τέσσερις κατηγορίες έγινε με βάση το επίκεντρο των εν λόγω άρθρων (Πίνακας 1).

	Περιγραφή
Ο ρόλος των σχολικών εγχειριδίων	Η βιβλιογραφία για το ρόλο των σχολικών βιβλίων στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών. Αυτή η κατηγορία είναι απαραίτητη για να αντικατοπτρίζει το επίκεντρο και τη συζήτηση των περισσότερων φιλοσοφικών ή μη εμπειρικών άρθρων που επικεντρώνονται στον ρόλο των σχολικών μαθηματικών εγχειριδίων.
Ανάλυση και σύγκριση σχολικών εγχειριδίων	Μελέτες που εστιάζουν στην ανάλυση των σχετικών χαρακτηριστικών των μαθηματικών βιβλίων που μελετώνται και, στην περίπτωση της σύγκρισης βιβλίων, συγκρίνουν τις ομοιότητες και τις διαφορές δύο ή περισσότερων σειρών μαθηματικών εγχειριδίων.
Η χρήση των σχολικών εγχειριδίων	Μελέτες που εστιάζουν στον τρόπο χρήσης των σχολικών βιβλίων από εκπαιδευτικούς ή/και μαθητές. Με άλλα λόγια, πώς τα εγχειρίδια διαμορφώνουν τον τρόπο διδασκαλίας και εκμάθησης των μαθηματικών.
Άλλες μελέτες	Περιλαμβάνει γενικά όλες τις άλλες μελέτες, όπως αυτές που αφορούν τα ηλεκτρονικά εγχειρίδια και τη σχέση μεταξύ των σχολικών βιβλίων και της απόδοσης των μαθητών.

Πίνακας 1. Ένα πλαίσιο για την ταξινόμηση της βιβλιογραφίας στην έρευνα των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών (Fan Zhu, & Miao, 2013, 635)

Το μεγαλύτερο ποσοστό ερευνών (63%) συγκεντρώθηκε στην κατηγορία ανάλυση και σύγκριση σχολικών εγχειριδίων, ενώ αμέσως μετά ακολουθεί η χρήση του εγχειριδίου στη σχολική τάξη με 25%. Τι εννοούμε, όμως, με την έννοια ανάλυση εγχειριδίου;

Σύμφωνα με τους Fan et al. (2013), η ανάλυση εγχειριδίων είναι μια ευρεία έννοια που περιλαμβάνει κυρίως δύο βασικούς τομείς: (1) την ανάλυση ενός εγχειριδίου ή μιας σειράς εγχειριδίων σχετικά με τον τρόπο που παρουσιάζεται ένα θέμα σε αυτό ή πως μια πτυχή ενδιαφέροντος αντικατοπτρίζεται σε αυτό και (2) την ανάλυση των διαφορετικών σειρών εγχειριδίων από την ίδια χώρα ή, πιο συχνά, από διαφορετικές χώρες, εστιάζοντας στον προσδιορισμό των ομοιοτήτων και των διαφορών τους, αυτό που αποκαλούμε σύγκριση εγχειριδίων. Προφανώς, η σύγκριση των βιβλίων βασίζεται στην ανάλυση αυτών, οπότε μπορεί να θεωρηθεί ως υποσύνολο της ανάλυσης βιβλίων και να χαρακτηριστεί ως συγκριτική ανάλυση βιβλίων.

Οι ίδιοι ερευνητές παραθέτουν πέντε διαστάσεις ανάλυσης των σχολικών εγχειριδίων: (1) το μαθηματικό περιεχόμενο και τις μαθηματικές έννοιες, (2) τη γνώση και

την παιδαγωγική, (3) το φύλο, την εθνικότητα, την ισότητα, την κουλτούρα και τις αξίες, (4) σύγκριση διαφορετικών εγχειριδίων και (5) εννοιολόγηση (conceptualization) και μεθοδολογικά θέματα. Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτές οι διαστάσεις είναι συχνά αλληλένδετες, για παράδειγμα μια συγκριτική έρευνα μπορεί να αφορά το μαθηματικό περιεχόμενο ή μαθηματικές έννοιες σε διαφορετικά σχολικά βιβλία.

Άλλοι ερευνητές χρησιμοποιούν διαφορετικούς τρόπους για να μελετήσουν το σημαντικό ερώτημα του πώς τα σχολικά βιβλία μαθηματικών σε διαφορετικές χώρες διαμορφώνουν ευκαιρίες μάθησης για τους μαθητές τους. Δεν έχει ακόμη προκύψει συμφωνημένη προσέγγιση για την αξιολόγηση και τη σύγκριση των ευκαιριών μάθησης στα σχολικά βιβλία. Επιπλέον, οι ερευνητές έχουν εκφράσει αντιφατικές απόψεις σχετικά με το τι μπορεί να διδαχθεί κανείς από την ανάλυση των μαθηματικών βιβλίων (Charalambous, Delaney, Hsu & Mesa, 2010). Ορισμένοι ερευνητές ισχυρίζονται ότι η ανάλυση του εγχειριδίου μπορεί να εξηγήσει τις διαφορές στις επιδόσεις των μαθητών στις διεθνείς συγκριτικές μελέτες (Fuson, Stigler, & Bartsch, 1988; Li, 2000). Άλλοι ερευνητές, ωστόσο, υποστήριξαν ότι τα σχολικά βιβλία ασκούν μικρή επιρροή στην εκπαίδευση και στα διδάγματα των μαθητών (Freeman & Porter, 1989).

Έρευνες σχετικά με την ανάλυση σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών

Οι πρώτες έρευνες που σχετίζονται με την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων, στις αρχές του '80, επικεντρώθηκαν στην ανάλυση περιεχομένου, στην κάλυψη των θεμάτων του περιεχομένου καθώς και στον αριθμό σελίδων που αφιερώνεται σε κάθε θέμα, παραγκωνίζοντας την ανάλυση των έργων (π.χ. προβλημάτων, ασκήσεων, εφαρμογών) που παρουσιάζονται στα εγχειρίδια.

Ο Li (2000) διεξήγαγε μια συγκριτική μελέτη σχετικά με τα μαθηματικά προβλήματα ή μέρη των προβλημάτων που εντόπισε στα βιβλία της 7ης τάξης της Κίνας και των ΗΠΑ, τα οποία δεν είχαν συνοδευτικές λύσεις ή απαντήσεις και αναφερόταν στην πρόσθεση και την αφαίρεση ακεραίων. Για τη σύγκριση των προβλημάτων αυτών αναπτύχθηκε ένα τρισδιάστατο πλαίσιο που περιλαμβάνει τις εξής διαστάσεις: (1) τα μαθηματικά χαρακτηριστικά, τον αριθμό των μαθηματικών διαδικασιών που

απαιτούνται για τη λύση, (2) τα χαρακτηριστικά πλαισίου, τον τύπο των πληροφοριών πλαισίου στο πρόβλημα και (3) τις απαιτήσεις απόδοσης με βάση (α) τον τύπο απάντησης του προβλήματος και (β) τη γνωστική του απαίτηση (Πίνακας 2).

Διαστάσεις των απαιτήσεων του προβλήματος	
1. Μαθηματικά χαρακτηριστικά	<ul style="list-style-type: none"> • απαιτείται μια απλή διαδικασία υπολογισμού • απαιτούνται πολλαπλές διαδικασίες υπολογισμού
2. Χαρακτηριστικά πλαισίου	<ul style="list-style-type: none"> • καθαρά μαθηματικό πλαίσιο σε αριθμητική ή λεκτική μορφή • εξηγηματικό πλαίσιο με εικονογραφημένη αναπαράσταση ή ιστορία
3. Απαιτήσεις επιδόσεων	
(α) Τύπος απάντησης:	<ul style="list-style-type: none"> • αριθμητική απάντηση μόνο • αριθμητική έκφραση μόνο • απαιτείται εξήγηση ή λύση
(β) Γνωστικές απαιτήσεις:	<ul style="list-style-type: none"> • διαδικαστική πρακτική • εννοιολογική κατανόηση • επίλυση προβλήματος • ειδική απαίτηση

Πίνακας 2. Διαστάσεις των απαιτήσεων του προβλήματος (Li, 2000, 237)

Κάθε πρόβλημα κωδικοποιήθηκε σε όλα τα βιβλία με όρους των τριών διαστάσεων που αναφέρθηκαν παραπάνω (δείτε δείγματα κωδικοποίησης στον Πίνακα 3). Τα προβλήματα κωδικοποιήθηκαν σε τρία τυχαία επιλεγμένα εγχειρίδια (δύο αμερικανικά εγχειρίδια και ένα κινεζικό εγχειρίδιο) επίσης από έναν δεύτερο ανεξάρτητο κριτή ο οποίος ήταν γνώστης τόσο της αγγλικής όσο και της κινεζικής γλώσσας. Το ποσοστό συμφωνίας ήταν 93%.

Τόσο στα αμερικανικά όσο και στα κινεζικά εγχειρίδια, τα περισσότερα προβλήματα που αναλύθηκαν απαιτούσαν απλές διαδικασίες υπολογισμού και είχαν καθαρά μαθηματικά πλαίσια. Αντίθετα, στα σχολικά εγχειρίδια των ΗΠΑ παρατηρήθηκε μια υπεροχή στην ποικιλία απαιτήσεων των προβλημάτων, δίνοντας έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση, σε σχέση με τα εγχειρίδια της Κίνας.

Παράδειγμα 1: Προσθέστε $-16 + 19 + 12$

Κωδικοποίηση	<ul style="list-style-type: none"> • απαιτούνται πολλαπλές διαδικασίες υπολογισμού • καθαρά μαθηματικό πλαίσιο σε αριθμητική ή λεκτική μορφή • αριθμητική απάντηση μόνο • διαδικαστική πρακτική
--------------	---

Παράδειγμα 2: Ο Ριτς έχει 13\$ στον αποταμιευτικό του λογαριασμό. Καταθέτει 25\$. Πόσα χρήματα έχει στον αποταμιευτικό λογαριασμό του μετά την κατάθεση;

Κωδικοποίηση	<ul style="list-style-type: none">• απαιτείται μια απλή διαδικασία υπολογισμού• επεξηγηματικό πλαίσιο με εικονογραφημένη αναπαράσταση ή ιστορία• αριθμητική απάντηση μόνο• επίλυση προβλήματος
--------------	---

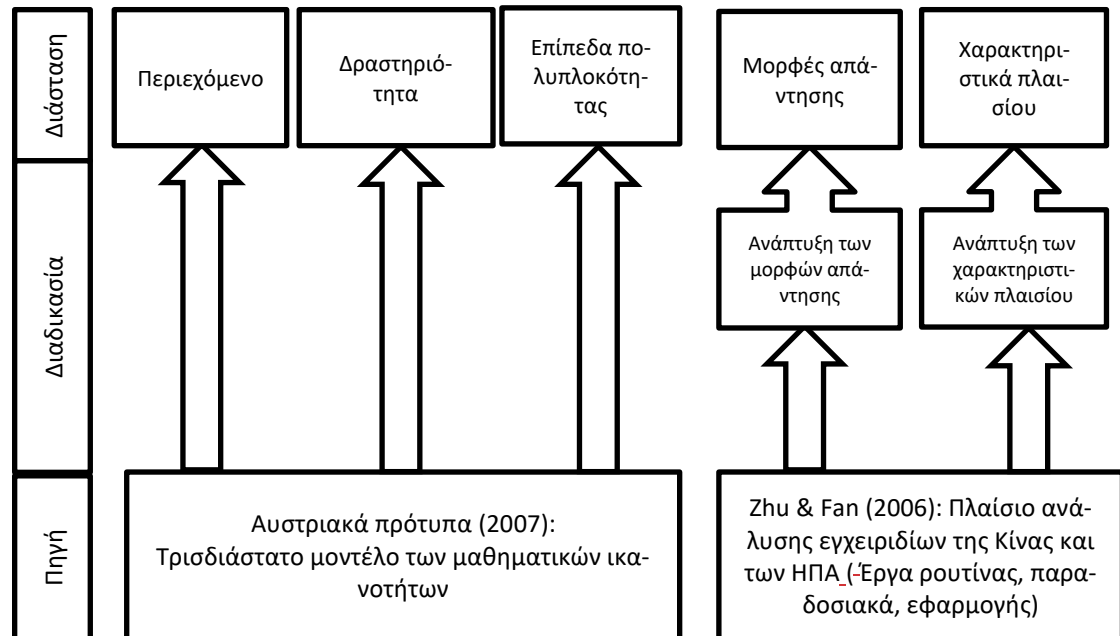
Πίνακας 3. Δείγμα προβλημάτων του εγχειριδίου και κωδικοποίηση (Li, 2000, 237)

Τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας έδειξαν επίσης την αξία σύγκρισης των προβλημάτων σε σχέση με τη σύγκριση μόνο του περιεχομένου του εγχειριδίου, η οποία δεν σχετίζεται με τις εμπειρίες των μαθητών κατά την εκμάθηση των Μαθηματικών. Για το λόγο αυτό ο συγγραφέας προτείνει τη διεξαγωγή ερευνών των σχολικών εγχειριδίων συγκρίνοντας κάθε φορά διαφορετικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών προβλημάτων και του περιεχομένου αυτών, με στόχο την περαιτέρω γνώση σχετικά με τις πιθανές επιπτώσεις των εγχειριδίων στην τάξη και την απόδοση των μαθητών.

Στην έρευνά της, η Glasnovic Gracin (2018) προκειμένου να εξετάσει τις απαιτήσεις των έργων των κροατικών σχολικών εγχειριδίων της 6^{ης}, 7^{ης} και 8^{ης} τάξης δημιουργεί ένα πενταδιάστατο πλαίσιο που προέκυψε από το συνδυασμό των αυστριακών εκπαιδευτικών προτύπων (2007) και το πλαίσιο των Zhu et al. (2006) που αναφέρθηκε παραπάνω. Στις μέχρι τώρα έρευνες ανάλυσης των έργων των εγχειριδίων οι συνήθεις διαστάσεις ήταν το περιεχόμενο, οι γνωστικές απαιτήσεις, ο τύπος ερωτήσεων και τα χαρακτηριστικά πλαισίου. Η Glasnovic Gracin (2018) ενσωματώνει μια νέα πέμπτη διάσταση στο πλαίσιο: τις μαθηματικές δραστηριότητες, η οποία εξετάζει το τι πρέπει να κάνει ο μαθητής σε μια συγκεκριμένη εργασία, να αναπαραστήσει, να υπολογίσει, να εξηγήσει ή να επιχειρηματολογήσει.

Τα αυστριακά εκπαιδευτικά πρότυπα ορίζουν το θεωρητικό πλαίσιο μέσα από τις τρεις διαστάσεις ως εξής: το περιεχόμενο, τις μαθηματικές δραστηριότητες και τα επίπεδα πολυπλοκότητας, ενώ οι άλλες δύο διαστάσεις των μορφών απάντησης και των χαρακτηριστικών πλαισίου βασίζονται στην έρευνα των Zhu et al. (2006). Οι πτυχές από τα αυστριακά εκπαιδευτικά πρότυπα έχουν ληφθεί όπως αυτές αναφέρονται στην αρχική πηγή, ενώ οι πτυχές των μορφών απάντησης και των χαρακτηριστικών πλαισίου έχουν αναπτυχθεί και τροποποιηθεί περαιτέρω για τις ανάγκες της

συγκεκριμένης έρευνας. Το θεωρητικό πλαίσιο παρουσιάζεται στο Σχήμα 2 και παρακάτω περιγράφονται αναλυτικά οι προαναφερθείσες διαστάσεις.



Σχήμα 2. Διάγραμμα πενταδιάστατου πλαισίου (περιεχόμενο, δραστηριότητες, επίπεδα πολυπλοκότητας, μορφές απάντησης και χαρακτηριστικά πλαισίου (Glasnovic Gracin, 2018, σελ. 6).

Περιεχόμενο: Τα περιεχόμενα παρουσιάζονται παρακάτω λαμβάνοντας υπόψη το ισχύον εθνικό πρόγραμμα σπουδών στη χαμηλότερη βαθμίδα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και συνοψίζονται σύμφωνα με εσωτερικές μαθηματικές πτυχές στους ακόλουθους τέσσερις τομείς περιεχομένου: (I1) αριθμοί και μετρήσεις, (I2) Μεταβλητές και συναρτησιακές εξαρτήσεις, (I3) Γεωμετρικά σχήματα και στερεά, (I4) Στατιστικές αναπαραστάσεις και παράμετροι. Στους αριθμούς και μετρήσεις περιλαμβάνονται οι ακέραιοι, ρητοί, άρρητοι και πραγματικοί αριθμοί, τα κλάσματα, τα ποσοστά, η τετραγωνική ρίζα και οι μονάδες μέτρησης. Οι μεταβλητές και οι συναρτησιακές εξαρτήσεις περιλαμβάνουν τα πολυώνυμα, τις εξισώσεις, τα συστήματα, τις αναλογίες, γραμμικές συναρτήσεις της μορφής $y = ax + b$, εξισώσεις της μορφής $x^2 = a$. Τα γεωμετρικά στερεά και σχήματα αναφέρονται σε σχήματα δύο και τριών διαστάσεων, στο Πυθαγόρειο θεώρημα, στην ομοιότητα τριγώνων, στην περίμετρο, το εμβαδό και τον όγκο γεωμετρικών σχημάτων. Τέλος, το περιεχόμενο της στατιστικής

αναφέρεται στις αναπαραστάσεις στατιστικών δεδομένων, στις συχνότητες, τον μέσο όρο, ενώ η πιθανότητα αναφέρεται στην πιθανότητα ενός τυχαίου συμβάντος.

Μαθηματικές δραστηριότητες: Το πεδίο των μαθηματικών δραστηριοτήτων χωρίζεται σε: αναπαραστάσεις και μοντελοποίηση, υπολογισμούς και πράξεις, επεξήγηση, επιχειρηματολογία και συλλογιστική. Η αναπαράσταση (H1) αφορά την «μετάφραση» κάποιων μαθηματικών δεδομένων σε μία άλλη μαθηματική αναπαράσταση (για παράδειγμα, μετατροπή από μία στατιστική αναπαράσταση σε άλλη). Η μοντελοποίηση περιλαμβάνει την αναγνώριση σχετικών μαθηματικών σχέσεων από τη δεδομένη κατάσταση και την έκφραση του ίδιου προβλήματος με μαθηματικό τρόπο (συμβολική, γραφική, κλπ.). Ο υπολογισμός (H2) αφορά τη διενέργεια στοιχειωδών πράξεων με συγκεκριμένους ή γενικευμένους αριθμούς. Η πράξη είναι η συγκεκριμένη, λογική και αποτελεσματική διεξαγωγή υπολογιστικών ή κατασκευαστικών βημάτων. Αναφέρεται επίσης σε μετασχηματισμό μονάδων μέτρησης, μετασχηματισμό μαθηματικών εκφράσεων, επίλυση εξισώσεων, εκτίμηση αποτελεσμάτων, προσεγγίσεις και διεξαγωγή στοιχειωδών γεωμετρικών κατασκευών. Η επεξήγηση (H3) αφορά την αναγνώριση των σχέσεων και των σχετικών δεδομένων που δίνονται στις μαθηματικές αναπαραστάσεις (γραφική, συμβολική και πίνακες) και την ερμηνεία τους στο δεδομένο πλαίσιο. Η επεξήγηση περιλαμβάνει την κατάλληλη ανάγνωση των γραφικών ή συμβολικών μαθηματικών αναπαραστάσεων και την ερμηνεία τους στο δεδομένο πλαίσιο. Η επιχειρηματολογία (H4) αναφέρεται στην περιγραφή των μαθηματικών πτυχών που μιλούν υπέρ ή κατά μιας συγκεκριμένης απόφασης. Απαιτεί συγκεκριμένη και κατάλληλη εφαρμογή των μαθηματικών σχέσεων και χαρακτηριστικών, των μαθηματικών κανόνων καθώς και τη σωστή χρήση της μαθηματικής γλώσσας. Η συλλογιστική αφορά τη σειρά των σωστών επιχειρημάτων που οδηγούν σε ένα συμπέρασμα.

Στον Πίνακα 5 δίνεται ένα παράδειγμα μια εργασίας γεωμετρίας που σε κάθε περίπτωση απαιτεί διαφορετική μαθηματική δραστηριότητα.

Μαθηματική δραστηριότητα	Παράδειγμα
H1 Αναπαράσταση	Ένας κύλινδρος σχήματος βαρελιού είναι κατά το $\frac{1}{2}$ γεμάτος με νερό. Το ύψος του βαρελιού είναι 82 cm. Κατασκευάστε τη βάση του χρησιμοποιώντας μια κλίμακα 1:100.

H2 Υπολογισμός και πράξη	Ένας κύλινδρος σχήματος βαρελιού είναι κατά το $\frac{1}{2}$ γεμάτος με νερό. Το ύψος του βαρελιού είναι 82 cm. Βρείτε τον όγκο του νερού στο βαρέλι και εκφράστε τον σε λίτρα.
H3 Επεξήγηση	Ένας κύλινδρος σχήματος βαρελιού είναι κατά το $\frac{1}{2}$ γεμάτος με νερό. Το ύψος του βαρελιού είναι 82 cm. Τι εκφράζεται με τον τύπο $(82/2)^2 \cdot \pi$;
H4 Επιχειρηματολογία	Ένας κύλινδρος σχήματος βαρελιού είναι κατά το $\frac{1}{2}$ γεμάτος με νερό. Το ύψος του βαρελιού είναι 82 cm. Το ύψος του νερού στο βαρέλι επηρεάζει το εμβαδόν επιφάνειας του βαρελιού; Εξηγήστε τη γνώμη σας.

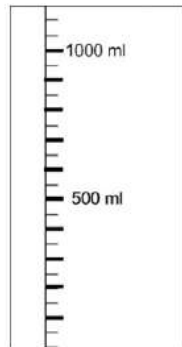
Πίνακας 4: Παραδείγματα από τις τέσσερις μαθηματικές δραστηριότητες (Glasnovic Gracin, 2018, σελ. 7)

Επίπεδα πολυπλοκότητας: Ο τομέας πολυπλοκότητας χωρίζεται σε: άμεση εφαρμογή των βασικών γνώσεων και δεξιοτήτων, δημιουργία συνδέσεων, συλλογισμός ή εφαρμογή συλλογιστικής γνώσης. Δηλαδή, το ίδιο το περιεχόμενο και οι δραστηριότητες δεν αρκούν για να προσδιορίσουν τις ικανότητες που απαιτούνται από τους μαθητές σε μια συγκεκριμένη εργασία του βιβλίου. Ορισμένες μαθηματικές εργασίες θα μπορούσαν να έχουν το ίδιο περιεχόμενο (για παράδειγμα, τον κύκλο) και την ίδια δραστηριότητα (για παράδειγμα, υπολογισμοί), αλλά θα μπορούσαν να διαφέρουν ως προς τη γνωστική πολυπλοκότητα. Για παράδειγμα, ένα έργο θα μπορούσε να απαιτήσει τις δεξιότητες σχετικά με το επίπεδο πολυπλοκότητας της αναπαραγωγής, ενώ ένα άλλο να απαιτεί την κατασκευή πιο σύνθετων συνδέσεων. Η εφαρμογή βασικών γνώσεων και δεξιοτήτων (K1) περιλαμβάνει την αναπαραγωγή ή την άμεση εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών, κανόνων, διαδικασιών και αναπαραστάσεων. Η δημιουργία συνδέσεων (K2) και η αντιμετώπιση των συνδέσεων αφορά σε πιο πολύπλοκα έργα, όπου απαιτείται να συνδυαστούν διάφορες έννοιες ή δραστηριότητες για την επίλυση του προβλήματος. Περιλαμβάνει, για παράδειγμα, τη σύνδεση μεταξύ μιας ποικιλίας όρων, θεωρημάτων, μεθόδων και αναπαραστάσεων. Η συλλογιστική σκέψη (K3) περιλαμβάνει το συλλογισμό μαθηματικών ιδεών που δεν είναι ευανάγνωστες από το συγκεκριμένο πρόβλημα. Η συλλογιστική γνώση σημαίνει την εφαρμογή δημιουργικών γνώσεων σχετικά με τα μαθηματικά. Στον Πίνακα 6 δίνονται παραδείγματα με διάφορα επίπεδα πολυπλοκότητας.

Επίπεδα πολυπλοκότητας	Παράδειγμα
K1 Αναπαραγωγή	Γράψτε τον δεκαδικό 0,35 ως κλάσμα.

K2 Συνδέσεις

Η Άννα ρίχνει το $\frac{1}{8}$ του λίτρου γάλακτος στο δοχείο μέτρησης που φαίνεται παρακάτω. Σημειώστε το ύψος του γάλακτος στο δοχείο μέτρησης.



K3 Συλλογισμός

Μερικές φορές είναι πιο ενδεδειγμένο να εκφράζονται οι ρητοί ως κλάσματα, και μερικές φορές ως δεκαδικοί. Δώστε δύο παραδείγματα για το πότε οι άνθρωποι θα χρησιμοποιούν δεκαδικούς. Εξήγησε την απάντησή σου.

Πίνακας 5. Παραδείγματα διαφορετικών επιπέδων πολυπλοκότητας (Glasnovic Gracin, 2018, σελ. 8).

Μορφές απάντησης: Με βάση την πενταδιάστατη ανάλυση οι απαντήσεις των έργων διακρίνονται σε κλειστού τύπου (A1), ανοικτού τύπου (A2) και πολλαπλής επιλογής (A3). Τα ανοιχτά έργα αφορούν εργασίες με αρκετές ή πολλές σωστές απαντήσεις, ενώ τα έργα κλειστού τύπου έχουν μόνο μία απάντηση. Η κλειστή κατασκευασμένη απάντηση μπορεί εύκολα να κριθεί ως σωστή ή λανθασμένη. Στον Πίνακα 7 παρουσιάζονται παραδείγματα με διάφορες μορφές απάντησης.

Μορφές απάντησης	Παράδειγμα
A1 Κλειστού τύπου	Λύστε την εξίσωση $2x + 6 = 12$.
A2 Ανοικτού τύπου	Γράψτε ένα πρόβλημα από την καθημερινή ζωή που αναφέρεται στην επίλυση της εξίσωσης $2x + 6 = 12$.
A3 Πολλαπλής επιλογής	Ποια είναι η λύση της εξίσωσης $2x + 6 = 12$; A. $x = 6$, B. $x = 3$, Γ. $x = -3$, Δ. $x = -6$

Πίνακας 6. Παραδείγματα διαφορετικών μορφών απάντησης (Glasnovic Gracin, 2018, σελ. 9).

Χαρακτηριστικά πλαισίου: Τα χαρακτηριστικά πλαισίου αναφέρονται σε ποιο βαθμό και με ποιους τρόπους ενσωματώνονται εμπειρίες του πραγματικού κόσμου στα έργα του βιβλίου. Έχουμε τα εξής χαρακτηριστικά πλαισίου: ενδομαθηματικό πλαίσιο, δηλαδή έργα μη εφαρμογής (C1), ρεαλιστικό – φανταστικό πλαίσιο (C2) και αυθεντικό πλαίσιο (C3). Ένα πρόβλημα μη εφαρμογής δεν σχετίζεται με τον πραγματικό κόσμο, ενώ ένα πρόβλημα εφαρμογής εμφανίζεται στο πλαίσιο μιας πραγματικής κατάστασης. Τα προβλήματα εφαρμογής μπορεί να είναι φανταστικά ή αυθεντικά. Τα φανταστικά προβλήματα εφαρμογής περιέχουν δεδομένα που κατασκευάζονται από τον συγγραφέα του βιβλίου. Τα αυθεντικά προβλήματα περιέχουν καταστάσεις της πραγματικής ζωής ή δεδομένα που συλλέγονται από τους ίδιους τους μαθητές από

την καθημερινότητά τους. Στον Πίνακα 8 παρουσιάζονται παραδείγματα με διάφορα χαρακτηριστικά πλαίσιο.

Χαρακτηριστικά πλαίσιο	Παράδειγμα
C1 Ενδο-μαθηματικό πλαίσιο (έργα μη εφαρμογής)	Γράψε το κλάσμα $\frac{3}{5}$ ως ποσοστό.
C2 Ρεαλιστικό (φανταστικό) πλαίσιο	Ένας φοιτητής κατέγραψε ότι τη Δευτέρα από τις 3 έως τις 4 μ.μ πέρασαν 12 αυτοκίνητα, 3 φορτηγά, 4 μοτοσικλέτες και 1 λεωφορείο μπροστά από το σχολείο του. Δείξτε αυτά τα δεδομένα χρησιμοποιώντας έναν σχετικό πίνακα συχνότητας.
C3 Αυθεντικό πλαίσιο	Μετρήστε τα οχήματα μπροστά από το σχολείο σας και δημιουργήστε έναν σχετικό πίνακα συχνότητας μοτοσικλετών, αυτοκινήτων, λεωφορείων και φορτηγών.

Πίνακας 7. Παραδείγματα με διάφορα χαρακτηριστικά πλαίσιο (Glasnovic Gracin, 2018, σελ. 9).

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι τα κροατικά εγχειρίδια δεν παρέχουν ένα πλήρες φάσμα τύπων εργασιών. Δίνεται έμφαση στον υπολογισμό, ενώ η επιχειρηματολογία και οι επεξηγηματικές δραστηριότητες, η συλλογιστική σκέψη και οι εργασίες ανοικτής απάντησης υποεκπροσωπούνται. Η μελέτη αποκάλυψε ότι η ενσωμάτωση των μαθηματικών δραστηριοτήτων στο πολυδιάστατο πλαίσιο ανάλυσης των εργασιών μπορεί να βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση των ευκαιριών μάθησης που παρέχονται στους μαθητές χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά εγχειρίδια.

Οι Perin και Haggarty (2001) στη μελέτη τους σχετικά με τη χρήση των σχολικών βιβλίων Μαθηματικών στις αγγλικές, γαλλικές και γερμανικές τάξεις υιοθέτησαν μια προσέγγιση που επικεντρώθηκε όχι μόνο στα θέματα (περιεχόμενο) και τις μεθόδους (στρατηγικές διδασκαλίας), αλλά και στα κοινωνιολογικά πλαίσια και τις πολιτιστικές παραδόσεις που εκδηλώνονται μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια. Σύμφωνα με τις ερευνήτριες η ανάλυση του περιεχομένου και της δομής των σχολικών εγχειριδίων επικεντρώνεται στις ακόλουθες περιοχές: τις μαθηματικές προθέσεις, τις παιδαγωγικές προθέσεις και τα κοινωνιολογικά χαρακτηριστικά των σχολικών εγχειριδίων, καθώς και τις πολιτισμικές παραδόσεις που εκπροσωπούνται στα σχολικά εγχειρίδια.

Μαθηματικές προθέσεις. Οι μαθηματικές προθέσεις των εγχειριδίων αναφέρονται στα μαθηματικά θέματα που παρουσιάζονται σε αυτά, στις πεποιθήσεις που προωθούνται για τη φύση των Μαθηματικών και στον τρόπο συγκρότησης της μαθηματικής γνώσης, στοιχεία που αποτελούν τη βάση περιεχομένου του βιβλίου.

Παιδαγωγικές προθέσεις. Οι παιδαγωγικές προθέσεις αναφέρονται στους τρόπους με τους οποίους ενισχύεται ή όχι η μάθηση από το μαθηματικό περιεχόμενο του βιβλίου, από τη μέθοδο παρουσίασης του περιεχομένου και από τη ρητορική των κειμένων των βιβλίων.

Κοινωνιολογικά χαρακτηριστικά. Τα χαρακτηριστικά αυτά αναφέρονται σε κοινωνιολογικά στοιχεία που επηρεάζουν τόσο τους συγγραφείς των βιβλίων όσο και τον εκάστοτε αναγνώστη ή χρήστη του εγχειριδίου.

Πολιτισμικές παραδόσεις. Στα σχολικά βιβλία αποτυπώνονται χαρακτηριστικά που σχετίζονται με τις πολιτισμικές παραδόσεις και τα στερεότυπα μια χώρας. Είναι αναπόφευκτο η ανάλυση ενός βιβλίου να μη λάβει σοβαρά υπόψη τον πολιτισμό της κοινωνίας στην οποία σχεδιάστηκε. Τα σχολικά εγχειρίδια είναι αποτέλεσμα πολιτικών, οικονομικών και πολιτισμικών δραστηριοτήτων, αντιθέσεων και συμβιβασμών (Apple, 1992).

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι δομές των σχολικών μαθηματικών εγχειριδίων και στις τρεις αυτές χώρες ήταν αρκετά διαφορετικές. Ενώ τα γαλλικά εγχειρίδια περιείχαν δραστηριότητες, ουσιώδεις ασκήσεις και ασκήσεις διαβαθμισμένης δυσκολίας, με στόχο την καθοδήγηση των μαθητών σε νέες έννοιες, τα γερμανικά βιβλία δομήθηκαν με εισαγωγικές ασκήσεις και την κύρια έννοια ακολουθεί ένα ευρύ φάσμα ασκήσεων. Συγκριτικά, τα βρετανικά βιβλία φαίνονταν απλά, με ξεκάθαρες ερωτήσεις που υποβάλλονται πριν από τα λυμένα παραδείγματα. Σύμφωνα με τις ερευνήτριες, οι διαφορές σχετίζονται με τα διαφορετικά εκπαιδευτικά πλαίσια και τις παραδόσεις. Ειδικότερα, το μοναδικό κομμάτι που βρίσκεται στη δομή των γαλλικών βιβλίων, συγκεκριμένα, οι δραστηριότητες (μικρές έρευνες) φαίνεται ότι "ταιριάζουν με τις έννοιες του Piaget, αυτή του κονστρουκτιβισμού και των σχετικών διδακτικών προσεγγίσεων" (Fan et al., 2013).

Οι Charalambous, Delaney, Hsu, και Mesa (2010) δημοσίευσαν μια συγκριτική έρευνα για τον τρόπο αντιμετώπισης της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των κλασμάτων σε σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην Κύπρο, την Ιρλανδία και την Ταϊβάν. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποίησαν ένα πλαίσιο που αναπτύχθηκε ειδικά για να διερευνήσουν τις ευκαιρίες μάθησης που παρέχονται στους μαθητές από τα σχολικά εγχειρίδια, ιδίως σε σχέση με την παρουσίαση του

περιεχομένου και τις προσδοκίες του εγχειριδίου, όπως αυτές εκδηλώνονται στα σχε-
τικά έργα (tasks).

Το πλαίσιο αυτό αναλύει κάθε εγχειρίδιο σε δύο διαστάσεις. Στην πρώτη διά-
σταση, της οριζόντιας ανάλυσης, το βιβλίο εξετάζεται στο σύνολό του δίνοντας έμ-
φαση στα γενικά χαρακτηριστικά των βιβλίων, όπως τη φυσική εμφάνιση και την ορ-
γάνωση περιεχομένου. Ωστόσο, σε αυτή την προσέγγιση έχει ασκηθεί κριτική για την
παράβλεψη των θεμελιωδών διαφορών στις ευκαιρίες μάθησης που προσφέρονται
στους μαθητές. Η δεύτερη διάσταση, της κάθετης ανάλυσης, εξετάζει τον τρόπο με
τον οποίο τα σχολικά βιβλία αντιμετωπίζουν μία μαθηματική έννοια ή ένα θέμα και
έχει υποστηριχθεί ότι η προσέγγιση αυτή θα μπορούσε δυνητικά να παραβλέψει τη
σχέση μεταξύ του εξεταζόμενου θέματος και άλλων που περιέχονται στο ίδιο βιβλίο.
Οι ερευνητές οργάνωσαν τα κριτήρια ανάλυσης του σχολικού εγχειριδίου όπως φαί-
νονται στον Πίνακα 9.

ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟΥ		
Γενικές πληροφορίες	Συνολική δομή εγχειριδίου	
<ul style="list-style-type: none"> • Τίτλος • Αριθμός βιβλίων • Σελίδες (Αριθμός και πυκνότητα) • Προφίλ συγγραφέων και συμβουλευτικής επιτροπής • Εκδότης και έτος έκδοσης • Συνοδευτικά υλικά (π.χ. οδηγοί εκπαιδευτικών, υλικά πόρων) 	<ul style="list-style-type: none"> • Αριθμός ενότητων/μαθημάτων και μέσος αριθμός σελίδων ανά ενότητα/μάθημα • Δομή ενότητων / μαθημάτων • Θέματα που καλύπτονται • Αλληλουχία θεμάτων 	
ΚΑΘΕΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟΥ		
Μετάδοση των γνώσεων στους μαθητές	Απαιτήσεις από τους μαθητές	Συνδέσεις
<p><i>Μαθηματικό περιεχόμενο</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Κατασκευή συγκεκριμένου θέματος, δομή κ.λπ. (π.χ. μέρος-όλο, λόγος, τελεστής, πηλίκο, μέτρηση κατασκευών κλάσματος) • Ορισμοί, κανόνες, συμβάσεις • Εικονογραφήσεις-αναπαραστάσεις (άσχετες, σχετικές με το πλαίσιο αλλά όχι με το μαθηματικό, υποστηρίζοντας το μαθηματικά) <p><i>Μαθηματικές Πρακτικές</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Λυμένα παραδείγματα • Μοντελοποίηση σκέψης <p><i>Στάσεις</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Ισότητα • Άποψη των μαθηματικών 	<ul style="list-style-type: none"> • Πιθανές γνωστικές απαιτήσεις (απομνημόνευση, διαδικασίες με συνδέσεις, διαδικασίες χωρίς συνδέσεις, κά-νει μαθηματικά) • Τύπος απάντησης (μόνο απάντηση, απάντηση και μαθηματική πρόταση, εξήγηση, αιτιολόγηση) 	<ul style="list-style-type: none"> • Συνδέσεις μεταξύ θεματικών ενότητων • Συνδέσεις του βιβλίου και της διδασκαλίας στην τάξη • Συνδέσεις με καταστάσεις εκτός του σχολείου

Πίνακας 8. Το πλαίσιο που χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση των εγχειριδίων μαθηματικών (Charalambous et al. 2010, σελ. 123).

Για το σκοπό της συγκεκριμένης έρευνας, οι Charalambous et al. (2010) εστίασαν σε έξι κριτήρια (δύο από την οριζόντια και τέσσερα από η κάθετη διάσταση), ώστε να μελετηθούν οι ομοιότητες και οι διαφορές του τρόπου παρουσίασης της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των κλασμάτων μεταξύ των εγχειριδίων των τριών χωρών. Για την οριζόντια ανάλυση, επέλεξαν και εξέτασαν τα θέματα σε σχέση με την πρόσθεση και αφαίρεση των κλασμάτων και την αλληλουχία τους. Από την κατηγορία «μετάδοση γνώσεων στους μαθητές» της κάθετης ανάλυσης, εξέτασαν τις ερμηνείες των κλασμάτων και τα λυμένα παραδείγματα που χρησιμοποιήθηκαν στα εγχειρίδια. Οι διαφορετικές ερμηνείες των κλασμάτων βοηθούν τους μαθητές να αντιληφθούν πλήρως την έννοια του κλάσματος, ενώ τα λυμένα παραδείγματα κάνουν πιο εύκολη την απόκτηση δεξιοτήτων. Από την κατηγορία «απαιτήσεις από τους μαθητές», εστίασαν στις πιθανές γνωστικές απαιτήσεις των εργασιών του βιβλίου και στον τύπο της απάντησης που ζητήθηκε.

Στην έρευνα αυτή βρέθηκαν αρκετές ομοιότητες και διαφορές μεταξύ των σχολικών εγχειριδίων σχετικά με τα θέματα που περιλαμβάνονται και την αλληλουχία τους, τις δομές των κλασμάτων, τα παραδείγματα εργασίας, τις γνωστικές απαιτήσεις των εργασιών και τους τύπους απαντήσεων που απαιτούνται από τους μαθητές. Τα ευρήματα υπογράμμισαν την ανάγκη της εξέτασης των εγχειριδίων προκειμένου να γίνουν κατανοητές οι διαφορές στη διδασκαλία και τις επιδόσεις μεταξύ των χωρών.

Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας δείχνει ότι το εργαλείο ανάλυσης των έργων των σχολικών εγχειριδίων (ασκήσεις, προβλήματα, λυμένα παραδείγματα) ποικίλλει από έρευνα σε έρευνα. Τα πιο «δημοφιλή» κριτήρια ανάλυσης των έργων που συναντώνται στις έρευνες είναι: οι γνωστικές απαιτήσεις, ο τύπος απάντησης, το επίπεδο πολυπλοκότητας, το είδος διαδικασιών επίλυσης και τα χαρακτηριστικά πλαισίου. Κάποιες έρευνες επικεντρώνονται σε ένα συγκεκριμένο θέμα ή έννοια για παράδειγμα στην πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων, στις εξισώσεις, στο λόγο και την αναλογία, στα τρίγωνα και τετράπλευρα, ενώ άλλες εστιάζουν στα έργα ενός ή περισσότερων σχολικών εγχειριδίων ολόκληρης της σχολικής βαθμίδας, για παράδειγμα η Brändström (2005) μελετά τη διαφοροποίηση των έργων (ασκήσεις,

προβλήματα, λεκτικά προβλήματα) σε τρία εγχειρίδια Μαθηματικών της 7ης τάξης στη Σουηδία.

Τα αποτελέσματα των περισσότερων ερευνών που παρουσιάστηκαν στην ανασκόπηση της βιβλιογραφίας αποκαλύπτουν σε μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό την ανεπάρκεια των σχολικών βιβλίων στην παρουσίαση μαθηματικού περιεχομένου και την υπεροχή των έργων με χαμηλές γνωστικές απαιτήσεις. Επίσης, εντοπίστηκαν αξιοσημείωτες διαφορές σε εγχειρίδια διαφορετικών σειρών και ιδίως διαφορετικών χωρών γεγονός που καταδεικνύει (επισημαίνει) όχι μόνο την έλλειψη συναίνεσης για την εξέλιξη των εγχειριδίων αλλά και το πόσο άρρηκτα συνδεδεμένα είναι τα σχολικά εγχειρίδια με πολιτιστικό και κοινωνικό υπόβαθρο. Αρκετές, επίσης, έρευνες αποκάλυψαν το κενό που υπάρχει μεταξύ των σχολικών βιβλίων και του προβλεπόμενου Προγράμματος Σπουδών (Zhu et al., 2006).

Βιβλιογραφία

- Apple, M. (1992) The text and cultural politics. *Educational Researcher* **21** (7):4-11.
- Brändström, A. (2005). *Differentiated tasks in mathematics textbooks: An analysis of the levels of difficulty* (Doctoral dissertation, Luleå tekniska universitet).
- Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical thinking and learning*, *12*(2), 117-151.
- Cronbach, L. J. (1955). The text in use. In L. J. Cronbach (Ed.), *Text materials in modern education: A comprehensive theory and platform for research* (pp. 188–216). Urbana, IL: University of Illinois Press.
- Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM*, *45*(5), 633-646.
- Freeman, D. J., & Porter, A. C. (1989). Do textbooks dictate the content of mathematics instruction in elementary schools?. *American educational research journal*, *26*(3), 403-421.
- Fuson, K. C., Stigler, J. W., & Bartsch, K. (1988). Grade placement of addition and subtraction topics in Japan, mainland China, the Soviet Union, Taiwan, and the United States. *Journal for research in mathematics Education*, *19*(5), 449-456.
- Glasnovic Gracin, D. (2018). Requirements in mathematics textbooks: a five-dimensional analysis of textbook exercises and examples. *International journal of mathematical education in science and technology*, *49*(7), 1003-1024.

- Li, Y. (2000). A comparison of problems that follow selected content presentations in American and Chinese mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 234-241.
- O’Keeffe, L. (2013). A framework for textbook analysis. *International Review of Contemporary Learning Research*, No. 1, 1-13.
- Pepin, B. (2008). Μια διεθνής σύγκριση των διδακτικών βιβλίων μαθηματικών και της χρήσης τους από τους εκπαιδευτικούς – ποια εικόνα των μαθηματικών παρουσιάζουν στους μαθητές τα σχολικά βιβλία στην Αγγλία, Γαλλία και Γερμανία. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.) *Το βιβλίο στη διδασκαλία των μαθηματικών, 7ο διήμερο διαλόγου για διδασκαλία των μαθηματικών 15 & 16 Μαρτίου 2008* (21-54). Θεσσαλονίκη.
- Pepin, B., & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 33(5), 158-175.
- Robitaille, D. F., & Travers, K. J. (1992). International studies of achievement in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 687–709). New York: Macmillan.
- Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Springer Science & Business Media.
- Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational studies in Mathematics*, 89(1), 41-65.
- Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4(4), 609-626.
- Ξωχέλλης, Π. (2009). Το σχολικό βιβλίο ως μέσο διδασκαλίας και αντικείμενο εκπαιδευτικής έρευνας. Πρακτικά του 10^{ου} Συνεδρίου του Εκπαιδευτικού Ομίλου Κύπρου, σ. 27-34. Λευκωσία.

