

# ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ ΦΥΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΖΩΗΣ. ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΚΑΙ ΕΠΙΛΟΓΕΣ ΓΙΑ ΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ Α΄ ΚΑΙ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

Χαράλαμπος Λεμονίδης

Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής: <http://www.eled.uowm.gr/mathslife.html>

Δίκτυο εκπαιδευτικών των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής: <http://www.uowm.gr/mathslife/>

## Περίληψη

Στα νέα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών της Α΄ και Γ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου αποτυπώνεται μια αντίληψη για τη διδασκαλία των Μαθηματικών που εκφράζεται με την επωνυμία «Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής». Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται οι βασικές θεωρητικές αρχές των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής και κάποιες από τις αλλαγές στη διδακτική λογική των νέων βιβλίων και τα περιεχόμενά τους. Παρουσιάζονται επίσης αποτέλεσμα ερευνών που πραγματοποιήθηκαν στο Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης της Φλώρινας και συνέβαλαν στην πραγματοποίηση των αλλαγών αυτών.

Ο όρος «Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής» οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι δίνεται μεγάλη έμφαση στα περιεχόμενα και στα θέματα με τα οποία πραγματοποιείται η διδασκαλία των μαθηματικών. Αυτά είναι επιλεγμένα από καταστάσεις της καθημερινής ζωής και αναφέρονται στη φύση, τον πολιτισμό, την ιστορία των μαθηματικών, κ.ά, με τρόπο ώστε να παρακινούν το ενδιαφέρον των μαθητών. Η διδασκαλία αναπτύσσεται με βάση τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών οι οποίοι καλούνται να ανακαλύψουν και να κατασκευάσουν μόνοι τους τη νέα γνώση μέσα σ' ένα επικοινωνιακό περιβάλλον.

Σημαντικές αλλαγές παρουσιάζονται και στα περιεχόμενα των μαθηματικών. Στην εργασία αυτή θα παρουσιάσουμε μερικές από αυτές τις αλλαγές οι οποίες είναι οι παρακάτω: Διαφορετική λογική στην εισαγωγή και τη διδασκαλία των αριθμών. Καταργείται η διάκριση μεταξύ προαριθμητικών και αριθμητικών εννοιών. Δεν εισάγονται πλέον οι αριθμοί με βάση τη στρουκτουραλιστική θεώρηση των συνόλων. Εισάγονται και χρησιμοποιούνται πολύ οι νοεροί υπολογισμοί. Επεκτείνεται και γίνεται ουσιαστικότερη η μάθηση των αριθμών. Υπάρχει διαφορετική λογική στη διδασκαλία των πράξεων.

## Εισαγωγή

Τα «Μαθηματικά της φύσης και της ζωής» είναι επωνυμία που εκφράζει μια αντίληψη για τη διδασκαλία των Μαθηματικών η οποία αναπτύχθηκε στο Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης της Φλώρινας. Με κύριο στόχο τον εκσυγχρονισμό της εκπαίδευσης των μαθηματικών, πραγματοποιήθηκαν έρευνες και παράχθηκε εκπαιδευτικό υλικό στο οποίο περιλαμβάνονται και τα νέα βιβλία της Α' και Γ' τάξης του Δημοτικού Σχολείου.

Η ανάγκη για μεγαλύτερη σύνδεση του σχολείου με την πραγματικότητα και την καθημερινή ζωή του μαθητή εκφράστηκε από πολύ παλιά στην ιστορία της εκπαίδευσης. Για παράδειγμα, το κίνημα της προοδευτικής εκπαίδευσης στα μέσα του προηγούμενου αιώνα, έδωσε ένα προβάδισμά στη δράση, στην πρακτική εφαρμογή απέναντι στην επιστήμη και στη θεωρία γενικότερα. Κύριοι εκπρόσωποι ο J. Dewey και ο μαθητής του W.H. Kilpatrick. Κατά τον J. Dewey, (1956), η μάθηση είναι μια διαδικασία αδιάκοπης επεξεργασίας των εμπειριών, των βιωμάτων του παιδιού. Είναι μία αναπαραγωγή της κοινωνικής και πολιτιστικής ζωής.

Όσον αφορά τη διδασκαλία των μαθηματικών μια αντίληψη για το ρεαλιστικό τρόπο απόδοσης των μαθηματικών εκφράστηκε από τη σχολή των Ολλανδών με τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά, Realistic Mathematics Education (RME). Ο Hans Freudenthal, που ήταν ο θεμελιωτής της σχολής αυτής, έδινε έμφαση στην σύνδεση των μαθηματικών με την πραγματικότητα και την κοινωνική εμπειρία του παιδιού. Δήλωνε ότι τα μαθηματικά πρέπει να είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα, δηλαδή να κατασκευάζονται από τον ίδιο το μαθητή με τη διαδικασία της μαθηματοποίησης (Freudenthal, 1968). Γιαυτόν η *μαθηματοποίηση* είναι βασική μαθηματική δραστηριότητα, η οποία αντιπροσωπεύει την οργάνωση από μια μαθηματική οπτική. Ο Freudenthal θεωρεί αυτήν την δραστηριότητα των μαθητών ως ένα τρόπο για να ανακαλύπτουν εκ νέου τα μαθηματικά. Εντούτοις, δεν αναμένεται από τους μαθητές να τα ανακαλύψουν όλα μόνοι τους. Σε σχέση με αυτό, ο Freudenthal (1991) μιλά για *καθοδηγημένη επαναανακάλυψη (guided reinvention)*. Για αυτόν, η έμφαση πρέπει να δίνεται στο χαρακτήρα της διαδικασίας εκμάθησης παρά στην ανακάλυψη αυτή καθαυτή. Η ιδέα είναι να επιτραπεί στους μαθητευόμενους να θεωρήσουν τη γνώση που αποκτούν ως δική τους γνώση, γνώση για την οποία οι ίδιοι είναι υπεύθυνοι.

Τα προγράμματα που βασίζονται στις αρχές του RME οδηγούνται από μια φαινομενολογική ανάλυση των μαθηματικών δομών και της μάθησής τους (Freudenthal, 1983). Στα RME η διδασκαλία και η μάθηση ξεκινούν με πλαίσια που είναι γνωστά. Αυτές οι σημαντικές καταστάσεις, έγκαιρα, μαθηματοποιούνται για να διαμορφώσουν πιο τυπικές σχέσεις και αφηρημένες δομές (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996). Ο Treffers (1987), κάνει τη διάκριση μεταξύ της *οριζόντιας και κάθετης μαθηματοποίησης*. Η πρώτη προσαρμόζει ένα πλαισιωμένο πρόβλημα σε ένα μαθηματικό πρόβλημα, η τελευταία επεξεργάζεται το μαθηματικό θέμα σε ένα υψηλότερο επίπεδο. Η κάθετη μαθηματοποίηση μπορεί να προκληθεί με τον καθορισμό των προβλημάτων που δέχονται λύσεις σε διαφορετικά μαθηματικά επίπεδα (Freudenthal, 1991, Gravemeijer & Terwel, 2000). Επιπλέον, η ενσωμάτωση

της κάθετης μαθηματοποίησης στο RME δείχνει ότι αυτό δεν περιορίζεται στην εφαρμογή των μαθηματικών σε καταστάσεις γνωστών παισίων, αλλά έχει τη δυνατότητα να αναπτύσσει επίσημα μαθηματικά στους σπουδαστές.

Με βάση τη ρεαλιστική λογική για τη διδασκαλία των Μαθηματικών η πρότασή μας δίνει έμφαση και θεωρεί ότι είναι πολύ σημαντικό το είδος του περιεχομένου και του θέματος με το οποίο παρουσιάζονται οι διδακτικές καταστάσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι καταστάσεις αυτές αποτελούν το πεδίο στο οποίο εφαρμόζονται τα Μαθηματικά. Μέσω αυτών των περιεχομένων τα Μαθηματικά συνδέονται με την πραγματικότητα. Τα θέματα και τα σενάρια στη διδασκαλία των μαθηματικών μπορούν να προκαλέσουν ή όχι το ενδιαφέρον των μαθητών. Μέσα από αυτή την θεώρηση αναδεικνύεται, εκτός από τη διαδικασία της αποπλαισιοποίησης που πραγματοποιείται συνήθως στη διδασκαλία των μαθηματικών και η διαδικασία της πλαισιοποίησης των μαθηματικών εννοιών με περιεχόμενα που καλείται σε πολλές περιπτώσεις να πραγματοποιήσει ο εκπαιδευτικός.

Τα περιεχόμενα αναπτύσσονται και παρουσιάζονται με βάση την κατανόηση και το γνωστικό υπόβαθρο των μαθητών και όχι τις δομές και τη θεώρηση της επιστήμης των Μαθηματικών. Ένα παράδειγμα δόμησης της διδασκαλίας αλληλένδετο με την επιστημονική θεώρηση είναι η εισαγωγή των αριθμών με βάση τη θεωρία των συνόλων (Λεμονίδης, Χ., 1998α).

Αυτή η θεώρηση για τη διδασκαλία των μαθηματικών επιφυλάσσει άλλο ρόλο και για τη συμμετοχή των γονέων στη διαδικασία της μάθησης των παιδιών τους. Οι γονείς μαζί με τα παιδιά τους ασχολούνται με παιχνίδια και καταστάσεις μέσα στο οικογενειακό και ευρύτερο περιβάλλον για να αντιμετωπίσουν τα μαθηματικά μ' ένα δυναμικό τρόπο και εφαρμόσιμο στην καθημερινότητα.

Είναι αρκετές και οι αλλαγές όσον αφορά στα περιεχόμενα των μαθηματικών που διδάσκονται. Στην εργασία αυτή θα αναφερθούμε σε μερικές από αυτές τις αλλαγές όπως είναι: Η εισαγωγή των αριθμών στην Α' τάξη και η διδασκαλία αριθμών μεγαλύτερου μεγέθους από ότι στα παλαιότερα προγράμματα. Η έμφαση στους νοερούς υπολογισμούς. Η νέα λογική για τη διδασκαλία των γραπτών πράξεων και της προπαίδειας.

## **I. Επιλογή προσέγγισης μαθηματικού περιεχομένου και παρουσίασης των μαθηματικών εννοιών**

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί θα παρουσιάσουμε κάποιες βασικές μας θεωρητικές επιλογές για τα «*Μαθηματικά της φύσης και της ζωής*». Πρώτον θα παρουσιάσουμε την επιλογή της μεγαλύτερης σύνδεσης των μαθηματικών του σχολείου με την καθημερινή ζωή των παιδιών. Δεύτερον θα παρουσιάσουμε τη λογική της σημειολογικής παρουσίασης των περιεχομένων στα νέα βιβλία.

### **I.1. Μαθηματικά του σχολείου και η πραγματικότητα της καθημερινής ζωής**

Τα τελευταία χρόνια πραγματοποιήθηκαν αρκετές έρευνες, κυρίως σε χώρες του Τρίτου κόσμου, για να εξεταστεί η σχέση των μαθηματικών που εφαρμόζονται στην καθημερινή ζωή και των μαθηματικών του σχολείου (Lave, 1977, Saxe, 1991, Nunes et al. 1993). Βρέθηκε ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν με διαφορετικό τρόπο τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή από ότι στο σχολείο και δεν υπάρχει μεταφορά των μεθόδων που χρησιμοποιούνται στην καθημερινότητα μέσα στο σχολείο. Πραγματοποιήθηκαν επίσης έρευνες σχετικά με την χρήση των μαθηματικών σε διάφορα επαγγέλματα όπως των νοσοκόμων (Hoyles et al. 2001), των μαραγκών (Millroy, 1992), των πολιτικών μηχανικών (Hall & Stevens, 1995) και όλες σχεδόν κατέληξαν σε ένα παρόμοιο συμπέρασμα: ότι οι περισσότεροι ενήλικοι χρησιμοποιούν τα μαθηματικά για να κατανοήσουν τις καταστάσεις με τέτοιους τρόπους που διαφέρουν ριζικά από εκείνους των μαθηματικών του σχολείου.

Στην προσπάθεια να γεφυρωθεί το χάσμα μεταξύ των μαθηματικών του σχολείου και των μαθηματικών της καθημερινής ζωής σε παγκόσμιο επίπεδο έχουν εφαρμοστεί καινοτόμα αναλυτικά προγράμματα όπως για παράδειγμα τα Standards 2000 στην Αμερική, το πρόγραμμα Numeracy στην Αγγλία, τα ρεαλιστικά μαθηματικά της Ολλανδίας, το πρόγραμμα στο πανεπιστήμιο του Chicago (Everyday Mathematics), (Isaacs, et al., 1998). κ.ά.

Θέλοντας να φέρουμε πιο κοντά τα μαθηματικά του σχολείου με την καθημερινότητα στα νέα βιβλία, η διδασκαλία ξεκινάει, τις περισσότερες φορές, με παιχνίδια, δραστηριότητες ή προβλήματα τα οποία προέρχονται από το άμεσο περιβάλλον του παιδιού. Οι καταστάσεις αυτές προσπαθούμε να είναι όσο το δυνατόν ευχάριστες, οικίες και να δημιουργούν κίνητρο στο παιδί να ασχοληθεί με αυτές. Με προβληματισμό, συζήτηση, επένδυση της προϋπάρχουσας γνώσης και ομαδική δουλειά οι μαθητές ανακαλύπτουν τα μαθηματικά.

Θεωρούμε ότι είναι πολύ σημαντικό και επιλέγουμε με μεγάλη προσοχή τις καταστάσεις και τα θέματα που χρησιμοποιούνται από τους μαθητές για να ανακαλύψουν και να κατασκευάσουν τα μαθηματικά. Για παράδειγμα, χρησιμοποιούμε κατοικίδια και άγρια ζώα που μετρούμε το βάρος, τα πόδια και τις γέννες τους για να κάνουμε τον πολλαπλασιασμό. Προτείνονται παιχνίδια με νομίσματα –ο ταμίας της τράπεζας- για να ασκηθούν οι μαθητές στην πρόσθεση και την ανάλυση των αριθμών. Παρουσιάζονται έργα από τη λαϊκή παράδοση και τη σύγχρονη τέχνη για να διδαχτεί η γεωμετρία. Δίνονται πολλά στοιχεία από την ιστορία των μαθηματικών. Για παράδειγμα, οι μικροί ήρωες του βιβλίου ονομάζονται Πυθαγόρας και Υπατία η οποία ήταν η πρώτη γυναίκα μαθηματικός.

Δεν είναι πολλές οι έρευνες που πραγματοποιήθηκαν σχετικά με το πώς αντιμετωπίζουν ή χειρίζονται οι εκπαιδευτικοί το πλαίσιο που αναφέρεται στον πραγματικό κόσμο των καταστάσεων με τις οποίες πραγματοποιείται η διδασκαλία των μαθηματικών. Κάποιες έρευνες έχουν πραγματοποιηθεί σε μελλοντικούς εκπαιδευτικούς σχετικά με το πώς αντιμετωπίζουν στα λεκτικά προβλήματα το πλαίσιο που αναφέρεται στον πραγματικό κόσμο (Verschaffel et al., 1997, Contreras and Martinez-Cruz, 2001, Chapman Oliver, 2006). Σε γενικές γραμμές φαίνεται ότι οι μελλοντικοί δάσκαλοι έχουν παρόμοια συμπεριφορά με τους μαθητές όσον αφορά

αυτό το πλαίσιο. Για παράδειγμα οι Verschaffel et al. (1997) βρίσκουν ότι υπάρχει μια ισχυρή τάση μεταξύ των μελλοντικών δασκάλων στο να αποκλείουν τη γνώση του πραγματικού κόσμου από τις αυθόρμητες λύσεις τους στα αριθμητικά λεκτικά προβλήματα καθώς και από τις εκτιμήσεις τους για τις λύσεις των μαθητών τους.

Στην εργασία Lemonidis Ch., 2005, παρουσιάζεται μια περίπτωση από την εκπαίδευση των μελλοντικών δασκάλων στη λογική των «Μαθηματικών της φύσης και της ζωής». Τα συμπεράσματα δείχνουν ότι για τους μελλοντικούς δασκάλους η σύνδεση των μαθηματικών εννοιών με τις καθημερινές καταστάσεις δεν γίνεται από μόνη της. Είναι απαραίτητη μια ειδική παρέμβαση, ώστε να γίνουν ικανοί να χρησιμοποιήσουν πιο πλούσιες και ουσιαστικές δραστηριότητες από την καθημερινότητα, στη διδασκαλία τους.

Σε μια έρευνά μας (Lemonidis, Ch., Theodorou, Eut., 2006) παρουσιάζονται συμπεράσματα για το πως επέδρασε μια πειραματική παρέμβαση στην εκπαίδευση των μελλοντικών δασκάλων όσον αφορά το σχεδιασμό μιας διδασκαλίας (lesson plan) του μαθήματος των μαθηματικών. Χρησιμοποιήθηκε ένα ψηφιακό εργαστήριο διδασκαλίας των μαθηματικών για να εμπλουτίσει τις εμπειρίες των μελλοντικών δασκάλων με παραδείγματα διδασκαλίας βιωματικού περιεχομένου. Στα αποτελέσματα παρουσιάζονται οι αλλαγές που υπέστησαν οι φοιτητές που συμμετείχαν στην πειραματική αυτή διαδικασία ως προς την ικανότητα σχεδιασμού μιας διδασκαλίας με βιωματικά χαρακτηριστικά. Η πλειοψηφία των φοιτητών δήλωσε ότι μετά την πειραματική παρέμβαση οι ιδέες τους άλλαξαν. Άλλαξαν ως προς τη χρήση στη διδασκαλία των μαθηματικών παραδειγμάτων από την καθημερινή ζωή και την επιλογή των κατάλληλων παραδειγμάτων ανάμεσα σε πολλές ιδέες.

Από τις παραπάνω έρευνες αλλά και από την εμπειρία μας στην εκπαίδευση των εκπαιδευτικών μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η σύνδεση των Μαθηματικών με τα φαινόμενα και τις καθημερινές καταστάσεις της ζωής δεν είναι προφανής για τους εκπαιδευτικούς. Απαιτείται λοιπόν από αυτούς που είναι υπεύθυνοι για την εκπαίδευση ή την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών μια ειδική παρέμβαση. Πρέπει δηλαδή να παρουσιάζονται στους εκπαιδευτικούς μια μεγάλη ποικιλία εφαρμογών των μαθηματικών εννοιών στην καθημερινή ζωή, τουλάχιστον αυτών που είναι οι πιο σημαντικές. Οι εκπαιδευτικοί ή οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί θα πρέπει να διαθέτουν ένα υπόβαθρο πλούσιο σε εφαρμογές που θα μπορούν να το εμπλουτίσουν και μέσα από αυτό να επιλέγουν τις καταστάσεις που είναι οι πλέον κατάλληλες για τη διδασκαλία τους.

## **I.2. Η σημειωτική διάσταση στα νέα βιβλία**

“Τα Μαθηματικά καθώς και η διδασκαλία των μαθηματικών είναι ουσιαστικά συμβολικές πρακτικές στις οποίες τα σύμβολα εφευρίσκονται, χρησιμοποιούνται ή αναδημιουργούνται για να διευκολύνουν τις γνωστικές διεργασίες ή τους σκοπούς” (Adalira S’Aenz-Ludlow & Norma Presmeg, 2006, p.1). Είναι γεγονός ότι οι σημειωτικές αναπαραστάσεις παίζουν ένα πολύ σημαντικό ρόλο στη διδασκαλία των

μαθηματικών. Ο λόγος για τον οποίο δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην έννοια αυτή στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών είναι ότι οι αναπαραστάσεις θεωρούνται σύμφυτες με τα μαθηματικά (Dufur-Janvier et al, 1987, σ. 110, Kaput 1987, σ.25). Υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι αναπαραστάσεις είναι τόσο στενά δεμένες με μια μαθηματική έννοια, ώστε είναι δύσκολο να γίνει κατανοητή η έννοια χωρίς τη χρήση της συγκεκριμένης αναπαράστασης.

Οι έρευνες έδειξαν ότι η διαφοροποίηση του τρόπου παρουσίασης μιας μαθηματικής έννοιας μπορεί να διαφοροποιεί τη συμπεριφορά των μαθητών (Duval, 1995, Lemonidis, 2003). Σε μια έρευνα (Lemonidis, 2003) αναφέρεται ότι οι διαφορετικές αναπαραστάσεις των αριθμητικών ποσοτήτων παίζουν ένα πολύ σημαντικό ρόλο στη διδασκαλία και στη μάθηση των πρώτων μαθηματικών εννοιών. Οι αναπαραστάσεις αυτές μπορεί να εμφανιστούν με διαφορετικές εκφράσεις, όπως εικονικά, συμβολικά, κτλ. Αυτές οι διαφορετικές εκφράσεις αφενός συνεπάγονται διαφορετικές καταστάσεις διδασκαλίας και αφετέρου διαφορετικές διαδικασίες υπολογισμού και άλλους τρόπους κατανόησης από την πλευρά των μαθητών. Τα αποτελέσματα της έρευνας σε δύο ομάδες μαθητών δείχνουν ότι σχετικά με την επιτυχία στις απλές πράξεις, η πειραματική ομάδα που διδάχτηκε στη λογική των διαφορετικών αναπαραστάσεων των αριθμητικών ποσοτήτων, πέτυχε αποτελέσματα πολύ ανώτερα από την άλλη ομάδα, που διδάχτηκε με παραδοσιακό τρόπο.

Στα νέα βιβλία των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής δίνεται μεγάλη σημασία στον τρόπο με τον οποίο παρουσιάζονται στους μαθητές οι διάφορες διδακτικές δραστηριότητες. Ιδιαίτερα σε μαθητές μικρής ηλικίας η παρουσίαση των δραστηριοτήτων για παράδειγμα μέσω φυσικών αντικειμένων, μέσω εικονικών αναπαραστάσεων ή μέσω συμβολικών αναπαραστάσεων διαφοροποιεί κάθε φορά τη συμπεριφορά των μαθητών και απαιτεί μια διαφορετική γνωστική λειτουργία από την πλευρά τους. Στα νέα βιβλία οι έννοιες λοιπόν παρουσιάζονται με πολλούς διαφορετικούς σημειολογικούς τρόπους. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το παιχνίδι ρόλων “οι μαθηματικοί, οι ζωγράφοι και οι λογοτέχνες” το οποίο χρησιμοποιείται για τη διδασκαλία των πολυψήφιων αριθμών και των κλασμάτων. Το κλάσμα για παράδειγμα, οι μαθηματικοί το γράφουν με σύμβολο, οι ζωγράφοι το σχεδιάζουν σ’ ένα διάγραμμα και οι λογοτέχνες το γράφουν με αριθμολέξεις.

Σύμφωνα με τα παραπάνω δημιουργείται η απαίτηση από το διδάσκοντα να γνωρίζει και να μπορεί να χειρίζεται τις διαφοροποιήσεις στη σημειολογική παρουσίαση των καταστάσεων με βάση τις γνωστικές δυνατότητες των παιδιών. Πραγματοποιήθηκε έρευνα (Λεμονίδης, X., 2003δ) σε υποψήφιους δασκάλους προκειμένου να εξεταστούν οι ικανότητές τους να αξιολογούν και να χειρίζονται τις διάφορες αναπαραστάσεις των αριθμητικών ποσοτήτων σε καταστάσεις διδασκαλίας. Από τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνεται ότι οι υποψήφιοι δάσκαλοι παρουσιάζουν σοβαρές αδυναμίες στο χαρακτηρισμό και χειρισμό αυτών των αναπαραστάσεων.

## **II. Διαχείριση της τάξης από τον εκπαιδευτικό που ενθαρρύνει μια μορφή επικοινωνίας**

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσονται ο τρόπος διαχείρισης της τάξης από τον εκπαιδευτικό, δηλαδή η διδακτική μεθοδολογία που προτείνεται στα νέα βιβλία και η μορφή επικοινωνίας και αλληλεπίδρασης μέσα στην τάξη.

## Π.1. Επιλογή διδακτικής μεθοδολογίας

Η διδακτική μεθοδολογία, στα νέα βιβλία των μαθηματικών, εντάσσεται μέσα στο γενικότερο πλαίσιο της εποικοδομιστικής προσέγγιση μάθησης και χρησιμοποιούνται διάφορες μέθοδοι της σύγχρονης διδακτικής θεωρίας.

Θέλουμε να τονίσουμε ότι δεν ακολουθείτε πιστά μια μόνο διδακτική μέθοδος ή τεχνική διδασκαλίας<sup>1</sup> αλλά εφαρμόζεται μια επιλεκτική λογική και ανάλογα με τους στόχους, τα περιεχόμενα και την κατάσταση των μαθητών ακολουθείται η αντίστοιχη μέθοδος διδασκαλίας. Προτείνεται η χρήση μια ποικιλίας διδακτικών προσεγγίσεων όπως η μέθοδος επίλυσης προβλήματος (problem solving method), η ανακαλυπτική-μαιευτική μέθοδος, η ομαδοσυνεργατική μέθοδος, η συλλογική ή επικοινωνιακή μέθοδος, η μέθοδος της ιδεοθίελας, η μέθοδος του σχεδίου δράσης (project), η μέθοδος της συζήτησης ή ερωτοαποκρίσεων, της υπόδησης ρόλου, κτλ.

Αυτό δε σημαίνει ότι δεν υπάρχει σταθερή διδακτική λογική και φιλοσοφία. Η λογική της διδασκαλίας στα νέα σχολικά βιβλία βασίζεται στις παρακάτω αρχές:

1. Γίνεται προσπάθεια να χρησιμοποιηθεί το προϋπάρχον γνωστικό υπόβαθρο των μαθητών και η διδασκαλία να δομηθεί πάνω σε αυτό.
2. Ο μαθητής οδηγείται να ανακαλύψει μόνος του τη νέα γνώση.
3. Η διδασκαλία αναπτύσσεται μέσα σ'ένα επικοινωνιακό πλαίσιο.
4. Η διδασκαλία αναπτύσσεται διαφοροποιημένα ανάλογα με τις ιδιαιτερότητες των μαθητών.

Η διδακτική μέθοδος λοιπόν μπορεί να αλλάζει ανάλογα με το περιεχόμενο του κάθε μαθήματος. Μπορεί να αλλάζει επίσης μέσα σε ένα ίδιο μάθημα ανάλογα με τη φάση ανάπτυξής του. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η ιδιαιτερότητα του μαθήματος των μαθητικών ευνοεί περισσότερο, χωρίς να αποκλείει τις άλλες, μεθόδους όπως την ανακαλυπτική-μαιευτική και τη μέθοδο επίλυσης προβλήματος η οποίες οδηγούν τους μαθητές στην ανακάλυψη των μαθηματικών.

Δυστυχώς υπάρχουν πολλοί εκπαιδευτικοί που κινούνται μέσα σε ένα δασκαλοκεντρικό πλαίσιο και χρησιμοποιούν τη μέθοδο της διάλεξης ή της επίδειξης για να διδάξουν τις μαθηματικές έννοιες. Δεν χρησιμοποιούν, και σε πολλές περιπτώσεις, δεν γνωρίζουν τις προϋπάρχουσες γνώσεις και ικανότητες των μαθητών. Δε δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να ανακαλύψουν και να κατασκευάσουν μόνοι τους τη νέα γνώση. Η νέα γνώση προσφέρεται εξαρχής έτοιμη και καλούνται οι μαθητές να την κατανοήσουν πραγματοποιώντας εφαρμογές. Γίνεται δηλαδή η

---

<sup>1</sup> Υπάρχει διαφορά μεταξύ των όρων στρατηγική, μέθοδος και τεχνική διδασκαλίας. Η διάκριση των όρων αυτών στο παρόν κείμενο θεωρούμε ότι δεν έχει να προσφέρει πολλά επί της ουσίας.

παρουσίαση της νέας γνώσης από το δάσκαλο και στη συνέχεια πραγματοποιούνται εφαρμογές για να κατανοηθεί και να εμπεδωθεί.

Στα νέα βιβλία οι θεματικές ενότητες παρουσιάζεται με τέτοιο τρόπο ώστε ο δάσκαλος αντί να ανακοινώνει τη νέα γνώση, προτείνει προβλήματα, παιχνίδια και διδακτικές καταστάσεις οι οποίες οδηγούν τους μαθητές να ανακαλύψουν τις νέες έννοιες. Οι μαθητές δραστηριοποιούνται για να ανακαλύψουν το καινούργιο. Στο βιβλίο του δασκάλου προτείνεται ενδεικτικό διάγραμμα ροής το οποίο προτείνει αυτή την πορεία για την ανάπτυξη του μαθήματος.

## **II.2. Επικοινωνία και αλληλεπίδραση μέσα στην τάξη**

Με βάση τη λογική του Vygotsky (1986) ότι η μάθηση είναι και μια κοινωνική διαδικασία που συντελείται μέσα σ' ένα συγκεκριμένο κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο, πραγματοποιήθηκαν πολλές έρευνες σχετικά με τη γλώσσα και τα μαθηματικά αλλά και την επικοινωνία των Μαθηματικών μέσα στην τάξη. Ένας μεγάλος αριθμός ερευνών μελέτησε τη μάθηση των μαθηματικών ως μια συλλογική διεργασία σ' ένα κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο, παρά ως μια διαδικασία που λαμβάνει χώρα μόνο μέσα στο μυαλό ενός ατόμου (π.χ. Cobb & Bauersfeld, 1995). Αυτοί οι ερευνητές υποθέτουν ότι οι μαθηματικές ιδέες των μαθητών αναπτύσσονται μέσω των επικοινωνιακών πρακτικών τους (Roschelle, 1996) ή των διαλογικών αλληλεπιδράσεων (Wertsch, 1985) με τα μέλη της τάξης.

Στα νέα βιβλία των «*Μαθηματικών της φύσης και της ζωής*» ο τρόπος που αναπτύσσονται τα περιεχόμενα και οι οδηγίες που προτείνονται στο βιβλίο του δασκάλου έχουν ως στόχο να κάνουν τους μαθητές να μιλήσουν ώστε να εκφράσουν τις σκέψεις τους και να αλληλεπιδράσουν και να επικοινωνήσουν μεταξύ τους μέσω των μαθηματικών.

Πολλές δραστηριότητες συνίσταται να πραγματοποιούνται ομαδικά. Υπάρχει ειδικό σήμα για τις δραστηριότητες του βιβλίου που πρέπει να πραγματοποιούνται ομαδικά. Στο βιβλίο του δασκάλου δίνονται οδηγίες για το πώς να γίνει η διαχείριση της ομαδοσυνεργατικής εργασίας.

Σε πολλές περιπτώσεις προτείνονται δραστηριότητες ώστε να αναπτυχθεί η συζήτηση με ολόκληρη την τάξη. Δίνονται οδηγίες στο δάσκαλο για το πώς να δημιουργήσει και να διαχειριστεί αυτή τη συζήτηση.

Στους νοερούς αριθμητικούς αλλά και άλλους υπολογισμούς στο βιβλίο του δασκάλου παρουσιάζονται οι διάφορες απαντήσεις που είναι δυνατόν να δοθούν από τους μαθητές και διδακτικές οδηγίες για το πώς να διαχειριστεί ο δάσκαλος διδακτικά την τάξη. Συνιστάται λοιπόν στον δάσκαλο να ζητά από τους μαθητές να εξηγούν τον τρόπο που σκέφτηκαν για να υπολογίσουν. Αυτό οδηγεί το μαθητή σε μια μεταγνωστική διαδικασία. Εδώ δηλαδή ο μαθητής σκέφτεται, συνειδητοποιεί και οργανώνει τον τρόπο με τον οποίο σκέφτηκε. Αυτή η λειτουργία, από νοητικής πλευράς, είναι πολύ χρήσιμη και ωφέλιμη.



Στο βιβλίο του δασκάλου δίνονται οδηγίες, κατά τη διαδικασία της λύσης προβλήματος, ώστε να ζητείται από τους μαθητές να εκφράζουν και να δικαιολογούν τον τρόπο με τον οποίο σκέφτηκαν. Να ανακοινώνονται οι ποικίλες μέθοδοι και τρόποι σκέψης σε όλη την τάξη, να ακολουθεί συζήτηση, στην οποία να αξιολογούνται και να επιλέγονται οι πιο σύντομοι και αποτελεσματικοί τρόποι.

### III. Η συμμετοχή των γονέων

Σε μια σύνθεση των ερευνών που πραγματοποιεί η Epstein (1992) σχετικά με τη συμμετοχή των γονέων επισημαίνει ότι: οι μαθητές όλων των βαθμίδων πραγματοποιούν καλύτερη ακαδημαϊκή εργασία, έχουν περισσότερο θετικές σχολικές συνήθειες, υψηλότερες φιλοδοξίες και άλλες θετικές συμπεριφορές όταν οι γονείς τους εμπλέκονται και είναι ενήμεροι, είναι σόφρονες και ενθαρρυντικοί, (σελ. 1141).

Οι Wenfan, Y., και Qiuyun, L. (2005, σελ. 116) αναφέρουν ότι η έρευνα δείχνει ότι οι εκπαιδευτικοί ωφελούνται από την αυξανόμενη συμμετοχή των γονέων ως προς τα εξής: (α) οι δάσκαλοι κερδίζουν την εμπιστοσύνη των παιδιών και τα διδάσκουν πιο αποτελεσματικά (Hoover-Dempsey, Bassler & Brissie, 1987), (β) το πρόγραμμα σπουδών μετασχηματίζεται όσο οι δάσκαλοι βασίζονται στην κοινότητα ως “κοινωνικό κεφάλαιο” (Moll, 1992), (γ) οι διοικητικοί ενισχύουν τις κοινοτικές σχέσεις καθώς αλληλεπιδρούν με τους γονείς σε προσωπική βάση (Henderson, Marburger, & Ooms, 1986; Heystek, 2003), (δ) τα σχολεία γίνονται πιο συνεργάσιμα και ενδιαφέρονται ουσιαστικά όταν λειτουργούν με την ευρύτερη κοινότητα (Henry, 1996).

Τα νέα βιβλία των *Μαθηματικών της φύσης και της ζωής* σε κάθε ενότητα περιλαμβάνουν μια επιστολή προς το γονέα /κηδεμόνα. Οι επιστολές αυτές εξηγούν στο γονέα /κηδεμόνα τα περιεχόμενα και τις έννοιες των μαθηματικών που θα διδαχτεί το παιδί του στο σχολείο. Σε πολλά σημεία, δίνονται εξηγήσεις σχετικά με τον τρόπο που μαθαίνει το παιδί, τις ιδιαιτερότητες της μάθησης, τα εμπόδια κτλ. Οι επιστολές αυτές έχουν ως κύριο στόχο να αλλάξει ο προσανατολισμός της ενασχόλησης με τα μαθηματικά στο σπίτι. Γι'αυτό προτείνονται διάφορες δραστηριότητες της καθημερινής ζωής και παιχνίδια.

Μέσα στο περιβάλλον της οικογένειας, αλλά και έξω από αυτό δίνονται πολλές ευκαιρίες για να εφαρμόσουν τα παιδιά τα μαθηματικά που μαθαίνουν στο σχολείο. Οι γονείς μπορούν να παίξουν μαζί με τα παιδιά τους διάφορα παιχνίδια τα οποία βασίζονται σε μαθηματικές έννοιες όπως είναι το φιδάκι, το τάγκραμ κ.ά. Να θέσουν στα παιδιά τους ερωτήσεις και να συζητήσουν για διάφορα θέματα όπου εμφανίζονται μαθηματικές έννοιες. Με αυτό τον τρόπο τα παιδιά θα αισθανθούν ότι τα μαθηματικά που μαθαίνουν στο σχολείο είναι σημαντικά αφού ενδιαφέρονται και μπορούν να μιλήσουν για αυτά με τους γονείς τους. Θα αισθανθούν επίσης ότι τα μαθηματικά που μαθαίνουν στο σχολείο δεν περιορίζονται μόνο στο σχολικό περιβάλλον αλλά βρίσκουν εφαρμογή και στην καθημερινή ζωή.

Σε μια έρευνα (Λεμονίδης Χ., Χατζηλιαμή Μ., Κυρίδης Α. 2002) διερευνήθηκε η συσχέτιση του επίπεδο των αριθμητικών γνώσεων των νηπίων με συγκεκριμένα κοινωνικά χαρακτηριστικά των γονέων τους, όπως η μόρφωσή και το επάγγελμά τους. Τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής έδειξαν ότι οι επιδόσεις των νηπίων στις αριθμητικές έννοιες φάνηκε να εξαρτώνται από συγκεκριμένους κοινωνικούς παράγοντες, οι οποίοι εντάσσονται στην ευρεία κατηγορία "κοινωνικοοικονομικό επίπεδο" της οικογένειας. Η έρευνα αυτή ενίσχυσε την κυρίαρχη άποψη ότι η κοινωνική γνώση διαφοροποιείται ανάλογα με το περιβάλλον όπου αναπτύσσονται τα νήπια και τις δυνατότητες της οικογένειας να τους προσφέρουν ένα πλούσιο σε εμπειρίες πλαίσιο ανάπτυξης των ατομικών τους ικανοτήτων. Φάνηκε επίσης ότι η μητέρα ήταν αυτή που επηρέαζε τις δυνατότητες και τα όρια της εξέλιξης των νηπίων, σε κάθε επίπεδο, επειδή, τουλάχιστον, παραδοσιακά περνά περισσότερο χρόνο μαζί τους.

Σε μια άλλη εργασία (Λεμονίδης Χ., Χατζηλιαμή Μ., 2005) συσχετίζονται τα λειτουργικά χαρακτηριστικά της οικογένειας με τις αριθμητικές γνώσεις των νηπίων. Σχετικά με τα λειτουργικά χαρακτηριστικά της οικογένειας, εξετάζονται τρεις παράγοντες: τα ερεθίσματα που υπάρχουν στο περιβάλλον του παιδιού, η στάση και η συμμετοχή των γονέων απέναντι σ' αυτά τα ερεθίσματα και η στάση των γονέων απέναντι στη μάθηση και τις γνώσεις των παιδιών τους. Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι υπάρχει θετική συσχέτιση ανάμεσα στα λειτουργικά χαρακτηριστικά της οικογένειας και τις αριθμητικές γνώσεις των νηπίων. Δηλαδή, τα παιδιά που έχουν αρκετές αριθμητικές γνώσεις προέρχονται από οικογένειες που συμμετέχουν ενεργά στην καθημερινή ζωή των παιδιών τους.

#### **IV. Ανάλυση κάποιων αλλαγών στα περιεχόμενα**

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται κάποιες από τις αλλαγές που πραγματοποιήθηκαν στα περιεχόμενα οι οποίες είναι η εισαγωγή και η διδασκαλία των αριθμών και των πράξεων στην Α' και Γ' τάξη του Δημοτικού Σχολείου.

##### **IV.1. Εισαγωγή και διδασκαλία των αριθμών**

###### *Αλλαγή στην εισαγωγή των αριθμών*

Στα παλιά βιβλία της Α' τάξης η εισαγωγή της έννοιας του αριθμού γινόταν στα πλαίσια μιας στρουκτουραλιστικής λογικής με βάση τα σύνολα (Λεμονίδης, Χ., 1998α). Υπήρχε ο διαχωρισμός μεταξύ προαριθμητικών και αριθμητικών εννοιών και οι αριθμοί εισάγονταν πολύ αργά αφού οι μαθητές προετοιμαζόνταν για τους αριθμούς με τις προαριθμητικές έννοιες –αντιστοιχίσεις, σειροθετήσεις, ταξινομήσεις, κτλ.-. Αυτή ήταν μια διδασκαλία που ακολουθούσε τη λογική της επιστημονικής γνώσης και όχι της κατανόησης του μαθητή. Αποδίδονταν διδακτικά με βάση τις Πιαζετιανές απόψεις για τη διδασκαλία των Μαθηματικών σύμφωνα με τις οποίες προηγούνται κάποιες λογικές διεργασίες της αριθμητικής μάθησης. Στη μαθηματική επιστήμη στα πλαίσια της θεωρίας των συνόλων για να οριστεί η έννοια του αριθμού

χρησιμοποιούνται οι έννοιες του συνόλου, της αντιστοίχισης, της σειροθέτησης και της ταξινόμησης.

Η νέα διδασκαλία για την εισαγωγή των αριθμών ακολουθεί το δρόμο της κατανόησης του μαθητή. Η νέα γνώση δομείται με βάση τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών. Οι μαθητές όταν έρχονται στο Δημοτικό Σχολείο έχουν αρκετές γνώσεις σχετικά με τους αριθμούς όπως είναι η προφορική αρίθμηση, η απαρίθμηση, η γραφή και ανάγνωση κάποιων ψηφίων, κτλ. (Λεμονίδης, Χ., 2003α, σελ. 37-56). Οι αριθμοί εισάγονται με δραστηριότητες της καθημερινής ζωής, οι οποίες καταδεικνύουν την αναγκαιότητα ύπαρξής τους, ενώ παράλληλα οι μαθητές παροτρύνονται να χρησιμοποιούν τις προϋπάρχουσες γνώσεις τους. Προτείνονται δηλαδή καταστάσεις όπως είναι η σύγκριση ποσοτήτων, η εκτίμηση μιας ποσότητας, η καταγραφή μιας ποσότητας με τη χρήση συμβόλων χωρίς την παρουσία της κ.λπ. Προτείνονται πολλές δραστηριότητες σχετικές με την προφορική αρίθμηση και την απαρίθμηση (καταμέτρηση) αντικειμένων επειδή είναι εύκολες και οι μαθητές διαθέτουν πολλές προϋπάρχουσες γνώσεις σχετικά με αυτές.

#### *Επέκταση του μεγέθους των αριθμών*

Με βάση τα νέα αναλυτικά προγράμματα και βιβλία στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου η διδασκαλία επεκτείνεται σε μεγαλύτερους αριθμούς σε σχέση με τα παλιά βιβλία. Έτσι τώρα στην Α' τάξη θα διδάσκονται αριθμοί μέχρι το 100, στη Β' μέχρι το 1.000 και στη Γ' μέχρι το 10.000. Ενώ στα παλιά βιβλία στην Α' τάξη οι αριθμοί διδάσκονταν μέχρι το 20, στη Β' μέχρι το 100 και στη Γ' τάξη μέχρι το 1.000. Επίσης αυτό που αλλάζει στα νέα σχολικά βιβλία είναι η σχέση μεταξύ του μεγέθους των αριθμών που διδάσκονται και του μεγέθους των αριθμών με τις οποίες εκτελούνται οι πράξεις. Στα παλιά βιβλία οι αριθμοί και πράξεις διδάσκονταν ταυτόχρονα μέχρι κάποιο συγκεκριμένο μέγεθος, π.χ. αριθμοί μέχρι το 5 και πράξεις μέχρι το 5, αριθμοί μέχρι το 10 και πράξεις μέχρι το 10. Τώρα αυτό αλλάζει, διδάσκονται αριθμοί σε μεγαλύτερο μέγεθος από ότι οι αριθμοί των πράξεων που διδάσκονται την ίδια χρονική περίοδο. Αυτές οι αλλαγές έγιναν για δύο βασικούς λόγους που θα αναλύσουμε στη συνέχεια.

Πρώτον, οι μαθητές όταν έρχονται στο σχολείο αλλά και κατά τη διάρκεια της φοίτησής τους σε αυτό γνωρίζουν πολλά πράγματα για τους αριθμούς (Λεμονίδης Χ., 1998α, 2001, Λεμονίδης Χ., Χατζηλιαμή Μ., 2002). Αυτή η γνώση τις περισσότερες φορές έχει κοινωνική προέλευση. Τα παιδιά ζουν πλέον σε ένα ψηφιακό περιβάλλον και από πολύ νωρίς έρχονται σε επαφή με τους αριθμούς. Οι μαθητές στο σχολείο μαθαίνουν εύκολα τους αριθμούς και έχουν μεγάλη διάθεση και κίνητρα να μαθαίνουν όλο και μεγαλύτερους αριθμούς.

Δεύτερον, η μάθηση των αριθμών και των πράξεων, τουλάχιστον στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου, είναι αλληλένδετη. Η μάθηση των αριθμών βοηθάει πολύ τη μάθηση των πράξεων και αντίστροφα. Έτσι λοιπόν σε έρευνες που είχαμε κάνει βρήκαμε μεγάλο αριθμό μαθητών να έχει χαμηλή επίδοση σε πράξεις οι οποίες στην ουσία αναφέρονταν στη γνώση των αριθμών και του αριθμητικού συστήματος

(Λεμονίδης Χ., 1998β, 2003α, σελ. 115-116). Για παράδειγμα, σε μια έρευνα που έγινε στο τέλος της Α' τάξης (Χ. Λεμονίδης, 1998β) προτάθηκαν οι προσθέσεις 10+4, 10+6 και η αφαίρεση 16-6. Οι πράξεις αυτές αναφέρονται κυρίως στους διψήφιους αριθμούς και τις ιδιότητες του συστήματος αρίθμησης. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι μόνο οι μισοί μαθητές ήταν ικανοί να χειριστούν ολόκληρους τους αριθμούς και με διαδικασίες άμεσης ανάκλησης από τη μνήμη να βρίσκουν το αποτέλεσμα της πρόσθεσης. Ποσοστό 37% των μαθητών για το άθροισμα 10+4 και 29% για το άθροισμα 10+6 χρησιμοποίησαν διαδικασίες αρίθμησης ένα προς ένα. Ποσοστό 13% για το άθροισμα 10+4 και 16,5% για το άθροισμα 10+6 χρησιμοποιούν διαδικασίες με αντικείμενα για να υπολογίσουν το αποτέλεσμα. Οι μαθητές αυτοί λοιπόν, αποτύγχαναν στον υπολογισμό πράξεων τέτοιου είδους, όπου το αποτέλεσμα το δηλώνει η ίδια η ονομασία του αριθμού, εξαιτίας της ελλιπούς γνώσεις των αριθμών.

### *Πολυψήφιοι αριθμοί και κανόνες του συστήματος αρίθμησης*

Στο βιβλίο της Α' τάξης δίνεται έμφαση και αφιερώνεται αρκετός χρόνος για την εισαγωγή των διψήφιων αριθμών και την ανάλυσή τους σε δεκάδες και μονάδες.

Σε έρευνες της Fuson (1990, 1997) διακρίνονται πέντε είδη αντιλήψεων για τους διψήφιους αριθμούς: οι μοναδιαίες, δεκαδικές, διαδοχικές, ξεχωριστές και ενσωματωμένες. Κάθε μία από αυτές περιλαμβάνει μια τριαδική σχέση δύο μορφών ανάμεσα στις αριθμολέξεις, τα γραπτά αριθμητικά σύμβολα και την ποσοτική αντίληψη του αριθμού. Κάθε μια από αυτές τις αντιλήψεις συνδέεται με τις άλλες δύο. Απαιτείται χρόνος και εξάσκηση από την πλευρά των μαθητών για να εισαχθούν στη λογική των διψήφιων αριθμών.

Παλαιότερα οι διψήφιοι αριθμοί εισάγονταν χωρίς κανένα προπαρασκευαστικό στάδιο. Οι διψήφιοι αριθμοί και η ανάλυσή τους σε μονάδες και δεκάδες παρουσιάζονταν με έναν φορμαλιστικό τρόπο (Λεμονίδης, Χ., 2003β).

Στα νέα βιβλία οι διψήφιοι αριθμοί διδάσκονται και χρησιμοποιούνται από τους μαθητές από πολύ νωρίς χωρίς να γίνεται ιδιαίτερη αναφορά στην ανάλυσή τους σε δεκάδες και μονάδες. Στην πορεία ακολουθεί μια σταδιακή εισαγωγή του διαχωρισμού σε δεκάδες και μονάδες, με βάση τις ικανότητες και τη γνωστική υποδομή των μαθητών. Διδακτικές καταστάσεις της καθημερινής ζωής που είναι οικίες για τους μαθητές, όπως η καταμέτρηση και ομαδοποίηση ανά δέκα συλλογών με μεγάλο πλήθος αντικειμένων, ανταλλαγές νομισμάτων κ.ά. τους οδηγούν στο διαχωρισμό δεκάδων και μονάδων.

Ένα άλλο μέσο που βοηθάει πολύ τους μαθητές και κάνει εύκολη την ανάλυση των αριθμών σε άθροισμα δεκάδων και μονάδων είναι η γλωσσική έκφραση των αριθμών (αριθμολέξεις). Για παράδειγμα, στην αριθμολέξη τριάντα έξι διαχωρίζονται οι μονάδες και οι δεκάδες. Για αυτόν τον λόγο οι μαθητές ασκούνται στο να βρίσκουν αθροίσματα και διαφορές που έχουν τη μορφή,  $10+v$ ,  $20+v$ ,  $30+v$ , ...  $1v-v$ ,  $2v-v$ ,  $3v-v$ , ..., π.χ.  $20+4=24$ ,  $24-4=20$ .

## *Έμφαση στην ανάλυση και σύνθεση των αριθμών*

Από πολύ νωρίς, με την εισαγωγή των αριθμών φροντίζεται να υπάρχει η λογική της ανάλυσης και σύνθεσης των αριθμών σε άθροισμα. Όταν δηλαδή οι μαθητές μαθαίνουν για παράδειγμα, τον αριθμό 6, αντιμετωπίζουν καταστάσεις με χειραπτικά αντικείμενα, εικόνες ή σύμβολα όπου ο αριθμός παρουσιάζεται ως άθροισμα. Για παράδειγμα με τα ζάρια μπορεί να παρουσιάζεται ως τρεις και τρεις ή πέντε και μια ή δύο και δύο και δύο κουκίδες.

Η ανάλυση και η σύνθεση των αριθμών σε άθροισμα θεωρούμε ότι είναι μια πολύ σημαντική διαδικασία γι' αυτό τη χρησιμοποιούμε πολύ στη μάθηση των αριθμών.

Η αντίληψη για την ανάλυση και σύνθεση του αριθμού βρίσκει θεωρητική στήριξη στο έργο των Polya και Lacatos (Polya G., 1991, – Lakatos I., 1996) και κυρίως στο έργο των Piaget και Resnick. Η ερμηνεία των αριθμών με όρους μερών και όλου χαρακτηρίστηκε από την Resnick ως το μεγαλύτερο διανοητικό επίτευγμα των πρώιμων σχολικών χρόνων (Resnick L. -B., 1983). Η αντίληψή αυτή προβάλλει μια ερμηνεία για τον αριθμό η οποία απορρέει εν μέρει από τον ορισμό του Piaget για τη λειτουργική έννοια του αριθμού (Piaget J., Szeminska A., 1941), χωρίς να συμμερίζεται τον υπερτονισμό των ταξινομήσεων και σειροθετήσεων και την αναγωγή του αριθμού αποκλειστικά σε αυτές τις λογικές έννοιες. Ο ορισμός του Piaget για τον αριθμό προϋποθέτει ότι τα παιδιά έχουν την ικανότητα να προσεγγίζουν τις αναλύσεις ενός δοσμένου αριθμού ακόμα κι αν αυτός ο ορισμός δεν προϋποθέτει ότι τα παιδιά γνωρίζουν ρητά αυτές τις αναλύσεις (Brissiaud R., 1994).

Διάφοροι ερευνητές έχουν ενδιαφερθεί άμεσα ή έμμεσα για προσεγγίσεις που σχετίζονται με την ανάλυση και σύνθεση των αριθμών. Αναφέρουμε τις παρακάτω εργασίες: Hatano G. (1982), Brissiaud R., (1989), Payne J.-N., Huinker D.-M. (1993), Μπούφη Α. (1995α, 1995β), Cobb P., Boufi A., McClain K. Whitenack J. (1997). Στην τελευταία από τις προηγούμενες εργασίες αναφέρεται η πραγματοποίηση μιας σειράς διδακτικών δραστηριοτήτων που περιλαμβάνουν δακτυλικούς σχηματισμούς, γεωμετρικούς σχηματισμούς και ανάλυση και ανασύνθεση συλλογών στην πρώτη τάξη του δημοτικού σχολείου (Cobb P., Boufi A., McClain K., Whitenack J., 1997).

Η ικανότητα των μαθητών να αναλύουν και να συνθέτουν τους αριθμούς έχει ευεργετικά αποτελέσματα στην εκτέλεση των πράξεων. Για αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε χειραπτικά εκπαιδευτικά υλικά για την αισθητοποίηση των αριθμών που παρουσιάζουν μια αθροιστική δομή των ποσοτήτων όπως είναι το δίχρωμο αριθμητήριο, οι βάσεις και τα ζάρια. Στο δίχρωμο αριθμητήριο παρουσιάζονται οι ποσότητες (χάντρες) οργανωμένες με βάση τη δεκάδα – π.χ. το 13 είναι 10 χάντρες της πρώτης σειράς του αριθμητηρίου και 3 χάντρες από τη δεύτερη σειρά-, αλλά και με βάση το πέντε. Οι πέντε χάντρες μιας σειράς είναι διαφορετικού χρώματος από τις άλλες πέντε. Έτσι ο αριθμός οκτώ παρουσιάζεται ως άθροισμα του 5 και 3, πέντε χάντρες ενός χρώματος και 3 χάντρες άλλου χρώματος (βλέπε, Χ. Λεμονίδης 2003γ).

## **IV.2. Οι αριθμητικές πράξεις**

Στην παράγραφο αυτή σχετικά με τις νέες αντιλήψεις που εισάγονται στα βιβλία της Α' και Γ' τάξης για τις αριθμητικές πράξεις θα αναφερθούμε ειδικά στους νοερούς υπολογισμούς, τη λογική της διδασκαλίας των γραπτών πράξεων (αλγορίθμων), τη διδασκαλία του πολλαπλασιασμού και τον Ελληνικό πολλαπλασιασμό.

#### *Έμφαση στους νοερούς υπολογισμούς*

Πολλά σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα διεθνώς δίνουν έμφαση στους νοερούς υπολογισμούς. Για παράδειγμα, στο πρόγραμμα National Numeracy Strategy που εισήχθη στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση της Αγγλίας το 1999, παίζουν πρωταρχικό ρόλο οι νοεροί υπολογισμοί και προτείνεται μια δομική προσέγγιση στη διδασκαλία των στρατηγικών των νοερών υπολογισμών. Προτείνεται η άμεση διδασκαλία των στρατηγικών των νοερών υπολογισμών στα πλαίσια ολόκληρης της τάξης (DfEE, 1999). Στην Αμερική το Εθνικό Συμβούλιο των Καθηγητών των Μαθηματικών (NCTM, 2000) αναφέρει τους αλγορίθμους με μολύβι και χαρτί ως ένα περιεχόμενο στο οποίο πρέπει να δίνεται λιγότερη έμφαση, ενώ οι νοεροί υπολογισμοί, οι κατά προσέγγιση υπολογισμοί και η χρήση των αριθμομηχανών είναι μεταξύ των αντικειμένων που πρέπει να δίνεται περισσότερη προσοχή.

Σε πολλές έρευνες επισημαίνεται η σημαντική θέση που κατέχουν οι νοεροί υπολογισμοί στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών. Ο Ian Thompson (1999, p.147) επισημαίνει τέσσερις βασικούς λόγους για τους οποίους πρέπει να διδάσκονται οι νοεροί υπολογισμοί: 1) χρησιμοποιούνται περισσότερο από τους γραπτούς υπολογισμούς· 2) δημιουργούν καλύτερη και βαθύτερη κατανόηση της έννοιας του αριθμού (McIntosh, 1990, Sowder, 1990)· 3) Η νοερή εργασία αναπτύσσει ικανότητες για τη λύση προβλημάτων· 4) βοηθούν στην κατανόηση και την ανάπτυξη των γραπτών μεθόδων υπολογισμού.

Στη σειρά των νέων βιβλίων «Μαθηματικά της φύσης και της ζωής», σε αντίθεση με τα παλιά βιβλία, δίνετε μεγάλη σημασία και αφιερώνεται πολύς χρόνος στους νοερούς υπολογισμούς. Πολύ συχνά, στο επάνω μέρος της σελίδας του βιβλίου μέσα σε ορθογώνιο πλαίσιο, με σήμα τον Πυθαγόρα που σκέφτεται, προτείνονται νοεροί υπολογισμοί. Στο βιβλίο του δασκάλου στις διδακτικές οδηγίες αλλά και σε άλλα σημεία του βιβλίου εξηγούνται και δίνεται μεγάλη βαρύτητα στους τρόπους ή στις στρατηγικές με τις οποίες υπολογίζουν οι μαθητές τις πράξεις.

Στα βιβλία αυτά η ικανότητα των μαθητών να υπολογίζουν νοερά είναι ένας στόχος ο οποίος επιδιώκεται σε βάθος χρόνου και μεθοδικά. Είναι γνωστό ότι οι μαθητές αρχικά για να εκτελέσουν πράξεις, σε πολλές περιπτώσεις, έχουν την ανάγκη να αναπαραστήσουν τους αριθμούς με αντικείμενα (αισθητοποίηση των αριθμών). Η διδασκαλία μας στοχεύει να οδηγήσει προοδευτικά τους μαθητές από τις στρατηγικές υπολογισμού με αντικείμενα προς στρατηγικές πιο αφηρημένες, τις νοερές στρατηγικές.

Πραγματοποιήθηκε μια έρευνα κατά τη διάρκεια δύο ακαδημαϊκών ετών (1997-1998 και 1998-1999) σε μαθητές Α' και Β' τάξης (Χ. Λεμονίδης, 2003α, 117-167).

Συμμετείχαν δύο ομάδες μαθητών η πειραματική ομάδα και η ομάδα ελέγχου. Η ομάδα ελέγχου διδάχτηκε με την κλασική διδασκαλία που ίσχυσε μέχρι το 2006 και η πειραματική ομάδα διδάχτηκε με τη λογική της νέας διδασκαλίας. Τα αποτελέσματα αυτής της πειραματικής διδασκαλίας στους μαθητές συγκρίθηκαν με αυτά της κλασικής διδασκαλίας η οποία εισήγαγε από πολύ νωρίς τους γραπτούς αλγόριθμους των πράξεων και δεν έδινε μεγάλη έμφαση στους νοερούς υπολογισμούς.

Ενώ στους μαθητές της κλασικής διδασκαλίας μέχρι και το τέλος της Β' τάξης κυριαρχούσαν στην εκτέλεση των προσθέσεων και αφαιρέσεων οι στρατηγικές της αρίθμησης οι μαθητές της πειραματικής διδασκαλίας χρησιμοποιούσαν κυρίως ανακλητικές και κατασκευαστικές στρατηγικές. Δηλαδή, οι μαθητές της πειραματικής διδασκαλίας, σε όλες τις πράξεις, ανέπτυξαν από πολύ πιο νωρίς και χρησιμοποιούσαν αφηρημένες κατασκευαστικές στρατηγικές. Οι μαθητές της πειραματικής διδασκαλίας παρουσίασαν μεγαλύτερη ευκαμψία ως προς τη χρήση στρατηγικών υπολογισμού, χρησιμοποίησαν δηλαδή μεγαλύτερη ποικιλία μεθόδων υπολογισμού των πράξεων από ότι οι μαθητές της κλασικής διδασκαλίας.

Η πειραματική διδασκαλία εκτός από τις προσθέσεις και αφαιρέσεις είχε επίδραση και στην εκτέλεση πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων. Παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές της πειραματικής διδασκαλίας πετύχαιναν να εκτελούν πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις σε πολύ μεγαλύτερα ποσοστά.

#### *Οι γραπτές πράξεις (αλγόριθμοι)*

Στα παλιά βιβλία και την παραδοσιακή διδασκαλία δίνονταν υπέρμετρη έμφαση στις γραπτές τυπικές πράξεις (αλγόριθμους). Οι γραπτές πράξεις διδάσκονταν πολύ νωρίς προτού οι μαθητές να εκφράσουν τις άτυπες στρατηγικές υπολογισμού και χωρίς να κατανοήσουν πλήρως τη σημασία των πράξεων αυτών (Λεμονίδης, Χ., 2003ε, Λεμονίδης, Χ., Παυλίδης, Α., 2003).

Για τη διδασκαλία των τυπικών γραπτών πράξεων στα νέα βιβλία των Μαθηματικών της Φύσης και της Ζωής ακολουθείται μια διαφορετική σειρά και λογική. Αρχικά προτού οι μαθητές διδαχτούν οποιοδήποτε τυπικό τρόπο γραπτού υπολογισμού μιας πράξης προτείνουμε καταστάσεις προβληματισμού οικείες σε αυτούς για να εκφράσουν τους άτυπους και προσωπικούς τους τρόπους υπολογισμού. Οι μαθητές πραγματοποιούν πολλούς υπολογισμούς με νοερό τρόπο της πράξης αυτής. Η γραπτή τυπική πράξη (αλγόριθμος) παρουσιάζεται σε ένα τελικό στάδιο. Με τον αλγόριθμο οι μαθητές αντιμετωπίζουν πράξεις τις οποίες δεν μπορούν να αντιμετωπίσουν με το νοερό υπολογισμό.

#### *Ο αλγόριθμος του πολλαπλασιασμού και ο ελληνικός πολλαπλασιασμός*

Όπως αναφέραμε ήδη για τη διδασκαλία των γραπτών πράξεων ο αλγόριθμος του πολλαπλασιασμού θα πρέπει να αποτελεί την τελική φάση μιας διδασκαλίας. Οι μαθητές δηλαδή πριν από τον γραπτό αλγόριθμο ασκούνται σε νοερούς υπολογισμούς του πολλαπλασιασμού και υπολογίζουν χρησιμοποιώντας τις άτυπες ή

προσωπικές τους στρατηγικές. Προτού διδαχτεί η γραπτή πράξη του πολλαπλασιασμού υπάρχει μια φάση προετοιμασίας για αυτήν την πράξη με τον τίτλο «προς τον πολλαπλασιασμό». Σε αυτά τα μαθήματα οι μαθητές γνωρίζουν τον ελληνικό πολλαπλασιασμό.

Ο ελληνικός πολλαπλασιασμός είναι ένας ιστορικός αλγόριθμος του πολλαπλασιασμού που τον εφάρμοσαν πρώτα οι Έλληνες με τον Ευτόκιο γύρω στον 5<sup>ο</sup> αιώνα μ.Χ. Ο αλγόριθμος αυτός του πολλαπλασιασμού εκτός από την ιστορική του σημασία είναι πολύ σημαντικός και διδακτικά. Ο ελληνικός πολλαπλασιασμός αναφέρεται περισσότερο σε υπολογισμό επιφανειών, σύμφωνα με την Ευκλείδεια παράδοση και πραγματοποιείται με τη βοήθεια ενός πίνακα στον οποίο οι αριθμοί που θα πολλαπλασιαστούν αναλύονται σε δεκάδες και μονάδες (Λεμονίδης, Χ., Νικολαντωνάκης, Κ., υπό δημοσίευση).

Από έρευνες σε μαθητές φάνηκε ότι ο Ελληνικός πολλαπλασιασμός είναι μια από τις μεθόδους πολλαπλασιασμού την οποία χρησιμοποιούν οι μαθητές χωρίς να την έχουν διδαχτεί (Baek, Jae Meen, 1998). Αυτό σημαίνει ότι αυτή η μέθοδος του πολλαπλασιασμού είναι συμβατή με τον τρόπο σκέψης των ανθρώπων. Ο Ελληνικός πολλαπλασιασμός είναι μια μέθοδος χρήσιμη για τη διδασκαλία γιατί αποκαλύπτει και εξηγεί στους μαθητές ιδιότητες του κλασικού αλγορίθμου του πολλαπλασιασμού που δεν είναι τόσο προφανείς για αυτούς.

Στη συνέχεια με βάση τον ελληνικό πολλαπλασιασμό παρουσιάζεται ο κλασικός αλγόριθμος του πολλαπλασιασμού που χρησιμοποιούμε σήμερα. Ο ελληνικός πολλαπλασιασμός χρησιμοποιείται βοηθητικά για να κατανοήσουν οι μαθητές τη δομή του σημερινού πολλαπλασιασμού και να μπορέσουν να ερμηνεύσουν πολλές από τις ιδιότητές του.

## **V. Επίλογος**

Πιστεύουμε ότι τα νέα βιβλία των μαθηματικών δημιουργούν ένα πλαίσιο για την αναβάθμιση και τον εκσυγχρονισμό των μαθηματικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Το εκπαιδευτικό υλικό που κατασκευάστηκε στα πλαίσια της λογικής “Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής” έγινε προσπάθεια να ανταποκρίνεται και να προάγει τις ικανότητες των Ελλήνων μαθητών. Γι’ αυτό το σκοπό εκτός από τη χρήση των σύγχρονων αποτελεσμάτων της έρευνας της διδακτικής των μαθηματικών και αποτελεσμάτων ερευνών που πραγματοποιήθηκαν στην Ελλάδα έγινε πολύχρονη πειραματική εφαρμογή των βιβλίων αυτών. Για δέκα χρόνια σχεδόν δοκιμάζονταν και προσαρμόζονταν στα δεδομένα των Ελληνικών σχολείων και μαθητών τα βιβλία των τριών πρώτων τάξεων του Δημοτικού Σχολείου.

Γνωρίζουμε ότι είναι πάρα πολλά τα θέματα που διαπραγματεύονται τα αναλυτικά προγράμματα και τα σχολικά εγχειρίδια και πολλές οι απόψεις που υπάρχουν για αυτά. Προφανώς θα υπάρχουν ατέλειες και παραλείψεις οι οποίες θα χρειάζονται συζήτηση και διόρθωση. Επίσης ένα εκπαιδευτικό υλικό ξεπερνιέται από το χρόνο και πρέπει να αλλάζει σε τακτά χρονικά διαστήματα.



Ωστόσο πιστεύουμε ότι δημιουργήθηκαν κάποιοι όροι για τη βελτίωση της εκπαιδευτικής διαδικασίας της εκπαίδευσης των μαθηματικών. Για να ολοκληρωθεί βεβαίως αυτή η αλλαγή μένει να γίνει πράξη μέσα στην αίθουσα της διδασκαλίας. Θα πρέπει δηλαδή να γίνει η επιμόρφωση και η προσαρμογή της διδακτικής δράσης των εκπαιδευτικών στα νέα δεδομένα.

### Βιβλιογραφικές αναφορές

Adalira S'Aenz-Ludlow and Norma Presmeg, (2006). Guest Editorial Semiotic Perspectives on Learning Mathematics and Communicating Mathematically. *Educational Studies in Mathematics*, 61: 1–10.

Baek Jae-Meen, (1998). Children's Invented Algorithms for Multidigit Multiplication Problems. In Loma J. Morrow and Margaret J. Kenney (Ed.), *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics*, 1998 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 151-60. Reston, Va.: NCTM.

Brissiaud R. (1989). *Comment les enfants apprennent à calculer. Au-delà de Piaget et de la théorie des ensembles*, Retz, Paris.

Brissiaud R. (1994). L'acquisition de connaissances numériques. In R. Ghiglione et J.-F. Richard (Ed.), *Cours de psychologie, 3. Champs et théories*, Dunod, Paris.

Bruner, J. (1985). Narrative and paradigmatic modes of thought. In E. Eisner (Ed.), *Learning and Teaching the Ways of Knowing*, University of Chicago Press, Chicago, IL, pp. 97–115.

Bruner, J. (1986). *Actual Minds, Possible Worlds*, Harvard University Press, Cambridge, MA.

Chapman Oliver, (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics*, 62: 211–230.

Cobb, P., & Bauersfeld, H. (1995). *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Cobb P., Boufi A., McClain K., Whitenack J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 261-265.

Contreras, J.N. and Martinez-Cruz, A.M. (2001). An investigation of preservice elementary teachers' solution processes to problematic story problems. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME Conference 2*, 289–296.

Dewey, J. (1956). *The child and the curriculum and the school and society*. Chicago & London, The university of Chicago press.

DfEE. (1999). *The National Numeracy Framework for Teaching Mathematics from Reception to Year 6*, DfEE, London.

Dufur- Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation. In C. Janvier (Ed.), *Problem of Representation in the teaching and learning of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Epstein, J. (1992). School and family partnerships. In M. C. Alkin (Ed.), *Encyclopedia of educational research* (6th ed., pp. 1139-151). New York: Macmillan.

Freudenthal, H. (1968). Why to Teach Mathematics so as to Be Useful.  
*Educational Studies in Mathematics, 1, 3-8.*

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Riedel-Kluwer.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Fuson, K. C. (1990). Conceptual structures for multiunit numbers: Implications for learning and teaching multidigit addition, subtraction, and place value. *Cognition and Instruction, 7, 343-403.*

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J., Murray, H., Human, P., Olivier, A., Carpenter, T., Fennema, E. (1997). Children's Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 28, No. 2, 130-162.

Gravemeijer, K.P.E. & J. Terwel. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies, 32(6), 777-796.*

Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction 7(4), 293-307.*

Hall, R., and Stevens, R. (1995). Making Spaces: a Comparison of Mathematical Work in School and Professional Design Practices. In S. L. Star (Ed.), *The Cultures of Computing* (pp. 118-143). London: Basil Blackwell.

Hatano G. (1982). Learning to add and subtract: a Japanese prospective, In Cerpanter T.P., Moser J. M., Romberg T.-A.(Eds), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, pp. 211-223, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Henderson, A. T., Marburger, C. L., & Ooms, T. (1986). *Beyond the bake sale: An educator's guide to working with parents*. Columbia, MD: The National Committee for Citizens in Education.

Henry, M. (1996). *Parent-school collaboration: Feminist organizational structures and school leadership*. Albany: State University of New York Press.

Heystek, J. (2003). Parents as governors and partners in schools. *Education and Urban Society*, 35,328-315.

Hoover-Dempsey, K. V., Bassler, O. C., & Burrow, R. (1987). Parent involvement: Contributions of teacher efficacy, school socioeconomic status, and other school characteristics. *American Educational Research Journal*, 24, 417-425.

Hoyles, C., Noss R., and Pozzi, S. (2001). Proportional Reasoning in Nursing Practice. *Journal of Research in Mathematics Education* 2001, Vol.32, No. 1, -27.

Kaput, J.J. (1987). Representation System in Mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp.19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Isaacs, A. C., Carroll, W. M., & Bell, M. (1998). A research-based curriculum: The research foundations of the UCSMP Everyday Mathematics curriculum. Chicago: UCSMP. [Available online at <http://everydaymath.uchicago.edu/educators/references.shtml>.]

Lakatos I. (1996). *Αποδείξεις και ανασκευές*, Τροχαλία, Αθήνα.

Lave, J. (1977), Cognitive consequences of traditional apprenticeship training in West Africa. *Anthropology and Education Quarterly*, 8,177-180.

Lemonidis Ch. (2003). L'enseignement des premières notions arithmétiques selon l'analyse des différentes représentations des quantités. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 9, (partie 2) des actes du colloque Argentoratum 2002, 103-117, IREM de Strasbourg.

Λεμονίδης, Χ. (2001). Οι αρχικές αριθμητικές ικανότητες των παιδιών όταν έρχονται στο Δημοτικό Σχολείο. *ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Γ'*. Τεύχος 55 σσ. 5-21.

Λεμονίδης Χ., Χατζηλιαμή Μ. (2002). Έρευνα στις γνώσεις των νηπίων σχετικά με τις αριθμητικές έννοιες. Στο Ε. Κούρτη. *Η έρευνα στην προσχολική εκπαίδευση. Τόμος Β'*. 153-167. Αθήνα: Τυπωθήτω- Γιώργος Δάρδανος.

Λεμονίδης, Χ., (1998α). Διδασκαλία των πρώτων αριθμητικών εννοιών. *Ερευνητική διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*. Περιοδική έκδοση του Παραρτήματος Κεντρικής Μακεδονίας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. τ. 3 σσ. 87-122.

Λεμονίδης, Χ., (1998β). Διαδικασίες που χρησιμοποιούν οι μαθητές της Α' τάξης του Δημοτικού σε πράξεις και προβλήματα προσθετικού τύπου. Συμπεράσματα και προτάσεις για τη διδασκαλία. *Πρακτικά 1<sup>ης</sup> Διημερίδας του Πανεπιστημίου Κρήτης στη Διδακτική των Μαθηματικών*. σσ. 161-174.

Λεμονίδης, Χ. (2003α). *Μια νέα πρόταση διδασκαλίας των Μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου*. Εκδόσεις Πατάκη. Αθήνα.

Λεμονίδης, Χ. (2003β). Η διδασκαλία του συστήματος αρίθμησης στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου. *Πρακτικά 3<sup>ης</sup> Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*. Πανεπιστήμιο Κρήτης, Π.Τ.Δ.Ε. Ρεθύμνου, σελ. 189-198.

Λεμονίδης, Χ. (2003γ). Μια διαφορετική διδασκαλία των αριθμών και των πράξεων στην αρχή του σχολείου. *"Γέφυρες"*. Τεύχος 9, σελ. 22-29.

Λεμονίδης, Χ. (2003δ). Η αναπαράσταση των ποσοτήτων στις αριθμητικές έννοιες και η ικανότητα των υποψηφίων δασκάλων να τις χειριστούν. Επιστημονική επετηρίδα της Ψυχολογικής Εταιρείας Βορείου Ελλάδος, τόμος 1, σελ. 291-308. Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα.

Λεμονίδης, Χ. (2003ε). Η εισαγωγή των πράξεων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης στο Δημοτικό: μια πειραματική εφαρμογή. *Περιοδικό «Μέντορας»*, τεύχος 7, σελ. 34-48, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Λεμονίδης, Χ., Νικολαντωνάκης, Κ. (2008). Ελληνικός πολλαπλασιασμός: Ένας άγνωστος ιστορικός αλγόριθμος κατάλληλος για τη διδασκαλία. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, (υπό δημοσίευση).

Λεμονίδης, Χ., Παυλίδης, Α. (2003). Διδασκαλία και μάθηση της γραπτής διαίρεσης στο δημοτικό σχολείο. Συμπεριφορές μαθητών και απόψεις δασκάλων. *Πρακτικά 3<sup>ης</sup>*

*Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*. Επιμέλεια Μ. Κούρκουλος, Κ. Τσανάκης, Γ. Τρούλης. Π.Τ.Δ.Ε. Ρεθύμνου, σελ. 58 – 66.

Λεμονίδης Χ., Χατζηλιαμή Μ. (2005). Τα λειτουργικά χαρακτηριστικά της οικογένειας και οι αριθμητικές γνώσεις των νηπίων. *Πρακτικά 4<sup>ης</sup> Διεθνούς Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*. Πανεπιστήμιο Κρήτης, Π.Τ.Δ.Ε. Ρεθύμνου, σελ. 83-92.

Λεμονίδης Χ., Χατζηλιαμή Μ., Κυρίδης Α. (2002). Η επίδραση του οικογενειακού περιβάλλοντος στις αριθμητικές γνώσεις των νηπίων. *Παιδαγωγική Επιθεώρηση, τεύχος 34, σελ. 121-139*, Ατραπός.

Lemonidis Ch. (2005). Les mathématiques de la nature et de la vie: une conception pour l'enseignement des mathématiques. Présentation d'un exemple extrait de la formation des enseignants. Colloque COPIRELEM 30, 31- Mai, Strasbourg 2005.

Lemonidis, Ch., Theodorou, Eut., (2006). The development of prospective teachers. ideas in designing lesson plans in Mathematics. 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level (*ICTM 3*). June 30 – July 5, 2006, Istanbul, Turkey. (Paper no 326).

McIntosh, A. (1990). Becoming numerate: developing number sense. In S. Willis (ed.), *Being Numerate: What Counts?* pp. 24-43. Hawthorn, Victoria: ACER (Australian, Council for Educational Research).

Millroy, W. L. (1992). An Ethnographic Study of the Mathematical Ideas of a Group of Carpenters. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph 5*.

Moll, L. C. (1992). Bilingual classroom studies and community analysis: Some recent trends. *Educational Researcher*, 20, 20-24.

Μπούφη Α. (1995α). Αρχικές αντιλήψεις των παιδιών της πρώτης δημοτικού για τον αριθμό: Διδακτικές συνέπειες. *Ευκλείδης Γ'*, 42, 17-39, ΕΜΕ, Αθήνα.

Μπούφη Α. (1995β). Δυνατότητες ανάπτυξης της παιδικής μαθηματικής σκέψης στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου. *Ερευνώντας τον κόσμο του παιδιού 1*, 28-35, Ο.Μ.Ε.Ρ.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for school mathematics. Reston, VA: The Council.

Nunes, T., Schliemann, A., & Carraher, D. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Payne J.-N., Huinker D.-M. (1993). Early number and numeration. In Jensen R. C. (ed.) *Research ideas for the classroom*, Early childhood Mathematics, pp. 43-71, Macmillan, New York.

Piaget J., Szeminska A. (1941). *La genèse du nombre chez l'enfant*, Delachaux et Niestlé, Neuchâtel-Paris, (septième édition 1991).

Polya G. (1991). *Πώς να το λύσω*, μτφρ. Ψυακκή Ξ., επιμ. Πατρώνης Τ., Καρδαμίτσας, Αθήνα.

Resnick L. -B. (1983). A development theory of number understanding, in: Ginsburg H.-P.(ed) (1983), *The development of mathematical thinking*, Academic Press, New York.

Roschelle, J. (1996). Guest editor's introduction. *Journal of Learning Sciences*, 5, 169–171.

Saxe, G. B. (1991). *Culture and cognitive development: Studies in mathematical understanding*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sowder, J. T. (1990). Mental computation and number sense. *Arithmetic Teacher*, 37(7), 18–20.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – the Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Thompson, I. (1999). Written methods of calculation. In I. Thompson (Ed.), *Issues in Teaching Numeracy in Primary Schools*, Open University Press, Buckingham, pp. 169–183.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). *Assessment and realistic mathematics education*. Utrecht: CD-β Press / Freudenthal Institute, Utrecht University.

Verschaffel, L. (2002). Taking the modeling perspective seriously at the elementary level: Promises and pitfalls. In A.D. Cockburn and E. Nardi (Ed.), *Proceedings of the PME 26*, University of East Anglia, Norwich, 1, 64–80.

Verschaffel, L., De Corte, E. and Borghart, I. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modeling of school word problems. *Learning and Instruction* 4, 339–359.

Vygotsky, L. S., (1993). *Σκέψη και Γλώσσα*, μετάφραση Αντζελίνα Ρόδη, Αθήνα, Γνώση.

Wertsch, J. (1985). *Vygotsky and the social formation of mind*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wenfán, Y., and Qiuyun, L. (2005). Parent Involvement and Mathematics Achievement: Contrast Across Racial and Ethnic Groups. *The Journal of Educational Research*. Vol. 99 (No. 2).