

Λεμονίδης, Χ. (2015). Παρουσίαση, ανάλυση και σύγκριση του ισχύοντος και δύο σύγχρονων Προγραμμάτων Σπουδών της Γεωμετρίας. Προσκεκλημένη ομιλία στο 13<sup>ο</sup> Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Χώρος και Γεωμετρία στην προσχολική και σχολική εκπαίδευση. 8-9 Μαΐου, Θεσ/νικη.

## **Παρουσίαση, ανάλυση και σύγκριση του ισχύοντος και δύο σύγχρονων Προγραμμάτων Σπουδών της Γεωμετρίας**

*Χαράλαμπος Λεμονίδης*

### **Περίληψη**

Βασικός στόχος της εργασίας αυτής είναι να παρουσιαστούν οι αλλαγές στα περιεχόμενα και τη διδασκαλία στα προγράμματα σπουδών της γεωμετρίας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Για να φανούν οι αλλαγές αυτές θα παρουσιάσουμε και θα συγκρίνουμε τη δομή και τη λογική του σημερινού προγράμματος σπουδών Δ.Ε.Π.Π.Σ (2003) και δύο σύγχρονων προγραμμάτων σπουδών της γεωμετρίας: α) το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (ΝΠΣ) (2011) στην Ελλάδα και β) το πρόγραμμα Common Core State Standards for mathematics (CCSS) των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής. Με βάση την ανάλυση και τη σύγκριση των προγραμμάτων σπουδών φαίνεται ότι γίνεται σημαντικός εμπλουτισμός των περιεχομένων της γεωμετρίας όπως π.χ. περισσότεροι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί γίνεται επίσης και σημαντική αλλαγή στην οργάνωση και παρουσίαση των περιεχομένων της γεωμετρίας με την εισαγωγή της νέας έννοιας “της τροχιάς μάθησης”. Τα δύο σύγχρονα προγράμματα: Το νέο ελληνικό πιλοτικό πρόγραμμα (ΝΠΣ) του 2011 και το Αμερικανικό CCSS χρησιμοποιούν τη λογική της τροχιάς μάθησης αν και υπάρχουν διαφορές στις τροχιές που προτείνονται από αυτά τα δύο προγράμματα.

### **1. Εισαγωγή**

Μέσα από τα περιεχόμενα των προγραμμάτων σπουδών της γεωμετρίας στο δημοτικό σχολείο οι μαθητές συνήθως εισάγονται σε έννοιες των γεωμετρικών σχημάτων και του χώρου οι οποίες αναπτύσσονται εξελικτικά από τις μικρότερες προς τις μεγαλύτερες τάξεις. Στο ισχύον πρόγραμμα σπουδών της γεωμετρίας οι μαθητές, του νηπιαγωγείου και της Α' τάξης του δημοτικού, εισάγονται στις έννοιες των γεωμετρικών σχημάτων, του μετασχηματισμού της αξονικής συμμετρίας και των εννοιών του χώρου οι οποίες παρουσιάζονται εξελικτικά στις μεγαλύτερες τάξεις με βάση τη θεωρία των Van-Hiele η οποία μένει υπονοούμενη και δεν γίνεται φανερή.

#### *1.1. Τα επίπεδα Van Hiele στο Ισχύον Πρόγραμμα Σπουδών*

Σύμφωνα με την θεωρία των Van Hiele, οι συλλογιστικές διεργασίες που χρησιμοποιεί το άτομο για την μελέτη των γεωμετρικών αντικειμένων μπορούν να αντιστοιχηθούν, ανάλογα με το βαθμό πολυπλοκότητας και αφαιρετικότητας που παρουσιάζουν, σε πέντε, ιεραρχικά διατεταγμένα, επίπεδα γεωμετρικής σκέψης. Η

γεωμετρική σκέψη στο δημοτικό σχολείο αντιστοιχεί στα τρία πρώτα από τα πέντε αυτά επίπεδα τα οποία είναι τα ακόλουθα:

**Επίπεδο 0 (Αναγνώριση):** Στο επίπεδο αυτό το παιδί γνωρίζει το χώρο ως κάτι που υπάρχει γύρω του και αντιλαμβάνεται τις γεωμετρικές μορφές ως ενιαίες οντότητες. Τα παιδιά, δηλαδή, αναγνωρίζουν τα γεωμετρικά σχήματα από τις μορφές τους όχι από τις ιδιότητες τους. Για παράδειγμα ένα παιδί σε αυτό το επίπεδο σκέψης δεν θα μπορούσε να αντιληφθεί ένα τετράγωνο ως ρόμβο, ή ένα ρόμβο ως πλάγιο παραλληλόγραμμο, παρόλο που μπορεί να αναγνωρίζει και να σχεδιάζει και τα τρία σχήματα. Οι μαθητές που βρίσκονται σε αυτό το επίπεδο μπορούν να μάθουν τη γεωμετρική ορολογία που είναι συνυφασμένη με γεωμετρικά σχήματα και να τα αναπαράγουν σχεδιάζοντας τα ή κατασκευάζοντας τα με πρόχειρα υλικά.

**Επίπεδο 1 (Ανάλυση):** Οι μαθητές που βρίσκονται στο επίπεδο της ανάλυσης μπορούν να διακρίνουν τα χαρακτηριστικά των σχημάτων και να τα ταξινομούν ανάλογα με τις ιδιότητες τους. Όταν, για παράδειγμα, δοθούν στους μαθητές ορθογώνια σχήματα, μπορούν να παρατηρήσουν ότι αυτά έχουν όλες τις γωνίες ορθές και τις απέναντι πλευρές ίσες. Παρ' όλα αυτά οι μαθητές δεν μπορούν ακόμα να αντιληφθούν τις σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες των σχημάτων και να δουν τις σχέσεις ανάμεσα στα σχήματα.

**Επίπεδο 2 (Άτυπη Αφαίρεση).**

Εδώ οι μαθητές μπορούν να αντιληφθούν πλήρως:

1. τις σχέσεις που υπάρχουν μέσα στο ίδιο το σχήμα. Π.χ. για να είναι οι απέναντι πλευρές ενός τετραπλεύρου παράλληλες πρέπει οι απέναντι γωνίες να είναι ίσες.
2. τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των σχημάτων. Π.χ. ένα τετράγωνο είναι και παραλληλόγραμμο και ορθογώνιο.

Σε αυτό δηλαδή το επίπεδο οι μαθητές αναπτύσσουν τη έννοια του εγκλεισμού και αναγνωρίζουν τάξεις σχημάτων. Παράλληλα, αρχίζουν να αντιλαμβάνονται τους ορισμούς, αλλά δεν κατανοούν τη σημασία της παραγωγικής σκέψης.

Κάθε επίπεδο χαρακτηρίζεται από συγκεκριμένο τρόπο σκέψης και συγκεκριμένους τύπους γεωμετρικών ιδεών που μπορούν να υποστούν νοητική επεξεργασία. Καθώς το άτομο περνά από ένα επίπεδο σκέψης σε άλλο αλλάζει το αντικείμενο των γεωμετρικών συλλογισμών καθώς και τα αποτελέσματα της σκέψης του. Το ζητούμενο για τους μαθητές του δημοτικού σχολείου είναι να περάσουν από το επίπεδο 0, της απλής αναγνώρισης, στο επίπεδο 1, της ανάλυσης, ή 2, της άτυπης αφαίρεσης. Κατά τη μετάβαση αυτή βελτιώνεται η χωρική αντίληψη, η κατανόηση και αναγνώριση των σχημάτων, η δυνατότητα περιγραφής του χώρου αξιοποιώντας γνωστά ονόματα σχημάτων και έννοιες ισότητας και ομοιότητας καθώς και η διαδικασία της μέτρησης (μήκη, εμβαδά, όγκοι, γωνίες).

Αυτό που χαρακτηρίζει τη θεωρία των van Hiele είναι το γεγονός ότι τα επίπεδα έχουν καθορισμένη διαδοχική σειρά. Αυτό προϋποθέτει ότι το παιδί για να μεταβεί σε ανώτερα επίπεδα θα πρέπει οπωσδήποτε να έχει περάσει από όλα τα προηγούμενα. Δηλαδή δεν νοούνται «άλματα» σε μη διαδοχικά επίπεδα. Συνεπώς, όταν ένα παιδί μπαίνει σε ένα επίπεδο αφήνει πίσω του για πάντα ένα άλλο. Επιπλέον, η κατάταξη σε κάποιο επίπεδο εξαρτάται από τις γεωμετρικές εμπειρίες του ατόμου και όχι από την ηλικία του (Van Hiele, & van Hiele-Geldof, 1958).

Αυτό που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι μελετώντας τις προτάσεις του ισχύοντος προγράμματος ανά τάξη, αντιλαμβάνεται κανείς ότι ο τρόπος που είναι δομημένο δε δίνει τη δυνατότητα στο δάσκαλο να έχει μία συνολική θέαση της εξέλιξης των περιεχομένων που διαπραγματεύεται κάθε τάξη. Δε γίνεται, δηλαδή, εμφανής η εξελικτική ανάπτυξη των περιεχομένων και η σύνδεσή τους οριζόντια μεταξύ των τάξεων.

## *1.2. Τροχιά μάθησης ή Τροχιά Μάθησης Διδασκαλίας*

Μια από τις βασικές θεωρητικές έννοιες στη Διδακτική των μαθηματικών που χρησιμοποιούνται για να συνδεθεί η θεωρία με την πράξη είναι αυτή των τροχιών μάθησης (learning trajectories) ή των Τροχιών Μάθησης Διδασκαλίας (ΤΜΔ). Στις τροχιές μάθησης περιγράφεται αφενός μια υποθετική πορεία ανάπτυξης της κατανόησης και της μάθησης του παιδιού σε συγκεκριμένους μαθηματικούς στόχους αλλά και αφετέρου προτείνονται διδακτικά έργα που σχεδιάστηκαν για να προκαλέσουν αυτήν την ανάπτυξη. Οι τροχιές μάθησης είναι μια σύγχρονη έννοια που χρησιμοποιείται για το σχεδιασμό πιο συναφών και διδακτικά χρήσιμων προτύπων, προγραμμάτων σπουδών, αξιολογήσεων και προσεγγίσεων για την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών στο διεθνή χώρο (π.χ. Clements, & Sarama, 2009; Confrey, et al. 2011; Daro, et al. 2011; Sztajn, et al. 2012).

Οι Corcoran, Mosher, and Rogat (2009, σελ. 8) τονίζουν ότι οι τάξεις που παρουσιάζονται στις τροχιές μάθησης βασίζονται σε έρευνες σχετικά με το πως η μάθηση των σπουδαστών εξελίσσεται στην πραγματικότητα σε αντίθεση με τη συνήθη προσοχή που δίνεται στη γνώση του περιεχομένου. Αυτοί δηλαδή διαχωρίζουν τη λογική του ατόμου που μαθαίνει από τη λογική του περιεχομένου.

Οι Clements and Sarama (2004) δίνουν τον παρακάτω ορισμό για τις τροχιές μάθησης:

*“Είναι οι περιγραφές της σκέψης και της μάθησης των παιδιών σε ένα συγκεκριμένο μαθηματικό τομέα, και μια σχετική εικαζόμενη διαδρομή διαμέσου ενός συνόλου διδακτικών έργων που έχουν σχεδιαστεί για να προκαλέσουν αυτές τις διανοητικές διαδικασίες ή ενέργειες. Αυτές υποθέτονται για να μετακινήσουν τα παιδιά διαμέσου μιας αναπτυξιακής εξέλιξης επιπέδων της σκέψης, που δημιουργήθηκε με πρόθεση την υποστήριξη των επιδόσεων των παιδιών σε συγκεκριμένους στόχους αυτού του μαθηματικού τομέα”.* (σελ.83)

Οι Clements & Sarama (2009) σημειώνουν ότι: “Οι τροχιές μάθησης έχουν τρία μέρη: α) ένα μαθηματικό στόχο, β) μια αναπτυξιακή διαδρομή κατά μήκος της οποίας τα παιδιά αναπτύσσονται για να φτάσουν αυτόν τον στόχο, και γ) ένα σύνολο από διδακτικές δραστηριότητες, ή έργα, που ταιριάζουν με καθένα από τα επίπεδα της σκέψης σε αυτήν την διαδρομή και βοηθούν τα παιδιά να αναπτύσσονται προς όλο και υψηλότερα επίπεδα σκέψης.” (σελ. 3)

Οι Clements & Sarama (2009, σελ. 3-4) αναλύουν και προσδιορίζουν περισσότερο αυτά τα τρία μέρη όπως παρουσιάζονται παρακάτω:

*Στόχοι: Οι Μεγάλες Ιδέες των Μαθηματικών*

Όπως αναφέρουν και παραπάνω οι συγγραφείς αυτοί το πρώτο μέρος μιας τροχιάς μάθησης είναι ο μαθηματικός στόχος. Αυτοί οι στόχοι που αναφέρουν οι συγγραφείς λένε ότι είναι οι μεγάλες ιδέες των μαθηματικών, δηλαδή συστάδες εννοιών και δεξιοτήτων που είναι μαθηματικά κεντρικές και συνεκτικές σύμφωνες με τη σκέψη του παιδιού και γενεσιουργοί μελλοντικής μάθησης. Οι Clements & Sarama λένε ότι αυτές οι μεγάλες ιδέες προέρχονται από διάφορα προγράμματα όπως αυτά του National Council of Teachers of Mathematics και το National Math Panel (NCTM, 2006; NMP, 2008). Αναφέρουν για παράδειγμα, ως μια μεγάλη ιδέα την εξής: *Σύνθεση και ανάλυση δυσδιάστατων σχημάτων και τρισδιάστατων στερεών*. Τα επίπεδα σχήματα και τα στερεά σώματα μπορούν να συντεθούν και να αναλυθούν σε άλλα δυσδιάστατα σχήματα και τρισδιάστατα σώματα αντίστοιχα.

*Ανάπτυξη των προόδων: Οι Διαδρομές της Μάθησης*

Το δεύτερο μέρος στις διαδρομές μάθησης αποτελείται από επίπεδα σκέψης το ένα πιο εξελιγμένο από το άλλο. Δηλαδή, η αναπτυξιακή εξέλιξη περιγράφει μια τυπική διαδρομή που ακολουθούν τα παιδιά στην ανάπτυξη της κατανόησης και των ικανοτήτων σχετικά με αυτό το μαθηματικό περιεχόμενο.

*Διδακτικά έργα: Οι Διαδρομές της Διδασκαλίας*

Το τρίτο μέρος μιας διαδρομής μάθησης αποτελείται από ένα σύνολο διδακτικών έργων που αντιστοιχούν σε κάθε ένα από τα επίπεδα σκέψης της αναπτυξιακής εξέλιξης. Αυτά τα έργα έχουν σχεδιαστεί για να βοηθήσουν τα παιδιά να μάθουν τις ιδέες και τις ικανότητες που χρειάζονται για να ολοκληρώσουν αυτό το επίπεδο σκέψης. Δηλαδή, οι εκπαιδευτικοί, μπορούν να χρησιμοποιήσουν αυτά τα έργα για να προάγουν την ανάπτυξη των παιδιών από το ένα επίπεδο στο άλλο.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τα τρία προγράμματα σπουδών της γεωμετρίας που εξετάζουμε στην εργασία αυτή.

## **2. Παρουσίαση των περιεχομένων των τριών προγραμμάτων**

### **2.1. Το Ισχύον Πρόγραμμα Σπουδών (ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ)**

Σύμφωνα με τη φιλοσοφία του ισχύοντος Διαθεματικού Ενιαίου Πλαισίου Προγράμματος Σπουδών Δ.Ε.Π.Π.Σ (2003) για τα Μαθηματικά το συνολικό γνωστικό περιεχόμενο που πρέπει να διδαχθεί χωρίζεται σε επιμέρους κατηγορίες περιεχομένων που διατρέχουν όλες τις τάξεις. Μια από τις κατηγορίες αυτές είναι η γεωμετρία. Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) για τα Μαθηματικά περιγράφονται για κάθε τάξη και για κάθε κατηγορία περιεχομένου οι επιμέρους στόχοι, ο ενδεικτικός χρόνος καθώς και ενδεικτικές δραστηριότητες.

Πιο συγκεκριμένα στη γεωμετρία για κάθε τάξη προτείνεται τα εξής:

*A' τάξη:* Διακρίνουν δυσδιάστατα σχήματα: τρίγωνο, τετράγωνο, ορθογώνιο, κύκλο και στερεά σώματα: τριγωνική πυραμίδα, κύβο, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, κύλινδρο, σφαίρα. Χαράζουν ευθύγραμμα τμήματα με το χάρακα, ενώνοντας τα άκρα τους (δύο σημεία). Ανακατασκευάζουν απλά πάζλ. Τοποθετούν, εντοπίζουν και μετατοπίζουν αντικείμενα σε σχέση με τους ίδιους ή σε σχέση με σταθερά σημεία αναφοράς. Παρατηρούν εικόνες και σχήματα συμμετρικά ως προς άξονα.

*B' τάξη:* Αναγνωρίζουν και ορίζουν σημεία, σχεδιάζουν ευθύγραμμα τμήματα και ευθείες σε λευκό και τετραγωνισμένο χαρτί. Μετρούν και συγκρίνουν ευθύγραμμα τμήματα με συμβατικές μονάδες μετρήσεων. Αναγνωρίζουν εμπειρικά τις παράλληλες και κάθετες ευθείες. Αναγνωρίζουν τα γεωμετρικά σχήματα: τον κύκλο, το τετράγωνο, το ορθογώνιο, το τρίγωνο. Εξετάζουν τα χαρακτηριστικά των γεωμετρικών σχημάτων με τη χρήση των οργάνων. Διακρίνουν τα γεωμετρικά στερεά: την πυραμίδα, τον κύβο, το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τη σφαίρα, τον κύλινδρο. Σχεδιάζουν σχήματα με το χάρακα σε λευκό και σε τετραγωνισμένο χαρτί και αναπαράγουν σχήματα. Παρατηρούν αν ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας.

*Γ' τάξη:* Σχεδιάζουν γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια οργάνων. Αναπαράγουν, περιγράφουν και σχεδιάζουν ορισμένα συνήθη επίπεδα γεωμετρικά σχήματα (ορθογώνιο, τετράγωνο). Περιγράφουν και αναπαριστούν ορισμένα συνήθη γεωμετρικά στερεά (κύβος, σφαίρα). Αναπαράγουν τα αναπτύγματα του κύβου, του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, της τετραγωνικής πυραμίδας. Χαράζουν κάθετες με τη βοήθεια οργάνων. Αντιλαμβάνονται την έννοια της ορθής γωνίας. Κατασκευάζουν το συμμετρικό ενός επίπεδου σχήματος ως προς άξονα συμμετρίας.

*Δ' τάξη:* Σχεδιάζουν γεωμετρικά σχήματα και στερεά με τη βοήθεια οργάνων. Κατανοούν διαισθητικά την έννοια του εμβαδού. Υπολογίζουν και συγκρίνουν περιμέτρους επίπεδων σχημάτων. Περιγράφουν και αναπαριστούν συνήθη γεωμετρικά στερεά. Αναπαράγουν τα αναπτύγματα ορισμένων στερεών. Περιγράφουν και σχεδιάζουν τα συνήθη επίπεδα γεωμετρικά σχήματα. Σχεδιάζουν τεμνόμενες, παράλληλες και κάθετες ευθείες με τη βοήθεια οργάνων. Σχεδιάζουν την απόσταση σημείου από ευθεία και την απόσταση δύο παράλληλων ευθειών. Σχεδιάζουν το συμμετρικό ενός επίπεδου σχήματος ως προς άξονα συμμετρίας. Διενεργούν μεταφορά ενός σχήματος στο τετραγωνισμένο χαρτί κατά δοθέν ευθύγραμμο τμήμα.

*Ε' τάξη:* Χαράζουν γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια οργάνων. Αναγνωρίζουν σχήματα που είναι μέρη ενός σύνθετου σχήματος. Υπολογίζουν τα εμβαδά του τετραγώνου, του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου και του ορθογώνιου τριγώνου. Συγκρίνουν εμβαδά. Κατανοούν ότι η έννοια του εμβαδού είναι διαφορετική από την έννοια της περιμέτρου επιλύοντας προβλήματα, στα οποία γνωρίζουν τη μία από τις δύο έννοιες και ζητείτε η άλλη. Υπολογίζουν το μήκος ενός κύκλου. Διακρίνουν τα είδη των γωνιών (ορθή, οξεία, αμβλεία). Συγκρίνουν και σχηματίζουν γωνίες. Διακρίνουν τα είδη τριγώνων και τις ιδιότητές τους. Εφαρμόζουν τις συνήθεις τεχνικές χάραξης των υψών ενός τριγώνου. Διενεργούν μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις, σε χαρτί μιλιμετρέ απλών ευθύγραμμων σχημάτων. Κατασκευάζουν το συμμετρικό ενός σχήματος ως προς άξονα σε τετραγωνισμένο χαρτί.

*Στ' τάξη:* Αναγνωρίζουν σχήματα σε ένα σύνθετο περιβάλλον και χαράζουν γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια οργάνων. Χρησιμοποιούν τους τύπους που επιτρέπουν τον υπολογισμό των εμβαδών του τριγώνου, του παραλληλόγραμμου και

του τραapeζίου. Υπολογίζουν τα εμβαδά του τριγώνου, του παραλληλόγραμμου, του τραapeζίου και του κύκλου και επιλύουν σχετικά προβλήματα. Υπολογίζουν τους όγκους και τα εμβαδά παράπλευρης και ολικής επιφάνειας του κύβου, του ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου και του κυλίνδρου και λύνουν συνδυαστικά προβλήματα εμβαδών και όγκων. Αξιοποιούν δεδομένα από όγκους και εμβαδά για να κατασκευάζουν τα αναπτύγματα του κύβου, του κυλίνδρου και του ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου. Αναπαράγουν, σχεδιάζουν και συγκρίνουν γωνίες. Διενεργούν μεταφορές, μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις σε μιλιμετρέ χαρτί απλών ευθύγραμμων σχημάτων. Σχεδιάζουν το συμμετρικό ενός σχήματος ως προς άξονα.

Επιπλέον στο ισχύον ΑΠΣ προτείνονται διαθεματικά σχέδια εργασίας για τη γεωμετρία όπως: η συμμετρία στη ζωή μας, κατασκευή πυραμίδας, μοτίβα στη ζωή μας κ.ά.

Ωστόσο, μελετώντας λεπτομερώς τις προτάσεις ανά τάξη, για το περιεχόμενο της γεωμετρίας, γίνεται εμφανές ότι ακολουθούν τη λογική των ιεραρχικά διατεταγμένων επιπέδων Van Hiele (0-2). Η γεωμετρία προσεγγίζεται με μη τυπικό τρόπο, βασίζεται στις παραστάσεις των μαθητών οι οποίες με το πέρασμα των τάξεων, και τον εμπλουτισμό των γεωμετρικών εμπειριών τους, τείνουν να γίνονται πιο αφαιρετικές (από το σχήμα – στο σημείο – ευθεία). Προς αυτή την κατεύθυνση, παρατηρούμε ότι προτείνονται παιγνιώδεις μαθητοκεντρικές δραστηριότητες (παζλ, τάγκραμ, μωσαϊκά) που εξοικειώνουν τους μαθητές με τα σχήματα και τις ιδιότητές τους, με την κατασκευή – σχεδιασμό τους, με τους μετασχηματισμούς που μπορούν να υποστούν κ.ά. Αυτό που διαπιστώνεται, επίσης, είναι ότι τα θέματα που συναρτούν το περιεχόμενο της γεωμετρίας (π.χ. χώρος, γεωμετρικά σχήματα, μετασχηματισμοί, συμμετρία κ.ά.) παρουσιάζονται όλα μαζί χωρίς καμία κατηγοριοποίηση.

## **2.2. Το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (ΝΠΣ) του 2011**

Τα Νέα Προγράμματα Σπουδών Υποχρεωτικής εκπαίδευσης εκπονήθηκαν, στο πλαίσιο υλοποίησης της Πράξης (Νέο Σχολείο, Σχολείο 21ου αιώνα) κατά το σχολικό έτος 2011-12. Εφαρμόστηκαν στην πράξη μόνο πιλοτικά και δεν συμπεριλαμβάνουν σχολικά βιβλία.

Για πρώτη φορά στα Ελληνικά προγράμματα γίνεται διάκριση μεταξύ ηλικιακών κύκλων και όχι απλά των τάξεων του σχολείου. Έτσι διαχωρίζονται τρεις ηλικιακοί κύκλοι: 1<sup>ος</sup> ηλικιακός κύκλος συμπεριλαμβάνει παιδιά από 5 έως 8 χρόνων δηλαδή τις τάξεις από Νήπια έως και Β' τάξη του Δημοτικού. 2<sup>ος</sup> ηλικιακός κύκλος (από 8 έως 12) δηλαδή από Γ' έως Στ' τάξη του Δημοτικού και 3<sup>ος</sup> ηλικιακός κύκλος (από 12 έως 15 χρόνων) που συμπεριλαμβάνει τις τρεις τάξεις του Γυμνασίου.

Το νέο Ελληνικό πρόγραμμα αρθρώνεται με βάση τέσσερις τροχιές: 1) Χώρος, 2) Γεωμετρικά σχήματα, 3) Μετασχηματισμοί και 4) Οπτικοποίηση, τις οποίες παρουσιάζουμε σύντομα παρακάτω με βάση τους ηλικιακούς κύκλους.

### **1. Τροχιά του Χώρου**

Αφορά σε δύο θέματα: στις Θέσεις διευθύνσεις, διαδρομές σε χάρτες όπως και στη Δόμηση χώρου, επικαλύψεις και συντεταγμένες.

*Θέμα 1: Θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές σε χάρτες:* αναφέρεται στον εντοπισμό, περιγραφή και αναπαράσταση θέσεων, διευθύνσεων και διαδρομών, αρχικά στο χώρο και μεταγενέστερα σε χάρτες.

1<sup>ος</sup> Ηλικιακός κύκλος: Συστηματοποιούν τις χωρικές εμπειρίες με την αξιοποίηση διαφορετικών συστημάτων αναφοράς, κάνουν χρήση χωρικών εννοιών και έχουν μια πρώτη επαφή με οικείους χάρτες.

2<sup>ος</sup> Ηλικιακός κύκλος: Συστηματοποιούν την αναγνώριση, περιγραφή θέσεων, σχέσεων και διαδρομών σε χάρτες και οδηγούνται στην προσέγγιση της κλίμακας και της κατασκευής τους.

*Θέμα 2: Δόμηση χώρου, επικαλύψεις και συντεταγμένες:* αναφέρεται στις επικαλύψεις του επιπέδου με διάφορα σχήματα και ουσιαστικά στην εξοικείωση και μελέτη του τετραγωνισμένου περιβάλλοντος που οδηγεί στις δισδιάστατες συντεταγμένες.

1<sup>ος</sup> Ηλικιακός κύκλος: αρχικά εντοπίζουν, περιγράφουν και αναπαριστούν θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές σε τετραγωνισμένα περιβάλλοντα και, στη συνέχεια, επιδιώκουν να εντοπίσουν τρόπους παράστασης και επικοινωνίας των καταστάσεων αυτών με τη χρήση αυθαίρετων συμβόλων όπως χρώματα, γράμματα και αριθμούς.

2<sup>ος</sup> Ηλικιακός κύκλος: συστηματοποιούν τη χρήση αριθμητικών ζευγών και, στη συνέχεια, διατεταγμένων ζευγών για την παράσταση θέσεων στο πρώτο τεταρτημόριο.

## **2. Τροχιά Γεωμετρικά Σχήματα**

Αφορά τέσσερα θέματα: *Ταξινόμηση και Ανάλυση σχημάτων σε στοιχεία και ιδιότητες, Κατασκευές σχημάτων και σχεδιασμός, Σύνδεση επιπέδων και στερεών σχημάτων, Ανάλυση ή σύνθεση επιπέδων και στερεών σχημάτων.*

*Θέμα 1: Ταξινόμηση και Ανάλυση σχημάτων σε στοιχεία και ιδιότητες*

1<sup>ος</sup> Ηλικιακός κύκλος: Ξεκινούν στις μικρότερες τάξεις με αναγνώριση, ονομασία και ταξινόμηση των σχημάτων (επίπεδων και στερεών) με βάση γεωμετρικά και μη χαρακτηριστικά και σε ποικιλία θέσεων, μεγεθών και προσανατολισμών, ενώ βαθμιαία αναγνωρίζουν βασικές ιδιότητες και σχέσεις.

2<sup>ος</sup> Ηλικιακός κύκλος: Διευρύνουν την αναγνώριση και στα στοιχεία των σχημάτων (σημεία, ευθείες, ημιευθείες, ευθύγραμμα τμήματα), καθώς και στις ιδιότητες (παράλληλες, κάθετες, ίσες, άνισες) και ταξινομούν τα σχήματα (τρίγωνα, τετράπλευρα, πολύγωνα και πολύεδρα) με βάση τις ιδιότητες όπως αριθμός πλευρών, σύγκριση γωνιών, μήκος πλευρών κ.λπ.

*Θέμα 2: Κατασκευές σχημάτων και σχεδιασμός*

1<sup>ος</sup> Ηλικιακός κύκλος: Ξεκινούν με απλές κατασκευές με χρήση χειραπτικών υλικών και απλές παραστάσεις.

2<sup>ος</sup> Ηλικιακός κύκλος: Περνούν σε απλούς σχεδιασμούς σε πραγματικό και ψηφιακό περιβάλλον, χρησιμοποιούν τα γεωμετρικά όργανα και σχεδιάζουν γεωμετρικά στοιχεία (ευθείες, ημιευθείες, κύκλους, κ.λπ.), καθώς και γεωμετρικά σχήματα.

*Θέμα 3: Σύνδεση επιπέδων και στερεών σχημάτων*

1<sup>ος</sup> Ηλικιακός κύκλος: Ξεκινούν να αναγνωρίζουν τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα ως έδρες στερεών και κάνουν απλές κατασκευές αναπτυγμάτων.

2<sup>ος</sup> Ηλικιακός κύκλος: Επεκτείνουν την αναγνώριση επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων ως έδρες στερεών, διερευνούν τις σχέσεις μεταξύ επίπεδων και στερεών γεωμετρικών σχημάτων (π.χ. τετραγώνου-κύβου, κύκλου-σφαίρας, κ.ά.) και γενικεύουν τη σύνδεση με όψεις και τομές, ενώ παράλληλα δημιουργούν και σχεδιάζουν αναπτύγματα στερεών (αρχικά κύβου και, στη συνέχεια, και άλλων στερεών).

*Θέμα 4: Ανάλυση ή σύνθεση επιπέδων και στερεών σχημάτων*

1<sup>ος</sup> Ηλικιακός κύκλος: Συνθέτουν και αναλύουν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και στερεά σε δύο ή περισσότερα μέρη (απλά παζλ αποτελούμενα από δύο ή τρία κομμάτια τάνγκραμ ή πεντόμινο) και σε πραγματικό ή ψηφιακό περιβάλλον προσεγγίζοντας ιδιότητες και σχέσεις.

2<sup>ος</sup> Ηλικιακός κύκλος: Αναλύουν και συνθέτουν επίπεδα και στερεά γεωμετρικά σχήματα σε πιο σύνθετες καταστάσεις αναγνωρίζοντας ιδιότητες και σχέσεις και συνδέοντας τες με τη μέτρηση επιφάνειας .

### **3. Τροχιά Μετασχηματισμών:**

Αφορά στις μετατοπίσεις, τις στροφές και τις συμμετρίες.

*Θέμα 1: Μετατοπίσεις, στροφές, συμμετρίες*

1<sup>ος</sup> Ηλικιακός κύκλος: Παρατηρούν μετατοπίσεις και στροφές (90, 180, 360 και 45 μοιρών) προβλέποντας το αποτέλεσμα, αναγνωρίζουν συμμετρικά σχήματα εντοπίζοντας τους άξονες συμμετρίας και κάνουν κατασκευές συμμετρικών καταστάσεων και σχημάτων σε πραγματικά και ψηφιακά περιβάλλοντα, προσεγγίζοντας τις ιδιότητες της συμμετρίας.

2<sup>ος</sup> Ηλικιακός κύκλος: Χρησιμοποιούν τους μετασχηματισμούς για σύγκριση σχημάτων και πραγματοποιούν κατασκευές με τη χρήση μετατοπίσεων και στροφών, κατασκευάζουν συμμετρικά σχήματα και σχήματα με άξονες συμμετρίας με οριζόντιους και κατακόρυφους άξονες και περιγράφουν τις ιδιότητες της αξονικής συμμετρίας.

### **4. Τροχιά Οπτικοποίησης**

Αφορά στην αναγνώριση και αναπαράσταση διαφορετικών οπτικών γωνιών αντικειμένων και καταστάσεων, καθώς και δημιουργία πραγματικών και νοερών αναπαραστάσεων για αντικείμενα και καταστάσεις.

1<sup>ος</sup> Ηλικιακός κύκλος: Ασκούνται στην αναγνώριση κατασκευών από διαφορετικές οπτικές γωνίες, στη σύνδεση 2Δ και 3Δ καταστάσεων, καθώς και στη δημιουργία



νοερών εικόνων και περιγραφών αλλά και πραγματικών παραστάσεων τρισδιάστατων καταστάσεων.

2<sup>ος</sup> Ηλικιακός κύκλος: Κάνουν κατασκευές από εικόνες, σχέδια και άλλες αναπαραστάσεις, αλλά σχεδιάζουν, επίσης, σε ισομετρικό χαρτί ή σε ψηφιακό περιβάλλον δοσμένες τρισδιάστατες κατασκευές.

Κλείνοντας πρέπει να σημειωθεί ότι σύμφωνα με τη φιλοσοφία του ΝΠΣ η διαχείριση του περιεχομένου δεν ακολουθεί γραμμική πορεία. Αντίθετα οι δραστηριότητες που προτείνονται προσαρμόζονται στο τι χρειάζεται να γνωρίζουν οι μαθητές για να αντιμετωπίσουν την εκάστοτε ενότητα.

### **2.3. Το πρόγραμμα CCSS της Αμερικής**

Στο πρόγραμμα της Αμερικής (CCSS) διαχωρίζονται τρεις τροχιές: α) Τα γεωμετρικά σχήματα, τα συστατικά και οι ιδιότητές τους. β) Η σύνθεση και η ανάλυση των γεωμετρικών σχημάτων. γ) Οι χωρικές σχέσεις και η χωρική δόμηση.

#### **1. Τα γεωμετρικά σχήματα, τα συστατικά και οι ιδιότητές τους.**

Εδώ εξετάζονται στα γεωμετρικά σχήματα τα συστατικά τους (π.χ., πλευρές, γωνίες, επιφάνειες), οι ιδιότητές τους, και η κατηγοριοποίησή τους με βάση αυτές τις ιδιότητες.

Η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης περιγράφεται από τέσσερα στάδια:

- 1) *Οπτικό/συγκριτικό.* Οι μαθητές αναγνωρίζουν σχήματα, π.χ. ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο 'μοιάζει με μια πόρτα'.
- 2) *Περιγραφικό.* Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα στοιχεία των σχημάτων, π.χ. ένα ορθογώνιο έχει τέσσερις πλευρές, όλες του οι πλευρές είναι ευθείες και οι απέναντι πλευρές έχουν ίσο μήκος.
- 3) *Αναλυτικό.* Οι μαθητές χαρακτηρίζουν τα σχήματα από τις ιδιότητές τους, π.χ. ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει τις απέναντι πλευρές ίσες και τέσσερις ορθές γωνίες.
- 4) *Αφαιρετικό.* Οι μαθητές καταλαβαίνουν ότι ένα ορθογώνιο είναι παραλληλόγραμμο επειδή έχει όλες τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων.

#### **2. Η σύνθεση και η ανάλυση των γεωμετρικών σχημάτων.**

Σε αυτήν την κατηγορία, όπως και στην προηγούμενη, η σκέψη των μαθητών ακολουθεί μία εξελικτική πορεία. Αρχικά δεν είναι σε θέση να συνθέσουν γεωμετρικά σχήματα. Με την εμπειρία αποκτούν ικανότητες συνδυασμού σχημάτων αρχικά σε εικόνες, μέσω της δοκιμής και του λάθους, ενώ σταδιακά αρχίζουν να βασίζονται στην χρήση των ιδιοτήτων των σχημάτων. Τέλος, είναι σε θέση να συνθέσουν νέα σχήματα χρησιμοποιώντας συνδυασμούς σχημάτων.

#### **3. Οι χωρικές σχέσεις και η χωρική δόμηση.**

Η ενασχόληση με τη σύνθεση και την ανάλυση σχημάτων, που αναλύθηκε παραπάνω, μπορεί να είναι κομβικής σημασίας για την ανάπτυξη του χωρικού συλλογισμού. Ο χωρικός συλλογισμός απαιτεί από το άτομο να μπορεί να κάνει ταυτόχρονα πολλές περίπλοκες διαδικασίες. Να αποτυπώνει το χώρο και τα αντικείμενά του σε 2 διαστάσεις, να τον χωρίζει σε νοητές μονάδες, να συντονίζει, να ενώνει και να θυμάται μία σειρά από κινήσεις διαδρομές. Αυτό προϋποθέτει μία μορφή αφαίρεσης στη σκέψη του παιδιού. Αρχικά οι διαδρομές πραγματοποιούνται με τη χρήση λέξεων όπως μπροστά, πίσω κ.ά. και στη συνέχεια η χωροταξική δόμηση γίνεται με μαθηματική διατύπωση. Οι εμπειρίες προηγούνται μιας μαθηματικής

κατανόησης του χώρου και υποβοηθούν τον μαθητή στην πορεία των χωρικών του συλλογισμών.

**Οι Μεγάλες Ιδέες ή σημαντικές μαθηματικές έννοιες.** Κατά την ανάπτυξη μιας διδακτικής τροχιάς, είναι ζωτικής σημασίας να δοθεί έμφαση στις σημαντικές μαθηματικές έννοιες, ή «Big Ideas», όπως αλλιώς λέγονται στη διεθνή βιβλιογραφία, δηλαδή τις γνώσεις και τις δεξιότητες που συμβαδίζουν με τις έννοιες αυτές. Οι τροχίες διδασκαλίας που οργανώνονται γύρω από τις σημαντικές αυτές μαθηματικές έννοιες παρέχουν συνεκτικές ευκαιρίες μάθησης που επιτρέπουν στους/τις μαθητές/τριες να διερευνήσουν τις έννοιες σε βάθος. Οι μεγάλες ιδέες στη γεωμετρία είναι οι ακόλουθες:

1. Ονομασία δυσδιάστατων σχημάτων και τρισδιάστατων σωμάτων
2. Οπτικοποίηση δυσδιάστατων σχημάτων και τρισδιάστατων σωμάτων
3. Ιδιότητες δυσδιάστατων σχημάτων και τρισδιάστατων στερεών
4. Γεωμετρικές Σχέσεις

Αφορά τις σχέσεις που αναπτύσσονται ανάμεσα στα σχήματα και τα στερεά σώματα καθώς και τη σύνδεση ανάμεσα στις ιδιότητες και τις σχέσεις.

5. Σύνθεση και ανάλυση δυσδιάστατων σχημάτων και τρισδιάστατων στερεών.

Στην τροχιά, της Γεωμετρίας για το Δημοτικό Σχολείο που προτείνεται από το CCSS οι διδακτικοί στόχοι κατά τάξη είναι οι εξής:

*Grade 1:*

**Αιτιολογούν με τα σχήματα και τις ιδιότητές τους.**

- Διακρίνουν καθορισμένες ιδιότητες (π.χ. το τρίγωνο είναι κλειστό και τρίπλευρο σχήμα) από τις μη ορισμένες ιδιότητες (π.χ. χρώμα, προσανατολισμό, συνολικό μέγεθος) κατασκευάζουν και σχεδιάζουν σχήματα που έχουν καθορισμένες ιδιότητες.
- Συνθέτουν δυσδιάστατα σχήματα (ορθογώνια, τετράγωνα, τραπέζια, τρίγωνα, ημικύκλια και τέταρτα κύκλου) και τρισδιάστατα σχήματα (κύβους, ορθογώνια πρίσματα, ορθούς κυκλικούς κώνους και κυλίνδρους) προκειμένου να δημιουργήσουν ένα σύνθετο σχήμα και να συνθέσουν νέα σχήματα από το σύνθετο σχήμα.
- Διαιρούν κύκλους και ορθογώνια σε δύο και τέσσερα ισομεγέθη μέρη, περιγράφουν τα μέρη χρησιμοποιώντας λέξεις *μισά*, και *τέταρτα*, και τις εκφράσεις *μισό του* και *ένα τέταρτο του*. Περιγράφουν το όλον ως «δύο από» ή «τέσσερα από τα μέρη». Κατανοούν ότι η ανάλυση σε περισσότερα ισομεγέθη μέρη δημιουργεί μικρότερα μέρη.

*Grade 2:*

**Αιτιολογούν με τα σχήματα και τις ιδιότητές τους.**

- Αναγνωρίζουν και να σχεδιάζουν σχήματα με συγκεκριμένες ιδιότητες, όπως έναν δοσμένο αριθμό γωνιών ή ένα δοσμένο αριθμό ίσων επιφανειών. Αναγνωρίζουν τρίγωνα, τετράπλευρα, πεντάγωνα, εξάγωνα και κύβους.
- Διαιρούν ένα ορθογώνιο σε γραμμές και στήλες από ισομεγέθη τετράγωνα και υπολογίζουν τον συνολικό αριθμό τους.
- Διαιρούν κύκλους, ορθογώνια σε δύο, τρία ή τέσσερα ισομεγέθη μέρη, περιγράφουν τα μέρη χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις «μισά», «τρίτα», «μισό του», «ένα τρίτο του» κ.α. και περιγράφουν το όλον ως «δύο μισά», «τρία τρίτα», «τέσσερα τέταρτα». Αναγνωρίζουν ότι τα ισομεγέθη μέρη του όλου δεν χρειάζεται να έχουν το ίδιο σχήμα.

*Grade 3:*

#### **Αιτιολογούν με τα σχήματα και τις ιδιότητές τους.**

- Κατανοούν ότι τα σχήματα σε διαφορετικές κατηγορίες (π.χ. ρόμβοι, ορθογώνια, κ.α.) πιθανόν να μοιράζονται ιδιότητες (π.χ. να έχουν τέσσερις πλευρές) και ότι οι κοινές αυτές ιδιότητες μπορούν να ορίσουν μια μεγαλύτερη κατηγορία (π.χ. τα τετράπλευρα). Αναγνωρίζουν ρόμβους, ορθογώνια και τετράγωνα ως παραδείγματα τετραπλεύρων και σχεδιάζουν παραδείγματα τετραπλεύρων που δεν ανήκουν σε καμιά από αυτές τις υποκατηγορίες.
- Διαχωρίζουν σχήματα σε μέρη με ίσα εμβαδά. Εκφράζουν το εμβαδόν κάθε μέρους ως μοναδιαίο κλάσμα του όλου. Για παράδειγμα, διαχωρίζουν ένα σχήμα σε 4 μέρη με το ίδιο εμβαδόν, και περιγράφουν το εμβαδόν του κάθε μέρους, ως το  $1/4$  του εμβαδού του σχήματος

#### **Grade 4:**

#### **Σχεδιάζουν και αναγνωρίζουν πλευρές και γωνίες, και ταξινομούν τα σχήματα με βάση τις ιδιότητες των πλευρών και των γωνιών τους.**

- Σχεδιάζουν σημεία, πλευρές, ευθύγραμμα τμήματα, ακτίνες, γωνίες (οξεία, ορθή, αμβλεία) και κάθετες και παράλληλες γραμμές και προσδιορίζουν αυτά τα στοιχεία σε δυσδιάστατα σχήματα.
- Ταξινομούν δυσδιάστατα σχήματα με βάση την παρουσία/απουσία των παράλληλων ή κάθετων γραμμών ή την παρουσία/απουσία γωνιών συγκεκριμένου μεγέθους. Αντιλαμβάνονται τα ορθογώνια τρίγωνα ως μια κατηγορία και εξασκούνται στην αναγνώρισή τους.
- Αναγνωρίζουν μία γραμμή συμμετρίας για ένα δισδιάστατο σχήμα, όπως μια γραμμή κατά μήκος όλης της εικόνας έτσι ώστε η εικόνα να μπορεί να διπλωθεί κατά μήκος της γραμμής σε ταυτιζόμενα μέρη. Προσδιορίζουν και χαράζουν τον άξονα συμμετρίας των σχημάτων.

#### **Grade 5:**

#### **Γράφημα σημείων στο σύστημα συντεταγμένων για την επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου και των μαθηματικών.**

- Χρησιμοποιούν ένα ζευγάρι από κάθετες αριθμημένες ευθείες, που ονομάζονται άξονες, για να ορίσουν ένα σύστημα συντεταγμένων, με την τομή των ευθειών (η αρχή των αξόνων) τοποθετημένο έτσι ώστε να συμπίπτει με το μηδέν σε κάθε ευθεία και ένα δεδομένο σημείο στο επίπεδο να βρίσκεται χρησιμοποιώντας ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών, που ονομάζονται συντεταγμένες του. Κατανοούν ότι ο πρώτος αριθμός δείχνει πόσο μακριά να κινηθούν από την αρχή των αξόνων προς την κατεύθυνση ενός άξονα, και ο δεύτερος αριθμός δείχνει πόσο μακριά να κινηθούν προς την κατεύθυνση του δεύτερου άξονα, με τη σύμβαση ότι τα ονόματα των δύο αξόνων και οι συντεταγμένες αντιστοιχούν (π.χ. x-άξονας και x-συντεταγμένη, ψ-άξονας και ψ-συντεταγμένη).
- Αναπαριστούν προβλήματα από τον πραγματικό κόσμο και τα μαθηματικά με γραφικά σημεία στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου των συντεταγμένων, και ερμηνεύουν τιμές των συντεταγμένων των σημείων στο πλαίσιο της κατάστασης.

#### **Ταξινομούν δυσδιάστατα σχήματα σε κατηγορίες βασιζόμενοι στις ιδιότητές τους**

- Κατανοούν ότι οι ιδιότητες που αφορούν σε μια κατηγορία δυσδιάστατων σχημάτων επίσης αφορούν σε όλες τις υποκατηγορίες αυτής της κατηγορίας σχημάτων. Για παράδειγμα, κατανοούν ότι όλα τα ορθογώνια έχουν τέσσερις ορθές γωνίες και τα τετράγωνα είναι ορθογώνια, έτσι όλα τα ορθογώνια έχουν τέσσερις ορθές γωνίες.

- Ταξινομούν δυσδιάστατα σχήματα σε μια ιεραρχία βασιζόμενη στις ιδιότητες των σχημάτων.

*Grade 6:*

**Λύνουν προβλήματα του πραγματικού κόσμου και των μαθηματικών που αφορούν το εμβαδόν και τον όγκο.**

- Βρίσκουν το εμβαδόν ορθογωνίων τριγώνων, άλλων τριγώνων, ειδικών τετραπλεύρων και πολυγώνων με σύνθεση σε ορθογώνια ή ανάλυση σε τρίγωνα και άλλα σχήματα. Εφαρμόζουν αυτές τις τεχνικές στο πλαίσιο επίλυσης προβλημάτων του πραγματικού κόσμου και των μαθηματικών.
- Βρίσκουν τον όγκο ενός ορθού ορθογωνίου πρίσματος με κλασματικά μήκη ακμών γεμίζοντάς το με μοναδιαίους κύβους των κατάλληλων μοναδιαίων κλασμάτων των μηκών της ακμής, και δείχνουν ότι ο όγκος είναι ίδιος με αυτό που θα μπορούσε να βρεθεί από τον πολλαπλασιασμό των μηκών ακμής του πρίσματος. Εφαρμόζουν τους τύπους  $V = l w h$  και  $V = b h$  για να βρουν τους όγκους ορθών ορθογωνίων πρισμάτων με κλασματικά μήκη ακμών μέσα στο πλαίσιο λύσης προβλημάτων του πραγματικού κόσμου και των μαθηματικών.
- Σχεδιάζουν πολύγωνα στο επίπεδο συντεταγμένων με δεδομένες τις συντεταγμένες των κορυφών, χρησιμοποιούν συντεταγμένες για να βρουν το μήκος της μιας πλευράς που ενώνει τα σημεία με την ίδια πρώτη συντεταγμένη ή την ίδια δεύτερη συντεταγμένη. Εφαρμόζουν αυτές τις τεχνικές στο πλαίσιο της επίλυσης προβλημάτων του πραγματικού κόσμου και των μαθηματικών.
- Αναπαριστούν τρισδιάστατα σχήματα χρησιμοποιώντας δίκτυα αποτελούμενα από ορθογώνια και τρίγωνα, και χρησιμοποιούν τα δίκτυα για να βρουν το εμβαδόν της επιφάνειας των σχημάτων αυτών. Εφαρμόζουν αυτές τις τεχνικές στο πλαίσιο της επίλυσης προβλημάτων του πραγματικού κόσμου και των μαθηματικών.

### **3. Σύγκριση των προγραμμάτων**

Μία πρώτη γενική διαπίστωση που προκύπτει από τη σύγκριση των τριών προγραμμάτων είναι ότι η φιλοσοφία του ΝΠΣ και του CCSS φαίνεται πως παρουσιάζουν αρκετές ομοιότητες. Παρατηρούμε επίσης ότι τα δύο αυτά προγράμματα διαφέρουν από το ισχύον πρόγραμμα, τόσο στη διδακτική φιλοσοφία και την οργάνωση των περιεχομένων όσο και σε αυτά τα ίδια τα περιεχόμενα.

Πιο συγκεκριμένα, μία βασική διαφοροποίηση στα δύο προγράμματα (ΝΠΣ και CCSS) σε σχέση με το ισχύον πρόγραμμα υπάρχει στη θεωρητική θεμελίωση και την οργάνωση των περιεχομένων. Το ισχύον πρόγραμμα ενώ βασίζεται στη θεωρία των «επιπέδων γεωμετρικής σκέψης» των van Hiele, δεν γίνεται φανερό αυτή η θεμελίωση και δεν εξηγούνται οι λόγοι για τους οποίους τα περιεχόμενα ακολουθούν αυτή την εξελικτική πορεία από τάξη σε τάξη. Ο εκπαιδευτικός δεν κατανοεί την αναγκαιότητα της συγκεκριμένης σειράς προτάσεων και δε γίνεται εμφανής η εξελικτική ανάπτυξη των περιεχομένων και η σύνδεσή τους από τάξη σε τάξη. Σύμφωνα με αυτήν την παρουσίαση του προγράμματος ο εκπαιδευτικός δεν μπορεί να σχηματίζει μια συνολική εικόνα για την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης του παιδιού, συνεπώς, θα αδυνατεί να προσδιορίσει κάθε φορά το επίπεδό τους, να προβλέψει και να αιτιολογήσει δυσκολίες που συναντούν.

Τα δύο νέα προγράμματα απαντούν και καλύπτουν αυτήν την αδυναμία του ισχύοντος προγράμματος, με τη εφαρμογή της θεωρίας της τροχιάς μάθησης. Όπως παρουσιάσαμε παραπάνω (βλ. 1.2), οι τροχίες μάθησης ορίζουν τους βασικούς σταθμούς μάθησης από τους οποίους θα πρέπει να περάσουν οι μαθητές χωρίς όμως να αποτελούν ένα γραμμικό, μοναδικά ορισμένο μονοπάτι. Αντίθετα, μπορεί να διαφοροποιούνται ανάλογα με το μαθητή. Ο δάσκαλος έχοντας πρόσβαση στις τροχίες αποκτά επίγνωση του επιπέδου της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών του, των δυσκολιών που μπορεί να συναντούν, των προαπαιτούμενων γνώσεων που χρειάζονται για να εξελίξουν τους συλλογισμούς τους. Επιπλέον, τους δίνεται η δυνατότητα να αντιληφθούν συνδέσεις μεταξύ των διαφορετικών μαθηματικών τροχιών που ενδεχομένως να οδηγούν στην επίτευξη κοινών «ευρύτερων» μαθηματικών στόχων.

Μια ακόμη διαφορά των δύο προγραμμάτων από το ισχύον είναι το γεγονός ότι αυτά διαχωρίζουν το περιεχόμενο της γεωμετρίας σε υπό-κατηγορίες (υπό-τροχίες). Η τροχιά της γεωμετρίας δεν παρουσιάζεται ολόκληρη αλλά χωρίζεται σε υπό-τροχίες. Το νέο Ελληνικό πρόγραμμα αρθρώνεται με βάση τέσσερις υπό-τροχίες: 1) χώρος, 2) γεωμετρικά σχήματα, 3) μετασχηματισμοί και 4) οπτικοποίηση και το πρόγραμμα της Αμερικής (CCSS) διαχωρίζει τρεις τροχίες: α) Τα γεωμετρικά σχήματα, τα συστατικά τους, οι ιδιότητές τους και η κατηγοριοποίησή τους με βάση αυτές τις ιδιότητες, β) η σύνθεση και η ανάλυση των γεωμετρικών σχημάτων, γ) οι χωρικές σχέσεις και η χωρική δομή. Με την παρουσίαση των προσδοκώμενων στόχων μέσα από την επιμέρους κατηγοριοποίηση σε υπό-τροχίες, η εξελικτική πορεία της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών γίνεται πιο σαφής και συγκεκριμένη. Επιπλέον, υπάρχει καλύτερη οργάνωση και γνώση των συλλογιστικών διαδικασιών που σχετίζονται με τα γεωμετρικά αντικείμενα.

Όσον αφορά την επιλογή των υπό-τροχιών παρατηρούμε ότι το νέο Ελληνικό πρόγραμμα αφιερώνει ειδική υπό-τροχιά στο θέμα των μετασχηματισμών και της οπτικοποίησης. Ενώ το Αμερικάνικο CCSS αυτές τις δύο τροχίες δεν τις διαχωρίζει και τις εμπεριέχει μέσα στις υπόλοιπες. Αντίθετα το Αμερικάνικο πρόγραμμα διαχωρίζει ως ιδιαίτερη τροχιά το θέμα της σύνθεσης και της ανάλυσης των γεωμετρικών σχημάτων.

Μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι ο διαχωρισμός των τροχιών στο ΝΠΣ γίνεται πιο αυστηρά και διαχωρισμένα. Στο πρόγραμμα CCSS αναδεικνύονται περισσότερο τα σημεία όπου οι υπό-τροχίες συναντιούνται μέσα από τη χρήση περιγραφών και παραδειγμάτων. Θα μπορούσε δηλαδή να υποστηριχτεί ότι το πρόγραμμα CCSS δίνει μία πιο συνεκτική και άμεση παρουσίαση της ανάπτυξης των διάφορων γεωμετρικών εννοιών. Για παράδειγμα στο CCSS τονίζεται η εξάρτηση της τροχιάς του χώρου από την τροχιά των γεωμετρικών σχημάτων και των μετασχηματισμών κάτι που δεν συμβαίνει στο ΝΠΣ.

Τα δύο σύγχρονα προγράμματα λοιπόν που εξετάζουμε αναπτύσσονται με βάση την έννοια της τροχιάς και παρουσιάζουν πολλά κοινά στοιχεία. Μπορούμε ωστόσο, να παρατηρήσουμε ορισμένες διαφοροποιήσεις ως προς την χρονική στιγμή της εισαγωγής κάποιων γεωμετρικών εννοιών στα προγράμματα αυτά. Για παράδειγμα, η μελέτη των σχέσεων μεταξύ επίπεδων σχημάτων και στερεών σωμάτων εμφανίζεται

στο ΝΠΣ του 2011 στην Α΄ τάξη, ενώ στο πρόγραμμα του CCSS εμφανίζεται στο Νηπιαγωγείο. Πιο έντονη διαφορά παρατηρείται στην περίπτωση της κατασκευής των αναπτυγμάτων των στερεών σωμάτων. Στο ΝΠΣ τα παιδιά ήδη από την Β΄ τάξη ασχολούνται με την αναγνώριση απλών αναπτυγμάτων στερεών, ενώ στο πρόγραμμα του CCSS ο σχεδιασμός και η δημιουργία αναπτυγμάτων αναφέρεται σε υψηλότερο επίπεδο.

Τα δύο σύγχρονα προγράμματα είναι εμπλουτισμένα με περιεχόμενα που δεν περιέχονται το ισχύον πρόγραμμα σπουδών. Στο ισχύον πρόγραμμα σπουδών, όσον αφορά τους μετασχηματισμούς από την Α΄ τάξη παρουσιάζεται η αξονική συμμετρία και στη συνέχεια επαναλαμβάνεται μονότονα και στις μεγαλύτερες τάξεις χωρίς σχεδόν και μια εξελικτική ανάπτυξη. Στα νέα προγράμματα υπάρχουν από τις μικρές τάξεις περισσότεροι μετασχηματισμοί δηλαδή εκτός από την αξονική συμμετρία υπάρχουν οι στροφές και οι μετατοπίσεις.

Είναι καινούργια επίσης και δεν υπήρχαν, εκτός από τα αναπτύγματα των στερεών σωμάτων, τα περιεχόμενα των οπτικοποιήσεων που στόχο έχουν την μεγαλύτερη ανάπτυξη και επεξεργασία των νοερών αναπαραστάσεων των γεωμετρικών σχημάτων.

Θα πρέπει να τονίσουμε βέβαια ότι στα νέα προγράμματα προτείνεται η χρήση της τεχνολογίας για τη διδασκαλία της γεωμετρίας με πολύ ουσιαστικές δραστηριότητες. Η χρήση αυτή της τεχνολογίας στη διδασκαλία της γεωμετρίας δεν υπάρχει στα υπάρχοντα προγράμματα.

### **Συμπεράσματα – συζήτηση**

Ένα γενικό συμπέρασμα που προκύπτει για το υπάρχον πρόγραμμα της γεωμετρίας είναι ότι οδηγεί τον εκπαιδευτικό να χειριστεί τα διάφορα περιεχόμενα της γεωμετρίας αποσπασματικά και κατακερματισμένα. Παρά το γεγονός ότι έχει δομηθεί λαμβάνοντας υπόψη την εξέλιξη της γεωμετρικής σκέψης του μαθητή, ο εκπαιδευτικός στερείται μιας ολιστικής αντίληψης της ανάπτυξης των γεωμετρικών συλλογισμών των μαθητών του. Κατά συνέπεια, ενδεχομένως, ο εκπαιδευτικός να αντιμετωπίσει δυσκολίες σε διάφορους τομείς όπως: στον εντοπισμό του επιπέδου σκέψης του κάθε μαθητή, στην αντιμετώπιση των δυσκολιών των μαθητών αλλά και των αιτιών που τις δημιουργούν και τις αναπαράγουν.

Το Αμερικάνικο πρόγραμμα CCSS ενσωματώνει τα σύγχρονα αποτελέσματα από το χώρο της έρευνας στη διδασκαλία των μαθηματικών και ειδικά της γεωμετρίας με αποτέλεσμα να προτείνεται ένα ανανεωμένο και αποτελεσματικό πρόγραμμα. Το νέο Ελληνικό πρόγραμμα είναι και αυτό σύγχρονο και ανανεωμένο που δείχνει ότι οι ειδικοί του χώρου είναι ενημερωμένοι και παρακολουθούν τις διεθνείς εξελίξεις της έρευνας για τη διδασκαλία της γεωμετρίας. Το πρόβλημα με το Ελληνικό πρόγραμμα σπουδών είναι η εφαρμοσιμότητά του στην πράξη. Πιθανά το πρόγραμμα αυτό να μην εφαρμοστεί ποτέ και να μείνει μια άσκηση επί χάρτου, λόγω της έλλειψης συγκεκριμένου εκπαιδευτικού υλικού και σχολικών εγχειριδίων που βασίζονται σε αυτό το πρόγραμμα αλλά και της έλλειψης επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών.

## Αναφορές

Clements, D. H. & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: the learning trajectory approach*. New York & London: Routledge.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6, 81-89.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.

Confrey, J., Maloney, A., & Nguyen, K. (2011). *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education*. Charlotte, NC: Information Age Publishers.

Corcoran, T., Mosher, F. A., & Rogat, A. (2009). *Learning progressions in science: An evidence based approach to reform* (Research Report No. 63). Madison, WI: Consortium for Policy Research in Education.

Daro, P., Mosher, F., & Corcoran, T. (2011). Learning trajectories in mathematics (Research Report No. 68). Madison, WI: Consortium for Policy Research in Education.

Δ.Ε.Π.Π.Σ (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων, ΦΕΚ 303B/13-3-2003.

NCTM (2006). *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics: A quest for coherence*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics

NMP. (2008). *Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington D.C.: U.S. Department of Education, Office of Planning, Evaluation and Policy Development.

Πρόγραμμα Σπουδών (2011). Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση (Δημοτικό). ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα), Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ΕΣΠΑ 2007-2013.

Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, H. and Edgington, C. (2012). Learning Trajectory Based Instruction: Toward a Theory of Teaching. *Educational Researcher* 2012 41: 147-156.

Van Hiele P. M., & van Hiele-Geldof D., (1958). A method of initiation into geometry. In H. Freudenthal (Ed.), *Report on methods of initiation into geometry*. Groningen: Walters.

