**Το παρακάτω κείμενο είναι απόσπασμα από μια διπλωματική εργασία με τίτλο «Ανάλυση των έργων του σχολικού εγχειριδίου των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου. Η περίπτωση της επιχειρηματολογίας» της Θώμογλου Κων/ντίνας.**

Η Glasnovic Gracin (2018) προκειμένου να εξετάσει τις απαιτήσεις των έργων των κροατικών σχολικών εγχειριδίων της 6ης , 7ης και 8ης τάξης δημιουργεί ένα πενταδιάστατο πλαίσιο που προέκυψε από το συνδυασμό των αυστριακών εκπαιδευτικών προτύπων (2007) και το πλαίσιο των Zhu et al. (2006). Στις μέχρι τώρα έρευνες ανάλυσης των έργων των εγχειριδίων οι συνήθεις διαστάσεις ήταν το περιεχόμενο, οι γνωστικές απαιτήσεις, ο τύπος ερωτήσεων και τα χαρακτηριστικά πλαισίου. Η Glasnovic Gracin (2018) ενσωματώνει μια νέα πέμπτη διάσταση στο πλαίσιο: τις μαθηματικές δραστηριότητες, η οποία εξετάζει το τι πρέπει να κάνει ο μαθητής σε μια συγκεκριμένη εργασία, να αναπαραστήσει, να υπολογίσει, να εξηγήσει ή να επιχειρηματολογήσει.

Αυστριακά πρότυπα (2007):

Τρισδιάστατο μοντέλο των μαθηματικών ικανοτήτων

Περιεχόμενο

Δραστηριότητα

Επίπεδα πολυπλοκότητας

Διάσταση

Διαδικασία

Πηγή

Zhu & Fan (2006): Πλαίσιο ανάλυσης εγχειριδίων της Κίνας και των ΗΠΑ ( Έργα ρουτίνας, παραδοσιακά, εφαρμογής)

Ανάπτυξη των μορφών απάντησης

Ανάπτυξη των χαρακτηριστικών πλαισίου

Μορφές απάντησης

Χαρακτηριστικά πλαισίου

Σχήμα 1. Διάγραμμα πενταδιάστατου πλαισίου (Glasnovic Gracin, 2018, σελ. 6)

Τα αυστριακά εκπαιδευτικά πρότυπα ορίζουν το θεωρητικό πλαίσιο μέσα από τις τρεις διαστάσεις ως εξής: το περιεχόμενο, τις μαθηματικές δραστηριότητες και τα επίπεδα πολυπλοκότητας, ενώ οι άλλες δύο διαστάσεις των μορφών απάντησης και των χαρακτηριστικών πλαισίου βασίζονται στην έρευνα των Zhu et al. (2006). Οι πτυχές από τα αυστριακά εκπαιδευτικά πρότυπα έχουν ληφθεί όπως αυτές αναφέρονται στην αρχική πηγή, ενώ οι πτυχές των μορφών απάντησης και των χαρακτηριστικών πλαισίου έχουν αναπτυχθεί και τροποποιηθεί περαιτέρω για τις ανάγκες της συγκεκριμένης έρευνας. Το θεωρητικό πλαίσιο παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.

## 2.2 Μέθοδος έρευνας

Με βάση τη βιβλιογραφία για την ανάλυση των έργων των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών προτείνονται διάφορες μέθοδοι ανάλυσης. Για παράδειγμα, πολλές έρευνες βασίστηκαν στο τρισδιάστατο πλαίσιο του Li (2000), στο πλαίσιο ανάλυσης των Zhu et al. (2006). Για την ανάλυση των έργων του σχολικού εγχειριδίου των Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης επιλέχθηκε το πλαίσιο της πενταδιάστατης ανάλυσης των έργων του εγχειριδίου της Glasnovic Gracin (2018). Η Glasnovic Gracin (2018) συνδύασε δύο θεωρητικές πηγές: τα αυστριακά εκπαιδευτικά πρότυπα (2007) και το πλαίσιο των Zhu και Fan (2006). Τα αυστριακά εκπαιδευτικά πρότυπα (2007) ορίζουν το θεωρητικό πλαίσιο μέσα από τρεις διαστάσεις: *το περιεχόμενο*, *τις μαθηματικές δραστηριότητες* και *τα επίπεδα πολυπλοκότητας*. Ενώ, οι Zhu et al. (2006) συμπλήρωσαν το πενταδιάστατο πλαίσιο με τις διαστάσεις: *μορφές απάντησης* και *χαρακτηριστικά πλαισίου*, οι οποίες προέκυψαν από τροποποιήσεις του αρχικού τους πλαισίου για τις ανάγκες της έρευνας που πραγματοποίησε η Glasnovic Gracin (2018). Θεωρήθηκε το καταλληλότερο πλαίσιο για τη διερεύνηση των στόχων της παρούσας έρευνας, διότι σύμφωνα με τη Glasnovic Gracin (2018) το πολυδιάστατο αυτό πλαίσιο αποδείχθηκε ένα ισχυρό αναλυτικό εργαλείο για τον εντοπισμό των ευκαιριών μάθησης των μαθητών.

## 2.3 Το υλικό της έρευνας

Στην παρούσα έρευνα επιλέχθηκε το σχολικό εγχειρίδιο «Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου» (Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης, και Ρεκούμης, 2008) το οποίο διδάσκεται στους μαθητές της Β΄ Γυμνασίου. Τα σημερινά σχολικά βιβλία μαθηματικών για το Γυμνάσιο διανεμήθηκαν για πρώτη φορά το 2007 – 2008. Το βιβλίο του μαθητή αποτελείται από 254 σελίδες και η ύλη του είναι οργανωμένη σε δύο μέρη. Το Α΄ μέρος περιλαμβάνει τέσσερα κεφάλαια που αναφέρονται στην Άλγεβρα και τη Στατιστική και το Β΄ μέρος περιλαμβάνει άλλα τέσσερα κεφάλαια που αναφέρονται στη Γεωμετρία και την Τριγωνομετρία. Κάθε κεφάλαιο χωρίζεται σε θεματικές ενότητες. Συγκεκριμένα επιλέχθηκαν προς ανάλυση οι παρακάτω ενότητες (Πίνακας 2.1):

|  |
| --- |
| Μέρος Α΄ |
| Κεφάλαιο 1ο : Εξισώσεις – Ανισώσεις  |
| 1.1 | Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις  |
| 1.2 | Εξισώσεις α΄ βαθμού |
| 1.3 | Επίλυση τύπων |
| 1.4 | Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων |
| 1.5 | Ανισώσεις α΄ βαθμού |
| Κεφάλαιο 2ο : Πραγματικοί αριθμοί |
| 2.1 | Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού |
| 2.2 | Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί |
| 2.3 | Προβλήματα |
| Μέρος Β΄ |
| Κεφάλαιο 1ο : Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο θεώρημα  |
| 1.1 | Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας |
| 1.2 | Μονάδες μέτρησης επιφανειών |
| 1.3 | Εμβαδά επίπεδων σχημάτων |
| 1.4 | Πυθαγόρειο θεώρημα |
| Κεφάλαιο 3ο : Μέτρηση Κύκλου |
| 3.1 | Εγγεγραμμένες γωνίες |
| 3.2 | Κανονικά πολύγωνα |
| 3.3 | Μήκος κύκλου  |
| 3.4 | Μήκος τόξου |
| 3.5 | Εμβαδόν κυκλικού δίσκου |
| 3.6 | Εμβαδόν κυκλικού τομέα |

Πίνακας 2.1. Θεματικές ενότητες προς ανάλυση

Αξίζει να σημειωθεί η θεματική ενότητα του Πυθαγόρειου θεωρήματος συνδέεται άρρηκτα με την ενότητα των Πραγματικών αριθμών, όπου στα περισσότερα έργα απαιτείται η εφαρμογή του θεωρήματος.

## 2.4 Δείγμα

Από το σχολικό εγχειρίδιο της Β΄ Γυμνασίου εξετάστηκαν τα στοιχεία εκείνα που καλούνται «έργα». Η λέξη έργο (task) σύμφωνα με τους Mason και Johnston-Wilder (2004) καλύπτει όλες τις καταστάσεις του βιβλίου που απαιτούν απάντηση, ανεξάρτητα αν η απάντηση δίνεται ή όχι. Σύμφωνα με τις Henningsen & Stein (1997), τα μαθηματικά έργα (tasks) είναι διάφορες δραστηριότητες που πραγματοποιούνται εντός της σχολικής τάξης και έχουν ως στόχο να εστιάσουν την προσοχή των μαθητών σε μια συγκεκριμένη μαθηματική έννοια ή διαδικασία. Στην παρούσα έρευνα αυτές οι καταστάσεις είναι οι εφαρμογές (λυμένες ασκήσεις) που έπονται των εισαγωγικών δραστηριοτήτων, οι ερωτήσεις κατανόησης, οι ασκήσεις, και κάποιες σπαζοκεφαλιές που ονομάζονται δραστηριότητες «για διασκέδαση».

Συνολικά καταμετρήθηκαν 636 έργα (εφαρμογές, ερωτήσεις κατανόησης, ασκήσεις και σπαζοκεφαλιές). Αναλυτικότερα φαίνονται παρακάτω (Πίνακας 2.2).

|  |  |
| --- | --- |
| **Θέματα**  | **Πλήθος έργων** |
| Εξισώσεις – Ανισώσεις  | 88 |
| Πραγματικοί αριθμοί  | 50 |
| Συναρτήσεις  | 78 |
| Περιγραφική Στατιστική  | 55 |
| Εμβαδά επίπεδων σχημάτων- Πυθαγόρειο Θεώρημα  | 57 |
| Τριγωνομετρία  | 101 |
| Μέτρηση κύκλου  | 89 |
| Γεωμετρικά στερεά  | 118 |
| Σύνολο  | 636 |

Πίνακας 2.2. Πλήθος έργων ανά ενότητα του σχολικού εγχειριδίου της Β΄ Γυμνασίου

Για τη διεκπεραίωση της έρευνας επιλέχθηκαν τα έργα από δύο κεφάλαια της Άλγεβρας και δύο της Γεωμετρίας. Τα έργα που αναλύθηκαν προέρχονται από τις θεματικές ενότητες των Εξισώσεων – Ανισώσεων (88), τους Πραγματικούς αριθμούς (50), τα Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο θεώρημα (57) και τη Μέτρηση κύκλου (89). Συνολικά εξετάστηκαν 284 έργα (138 από την Άλγεβρα και 146 από τη Γεωμετρία). Η επιλογή των θεμάτων στηρίχθηκε στη βιβλιογραφία και στο γεγονός ότι είναι από τα πιο δημοφιλή θέματα της Β΄ Γυμνασίου.

## 2.5 Εργαλείο ανάλυσης του σχολικού εγχειριδίου

Κάθε έργο αναλύθηκε με βάση το πενταδιάστατο πλαίσιο (περιεχόμενο, μαθηματική δραστηριότητα, επίπεδο πολυπλοκότητας, μορφή απάντησης και χαρακτηριστικά πλαισίου) που παρουσιάστηκε στη βιβλιογραφία. Οι πέντε διαστάσεις καθώς και οι ταξινομήσεις των έργων που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση των εργασιών του σχολικού βιβλίου φαίνονται στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 2.3) και αναλύονται περαιτέρω.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Διάσταση** | **Ερώτηση** | **Λεπτομέρειες και κωδικοί** |
| Μαθηματικό περιεχόμενο | Ποιο περιεχόμενο πρέπει να γνωρίζει ο μαθητής για να εκτελέσει μια συγκεκριμένη εργασία; | Άλγεβρα (Ι1) Στατιστική(Ι2) Γεωμετρία(Ι3) Τριγωνομετρία (Ι4) |
| Μαθηματική δραστηριότητα | Ποιες μαθηματικές δραστηριότητες πρέπει να εκτελεστούν για την επιτυχή εκτέλεση του έργου; | Αναπαραστάσεις και μοντελοποίηση (H1) Υπολογισμός και Πράξη (H2) Επεξήγηση (H3) Επιχειρηματολογία και συλλογιστική (H4) |
| Επίπεδο πολυπλοκότητας | Ποια είναι η πολυπλοκότητα των γνώσεων και των δραστηριοτήτων που χρειάζεται ένας μαθητής για να εκτελέσει το έργο; | Άμεση εφαρμογή βασικών γνώσεων και δεξιοτήτων(K1) Κατασκευή και αντιμετώπιση των συνδέσεων (K2) Συλλογισμός ή εφαρμογή συλλογιστικής γνώσης (K3) |
| Μορφή απάντησης  | Ποια μορφή απάντησης απαιτεί η εργασία; | Κλειστή απάντηση (A1) Ανοικτή απάντηση (A2) Πολλαπλή επιλογή (A3) |
| Πλαίσιο  | Ποιο είναι το πλαίσιο στο έργο; | Η ενδο-μαθηματική κατάσταση (C1) Ρεαλιστικό πλαίσιο (C2) Αυθεντικό πλαίσιο (C3) |

Πίνακας 2.3. Εργαλείο για την ανάλυση του σχολικού εγχειριδίου

***Περιεχόμενο.*** Το περιεχόμενο δίνει έμφαση στη διερεύνηση της μαθηματικής γνώσης που απαιτείται να έχει ο μαθητής για να ανταποκριθεί επιτυχώς στα έργα του βιβλίου. Το μαθηματικό περιεχόμενο του βιβλίου της Β΄ Γυμνασίου (Πίνακας 2.4), σύμφωνα με το Δ.Ε.Π.Π.Σ. – Α.Π.Σ. χωρίζεται σε δύο μέρη Άλγεβρα και Γεωμετρία. Για την καλύτερη, όμως, εφαρμογή της έρευνάς μας διαχωρίζουμε την ύλη του βιβλίου σε τέσσερις Θεματικές περιοχές :

* Άλγεβρα – Στατιστική
* Γεωμετρία – Τριγωνομετρία

Οι συγγραφείς του σχολικού εγχειριδίου της Β΄ Γυμνασίου αναφέρουν στον πρόλογό του: *«Στο πρώτο μέρος, η Άλγεβρα ξεκινά με εξισώσεις και ανισώσεις α’ βαθμού, ενώ στο δεύτερο μέρος η Γεωμετρία ξεκινά με τα εμβαδά επίπεδων σχημάτων τα οποία οδηγούν στο Πυθαγόρειο θεώρημα. Στη Γεωμετρία το Πυθαγόρειο θεώρημα θα μελετηθεί μόνο για ρητούς αριθμούς και κατόπιν θα αποτελέσει τη βάση για την εισαγωγή των άρρητων αριθμών στο δεύτερο κεφάλαιο της Άλγεβρας. Γνωρίζοντας τους πραγματικούς αριθμούς μπορούμε να μελετήσουμε την Τριγωνομετρία, η οποία καταλαμβάνει τις περισσότερες παραγράφους του δεύτερου κεφαλαίου του δευτέρου μέρους, το οποίο ολοκληρώνεται με τα διανύσματα. Στη συνέχεια η πορεία των δύο μερών του βιβλίου γίνεται σχεδόν ανεξάρτητη. Το πρώτο μέρος ολοκληρώνεται με την παρουσίαση βασικών συναρτήσεων και την περιγραφική Στατιστική, ενώ το δεύτερο με τη μέτρηση κύκλου και τη μελέτη και μέτρηση γεωμετρικών στερεών.»*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Θεματική περιοχή** | **Αριθμός****κεφαλαίου** | **Τίτλος - Περιεχόμενο** |
| Άλγεβρα – Περιγραφική Στατιστική | 1 | Εξισώσεις – Ανισώσεις |
| 2 | Πραγματικοί Αριθμοί |
| 3 | Συναρτήσεις |
| 4 | Περιγραφική Στατιστική |
| Γεωμετρία – Τριγωνομετρία  | 1 | Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο Θεώρημα |
| 2 | Τριγωνομετρία – Διανύσματα  |
| 3 | Μέτρηση Κύκλου |
| 4 | Γεωμετρικά Σχήματα – Μέτρηση Στερεών  |

Πίνακας 2.4. Ύλη του σχολικού βιβλίου της Β΄ Γυμνασίου

***Μαθηματικές δραστηριότητες.*** Οι τέσσερις βασικές μαθηματικές δραστηριότητες που πρέπει να εκτελεστούν για την επιτυχή εκτέλεση ενός έργου είναι: Αναπαραστάσεις και Μοντελοποίηση (Η1), Υπολογισμοί και Πράξεις (Η2), Επεξήγηση (Η3) και Επιχειρηματολογία και Συλλογιστική (Η4). Η αναπαράσταση (H1) αφορά την «μετάφραση» κάποιων μαθηματικών δεδομένων σε μία άλλη μαθηματική αναπαράσταση (για παράδειγμα, μετατροπή από μία στατιστική αναπαράσταση σε άλλη). Η μοντελοποίηση περιλαμβάνει την αναγνώριση σχετικών μαθηματικών σχέσεων από τη δεδομένη κατάσταση και την έκφραση του ίδιου προβλήματος με μαθηματικό τρόπο (συμβολική, γραφική, κλπ.). Ο υπολογισμός (H2) αφορά τη διενέργεια στοιχειωδών πράξεων με συγκεκριμένους ή γενικευμένους αριθμούς. Η πράξη είναι η συγκεκριμένη, λογική και αποτελεσματική διεξαγωγή υπολογιστικών ή κατασκευαστικών βημάτων. Αναφέρεται επίσης σε μετασχηματισμό μονάδων μέτρησης, μετασχηματισμό μαθηματικών εκφράσεων, επίλυση εξισώσεων, εκτίμηση αποτελεσμάτων, προσεγγίσεις και διεξαγωγή στοιχειωδών γεωμετρικών κατασκευών. Η επεξήγηση (H3) αφορά την αναγνώριση των σχέσεων και των σχετικών δεδομένων που δίνονται στις μαθηματικές αναπαραστάσεις (γραφική, συμβολική και πίνακες) και την ερμηνεία τους στο δεδομένο πλαίσιο. Η επεξήγηση περιλαμβάνει την κατάλληλη ανάγνωση των γραφικών ή συμβολικών μαθηματικών αναπαραστάσεων και την ερμηνεία τους στο δεδομένο πλαίσιο. Η επιχειρηματολογία (H4) αναφέρεται στην περιγραφή των μαθηματικών πτυχών που μιλούν υπέρ ή κατά μιας συγκεκριμένης απόφασης. Απαιτεί συγκεκριμένη και κατάλληλη εφαρμογή των μαθηματικών σχέσεων και χαρακτηριστικών, των μαθηματικών κανόνων καθώς και τη σωστή χρήση της μαθηματικής γλώσσας. Η συλλογιστική αφορά τη σειρά των σωστών επιχειρημάτων που οδηγούν σε ένα συμπέρασμα.

Για παράδειγμα, η ακόλουθη εργασία απαιτεί δραστηριότητες αναπαράστασης: Να χρησιμοποιήσετε μεταβλητές για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τη φράση «Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 12». Ενώ η ακόλουθη εργασία του εγχειριδίου απαιτεί δραστηριότητες υπολογισμού: . Ορισμένα έργα απαιτούσαν περισσότερες από μία δραστηριότητες. Σε αυτή την περίπτωση, επιλέχθηκε και κωδικοποιήθηκε η δραστηριότητα που θεωρήθηκε κυρίαρχη για την εκτέλεση του έργου.

***Επίπεδο πολυπλοκότητας.*** Η πολυπλοκότητα των γνώσεων και των δραστηριοτήτων που χρειάζεται ένας μαθητής για να εκτελέσει ένα έργο χωρίζεται σε τρία επίπεδα. Αυτά είναι: η εφαρμογή βασικών γνώσεων και δεξιοτήτων (Κ1), η δημιουργία συνδέσεων (Κ2) και η συλλογιστική σκέψη (Κ3). Δηλαδή, το ίδιο το περιεχόμενο και οι δραστηριότητες δεν αρκούν για να προσδιορίσουν τις ικανότητες που απαιτούνται από τους μαθητές σε μια συγκεκριμένη εργασία του βιβλίου. Ορισμένες μαθηματικές εργασίες θα μπορούσαν να έχουν το ίδιο περιεχόμενο (για παράδειγμα, τον κύκλο) και την ίδια δραστηριότητα (για παράδειγμα, υπολογισμοί), αλλά θα μπορούσαν να διαφέρουν ως προς τη γνωστική πολυπλοκότητα. Για παράδειγμα, ένα έργο θα μπορούσε να απαιτήσει τις δεξιότητες σχετικά με το επίπεδο πολυπλοκότητας της αναπαραγωγής, ενώ ένα άλλο να απαιτεί την κατασκευή πιο σύνθετων συνδέσεων. Η εφαρμογή βασικών γνώσεων και δεξιοτήτων (Κ1) περιλαμβάνει την αναπαραγωγή ή την άμεση εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών, κανόνων, διαδικασιών και αναπαραστάσεων. Η δημιουργία συνδέσεων (K2) και η αντιμετώπιση των συνδέσεων αφορά σε πιο πολύπλοκα έργα, όπου απαιτείται να συνδυαστούν διάφορες έννοιες ή δραστηριότητες για την επίλυση του προβλήματος. Περιλαμβάνει, για παράδειγμα, τη σύνδεση μεταξύ μιας ποικιλίας όρων, θεωρημάτων, μεθόδων και αναπαραστάσεων. Η συλλογιστική σκέψη (Κ3) περιλαμβάνει το συλλογισμό μαθηματικών ιδεών που δεν είναι ευανάγνωστες από το συγκεκριμένο πρόβλημα. Η συλλογιστική γνώση σημαίνει την εφαρμογή δημιουργικών γνώσεων σχετικά με τα μαθηματικά.

Ακολουθούν δύο παραδείγματα το πρώτο από την ενότητα 3.2 Κανονικά πολύγωνα: «Να βρείτε τη γωνία του κανονικού δεκάγωνου», όπου απαιτείται από τους μαθητές να εφαρμόσουν βασικές γνώσεις, δηλαδή τον τύπο που τους δίνεται στη θεωρία του μαθήματος. Το δεύτερο είναι από την ενότητα 1.2 Μονάδες μέτρησης επιφανειών: «Ποια από τις μονάδες μέτρησης εμβαδού θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε, για να μετρήσουμε το εμβαδόν: α) του δωματίου μας, β) της Κρήτης, γ) ενός αγρού, δ) ενός γραμματόσημου, ε) ενός φύλλου τετραδίου. Ο μαθητής καλείται να συνδέσει τις γνώσεις του για τις μονάδες μέτρησης με τις γνώσεις του από την καθημερινή ζωή.

***Μορφές απάντησης.*** Οι μορφές απάντησης που μπορεί να έχει ένα έργο είναι οι ακόλουθες: κλειστή απάντηση (Α1), ανοικτή απάντηση (Α2) και απάντηση πολλαπλής επιλογής (Α3). Τα έργα πολλαπλής επιλογής προσφέρουν στον μαθητή έναν περιορισμένο αριθμό καθορισμένων απαντήσεων. Τα έργα κλειστής απάντησης απαιτούν μια σωστή απάντηση, ανεξάρτητα από το πόσες διαφορετικές προσεγγίσεις υπάρχουν για να φτάσει ο μαθητής στην απάντηση. Αντίθετα τα έργα ανοικτής απάντησης έχουν διαφορετικές ή πολλές σωστές απαντήσεις, απαιτώντας από τους μαθητές μια πιο ελεύθερη έκφραση των ιδεών τους για τα Μαθηματικά. Τα έργα κλειστής απάντησης δίνουν μεγαλύτερη έμφαση στην τελική λύση, ενώ τα έργα ανοικτής απάντησης σχετίζονται περισσότερο με τη διαδικασία και τον τρόπο επίλυσης του συγκεκριμένου έργου.

Για παράδειγμα, το ακόλουθο έργο: «Να λύσετε την εξίσωση 2x + 21 = 4 + x – 5», απαιτεί μια και μοναδική σωστή απάντηση. Αντίθετα το έργο: «Αν σε κύκλο φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους, τότε τα τέσσερα ίσα τόξα είναι: Α: 80, Β: 180, Γ: 90, Δ: 45. Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση», δίνει τη δυνατότητα στον μαθητή να επιλέξει τη σωστή απάντηση από έναν περιορισμένο αριθμό καθορισμένων απαντήσεων.

***Χαρακτηριστικά πλαισίου.*** Το πλαίσιο στο οποίο αναφέρεται ένα έργο μπορεί να σχετίζεται με μια ενδομαθηματική κατάσταση (C1), με ένα ρεαλιστικό πλαίσιο (C2) ή με ένα αυθεντικό πλαίσιο (C3). Μια ενδομαθηματική κατάσταση αναφέρεται σε έργα χωρίς πλαίσιο, δηλαδή σε έργα που χρησιμοποιούν ένα σύστημα συμβολικών αναπαραστάσεων μαθηματικών αντικειμένων και ιδεών. Το ρεαλιστικό πλαίσιο περιλαμβάνει καταστάσεις με προσομοιωμένη πραγματικότητα.

Για παράδειγμα, το πρόβλημα του βιβλίου: «Η διαγώνιος της οθόνης μιας τηλεόρασης είναι 30 ίντσες και οι διαστάσεις της x, y έχουν λόγο . Να βρείτε τις διαστάσεις της τηλεόρασης», μιμείται καταστάσεις του πραγματικού κόσμου που τεχνηέντως έχουν κατασκευάσει οι συγγραφείς του βιβλίου, οπότε αποτελεί ένα ρεαλιστικό πλαίσιο. Τέλος, αυθεντικό πλαίσιο σημαίνει ότι τα δεδομένα και οι συνθήκες του έργου προέρχονται από καταστάσεις πραγματικής ζωής ή συλλέγονται από τους ίδιους τους μαθητές.

## 2.6 Παραδείγματα ανάλυσης έργων

Με βάση το εργαλείο ανάλυσης έργων που περιγράφηκε αναλυτικά παραπάνω, παρατίθενται τέσσερα από τα έργα του σχολικού εγχειριδίου Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου που μελετήθηκαν και αναλύθηκαν. Τα μαθηματικά αυτά έργα παρουσιάζονται ως παραδείγματα του τρόπου ανάλυσης και ταξινόμησης των έργων ανάλογα με το περιεχόμενο, τη μαθηματική δραστηριότητα που απαιτείται, το επίπεδο πολυπλοκότητας του έργου, τη μορφή απάντησης και το πλαίσιο στο οποίο ανήκει. Τα έργα που επιλέχθηκαν παρουσιάζονται ακολούθως.

**Παράδειγμα 1 (σελ. 14)**

Να χρησιμοποιήσετε μία μεταβλητή για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τις παρακάτω φράσεις:

α) Το συνολικό ποσό που θα πληρώσουμε για να αγοράσουμε πέντε κιλά πατάτες, αν γνωρίζουμε την τιμή του ενός κιλού.

β) Την τελική τιμή ενός προϊόντος, αν γνωρίζουμε ότι αυτή είναι η αναγραφόμενη τιμή συν 19% ΦΠΑ.

|  |  |
| --- | --- |
| Ι1: | Το έργο διαπραγματεύεται μεταβλητές, οπότε ανήκει στη Άλγεβρα. |
| Η1: | Το έργο απαιτεί τη μετάφραση της πρότασης από τη φυσική γλώσσα στην αλγεβρική της μορφή. |
| Κ1: | Το έργο απαιτεί την αναπαράσταση της σχέσης αυτής με τη μορφή αλγεβρικής παράστασης⋅ αυτή η δραστηριότητα είναι βασική. |
| Α1: | Η απάντηση είναι μοναδική, οποιαδήποτε μεταβλητή και αν χρησιμοποιήσει ο μαθητής, άρα θεωρείται έργο κλειστού τύπου.  |
| C2: | Το πλαίσιο εφαρμογής του έργου είναι ρεαλιστικό, γιατί σχετίζεται με προβλήματα της καθημερινής ζωής. |

**Παράδειγμα 2 (σελ. 20)**

Να λύσετε την εξίσωση: 

|  |  |
| --- | --- |
| Ι1: | Το αντικείμενο αυτού του έργου είναι οι εξισώσεις α΄ βαθμού, το οποίο ανήκει στην Άλγεβρα. |
| Η2: | Το έργο απαιτεί μια σειρά πράξεων για την εύρεση της λύσης της εξίσωσης, δηλαδή τη χρήση συγκεκριμένου αλγορίθμου. |
| Κ1: | Το έργο απαιτεί το σχεδιασμό μιας διαδρομής για την επίλυση της εξίσωσης, δηλαδή την εφαρμογή βασικών γνώσεων (π.χ. πράξεις ρητών, εφαρμογή επιμεριστικής ιδιότητας). |
| Α1: | Η απάντηση είναι μοναδική ανεξάρτητα από τον τρόπο επίλυσης κάθε μαθητή.  |
| C1: | Το πλαίσιο εφαρμογής του έργου είναι καθαρά ενδομαθηματικό. |

**Παράδειγμα 3 (σελ. 44)**

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:



Τι συμπεραίνετε;

|  |  |
| --- | --- |
| Ι1: | Οι τετραγωνικές ρίζες ταξινομούνται στην Άλγεβρα. |
| Η3: | Το έργο απαιτεί επεξήγηση, δηλαδή, την ανάγνωση, τη συσχέτιση και την ερμηνεία των τιμών του πίνακα για τη διεξαγωγή συμπεράσματος. Από τις ειδικότερες περιπτώσεις των συγκεκριμένων αριθμών προκύπτει η γενικευμένη μορφή . |
| Κ1: | Το έργο απαιτεί την εφαρμογή του ορισμού της τετραγωνικής ρίζας. |
| Α1: | Η απάντηση του έργου είναι μοναδική. |
| C1: | Το πλαίσιο εφαρμογής του έργου είναι καθαρά ενδομαθηματικό. |

**Παράδειγμα 4 (σελ. 131)**

Για να σχηματίσει ορθή γωνία με δύο ξύλινα δοκάρια (όπως λέμε για να «γωνιάσει» τα δοκάρια), ένας τεχνίτης μετράει στο ένα δοκάρι ΑΒ = 30 cm και στο άλλο ΑΓ = 40 cm. Στη συνέχεια, τα τοποθετεί κατάλληλα, ώστε να είναι ΒΓ = 50 cm. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί είναι σίγουρος ότι η γωνία που σχηματίζουν τα δοκάρια είναι ορθή;



|  |  |
| --- | --- |
| Ι3: | Το έργο απαιτεί τη γνώση των ορθογωνίων τριγώνων και του αντιστρόφου του Πυθαγορείου θεωρήματος, οπότε ανήκει στη Γεωμετρία. |
| Η4: | Το έργο απαιτεί τον προσδιορισμό ενός μαθηματικού επιχειρήματος που μιλά για τη χρήση μιας συγκεκριμένης μεθόδου για τον έλεγχο μιας ορθής γωνίας σε ένα μη μαθηματικό πλαίσιο. |
| Κ1: | Η επιχειρηματολογία βασίζεται στην άμεση εφαρμογή του αντιστρόφου του Πυθαγόρειου θεωρήματος. |
| Α1: | Το έργο είναι ανοικτού τύπου, αφού ο μαθητής μπορεί να καταλήξει στο συμπέρασμα μέσα από διαφορετικές προσεγγίσεις. Για παράδειγμα ένας μαθητής θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει μοιρογνωμόνιο για να μετρήσει στην περίπτωση αυτή τη γωνία, κάποιος άλλος θα μπορούσε να σχεδιάσει εξωτερικά του τριγώνου τα τετράγωνα που αντιστοιχούν στις πλευρές του ή, εάν έχει αναφερθεί από τον εκπαιδευτικό η αρπεδόνη να κάνει χρήση αυτής. |
| C2: | Το πλαίσιο εφαρμογής του έργου είναι ρεαλιστικό, γιατί σχετίζεται με την καθημερινή ζωή. |

# Αποτελέσματα

### 3.1.1 Αποτελέσματα του κεφαλαίου «Εξισώσεις – Ανισώσεις»

Οι μαθητές της Β΄ γυμνασίου στο πρώτο κεφάλαιο «Εξισώσεις – Ανισώσεις» του Α΄ μέρους του σχολικού βιβλίου καλούνται να αντιμετωπίσουν τις παρακάτω ενότητες: (1.1) Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις, (1.2) Εξισώσεις α΄ βαθμού, (1.3) Επίλυση τύπων, (1.4) Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων και (1.5) Ανισώσεις α΄ βαθμού. Στον πίνακα 3.1 παρουσιάζονται τα ποσοστά των χαρακτηριστικών των αναλυθέντων έργων.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Κεφάλαιο  | Η1 | Η2 | Η3 | Η4 | Κ1 | Κ2 | Κ3 | Α1 | Α2 | Α3 | C1 | C2 | C3 |
| (πλήθος έργων) | Ποσοστό % |
| Εξισώσεις –Ανισώσεις (88) | 26,1 | 65,9 | 4,5 | 3,4 | 68,2 | 31,8 | 0 | 100 | 0 | 0 | 79,5 | 20,5 | 0 |
| H1: Αναπαραστάσεις, H2: Υπολογισμοί, H3: Επεξήγηση, H4: Επιχειρηματολογία, K1: Εφαρμογή βασικών γνώσεων, K2: Συνδέσεις, K3: Συλλογιστική Σκέψη, A1: Κλειστή απάντηση, A2: Ανοικτή απάντηση, A3: Πολλαπλής επιλογής, C1: Ενδομαθηματικό πλαίσιο, C2: Ρεαλιστικό, C3: Αυθεντικό  |

Πίνακας 3.1. Απαιτήσεις αναλυθέντων έργων του κεφαλαίου «Εξισώσεις – Ανισώσεις»

Παρατηρώντας τον παραπάνω πίνακα, αυτό που προκύπτει είναι ότι στα αναλυθέντα έργα της θεματικής ενότητας των «Εξισώσεων – Ανισώσεων» επικρατούν οι δραστηριότητες υπολογισμού και πράξεων (65,9%), οι απαντήσεις κλειστού τύπου (100%) και το ενδομαθηματικό πλαίσιο (79,5%). Επίσης, η πολυπλοκότητα των γνώσεων που απαιτούνται από τους μαθητές για την επιτυχή εκτέλεση των έργων παραμένει σε χαμηλό επίπεδο, δηλαδή στην εφαρμογή βασικών γνώσεων με ποσοστό 68,2%. Αντίθετα, οι επεξηγηματικές και επιχειρηματολογικές δραστηριότητες εμφανίζονται ελάχιστα, με ποσοστά 4,5% και 3,4% αντίστοιχα. Αισθητή γίνεται και η απουσία των έργων που απαιτούν συλλογιστική σκέψη, ανοιχτές απαντήσεις και παρουσιάζονται μέσα σε αυθεντικό πλαίσιο.

Για μια πιο σαφή και αναλυτική εικόνα των αποτελεσμάτων του πρώτου κεφαλαίου της Άλγεβρας παραθέτουμε παρακάτω τον πίνακα ταξινόμησης των αναλυθέντων έργων ανά ενότητα (Πίνακας 3.2). Κάθε γραμμή του πίνακα 3.2 αναφέρεται στις αντίστοιχες ενότητες του κεφαλαίου.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ενότητα(Πλήθος έργων) | Η1 | Η2 | Η3 | Η4 | Κ1 | Κ2 | Κ3 | Α1 | Α2 | Α3 | C1 | C2 | C3 |
| Ποσοστό % |
| 1.1 (14) | 14,3 | 78,6 | 7,1 | 0 | 85,7 | 14,3 | 0 | 100 | 0 | 0 | 85,7 | 14,3 | 0 |
| 1.2 (19) | 10,5 | 78,9 | 0 | 10,5 | 78,9 | 21,1 | 0 | 100 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 |
| 1.3 (20) | 0 | 100 | 0 | 0 | 85 | 15 | 0 | 100 | 0 | 0 | 90 | 10 | 0 |
| 1.4 (16) | 100 | 0 | 0 | 0 | 43,8 | 56,3 | 0 | 100 | 0 | 0 | 31,3 | 68,8 | 0 |
| 1.5 (19) | 15,8 | 63,2 | 15,8 | 5,8 | 47,4 | 52,6 | 0 | 100 | 0 | 0 | 84,2 | 15,8 | 0 |
| H1: Αναπαραστάσεις, H2: Υπολογισμοί, H3: Επεξήγηση, H4: Επιχειρηματολογία, K1: Εφαρμογή βασικών γνώσεων, K2: Συνδέσεις, K3: Συλλογιστική Σκέψη, A1: Κλειστή απάντηση, A2: Ανοικτή απάντηση, A3: Πολλαπλής επιλογής, C1: Ενδομαθηματικό πλαίσιο, C2: Ρεαλιστικό, C3: Αυθεντικό |

Πίνακας 3.2. Απαιτήσεις αναλυθέντων έργων ανά ενότητα

Στην ενότητα (1.1) όπου ο μαθητής εισάγεται στην έννοια της μεταβλητής παρατηρείται ότι δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στους υπολογισμούς και στις πράξεις και στις ενδομαθηματικές καταστάσεις των έργων. Αυτό σημαίνει ότι δεν δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια της μεταβλητής μέσα από καταστάσεις της καθημερινής ζωής.

Στον πίνακα μπορούμε να δούμε, επίσης, ότι στην ενότητα (1.2) «Εξισώσεις α΄ βαθμού» κυριαρχούν οι υπολογιστικές δραστηριότητες, αγγίζοντας το 80% των έργων, καθώς και ότι τα έργα αναφέρονται σε καθαρά ενδομαθηματικές καταστάσεις, χρησιμοποιώντας μόνο συμβολικές αναπαραστάσεις σε ποσοστό 100%. Ωστόσο, υπάρχει και ένα μικρό ποσοστό περίπου το 10% των έργων που απαιτούν αναπαραστάσεις ή επιχειρηματολογία για την επιτυχή εκτέλεση αυτών.

Όσον αφορά στην ενότητα (1.3) «Επίλυση τύπων» το ποσοστό υπολογισμών και πράξεων ανάγεται στο 100% και μόνο το 10% των έργων σχετίζονται με καταστάσεις του πραγματικού κόσμου. Θα περίμενε κανείς στη συγκεκριμένη ενότητα να επιλεχθούν από τη συγγραφική ομάδα έργα τα οποία συνδέουν διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα, για παράδειγμα τα Μαθηματικά με τις Φυσικές επιστήμες, ή πραγματικές καταστάσεις που έχουν νόημα για τους μαθητές βοηθώντας τους να κατανοήσουν τη χρησιμότητα της επίλυσης τύπων ως προς έναν άγνωστο.

Η ενότητα (1.4) «Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων» αποτελείται μόνο από λεκτικά προβλήματα, στα οποία οι μαθητές καλούνται να καταστρώσουν αλγεβρικές εξισώσεις με τον άγνωστο ή τους αγνώστους του προβλήματος. Η διαδικασία μετάφρασης από τη φυσική γλώσσα στην αλγεβρική είναι η μαθηματική δραστηριότητα που κυριαρχεί στην επίλυση των προβλημάτων με ποσοστό 100%, είτε εφαρμόζοντας ο μαθητής βασικές γνώσεις (43,8%) είτε δημιουργώντας συνδέσεις (56,3%). Αξίζει να σημειωθεί, επίσης, ότι περίπου το 70% των προβλημάτων αφορούν ρεαλιστικές καταστάσεις, ενώ για ακόμη μια φορά είναι αισθητή η απουσία των αυθεντικών προβλημάτων, αποτρέποντας του μαθητές από τη διαδικασία εμπλοκής σε καταστάσεις που σχετίζονται με τον πραγματικό κόσμο.

Στις ανισώσεις α΄ βαθμού, όπως και στις προηγούμενες ενότητες, υπερτερούν οι υπολογιστικές δραστηριότητες (63,2%) των έργων, χωρίς όμως να απουσιάζει καμία άλλη δραστηριότητα. Έστω και με μικρή συμμετοχή της τάξεως του 5,8% η επιχειρηματολογία εμφανίζεται στα έργα. Παρατηρείται, επίσης, μια αύξηση στο επίπεδο πολυπλοκότητας των έργων τόσο στις ανισώσεις όσο και στα προβλήματα σε σχέση με τις προηγούμενες ενότητες.

Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι ένα πολύ μεγάλο μέρος των έργων ακολουθούν φορμαλιστικό πνεύμα. Για παράδειγμα, στην ενότητα (1.1), οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες που δίνουν νόημα στις αναγωγές ομοίων όρων και τις απλοποιήσεις αλγεβρικών παραστάσεων, αλλά είναι μετέωρο το κατά πόσο έχουν κατανοήσει την έννοια της μεταβλητής. Στην ενότητα (1.2) που αφορά στην επίλυση εξισώσεων, ενώ αρχικά η εξίσωση οπτικοποιείται μέσα από το μοντέλο της ζυγαριάς ερμηνεύοντας το σύμβολο της ισότητας με την ισορροπία (δραστηριότητα 3, σελ. 16) και πραγματοποιείται μετάβαση από τη ζυγαριά στον αλγεβρικό φορμαλισμό, στη συνέχεια σχεδόν όλες οι ασκήσεις του βιβλίου λύνονται με τον πρακτικό κανόνα «αλλάζω μέλος – αλλάζω πρόσημο», κανόνας που μοιάζει μαγικός για τους μαθητές και τους οδηγεί σε μηχανιστικούς και άνευ νοήματος χειρισμούς. Η δημιουργία και επίλυση εξισώσεων στην ενότητα 1.4 «Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων» με τη μετατροπή λεκτικά διατυπωμένων προβλημάτων σε αλγεβρικές εκφράσεις παρατηρείται σε όλα τα έργα της ενότητας χωρίς όμως την αναμενόμενη ρεαλιστική διατύπωση αυτών. Τα προβλήματα αυτής της ενότητας είτε παρουσιάζουν ρεαλιστικές καταστάσεις στις οποίες εφαρμόζονται τα Μαθηματικά είτε είναι τεχνητές κατασκευές για την καλύτερη κατανόηση της θεωρίας, τα οποία όμως απλώς αντιγράφουν καταστάσεις του πραγματικού κόσμου.



Εικόνα 3.1. Δραστηριότητα 3 του σχολικού βιβλίου της Β΄ Γυμνασίου (σελ. 16)

### 3.1.2 Αποτελέσματα του κεφαλαίου «Πραγματικοί αριθμοί»

Στο δεύτερο κεφάλαιο της Άλγεβρας «Πραγματικοί αριθμοί» οι μαθητές διδάσκονται τις εξής ενότητες: (2.1) Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού, (2.2) Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί και (2.3) Προβλήματα. Ο πίνακας 4.3 παρουσιάζει τα ποσοστά των χαρακτηριστικών των έργων αυτού του κεφαλαίου.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Κεφάλαιο | Η1 | Η2 | Η3 | Η4 | Κ1 | Κ2 | Κ3 | Α1 | Α2 | Α3 | C1 | C2 | C3 |
|  ( πλήθος έργων) | Ποσοστό % |
| Πραγματικοί αριθμοί (50) | 22 | 52 | 8 | 18 | 70 | 22 | 8 | 90 | 0 | 10 | 84 | 16 | 0 |
| H1: Αναπαραστάσεις, H2: Υπολογισμοί, H3: Επεξήγηση, H4: Επιχειρηματολογία, K1: Εφαρμογή βασικών γνώσεων, K2: Συνδέσεις, K3: Συλλογιστική Σκέψη, A1: Κλειστή απάντηση, A2: Ανοικτή απάντηση, A3: Πολλαπλής επιλογής, C1: Ενδομαθηματικό πλαίσιο, C2: Ρεαλιστικό, C3: Αυθεντικό  |

Πίνακας 3.3. Απαιτήσεις αναλυθέντων έργων του κεφαλαίου «Πραγματικοί αριθμοί»

Από τη μελέτη του πίνακα 3.3 προκύπτει ότι το 22% των 50 έργων απαιτεί από τους μαθητές να αναπαριστούν τους πραγματικούς αριθμούς, το 52% των έργων απαιτεί δραστηριότητες υπολογισμού και πράξεων με τους πραγματικούς αριθμούς, το 18% των έργων απαιτεί δραστηριότητες επιχειρηματολογίας ή συλλογισμού, ενώ μόνο το 8% των έργων απαιτεί επεξήγηση ενός δεδομένου πίνακα. Επίσης, τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον πίνακα 3.3 δείχνουν ότι το 70% των έργων είναι έργα χαμηλών γνωστικών απαιτήσεων, το 80% των έργων απαιτεί απαντήσεις κλειστού τύπου και ένα πολύ μεγάλο ποσοστό των έργων περιλαμβάνει ενδομαθηματικές καταστάσεις (84%).

Στον Πίνακα 3.4 παρουσιάζονται αναλυτικά τα ποσοστά των αναλυθέντων έργων για κάθε ενότητα του κεφαλαίου «Πραγματικοί αριθμοί». Ξεκινώντας από την ενότητα (2.1) «Τετραγωνική ρίζα» διαπιστώνουμε ότι επικρατούν οι δραστηριότητες πράξεων και οι τεχνικές υπολογισμού με ποσοστό 72%. Ακολουθεί η δραστηριότητα της επεξήγησης (16%), όπου σε 4 μόνο από τα 25 έργα οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν και να ερμηνεύσουν τα αποτελέσματα πινάκων που σχετίζονται με τις ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών. Στο υπολογιστικό πλαίσιο που αναπτύσσεται η έννοια της τετραγωνικής ρίζας είναι αναμενόμενο τα έργα να παρουσιάζονται μέσα από ενδομαθηματικές καταστάσεις και να απαιτούνται δεξιότητες χαμηλής πολυπλοκότητας.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ενότητα(πλήθος έργων) | Η1 | Η2 | Η3 | Η4 | Κ1 | Κ2 | Κ3 | Α1 | Α2 | Α3 | C1 | C2 | C3 |
| Ποσοστό % |
| 2.1 (25) | 12 | 72 | 16 | 0 | 88 | 12 | 0 | 80 | 0 | 20 | 92 | 8 | 0 |
| 2.2 (12) | 16,7 | 33,3 | 0 | 50 | 66,7 | 25 | 8,3 | 100 | 0 | 0 | 100 | 0 | 0 |
| 2.3 (13) | 46,2 | 30,8 | 0 | 23,1 | 38.5 | 38,5 | 23,1 | 100 | 0 | 0 | 53,8 | 46,2 | 0 |
| H1: Αναπαραστάσεις, H2: Υπολογισμοί, H3: Επεξήγηση, H4: Επιχειρηματολογία, K1: Εφαρμογή βασικών γνώσεων, K2: Συνδέσεις, K3: Συλλογιστική Σκέψη, A1: Κλειστή απάντηση, A2: Ανοικτή απάντηση, A3: Πολλαπλής επιλογής, C1: Ενδομαθηματικό πλαίσιο, C2: Ρεαλιστικό, C3: Αυθεντικό |

Πίνακας 3.4. Απαιτήσεις αναλυθέντων έργων ανά ενότητα

Στην ενότητα (2.2) «Πραγματικοί αριθμοί» οι μαθητές εισάγονται για πρώτη φορά στους άρρητους αριθμούς μέσα από τη μέθοδο των διαδοχικών ρητών προσεγγίσεων. Από την ανάλυση παρατηρούμε ότι η κυρίαρχη μαθηματική δραστηριότητα που σχετίζεται με τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς είναι η επιχειρηματολογία. Στο 50% των έργων ζητείται από τους μαθητές να επιχειρηματολογήσουν υπέρ ή κατά μιας απόφασης ή να καταλήξουν σε ένα συμπέρασμα μέσα από μια σειρά ορθών επιχειρημάτων. Αντίθετα, σε σύγκριση με την προηγούμενη ενότητα, στις υπολογιστικές δραστηριότητες παρατηρείται αισθητή μείωση της τάξεως περίπου 50%. Αξίζει, ωστόσο, να σημειωθεί ότι έστω και σε ένα έργο, όπως για παράδειγμα στη γεωμετρική κατασκευή του άρρητου αριθμού , απαιτείται από τους μαθητές συλλογισμός (Κ3).

Στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με την επίλυση προβλημάτων τα οποία έχουν σχέση με το Πυθαγόρειο θεώρημα και τους άρρητους αριθμούς. Σχεδόν τα μισά από τα προβλήματα παρουσιάζουν ρεαλιστικές καταστάσεις στις οποίες εφαρμόζονται Μαθηματικά, ενώ τα υπόλοιπα παρουσιάζουν αυστηρά γεωμετρικά προβλήματα των Μαθηματικών. Θα είχε ενδιαφέρον να δουν οι μαθητές την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος και των άρρητων όχι μόνο μέσα από τα προβλήματα του σχολικού εγχειριδίου, αλλά και μέσα από προβλήματα στα οποία οι ίδιοι θα συμμετέχουν στις μετρήσεις. Επιπλέον, στο πρόβλημα 2 (σελ. 49) και στην άσκηση 9 (σελ.52) παρατηρείται ότι ενώ τα προβλήματα αυτά είναι ικανά να προκαλέσουν το ενδιαφέρον των μαθητών και να απαιτήσουν από αυτούς να επιχειρηματολογήσουν για την επίλυσή τους, αντίθετα το σχολικό βιβλίο κατευθύνει τους μαθητές δίνοντάς τους το σχεδιάγραμμα το οποίο θα μπορούσαν να δημιουργήσουν μόνοι τους.



Εικόνα 3.2. Άσκηση 9 του σχολικού βιβλίου της Β΄ Γυμνασίου (σελ. 52)

Το κυριότερο συμπέρασμα που αναδεικνύεται μέσα από την ανάλυση αυτού του κεφαλαίου είναι έμφαση που δίνεται στην επιχειρηματολογία των έργων ιδιαίτερα στην ενότητα (2.2) «Πραγματικοί αριθμοί». Το βιβλίο βάζει τον μαθητή στη διαδικασία να καταλήξει σε ένα συμπέρασμα εκφράζοντας ένα σύνολο λογικών αιτιολογήσεων, για παράδειγμα να αιτιολογήσουν ποιοι αριθμοί είναι άρρητοι και ποιοι ρητοί. Ωστόσο, οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της τετραγωνικής ρίζας μέσα από ένα καθαρά υπολογιστικό και ενδομαθηματικό πλαίσιο εφαρμόζοντας βασικές αλγεβρικές δεξιότητες. Στα προβλήματα των άρρητων αριθμών υπερέχουν οι δραστηριότητες αναπαράστασης, ενώ παρακάμπτεται η ευκαιρία για σύνδεση με την πραγματική ζωή.

### 3.1.3 Αποτελέσματα του κεφαλαίου «Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο θεώρημα»

Το πρώτο κεφάλαιο της Γεωμετρίας που αναλύσαμε περιλαμβάνει τις εξής ενότητες: (1.1) Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας, (1.2) Μονάδες μέτρησης επιφανειών, (1.3) Εμβαδά επίπεδων σχημάτων και (1.4) Πυθαγόρειο θεώρημα. Στον πίνακα 3.5 παρουσιάζονται τα ποσοστά των χαρακτηριστικών των έργων στο συγκεκριμένο κεφάλαιο.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Κεφάλαιο | Η1 | Η2 | Η3 | Η4 | Κ1 | Κ2 | Κ3 | Α1 | Α2 | Α3 | C1 | C2 | C3 |
|  (πλήθος έργων) |  Ποσοστό % |
| Εμβαδά-Πυθαγόρειο θεώρημα (57) | 19,3 | 52,6 | 5,3 | 22,8 | 71,9 | 22,8 | 5,3 | 89,5 | 1,8 | 8,8 | 78,9 | 21,1 | 0 |
| H1: Αναπαραστάσεις, H2: Υπολογισμοί, H3: Επεξήγηση, H4: Επιχειρηματολογία, K1: Εφαρμογή βασικών γνώσεων, K2: Συνδέσεις, K3: Συλλογιστική Σκέψη, A1: Κλειστή απάντηση, A2: Ανοικτή απάντηση, A3: Πολλαπλής επιλογής, C1: Ενδομαθηματικό πλαίσιο, C2: Ρεαλιστικό, C3: Αυθεντικό  |

Πίνακας 3.5. Απαιτήσεις αναλυθέντων έργων του κεφαλαίου «Εμβαδά – Πυθαγόρειο θεώρημα»

Παρατηρώντας τον παραπάνω πίνακα, αυτό που προκύπτει είναι ότι στα έργα επικρατούν - με μεγάλη διαφορά - οι υπολογιστικές διαδικασίες, οι απλές συνδέσεις, οι κλειστές απαντήσεις και οι ενδομαθηματικές καταστάσεις. Αναφορικά με τις μαθηματικές δραστηριότητες που απαιτούνται για την εκτέλεση ενός έργου, διαπιστώνουμε ότι οι διαφορές ανάμεσα στα ποσοστά αυτών δεν είναι τόσο μεγάλες. Ειδικότερα, προηγούνται με ποσοστό 52,6% τα έργα που απαιτούν υπολογισμούς και πράξεις, ακολουθούν οι επιχειρηματολογικές δραστηριότητες με το πρωτοφανές ποσοστό 22,8%, οι δραστηριότητες αναπαράστασης με ποσοστό 19,3%, ενώ οι επεξηγηματικές δραστηριότητες εμφανίζονται με ποσοστό μόνο 5,3%. Όσον αφορά τα επίπεδα πολυπλοκότητας γίνεται αντιληπτό ότι ένα πολύ υψηλό ποσοστό των εργασιών, που ξεπερνά το 70%, απαιτεί βασικές γνώσεις και δεξιότητες από τον μαθητή, παραμελώντας αρκετά τη δημιουργία συνδέσεων των γνώσεων και πολύ περισσότερο τη συλλογιστική σκέψη. Χαρακτηριστικό γνώρισμα, επίσης, αυτών των εργασιών είναι ότι κυριαρχούν οι απαντήσεις κλειστού τύπου (89,5%) συγκριτικά με τις απαντήσεις πολλαπλής επιλογής (16,7%), ενώ οι ανοικτές απαντήσεις απουσιάζουν από το σχολικό εγχειρίδιο. Τέλος, παρατηρείται ότι στο σχολικό βιβλίο δίνεται βαρύτητα στα ενδομαθηματικά έργα (78,9%).

Αναλυτικότερα, στην πρώτη ενότητα η έννοια του εμβαδού επιπέδων σχημάτων έχει την έννοια της μέτρησης της έκτασης που καταλαμβάνει ένα επίπεδο σχήμα. Η μέτρηση σε αυτή την περίπτωση είναι μια διαδικασία σύγκρισης της έκτασης που καταλαμβάνει ένα σχήμα σε σχέση με ένα άλλο που λαμβάνεται ως μονάδα. Για την πραγματοποίηση της μέτρησης χρησιμοποιούνται κυρίως γεωμετρικά σχήματα, δηλαδή αναπαραστάσεις σε ποσοστό 83,3%. Μόνο σε μια σπαζοκεφαλιά στο τέλος της ενότητας δίνεται στους μαθητές η δυνατότητα μέσω ενός ρεαλιστικού και ανοικτού τύπου προβλήματος να ερμηνεύσουν τον αυτοσχεδιασμό τους.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ενότητα(πλήθος έργων) | Η1 | Η2 | Η3 | Η4 | Κ1 | Κ2 | Κ3 | Α1 | Α2 | Α3 | C1 | C2 | C3 |
| Ποσοστό % |
| 1.1 (6) | 83,3 | 0 | 16,7 | 0 | 66,7 | 0 | 33,3 | 83,3 | 16,7 | 0 | 100 | 0 | 0 |
| 1.2 (10) | 0 | 90 | 0 | 10 | 90 | 10 | 0 | 80 | 0 | 20 | 90 | 10 | 0 |
| 1.3 (26) | 19,2 | 50 | 7,7 | 23,1 | 61,5 | 34,6 | 3,8 | 92,3 | 0 | 7,7 | 69,2 | 30,8 | 0 |
| 1.4 (15) | 6,7 | 53,3 | 0 | 40 | 80 | 20 | 0 | 93,3 | 0 | 6,7 | 80 | 20 | 0 |
| H1: Αναπαραστάσεις, H2: Υπολογισμοί, H3: Επεξήγηση, H4: Επιχειρηματολογία, K1: Εφαρμογή βασικών γνώσεων, K2: Συνδέσεις, K3: Συλλογιστική Σκέψη, A1: Κλειστή απάντηση, A2: Ανοικτή απάντηση, A3: Πολλαπλής επιλογής, C1: Ενδομαθηματικό πλαίσιο, C2: Ρεαλιστικό, C3: Αυθεντικό |

Πίνακας 3.6. Απαιτήσεις αναλυθέντων έργων ανά ενότητα

Στην επόμενη ενότητα (1.2) «Μονάδες μέτρησης επιφανειών» η κυρίαρχη δραστηριότητα είναι οι μετατροπές μονάδων μέτρησης του εμβαδού με ποσοστό 90%. Αξίζει να σημειωθεί ότι από τις δέκα εργασίες που αναλύσαμε μόνο μία εργασία έχει αυθεντικό πλαίσιο και απαιτεί από τον μαθητή να επιχειρηματολογήσει για την επιλογή της απάντησής του (Άσκηση 6, σελ 118). Ενώ ο μαθητής στις πρώτες εννέα εργασίες καλείται να εκτελέσει υπολογισμούς και πράξεις ξαφνικά του ζητείται να αντιμετωπίσει μία εργασία «εκτός πλαισίου» με αποτέλεσμα να πραγματοποιείται «ρήξη συμβολαίου».



Εικόνα 3.3. Άσκηση 6 του σχολικού βιβλίου της Β΄ Γυμνασίου (σελ. 118)

Σε ένα επόμενο επίπεδο, στην ενότητα (1.3) η μέτρηση του εμβαδού των επίπεδων σχημάτων γίνεται με την βοήθεια αλγεβρικών τύπων στους οποίους εμπλέκονται τα μήκη συγκεκριμένων πλευρών ή αποστάσεων του μετρούμενου σχήματος. Η ανάλυσή μας αποκάλυψε ότι τα μισά έργα αυτής της ενότητας απαιτούν υπολογιστικές δραστηριότητες, ακολουθούν οι επιχειρηματολογικές με ποσοστό 23,1%, στο ίδιο επίπεδο κυμαίνονται οι αναπαραστάσεις (19,2%), ενώ οι ερμηνείες γεωμετρικών αναπαραστάσεων φτάνει μόλις στο 7,7%. Οι περισσότερες από τις εργασίες αυτής της ενότητας έχουν περιορισμένες γνωστικές απαιτήσεις και αναφέρονται σε ενδομαθηματικές καταστάσεις, παρόλο που η ενότητα «προσφέρεται» για ρεαλιστικά προβλήματα και κυρίως για αυθεντικά, τα οποία θα μπορούσαν να εμπλέξουν τους μαθητές σε πραγματικές καταστάσεις.

Στην τελευταία ενότητα του Πυθαγορείου θεωρήματος αναφορικά με τις μαθηματικές δραστηριότητες, τα έργα μοιράζονται ανάμεσα στις αλγεβρικές και υπολογιστικές διαδικασίες με ποσοστό 53,3% και τις επιχειρηματολογικές με ποσοστό 40%, όπου ζητείται από τους μαθητές να αποδείξουν ότι ένα τρίγωνο με γνωστές πλευρές είναι ορθογώνιο. Ωστόσο, απουσιάζουν οι διεργασίες προβληματισμού και η συλλογιστική σκέψη. Η συνήθης δομή των εργασιών είναι να δίνονται τα μήκη δύο πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου και ο μαθητής με τη βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος να υπολογίζει το μήκος της τρίτης πλευράς. Ενώ το Πυθαγόρειο θεώρημα, λοιπόν, αποτελεί πεδίο εφαρμογής σε προβλήματα της καθημερινής ζωής, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι το Πυθαγόρειο θεώρημα εμφανίζεται στο σχολικό εγχειρίδιο ως ένας κανόνας που εφαρμόζεται σε καθαρά ενδομαθηματικό πλαίσιο και δε σχετίζεται με πρακτικά ζητήματα και πραγματικές ανάγκες της ζωής.

Τα έργα, λοιπόν, αυτού του κεφαλαίου είναι υπολογιστικά, ενδομαθηματικά, με χαμηλό επίπεδο γνωστικών απαιτήσεων και κλειστά. Απαιτείται από τους μαθητές η αισθητοποίηση της τυπικής μονάδας μέτρησης επιφανειών, των υποδιαιρέσεων και των πολλαπλάσιων αυτής, καθώς και οι μεταξύ τους σχέσεις να γίνουν κατανοητές μέσα από τη συνεχή εξάσκηση με ασκήσεις μετατροπής από την μια μονάδα μέτρησης στην άλλη. Αντίθετα, στα εμβαδά επίπεδων σχημάτων ζητείται από τους μαθητές να αποδείξουν σχέσεις μεταξύ εμβαδών και να εφαρμόσουν γεωμετρική συλλογιστική υπολογίζοντας εμβαδά μέσα από τη διαμέριση και σύνθεση γεωμετρικών σχημάτων. Και στο Πυθαγόρειο Θεώρημα οι μαθητές καλούνται να επιχειρηματολογήσουν μέσα από την εφαρμογή του αντιστρόφου του Πυθαγορείου θεωρήματος. Αξίζει, τέλος, να σημειωθεί το πολύ χαμηλό ποσοστό των ρεαλιστικών έργων και η απουσία των αυθεντικών στην απόδοση του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

### 3.1.4 Αποτελέσματα του κεφαλαίου «Μέτρηση κύκλου»

Το περιεχόμενο του τρίτου κεφαλαίου της Γεωμετρίας ασχολείται κυρίως με τα κανονικά πολύγωνα και τον κύκλο. Πιο συγκεκριμένα περιλαμβάνει τις εξής ενότητες: (3.1) Εγγεγραμμένες γωνίες, (3.2) Κανονικά πολύγωνα, (3.3) Μήκος κύκλου, (3.4) Μήκος τόξου, (3.5) Εμβαδόν κυκλικού δίσκου, και (3.6) Εμβαδόν κυκλικού τομέα. Στον πίνακα 3.7 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των απαιτήσεων των έργων αυτού του κεφαλαίου.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Κεφάλαιο | Η1 | Η2 | Η3 | Η4 | Κ1 | Κ2 | Κ3 | Α1 | Α2 | Α3 | C1 | C2 | C3 |
| (πλήθος έργων) | Ποσοστό % |
| Μέτρηση κύκλου (89) | 20,2 | 51,7 | 22,5 | 5,6 | 66,3 | 32,6 | 1,1 | 83,1 | 0 | 16,9 | 89,9 | 10,1 | 0 |
| H1: Αναπαραστάσεις, H2: Υπολογισμοί, H3: Επεξήγηση, H4: Επιχειρηματολογία, K1: Εφαρμογή βασικών γνώσεων, K2: Συνδέσεις, K3: Συλλογιστική Σκέψη, A1: Κλειστή απάντηση, A2: Ανοικτή απάντηση, A3: Πολλαπλής επιλογής, C1: Ενδομαθηματικό πλαίσιο, C2: Ρεαλιστικό, C3: Αυθεντικό  |

Πίνακας 3.7. Απαιτήσεις αναλυθέντων έργων του κεφαλαίου Μέτρηση Κύκλου

Το ποσοστό των έργων που απαιτούν υπολογιστικές δραστηριότητες φτάνει το 67,4%, έπεται η ερμηνεία γεωμετρικών αναπαραστάσεων με ποσοστό 19,1%, η μετάφραση λεκτικών προβλημάτων σε αλγεβρικές σχέσεις με ποσοστό 11,2% και τέλος ζητείται από τους μαθητές να επιχειρηματολογήσουν σε ένα πολύ μικρό ποσοστό των έργων της τάξεως του 2,2%. Παρατηρείται, επίσης, ότι ευνοούνται τα έργα χαμηλού γνωστικού επιπέδου με κλειστές κατασκευασμένες απαντήσεις διαμορφωμένες σε ενδομαθηματικές καταστάσεις.

Αναλυτικότερα, στην πρώτη ενότητα δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στις επεξηγηματικές δραστηριότητες, στις οποίες οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν τις σχέσεις μεταξύ εγγεγραμμένων – επίκεντρων γωνιών που προκύπτουν παρατηρώντας τα γεωμετρικά σχήματα και να τις ερμηνεύσουν, με πρωτοφανές ποσοστό 82,4%. Παρόλα αυτά οι εργασίες απαιτούν χαμηλές γνωστικές δεξιότητες και απαντήσεις κλειστού τύπου σε καθαρά ενδομαθηματικό πλαίσιο.

Στην ενότητα των κανονικών πολυγώνων η χρήση σχέσεων και ο συνδυασμός αυτών για τον υπολογισμό των στοιχείων ενός κανονικού πολυγώνου οδηγούν τον μαθητή στην εφαρμογή στοιχειωδών μαθηματικών πράξεων σε παραπάνω από τα μισά έργα της ενότητας. Τρία από τα έργα αναφέρονται στην μετάφραση λεκτικών προτάσεων σε αλγεβρικές σχέσεις. Μόνο σε ένα έργο ζητείται από τους μαθητές να προβληματιστούν, να στοχαστούν και να επιχειρηματολογήσουν για την απόδειξη μιας μαθηματικής πρότασης. Και σε αυτή την ενότητα τα έργα παρουσιάζονται σε αυστηρά ενδομαθηματικό πλαίσιο.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ενότητα(πλήθος έργων) | Η1 | Η2 | Η3 | Η4 | Κ1 | Κ2 | Κ3 | Α1 | Α2 | Α3 | C1 | C2 | C3 |
| Ποσοστό % |
| 3.1 (17) | 0 | 17,6 | 82,4 | 0 | 76,5 | 23,5 | 0 | 76,5 | 0 | 23,5 | 100 | 0 | 0 |
| 3.2 (14) | 21,4 | 57,1 | 14,3 | 7,1 | 78,6 | 14,3 | 7,1 | 78,6 | 0 | 21,4 | 100 | 0 | 0 |
| 3.3 (14) | 35,7 | 57,1 | 7,1 | 0 | 35,7 | 64,3 | 0 | 92,9 | 0 | 7,1 | 64,3 | 35,7 | 0 |
| 3.4 (13) | 15,4 | 69,2 | 0 | 15,4 | 76,9 | 23,1 | 0 | 92,3 | 0 | 7,7 | 100 | 0 | 0 |
| 3.5 (16) | 37,5 | 43,8 | 12,5 | 6,3 | 56,2 | 43,8 | 0 | 81,3 | 0 | 18,8 | 87,5 | 12,5 | 0 |
| 3.6 (15) | 13,3 | 73,3 | 6,7 | 6,7 | 73,3 | 26,7 | 0 | 80 | 0 | 20 | 86,7 | 13,3 | 0 |
| H1: Αναπαραστάσεις, H2: Υπολογισμοί, H3: Επεξήγηση, H4: Επιχειρηματολογία, K1: Εφαρμογή βασικών γνώσεων, K2: Συνδέσεις, K3: Συλλογιστική Σκέψη, A1: Κλειστή απάντηση, A2: Ανοικτή απάντηση, A3: Πολλαπλής επιλογής, C1: Ενδομαθηματικό πλαίσιο, C2: Ρεαλιστικό, C3: Αυθεντικό |

Πίνακας 3.8. Απαιτήσεις αναλυθέντων έργων ανά ενότητα

Στις ενότητες (3.3) «Μήκος κύκλου» και (3.5) «Εμβαδόν κυκλικού δίσκου», στις οποίες δίνεται έμφαση στην αναλογία των μεγεθών μήκος και διάμετρος κύκλου, τετράγωνο ακτίνας και εμβαδό κυκλικού δίσκου, οι μαθητές καλούνται να συνδέσουν γνώσεις των Μαθηματικών οι οποίες όχι μόνο βρίσκονται σε διαφορετικές ενότητες του σχολικού εγχειριδίου, αλλά και σε διαφορετικές θεματικές περιοχές (Άλγεβρα – Γεωμετρία). Αυτό έχει ως συνέπεια να εμφανίζονται ιδιαίτερα αυξημένα τα ποσοστά των έργων, και στις δύο ενότητες, που απαιτούν από τους μαθητές να συνδέσουν την έννοια της αναλογίας με το μήκος και εμβαδό κύκλου. Οι υπολογιστικές δραστηριότητες κατέχουν για ακόμη μια φορά την πρώτη θέση με ποσοστό 57,1% και 43,8% αντίστοιχα και, ενώ θα ήταν αναμενόμενο σε ενότητες όπως αυτή να δίνονται προβλήματα στους μαθητές που θα αφορούν ρεαλιστικές καταστάσεις της καθημερινότητας και θα τους κεντρίζουν το ενδιαφέρον, το ποσοστό των ρεαλιστικών έργων φτάνει στο 35,7% στο μήκος κύκλου και μόλις στο 12,5% το εμβαδόν κυκλικού δίσκου. Αναφορικά με τις μαθηματικές δραστηριότητες παρατηρούνται επίσης αυξημένα ποσοστά στις υπολογιστικές δραστηριότητες και στη χρήση βασικών γνώσεων και δεξιοτήτων. Στην ενότητα (3.4) απουσιάζει εντελώς το ρεαλιστικό πλαίσιο μέσα στο οποίο δίνονται τα έργα στους μαθητές, ενώ στην ενότητα (3.5) εμφανίζεται μόνο σε δύο από τα 15 έργα της ενότητας.

Όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια, οι υπολογιστικές δραστηριότητες, το χαμηλό γνωστικό επίπεδο, οι κλειστές απαντήσεις και τα ενδομαθηματικά έργα υπερτερούν στο κεφάλαιο του Κύκλου. Ακόμα και στις ενότητες, όπως το μήκος κύκλου και το εμβαδόν κυκλικού δίσκου, που προσφέρονται για ρεαλιστικά και κυρίως αυθεντικά έργα παρατηρείται η πολύ μικρή παρουσία των ρεαλιστικών και η απουσία των αυθεντικών έργων. Εξαίρεση, επίσης, αποτελούν τα έργα της ενότητας των εγγεγραμμένων γωνιών όπου ζητείται από τους μαθητές σχεδόν σε όλα τα έργα να ερμηνεύσουν το εκάστοτε σχήμα για να καταλήξουν σε ένα συμπέρασμα.

# Συμπεράσματα – Συζήτηση

Τα αποτελέσματα της έρευνας γενικά δείχνουν ότι τα έργα του εγχειριδίου των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου ευνοούν τις υπολογιστικές και διαδικαστικές δεξιότητες του μαθητή, είναι ενδομαθηματικά, κλειστά και εμφανίζουν χαμηλό επίπεδο γνωστικών απαιτήσεων. Παρατηρείται έλλειψη των έργων που ενισχύουν τις διαδικασίες επιχειρηματολογίας και απόδειξης, που δίνονται σε αυθεντικό ή ρεαλιστικό πλαίσιο και απαιτούν πολλές σωστές απαντήσεις και πολλούς τρόπους να φτάσει κανείς στις σωστές απαντήσεις.

Τα αποτελέσματα, βέβαια, αυτά δεν είναι σύμφωνα με τους σκοπούς και τις επισημάνσεις του ΑΠΣ. Ένας από τους σκοπούς του ΑΠΣ είναι η εξοικείωση με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία, σκοπός που δε συνάδει με τα αποτελέσματα της έρευνας που δείχνουν ότι στο σχολικό εγχειρίδιο δεν καταβάλλεται προσπάθεια να ενσωματωθεί η επιχειρηματολογία και συλλογιστική στα έργα του. Με τα χαμηλά ποσοστά που βρέθηκαν στις δραστηριότητες επιχειρηματολογίας και συλλογιστικής συμφωνούν και οι Vincent and Stacey, (2008), οι οποίοι στην έρευνά τους εντόπισαν προβλήματα που εντάσσονται στην κατηγορία απόδειξη – συλλογιστική μόνο σε έξι από τα εννέα εγχειρίδια σε ποσοστό περίπου 8%.

Επίσης, τα ελάχιστα ρεαλιστικά προβλήματα και ιδιαίτερα η απουσία των αυθεντικών προβλημάτων από το εγχειρίδιο ακυρώνουν το ΑΠΣ που στοχεύει στη σταδιακή ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης των προβλημάτων και αντιμετώπιση πραγματικών καταστάσεων, υποτιμώντας τη σημασία που προσδίδουν τέτοιου είδους προβλήματα στη μάθηση. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας διαπιστώθηκε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των αναλυθέντων έργων είναι έργα κλειστού τύπου και δεν σχετίζονται με τον πραγματικό κόσμο και την καθημερινή ζωή των μαθητών. Τα ευρήματα αυτά συμφωνούν με αυτά των Zhu and Fan, (2006) και του Li (2000), οι οποίοι σύγκριναν σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών της Κίνας και των ΗΠΑ.

Το σίγουρο πάντως είναι ότι το σχολικό εγχειρίδιο υπηρετεί το ΑΠΣ μόνο στο ότι καλεί τους μαθητές να αποκτήσουν άνεση στις υπολογιστικές δεξιότητες μέσα από την επανάληψη των λυμένων εφαρμογών και την εξάσκηση στις άλυτες ασκήσεις. Η έμφαση που δίνεται στις υπολογιστικές δραστηριότητες των έργων συνάδει με τα αποτελέσματα της έρευνας των Dole and Shield (2008), των οποίων η έρευνα αποκάλυψε την υπεροχή των διαδικασιών υπολογισμού όσον αφορά την αναλογική συλλογιστική στα αυστραλιανά εγχειρίδια.

Στο σχολικό εγχειρίδιο δίνεται βαρύτητα στα υπολογιστικά έργα, δηλαδή σε έργα με χαμηλές γνωστικές απαιτήσεις. Τα ευρήματα αυτά έρχονται σε συμφωνία με τις έρευνες των Vincent and Stacey, (2008), της Brändström (2005) και των Wijaya, van den Heuvel-Panhuizen, & Doorman, (2015). Ιδιαίτερα, οι Wijaya et al. (2015) βρήκαν ότι λιγότερο από το 3% των εργασιών των ινδονησιακών βιβλίων αναφέρονται σε έργα με υψηλές γνωστικές απαιτήσεις, δηλαδή την κοινοποίηση περίπλοκων επιχειρημάτων και σύνθετων συλλογισμών (reflective thinking), γεγονός που έρχεται σε απόλυτη συμφωνία με τα ευρήματα της παρούσας έρευνας, καθώς το ποσοστό έργων υψηλών γνωστικών απαιτήσεων στο σχολικό βιβλίο Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου είναι πολύ μικρό.

Τέλος, η ανάλυση του σχολικού εγχειριδίου των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου θα μπορούσε να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς να οργανώσουν πιο αποτελεσματικά τη διδασκαλία τους, γνωρίζοντας τα δυνατά και αδύνατα σημεία του εγχειρίδιου. Επιπλέον, τα ευρήματα της παρούσας έρευνας μπορούν να αξιοποιηθούν από τους συγγραφείς του βιβλίου ώστε να προβούν σε μια πιο βελτιωμένη έκδοση, εστιάζοντας στις αδυναμίες που εντοπίστηκαν παραπάνω.

# Βιβλιογραφία

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2008). Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου. Βιβλίο εκπαιδευτικού. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2008). Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου. Βιβλίο μαθητή. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Brändström, A. (2005). *Differentiated tasks in mathematics textbooks: An analysis of the levels of difficulty* (Doctoral dissertation, Luleå tekniska universitet).

Dole, S., & Shield, M. (2008). The capacity of two Australian eighth-grade textbooks for promoting proportional reasoning. *Research in Mathematics Education*, *10*(1), 19-35.

Glasnovic Gracin, D. (2018). Requirements in mathematics textbooks: a five-dimensional analysis of textbook exercises and examples. *International journal of mathematical education in science and technology*, *49*(7), 1003-1024.

Li, Y. (2000). A comparison of problems that follow selected content presentations in American and Chinese mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 234-241.

Vincent, J., & Stacey, K. (2008). Do mathematics textbooks cultivate shallow teaching? Applying the TIMSS video study criteria to Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Mathematics Education Research Journal*, *20*(1), 82-107.

Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Doorman, M. (2015). Opportunity to learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational studies in Mathematics*, *89*(1), 41-65.

Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *4*(4), 609-626.