

## ΟΙ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΦΥΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΕΠΙΡΡΟΕΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥΣ

*Χαράλαμπος Λεμονίδης*  
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας/ ΠΤΔΕ Φλώρινας

---

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι αντιλήψεις για τη φύση και το ρόλο των μαθηματικών που υπάρχουν στην κοινωνία μας έχουν μια σημαντική επίδραση στην ανάπτυξη των προγραμμάτων των σχολικών μαθηματικών, τη διδασκαλία και την έρευνα. Η έρευνα δείχνει ότι αυτές οι διαφορετικές αντιλήψεις έχουν επίδραση στους τρόπους με τους οποίους οι εκπαιδευτικοί και οι μαθηματικοί προσεγγίζουν τη διδασκαλία και την ανάπτυξη των μαθηματικών. Κάποιοι βλέπουν τα μαθηματικά ως μια στατική επιστήμη που αναπτύσσεται αφηρημένα. Άλλοι βλέπουν τα μαθηματικά ως μια δυναμική επιστήμη, που αλλάζει συνεχώς, ως αποτέλεσμα των νέων ανακαλύψεων από τον πειραματισμό και την εφαρμογή. Η συζήτηση για τη φύση των μαθηματικών χρονολογείται από τον 4ο π.Χ. αιώνα όπου μεταξύ των πρώτων που συνέβαλαν σε αυτόν τον διάλογο ήταν ο Πλάτωνας και ο μαθητής του ο Αριστοτέλης. Τα μαθηματικά πρέπει να θεωρηθούν ως μια ανθρώπινη δραστηριότητα, μια δραστηριότητα που δεν οδηγείται στενά από καμία σχολή σκέψης. Τα μαθηματικά αντικείμενα ανακαλύπτονται ή δημιουργούνται από τους ανθρώπους. Δεν δημιουργούνται αυθαίρετα, αλλά προκύπτουν από τη δραστηριότητα με τα ήδη υπάρχουσα μαθηματικά αντικείμενα, και από τις ανάγκες της επιστήμης και της καθημερινής ζωής.

---

### ΛΕΞΕΙΣ – ΚΛΕΙΔΙΑ

*Φύση των Μαθηματικών, Φορμαλισμός, Διδασκαλία των Μαθηματικών*

---

## 1. Τα μαθηματικά και η διδασκαλία τους

Διδακτική των μαθηματικών είναι ο επιστημονικός κλάδος που μελετά τις διαδικασίες της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών. Βρίσκεται στην τομή επιστημονικών αντικειμένων όπως η Ψυχολογία, η Κοινωνιολογία, η Γλωσσολογία, η Επιστημολογία, η Ανθρωπολογία και η Γνωστική Επιστήμη. Τα μαθηματικά αποτελούσαν μέρος της εκπαίδευσης ακόμη και στους πιο παλιούς πολιτισμούς, όπως των Αιγυπτίων, των Ινδών, των Ελλήνων, των Ρωμαίων κτλ. Για παράδειγμα, πήλινες πινακίδες από την αρχαία Βαβυλωνία (γύρω στο 1900 π.Χ. έως το 1600 π.Χ.), δείχνουν ότι αναμένεται από τους μαθητές στο σχολείο να λύσουν προβλήματα που αφορούν σε τετραγωνικά πολυώνυμα.<sup>1</sup> Από το 1115 π.Χ., οι υποψήφιοι για την κινεζική δημόσια υπηρεσία έπρεπε να περάσουν μια εξέταση στην αριθμητική.<sup>2</sup> Στον Μένωνα του Πλάτωνα, τον πέμπτο αιώνα π.Χ., όπου ο Σωκράτης βοήθησε το αγόρι σκλάβο να ανακαλύψει το διπλασιασμό του εμβαδού ενός τετραγώνου.

Αν και τα μαθηματικά αποτελούν ένα αντικείμενο που διδάσκεται και μαθαίνεται για χιλιάδες χρόνια, μόλις τον προηγούμενο αιώνα άρχισε να μελετάτε συστηματικά και σοβαρά η διδασκαλία και η μάθηση των μαθηματικών. Το 17<sup>ο</sup> αιώνα στο Πανεπιστήμιο του Aberdeen (1613) ιδρύεται έδρα Μαθηματικών και στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης (1619) έδρα Γεωμετρίας. Το 18<sup>ο</sup> και 19<sup>ο</sup> αιώνα η βιομηχανική επανάσταση οδηγεί σε μεγάλη αύξηση του αστικού πληθυσμού, και γεννάται η ανάγκη για βασικές αριθμητικές και γεωμετρικές γνώσεις. Έτσι, μέσα στα νέα λαϊκά εκπαιδευτικά συστήματα τα μαθηματικά παίρνουν κεντρική θέση στα αναλυτικά προγράμματα και από τον 20<sup>ο</sup> αιώνα κατέχουν ένα σημαντικό μέρος τους σε όλες τις ανεπτυγμένες χώρες. Μόνο κατά τη διάρκεια του δέκατου ένατου αιώνα, όπου ωστόσο, εγκαθιδρύθηκαν τα εθνικά εκπαιδευτικά συστήματα και η κατάρτιση των εκπαιδευτικών μεταφέρθηκε σε κολέγια και πανεπιστήμια, οι άνθρωποι αρχίζουν να αυτοπροσδιορίζονται ως εκπαιδευτικοί των μαθηματικών και άρχισαν να διεξάγουν έρευνα ως μέρος της ακαδημαϊκής τους ταυτότητας.<sup>3</sup>

Μόλις το 1906 χορηγείται το πρώτο διδακτορικό στη μαθηματική εκπαίδευση - στο Lambert L. Jackson και Alva W. Stamper, οι μαθητές του David Eugene Smith στο Teachers College, Columbia University.<sup>4</sup> Μέσα στις επόμενες δεκαετίες, η έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση άρχισε σταδιακά να διεξάγεται σε αρκετές χώρες, προσφέρθηκαν διαλέξεις στη μαθηματική εκπαίδευση και καθιερώθηκαν μεταπτυχιακά προγράμματα στη μαθηματική εκπαίδευση στα πανεπιστήμια. Από τότε ο χώρος της εκπαίδευσης των μαθηματικών αναπτύσσεται με την δημιουργία εξειδικευμένων επιστημονικών περιοδικών και την πραγματοποίηση διεθνών

<sup>1</sup> Hoyrup (1994: 4-9).

<sup>2</sup> Kilpatrick (1993: 22).

<sup>3</sup> Kilpatrick (1992, 2008).

<sup>4</sup> Donoghue (2001).

συνεδρίων. Μπορούμε να πούμε ότι τις τελευταίες δεκαετίες αποτελεί έναν επιστημονικό χώρο με αρκετά σημαντική δυναμική και ανάπτυξη με αρκετά μεγάλο αριθμό και συνεχώς αυξανόμενο διεθνών και εθνικών θεσμών. Στη χώρα μας η εκπαίδευση των μαθηματικών έχει μεγάλη δυναμική ανάπτυξης και ένας σημαντικός αριθμός ειδικευμένων επιστημόνων ασχολείται με αυτήν.

Τη δεκαετία του 80 άρχισαν να φτάνουν στην Ελλάδα από το εξωτερικό οι πρώτοι επιστήμονες ειδικευμένοι στη διδακτική των μαθηματικών. Σήμερα οι περισσότεροι επιστήμονες της διδακτικής των μαθηματικών βρίσκονται στα Παιδαγωγικά Τμήματα και πολύ λιγότεροι σε Τμήματα Μαθηματικών. Υπάρχει ένας μικρός αριθμός περιοδικών που δημοσιεύει έρευνες που πραγματοποιούνται στην Ελλάδα. Το 2005 ιδρύθηκε η Ένωση Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ), η οποία αριθμεί κάποιες δεκάδες μέλη. Υπάρχουν μεταπτυχιακά προγράμματα με κατεύθυνση τη διδακτική των Μαθηματικών σε Αθήνα και Θεσσαλονίκη αλλά και σε αρκετά άλλα πανεπιστήμια της Ελλάδας.<sup>5</sup>

## 2. Αντιλήψεις για τη φύση των μαθηματικών

Οι αντιλήψεις για τη φύση και το ρόλο των μαθηματικών που υπάρχουν στην κοινωνία μας έχουν μια σημαντική επίδραση στην ανάπτυξη των προγραμμάτων των σχολικών μαθηματικών, τη διδασκαλία και την έρευνα. Η έρευνα δείχνει ότι αυτές οι διαφορετικές αντιλήψεις έχουν επίδραση στους τρόπους με τους οποίους οι εκπαιδευτικοί και οι μαθηματικοί προσεγγίζουν τη διδασκαλία και την ανάπτυξη των μαθηματικών. Κάποιοι βλέπουν τα μαθηματικά ως μια στατική επιστήμη που αναπτύσσεται αφηρημένα. Άλλοι βλέπουν τα μαθηματικά ως μια δυναμική επιστήμη, που αλλάζει συνεχώς, ως αποτέλεσμα των νέων ανακαλύψεων από τον πειραματισμό και την εφαρμογή.

Η συζήτηση για τη φύση των μαθηματικών χρονολογείται από τον 4<sup>ο</sup> π.Χ. αιώνα όπου μεταξύ των πρώτων που συνέβαλαν σε αυτόν τον διάλογο ήταν ο Πλάτωνας και ο μαθητής του ο Αριστοτέλης. Η θέση του Πλάτωνα ήταν ότι τα αντικείμενα των μαθηματικών έχουν μια αυθύπαρκτη ύπαρξη στον εξωτερικό κόσμο, πέρα από το μυαλό. Με τον τρόπο αυτό, ο Πλάτων κάνει σαφή διάκριση μεταξύ των ιδεών του νου και των αναπαραστάσεων τους που γίνονται αντιληπτές από τον εξωτερικό κόσμο μέσω των αισθήσεων. Αυτή η προωθημένη θέση για τα μαθηματικά ως μια αφηρημένη διανοητική δραστηριότητα στα εξωτερικά υπάρχοντα αντικείμενα που έχουν μόνο αναπαραστάσεις στον κόσμο των αισθήσεων παρατηρείται επίσης και στις συζητήσεις του Πλάτωνα στα πέντε κανονικά στερεά στον Τίμαιο. Στον Τίμαιο, ο Πλάτωνας παρέχει μια λεπτομερή αλλά υποθετική ιστορία για το πώς ο φυσικός κόσμος κατασκευάστηκε γεωμετρικά, από τα πέντε επονομαζόμενα πλατωνικά στερεά: τετράεδρο (πυραμίδα), οκτάεδρο, εξαέδρο (κύβος), εικοσάεδρο, δωδεκάεδρο. Ο Πλάτωνας πίστευε ότι τα θεωρήματα της γεωμετρίας είναι αληθή ή ψευδή αντικειμενικά

---

<sup>5</sup> Λεμονίδης (2007).

ανεξάρτητα από το μυαλό του ανθρώπου, της γλώσσας του και όλων των υπολοίπων χαρακτηριστικών των μαθηματικών.<sup>6</sup> Ο Πλάτωνας θαύμαζε τα μαθηματικά και όπως αναφέρει ο G. Vlastos, (1991: 107), ο Πλάτωνας «μπορούσε να συναναστρέφεται με άνεση στην Ακαδημία τους καλύτερους μαθηματικούς της εποχής του συμμεριζόμενος και ενθαρρύνοντας τον ενθουσιασμό τους για τη δουλειά τους».

Η άποψη του Αριστοτέλη για τα μαθηματικά δεν βασίζονταν σε μια θεωρία ενός εξωτερικού, ανεξάρτητου, μη παρατηρήσιμου σώματος της γνώσης. Αντίθετα, βασίζονταν στη βιωμένη πραγματικότητα, όπου η γνώση αποκτάται από τον πειραματισμό, την παρατήρηση, και την αφαίρεση. Η άποψη αυτή υποστηρίζει την αντίληψη ότι κάποιος κατασκευάζει τις σχέσεις που είναι συνυφασμένες σε μια δεδομένη μαθηματική κατάσταση. Κατά την άποψη του Αριστοτέλη, η κατασκευή μιας μαθηματικής ιδέας έρχεται μέσα από τις εξιδανικεύσεις που πραγματοποιούνται από τον μαθηματικό, ως αποτέλεσμα της εμπειρίας με τα αντικείμενα. Ο Αριστοτέλης προσπάθησε να κατανοήσει τις μαθηματικές σχέσεις μέσα από την συλλογή και την ταξινόμηση των εμπειρικών αποτελεσμάτων που προέρχονται από πειράματα και παρατηρήσεις και, στη συνέχεια, από την αφαίρεση ενός συστήματος για να εξηγήσει τις εγγενείς σχέσεις στα δεδομένα. Έτσι, τα έργα και οι ιδέες του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη μορφοποιούν δύο από τα μεγαλύτερα αντίθετα θέματα σχετικά με τη φύση των μαθηματικών.<sup>7</sup>

Από τον Μεσαίωνα, το έργο του Αριστοτέλη έγινε γνωστό για τη συμβολή του στη λογική και τη χρήση του για την τεκμηρίωση επιστημονικών ισχυρισμών. Αν και αυτό δεν ήταν αντίθετο προς τον τρόπο με τον οποίο ο Αριστοτέλης είχε χρησιμοποιήσει τις μεθόδους του λογικού συλλογισμού, όσοι χρησιμοποίησαν τις αρχές του αυτές τις χρησιμοποίησαν συχνά για να επιχειρηματολογήσουν εναντίον της παραγωγής των αποδεικτικών στοιχείων από εμπειρικές έρευνες. Ο Αριστοτέλης χάραξε καθαρές γραμμές μεταξύ των ιδεατών μορφών που οραματίστηκε ο Πλάτωνας και των εμπειρικών τους επιτευγμάτων στα κοσμικά αντικείμενα.

Ο Καρτέσιος εργάστηκε για να κινήσει τα μαθηματικά πίσω στην πορεία της αφαίρεσης από τα αποδεκτά αξιώματα. Αν και ο ίδιος πειραματίζεται σε βιολογικά θέματα, ο Καρτέσιος απέρριψε την είσοδο από τον πειραματισμό και τις αισθήσεις σε θέματα μαθηματικών, γιατί θα μπορούσε ενδεχομένως να παραπλανούν αυτόν που τα εκλαμβάνει. Η θεώρηση του Καρτέσιου για τα μαθηματικά τα διαχωρίζει από τις αισθήσεις. Αυτή η πάλη μεταξύ των ορθολογιστών και των πειραματιστών επηρεάζει όλες τις κατευθύνσεις της επιστήμης σε όλη τη διάρκεια του 17<sup>ου</sup> και 18<sup>ου</sup> αιώνα. Ο γερμανός φιλόσοφος Ιμμάνουελ Καντ έφερε τη συζήτηση για τη φύση των μαθηματικών, κυρίως για τη φύση της γεωμετρίας, πίσω στο επίκεντρο με το έργο του *Κριτική του Καθαρού Λόγου* (1952). Ενώ ο ίδιος επιβεβαίωσε ότι όλα τα αξιώματα και τα θεωρήματα των μαθηματικών ήταν αλήθειες, είχε την άποψη

<sup>6</sup> Boyer (1968), Shapiro (2000).

<sup>7</sup> Shapiro (2000).

ότι η φύση του χώρου που αντιλαμβανόμαστε ήταν Ευκλείδεια και ότι το περιεχόμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ήταν *a priori* κατανοητό από τον ανθρώπινο νου. Αυτό ήταν σε άμεση αντίθεση με τις αναδυόμενες αντιλήψεις της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας.<sup>8</sup>

Η καθιέρωση της συνέπειας της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας, στα μέσα της δεκαετίας του 1800 ελευθέρωσε τελικά τα Μαθηματικά από τον περιοριστικό ζυγό ενός ενιαίου συνόλου αξιωμάτων που πιστεύεται ότι είναι το μοναδικό μοντέλο για τον εξωτερικό κόσμο. Η ύπαρξη των συνεπών μη Ευκλείδειων γεωμετριών έδειξε τη δύναμη του μυαλού του ανθρώπου να κατασκευάζει νέες μαθηματικές δομές, απαλλαγμένες από τα όρια ενός εξωτερικά υφιστάμενου κόσμου που ελέγχει.<sup>9</sup> Αυτή η συναρπαστική ανακάλυψη, έφερε μαζί της μια νέα έννοια της «αλήθειας», που ήταν θαμμένη στην αποδοχή ενός αξιώματος ή ένα σύνολο αξιωμάτων που ορίζει ένα μοντέλο για μια περιοχή της έρευνας. Οι μαθηματικοί αμέσως άρχισαν να εφαρμόζουν τη νέα αυτή ελευθερία και την αξιωματική μέθοδο για τη μελέτη των μαθηματικών.

Οι τρεις μεγάλες σχολές σκέψης—του λογικισμού, του ιντουισιονισμού και του φορμαλισμού—που δημιουργήθηκαν στις αρχές της δεκαετίας του 1900 για να αντιμετωπίσουν τα παράδοξα που ανακαλύφθηκαν στα τέλη του 19ου αιώνα προχώρησαν τη συζήτηση για τη φύση των μαθηματικών, αλλά καμία από αυτές δεν παρείχε μια ευρέως υιοθετημένη θεμελίωση για τη φύση των μαθηματικών. Και οι τρεις τους είχαν την τάση να βλέπουν τα περιεχόμενα των μαθηματικών ως προϊόντα.

Η πρώτη ήταν η Σχολή του λογικισμού, που ιδρύθηκε από τον Γερμανό μαθηματικό Gottlob Frege το 1884. Αυτή η σχολή, μια απόφυση της Πλατωνικής Σχολής, έθεσε ως στόχο να δείξει ότι οι ιδέες των μαθηματικών θα μπορούσε να θεωρηθούν ως ένα υποσύνολο των ιδεών της λογικής. Οι υποστηρικτές της λογικισμού έθεσαν ως στόχο να αποδείξουν ότι οι μαθηματικές προτάσεις θα μπορούσαν να εκφραστούν ως εντελώς γενικές προτάσεις των οποίων η αλήθεια ακολουθείται από τη μορφή τους και όχι από την ερμηνεία τους σε μια συγκεκριμένη ρύθμιση του πλαισίου.

Οι οπαδοί του Ολλανδού μαθηματικού L. E. J. Brouwer, από την άλλη πλευρά, δεν δέχθηκαν την ύπαρξη οποιασδήποτε ιδέας των κλασικών μαθηματικών, χωρίς να μπορούσε να κατασκευαστεί μέσω ενός συνδυασμού των σαφών επαγωγικών βημάτων από τις πρώτες αρχές. Τα μέλη της σχολής σκέψης του Brouwer, που ονομάζονται ιντουισιονιστές, τους αφορούσε ιδιαίτερα η εμφάνιση των παραδόξων στη θεωρία συνόλων και οι πιθανές επιπτώσεις τους για το σύνολο των κλασικών μαθηματικών. Σε αντίθεση με τους λογικιστές, οι οποίοι δέχθηκαν τα περιεχόμενα των κλασικών μαθηματικών, οι ιντουισιονιστές δέχονταν μόνο τα μαθηματικά που θα μπορούσαν να αναπτυχθούν από τους φυσικούς αριθμούς προωθούμενα από τις διανοητικές δραστηριότητες των

<sup>8</sup> Davis (2001).

<sup>9</sup> Eves (1981), Kline (1972, 1985), Korner (1960).

κατασκευαστικών αποδείξεων. Η επιμονή στην κατασκευή τοποθετεί τα μαθηματικά των ιντουισιονιστών στην Αριστοτελική παράδοση. Αυτή η άποψη θεωρεί τη λογική ως ένα υποσύνολο των μαθηματικών. Τα επιτεύγματα των ιντουισιονιστών οδήγησαν σε μια σειρά θεωρημάτων και αντιλήψεων διαφορετικών από εκείνα των κλασικών μαθηματικών.

Η τρίτη αντίληψη των μαθηματικών εμφανίζεται κοντά στην αρχή του 20ου αιώνα και είναι αυτή του φορμαλισμού. Η σχολή αυτή διαμορφώθηκε από τον Γερμανό μαθηματικό David Hilbert. Οι απόψεις του Hilbert, όπως και αυτές του Brouwer, ήταν περισσότερο σύμφωνες με την Αριστοτελική παράδοση από ό, τι με τον Πλατωνισμό. Ο Hilbert δεν δέχτηκε την καντιανή έννοια ότι η δομή της αριθμητικής και της γεωμετρίας υπήρχαν ως περιγραφές μιας πρότερης γνώσης στον ίδιο βαθμό που το έκανε και ο Brouwer. Ωστόσο, ο ίδιος έβλεπε τα μαθηματικά, να προκύπτουν από τη διαίσθηση που βασίζεται στα αντικείμενα που θα μπορούσαν τουλάχιστον να θεωρηθούν ότι έχουν συγκεκριμένες αναπαραστάσεις στο μυαλό. Η φορμαλιστική παράδοση διατηρεί μια ισχυρή επίδραση στην ανάπτυξη των μαθηματικών. Η αντίληψη των μαθηματικών που έχει ο εκπαιδευτικός επιδρά ισχυρά στον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζει τα μαθηματικά στην τάξη.<sup>10</sup> Ένας δάσκαλος που έχει μια φορμαλιστική φιλοσοφία θα παρουσιάσει το περιεχόμενο σε μια δομική μορφή μέσα από μια θεωρητική γλώσσα δημιουργώντας αντίστοιχες αντιλήψεις.<sup>11</sup> Τα μαθηματικά πρέπει να θεωρηθούν ως μια ανθρώπινη δραστηριότητα, μια δραστηριότητα που δεν οδηγείται στενά από καμία σχολή σκέψης. Τα μαθηματικά αντικείμενα ανακαλύπτονται ή δημιουργούνται από τους ανθρώπους. Δεν δημιουργούνται αυθαίρετα, αλλά προκύπτουν από τη δραστικότητα με τα ήδη υπάρχοντα μαθηματικά αντικείμενα, και από τις ανάγκες της επιστήμης και της καθημερινής ζωής. Μόλις δημιουργηθούν, τα μαθηματικά αντικείμενα έχουν ιδιότητες οι οποίες είναι καλά προσδιορισμένες, τις οποίες μπορεί να έχουμε μεγάλη δυσκολία να ανακαλύψουμε, αλλά οι οποίες είναι διαθέσιμες ανεξάρτητα από τις γνώσεις μας γι' αυτές.<sup>12</sup>

### 3. Οι σύγχρονες τάσεις για τη διδασκαλία των μαθηματικών

Η σύγχρονη λογική για τη διδασκαλία των μαθηματικών, αλλά και των άλλων αντικειμένων είναι η λογική της κατασκευής και της ανακάλυψης της γνώσης από τον ίδιο τον μαθητή μέσα από τη δράση και τη διαχείριση κατάλληλων καταστάσεων. Δηλαδή ο μαθητής μέσα από τη δράση και με βάση τις προϋπάρχουσες γνώσεις του οδηγείται στην ανακάλυψη και κατασκευή της νέας γνώσης. Στον αντίποδα βρίσκεται η παραδοσιακή αντίληψη και πρακτική σύμφωνα με την οποία πρώτα παρουσιάζεται η νέα γνώση και μετά καλούνται οι

<sup>10</sup> Cooney (1985).

<sup>11</sup> Hersh (1986).

<sup>12</sup> Hersh (1986, σ. 22).

μαθητές μέσα από ασκήσεις εμπέδωσης και εφαρμογής να κατακτήσουν αυτή τη γνώση. Στη σύγχρονη λογική λαμβάνονται σοβαρά υπόψη τα συναισθήματα του μαθητή, η στάση του απέναντι στα μαθηματικά, αλλά και τα κίνητρα για μάθηση. Οι καταστάσεις, τα πλαίσια αλλά και τα μέσα με τα οποία διδάσκονται τα μαθηματικά θα πρέπει να δημιουργούν κίνητρα για μάθηση.

Τα τελευταία χρόνια πραγματοποιήθηκαν αρκετές έρευνες, κυρίως σε χώρες του Τρίτου κόσμου, για να εξεταστεί η σχέση των μαθηματικών που εφαρμόζονται στην καθημερινή ζωή και των μαθηματικών του σχολείου.<sup>13</sup> Βρέθηκε ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν με διαφορετικό τρόπο τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή από ότι στο σχολείο και δεν υπάρχει μεταφορά των μεθόδων που χρησιμοποιούνται στην καθημερινότητα μέσα στο σχολείο. Πραγματοποιήθηκαν επίσης έρευνες σχετικά με την χρήση των μαθηματικών σε διάφορα επαγγέλματα όπως των νοσοκόμων,<sup>14</sup> των μαραγκών,<sup>15</sup> των πολιτικών μηχανικών<sup>16</sup> και όλες σχεδόν κατέληξαν σε ένα παρόμοιο συμπέρασμα: ότι οι περισσότεροι ενήλικοι χρησιμοποιούν τα μαθηματικά για να κατανοήσουν τις καταστάσεις με τέτοιους τρόπους που διαφέρουν ριζικά από εκείνους των μαθηματικών του σχολείου.

Στην προσπάθεια να γεφυρωθεί το χάσμα μεταξύ των μαθηματικών του σχολείου και των μαθηματικών της καθημερινής ζωής σε παγκόσμιο επίπεδο έχουν εφαρμοστεί καινοτόμα αναλυτικά προγράμματα όπως για παράδειγμα τα Standards 2000 στην Αμερική, το πρόγραμμα Numeracy στην Αγγλία, τα ρεαλιστικά μαθηματικά της Ολλανδίας, το πρόγραμμα στο πανεπιστήμιο του Chicago (Everyday Mathematics)<sup>17</sup> κ.ά. Με βάση τη λογική του Vygotsky (1993) ότι η μάθηση είναι και μια κοινωνική διαδικασία που συντελείται μέσα σ' ένα συγκεκριμένο κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο, πραγματοποιήθηκαν πολλές έρευνες σχετικά με τη γλώσσα και τα μαθηματικά αλλά και την επικοινωνία των Μαθηματικών μέσα στην τάξη. Ένας μεγάλος αριθμός ερευνών μελέτησε τη μάθηση των μαθηματικών ως μια συλλογική διεργασία σ' ένα κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο, παρά ως μια διαδικασία που λαμβάνει χώρα μόνο μέσα στο μυαλό ενός ατόμου.<sup>18</sup> Αυτοί οι ερευνητές υποθέτουν ότι οι μαθηματικές ιδέες των μαθητών αναπτύσσονται μέσω των επικοινωνιακών πρακτικών τους<sup>19</sup> ή των διαλογικών αλληλεπιδράσεων<sup>20</sup> με τα μέλη της τάξης.

---

<sup>13</sup> Lave (1977), Saxe (1991), Nunes et al. (1993)

<sup>14</sup> Hoyles et al. (2001).

<sup>15</sup> Millroy (1992).

<sup>16</sup> Hall & Stevens (1995).

<sup>17</sup> Isaacs et al. (1998).

<sup>18</sup> Βλ. για παράδειγμα Cobb & Bauersfeld (1995).

<sup>19</sup> Roschelle (1996).

<sup>20</sup> Wertsch (1985).

#### 4. Στοιχεία από τη σημερινή κατάσταση της διδασκαλίας των μαθηματικών

Στο σημείο αυτό θα κάνω μια προσπάθεια να παρουσιάσω την σημερινή κατάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών στην Ελλάδα. Αρχικά θα πρέπει να δούμε κάποια στοιχεία από το γενικότερο πλαίσιο της εκπαίδευσης στην Ελλάδα μέσα στο οποίο τοποθετείται και η διδασκαλία των μαθηματικών. Η Ελλάδα αν και είναι μέλος της Ευρωπαϊκής Ένωσης έχει δομές και λειτουργίες στην εκπαίδευση που υπολείπονται των άλλων αναπτυγμένων ευρωπαϊκών χωρών. Κάποια παραδείγματα είναι το συγκεντρωτικό σύστημα και η έλλειψη πολιτικής συνεννόησης, η μη χρήση στην πράξη των προγραμμάτων σπουδών αλλά του ενός και μοναδικού σχολικού βιβλίου, η έλλειψη επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών, κ.ά.

Θα πρέπει να πούμε επίσης ότι δεν είναι εύκολο να διδάξει κάποιος τα μαθηματικά με έναν τρόπο ελκυστικό και προσαρμοσμένο στους μαθητές. Μόνο οι μαθηματικές γνώσεις του εκπαιδευτικού δεν αρκούν, χρειάζεται παιδαγωγικές και ειδικές διδακτικές γνώσεις για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Η παραδοσιακή άποψη για τη διδασκαλία των μαθηματικών θεωρεί ότι η καλή γνώση των μαθηματικών από την πλευρά του εκπαιδευτικού είναι ικανή για μια καλή διδασκαλία των μαθηματικών. Η καλή γνώση βέβαια των μαθηματικών είναι αναγκαία, αλλά όχι ικανή για μια καλή διδασκαλία τους.

Όσον αφορά την κατάσταση της διδασκαλίας των μαθηματικών στην Ελλάδα, για παράδειγμα αν δούμε τα προγράμματα σπουδών και τα σχολικά βιβλία του Λυκείου είναι γραμμένα για μια κυρίως φορμαλιστική λογική για τα μαθηματικά. Δηλαδή μια διδασκαλία που βασίζεται κυρίως στις δομές και την ανάπτυξη των μαθηματικών περιεχομένων χωρίς να παίρνεται υπόψη ο μαθητής και ο τρόπος που μαθαίνει. Δεν υπάρχει σύνδεση των μαθηματικών με τη χρήση τους και την καθημερινή ζωή. Δεν απαντούν στο ερώτημα γιατί διδασκόμαστε αυτά τα μαθηματικά; Δεν υπάρχει σύνδεση με τον πολιτισμό, την ιστορία και την τέχνη. Οι μαθητές σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης διδάσκονται πολλά μαθηματικά περιεχόμενα, πολλές φορές επιφανειακά χωρίς εμβάθυνση και κατανόηση. Δημιουργείται η ανάγκη συμπληρωματικής και ερμηνευτικής εκπαίδευσης στους περισσότερους μαθητές και έτσι η φοίτηση σε συμπληρωματική ιδιωτική εκπαίδευση, το λεγόμενο φροντιστήριο, καθίσταται απαραίτητη. Συνέπια όλων αυτών είναι ότι πολλοί μαθητές δυσκολεύονται, δεν τους αρέσουν και απομακρύνονται από τα μαθηματικά. Κλείνοντας θα ήθελα να πω ότι ίσως η περιγραφή αυτή να μην είναι τόσο αισιόδοξη, αλλά παρόλα αυτά υπάρχουν πολλές συλλογικές και ατομικές προσπάθειες προς την κατεύθυνση του εκσυγχρονισμού της εκπαίδευσης των μαθηματικών.



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Boyer, Carl B. 1968. *A history of mathematics*. New York: Wiley.
- Cobb, Paul, & Bauersfeld, Heinrich. (Eds.) 1995. *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Cooney, Thomas J. 1985. A beginning teacher's view of problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 324-336.
- Davis, Donald. 2001. Η φύση και η δύναμη των μαθηματικών. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Donoghue, EF. 2001. Mathematics education in the United States: origins of the field and the development of early graduate programs. In: Reys RE, Kilpatrick, J (eds). *One field, many paths: U.S. doctoral programs in mathematics education*. American Mathematical Society, Providence, pp 3-17.
- Eves, Howard. 1981. *Great moments in mathematics (after 1650)*, Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Hall, Rogers, and Stevens, Reed. 1995. Making Spaces: a Comparison of Mathematical Work in School and Professional Design Practices. In S. L. Star (Ed.), *The Cultures of Computing* (pp. 118-143). London: Basil Blackwell.
- Hersh, Reuben. 1986. Some proposals for reviving the philosophy of mathematics. In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 9-28). Boston: Birkhiuser.
- Hoyles, Celia, Noss Richard, and Pozzi, Stefano. 2001. Proportional Reasoning in Nursing Practice. *Journal of Research in Mathematics Education* 2001, Vol.32, No. 1, -27.
- Hoyrup, Jens. 1994. *In measure, number, and weight: Studies in mathematics and culture*. State University of New York Press, Albany
- Isaacs, Andrew; Carroll, William; Bell, Max. 1998. A research-based curriculum: The research basis of the UCSMP Everyday Mathematics Curriculum. Crosswhite, FJ, et al.(1985) *Second International Mathematics Study Summary Report*. Champaign, IL: Stipes.
- Kilpatrick, Jeremy. 1992. A history of research in mathematics education. In: Grouws D (ed) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Macmillan, New York, pp. 3-38.
- Kilpatrick, Jeremy. 1993. The chain and the arrow: from the history of mathematics assessment. In: Niss M (ed) *Investigations into assessment in mathematics education: an ICME Study*. Kluwer, Dordrecht, pp 31-46.
- Kilpatrick, Jeremy. 2008. The development of mathematics education as an academic field. In: Menghini M, Furinghetti F, Giacardi L, Arzarello, F. (eds). *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008): reflecting and shaping the world of mathematics education*. Istituto della Enciclopedia Italiana, Rome, pp 25-39.
- Kline, Morris. 1972. *Mathematical through from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press.

- Kline, Morris. 1985. *Mathematics and the search for knowledge*. New York: Oxford University Press.
- Kant Immanuel. 1979. *Κριτική του καθάρου λόγου*. Εκδόσεις Παπαζήση. Αθήνα.
- Korner, Stephan. 1960. *The philosophy of mathematics: An introduction*. New York: Harper & Row.
- Λεμονίδης, Χαράλαμπος. 2007. Διδακτική των Μαθηματικών. Λήμμα στο Λεξικό της Παιδαγωγικής. Επιμέλεια Π. Ξωχέλλης, Αφοι Κυριακίδη, Θεσ/νίκη, σελ. 161-163.
- Lave, Jean. 1977. Cognitive consequences of traditional apprenticeship training in West Africa. *Anthropology and Education Quarterly*, 8,177-180.
- Nunes, Terezinha., Schliemann, Analucia Dias, & Carraher, David William. 1993. *Street mathematics and school mathematics*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Millroy, Wendy L. 1992. An Ethnographic Study of the Mathematical Ideas of a Group of Carpenters. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph 5*.
- Roschelle, Jeremy. 1996. Guest editor's introduction. *Journal of Learning Sciences*, 5, 169-171.
- Shapiro, Stewart. 2000. *Thinking about mathematics. The philosophy of mathematics*. Oxford University Press.
- Saxe, Geoffrey B. 1991. *Culture and cognitive development: Studies in mathematical understanding*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Vlastos, Gregory. 1991. *Socrates: Ironist and Moral Philosopher*. Ithaca, NY, Cornell University Press.
- Vygotsky, Lev Semenovich. 1993. *Σκέψη και Γλώσσα, μετάφραση Αντζελίνα Ρόδη*, Αθήνα, Γνώση.
- Wertsch, James V. 1985. *Vygotsky and the social formation of mind*. Cambridge, MA: Harvard University Press.