Διδακτικές προσεγγίσεις στη Μαθηματική Εκπαίδευση

Μαριάννα Τζεκάκη

Περιεχόμενο Μαθήματος

- Διδακτικός μετασχηματισμός
- Μαθηματική δραστηριότητα
- Ειδικές διδακτικές προτάσεις
- Γενικές διδακτικές προτάσεις
  - Ρεαλιστικά Μαθηματικά
  - Θεωρία διδακτικών καταστάσεων
  - Διδασκαλία με βάση της θεωρίας Δραστηριότητας

Τι είναι ΔτΜ

- Ποια είναι τα αντικείμενα μελέτης;
- Ποιες οι μέθοδοι που χρησιμοποιεί;

Η Διδακτική των Μαθηματικών είναι η επιστήμη που μελετά τα φαινόμενα που αναπτύσσονται στην τάξη των Μαθηματικών.

Χρησιμοποιεί τις μεθόδους των ανθρωπιστικών επιστημών, αλλά και τεχνολογικών και άλλων επιστημών.

Τάξη των Μαθηματικών

Η διδασκαλία των Μαθηματικών, ως φαινόμενο, εντάσσεται μέσα στο ευρύτερο πλαίσιο:

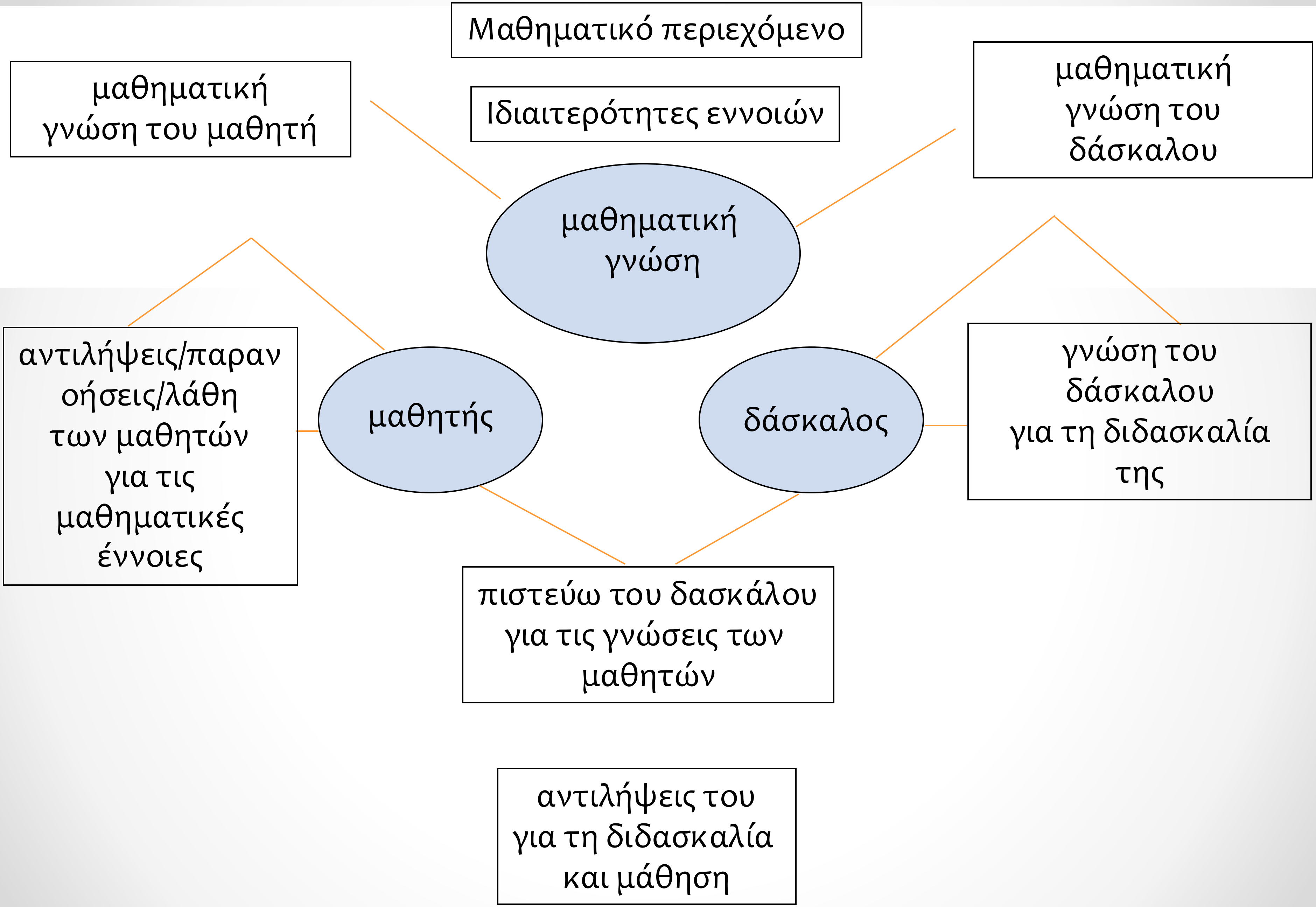
- της **ιστορικής στιγμής** που βρίσκεται,
- της **κοινωνίας** που λειτουργεί,
- με τον **πολιτισμό** που τη διαμορφώνει.

Τάξη των Μαθηματικών

Περιλαμβάνει τουλάχιστον **τρεις βασικές διαστάσεις:**

- το **μαθητή** (ως υποκείμενο μάθησης),
- τον **εκπαιδευτικό** (με αντικείμενο τη διδασκαλία)
- τα **Μαθηματικά** (ως αντικείμενο μάθησης και αντικείμενο διδασκαλίας).

Μεταγενέστερα εντάσσεται και το **περιβάλλον** εμπράγματο ή ψηφιακό


Μαθηματικό περιεχόμενο
Ιδιαιτερότητες εννοιών
μαθηματική γνώση του μαθητή
μαθηματική γνώση του δάσκαλου
μαθηματική γνώση
αντιλήψεις/παρανοήσεις/λάθη των μαθητών για τις μαθηματικές έννοιες
μαθητής
δάσκαλος
γνώση του δάσκαλου για τη διδασκαλία της
πιστεύω του δασκάλου για τις γνώσεις των μαθητών
αντιλήψεις του για τη διδασκαλία και μάθηση

Πεδία Έρευνας της ΔτΜ

Ερευνητικά Πεδία ΔτΜ - Γνώση

- Μαθηματική σκέψη και μεταγνώση
- Έννοιες και εννοιολογική ανάπτυξη (*concepts and conceptual development*)
- Εικονοποίηση και οπτικοποίηση (*Imagery and visualization*)
- Γλώσσα και Μαθηματικά (*Language and mathematics*)

- Ανάπτυξη προγραμμάτων σπουδών (*Curriculum development*)
- Αξιολόγηση (*Assessment and Evaluation*)
- Η/Υ και Τεχνολογία (*Computer and Technology*)

Ερευνητικά Πεδία ΔτΜ – Ειδική Γνώση

- Αριθμητικές έννοιες και πράξεις (*Number concepts and operations*)
- Άλγεβρα & αλγεβρική σκέψη (*Algebra and algebraic thinking*)
- Συναρτήσεις (*Function*)
- Γεωμετρική & χωρική σκέψη (*Geometric and spatial thinking*)
- Μετρήσεις (*Measure*)
- Πιθανότητες και στατιστικός συλλογισμός (*Probabilistic and statistical Thinking*)
- Μαθηματικά για την εργασία (*Work place related mathematics*)

Ερευνητικά Πεδία ΔτΜ – Διεργασίες

- Μαθηματικός συλλογισμός (*Mathematical Thinking*)
- Μαθηματική μοντελοποίηση (*Mathematical Modelling*)
- Επίλυση προβλήματος/ σχηματισμός προβλήματος (*Problem solving/Problem Posing)*
- Απόδειξη, αποδεικτική διαδικασία και επιχειρηματολογία (*Proof, poving, argumentation*)

Ερευνητικά Πεδία ΔτΜ - Άλλα Θέματα

- Ανάπτυξη εκπαιδευτικών (*Teacher development*)
- Γνώση, σκέψη και πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών (*Teacher knowledge, thinking and beliefs*)

- Επηρροή, συναίσθημα, πεποιθήσεις και στάσεις (*Affect, emotion, beliefs, attitudes*)
- Κοινωνικο – πολιτισμικές διαστάσεις (*socio – cultural*)
- Ισότητα (*Equity*)
- Learning Disabilities
- Gifted

Διδακτικές προσεγγίσεις

- Εμπλοκή πολλών επιστημών:
  - Επιστημολογία και Ιστορία
  - Ψυχολογία
  - Κοινωνιολογία
  - Παιδαγωγική
- Διάκριση της Διδακτικής των Μαθηματικών
- Ιδιαιτερότητα της μαθηματικής γνώσης (Sierpinska & Kiplatric, 1998).

Διδακτικά φαινόμ[illegible]

Ψυχολογικά φαινόμενα

- Η Μαθηματική Εκπαίδευση μετακινεί το [illegible] της από το *υποκείμενο μάθησης* (το μαθητή)

Διδακτικά φαινόμενα

- στο *αντικείμενο μάθησης* (τα Μαθηματικά),
- μελετά την *κοινότητα μάθησης* και τα φαινόμενα που αναπτύσσονται στην τάξη.
- Μελετά συστηματικά *τον εκπαιδευτικό* και την *επαγγελματική του ανάπτυξη*

Κοινωνικά φαινόμενα

Πώς αναπτύσσονται οι μαθηματικές έννοιες;

- Ποια επιστημολογική ανάπτυξη ακολουθούν (με βάση και την ιστορική);
- Πως εμπλέκονται οι προηγούμενες γνώσεις/ αντιλήψεις των μαθητών/ παρανοήσεις λάθη και εμπόδια.
- Με ποιες μαθηματικές δραστηριότητες – σε ποιο εννοιολογικό πεδίο;
- Τι υποστηρίζουν οι θεωρίες διδασκαλίας και μάθησης;

Τάξη των Μαθηματικών

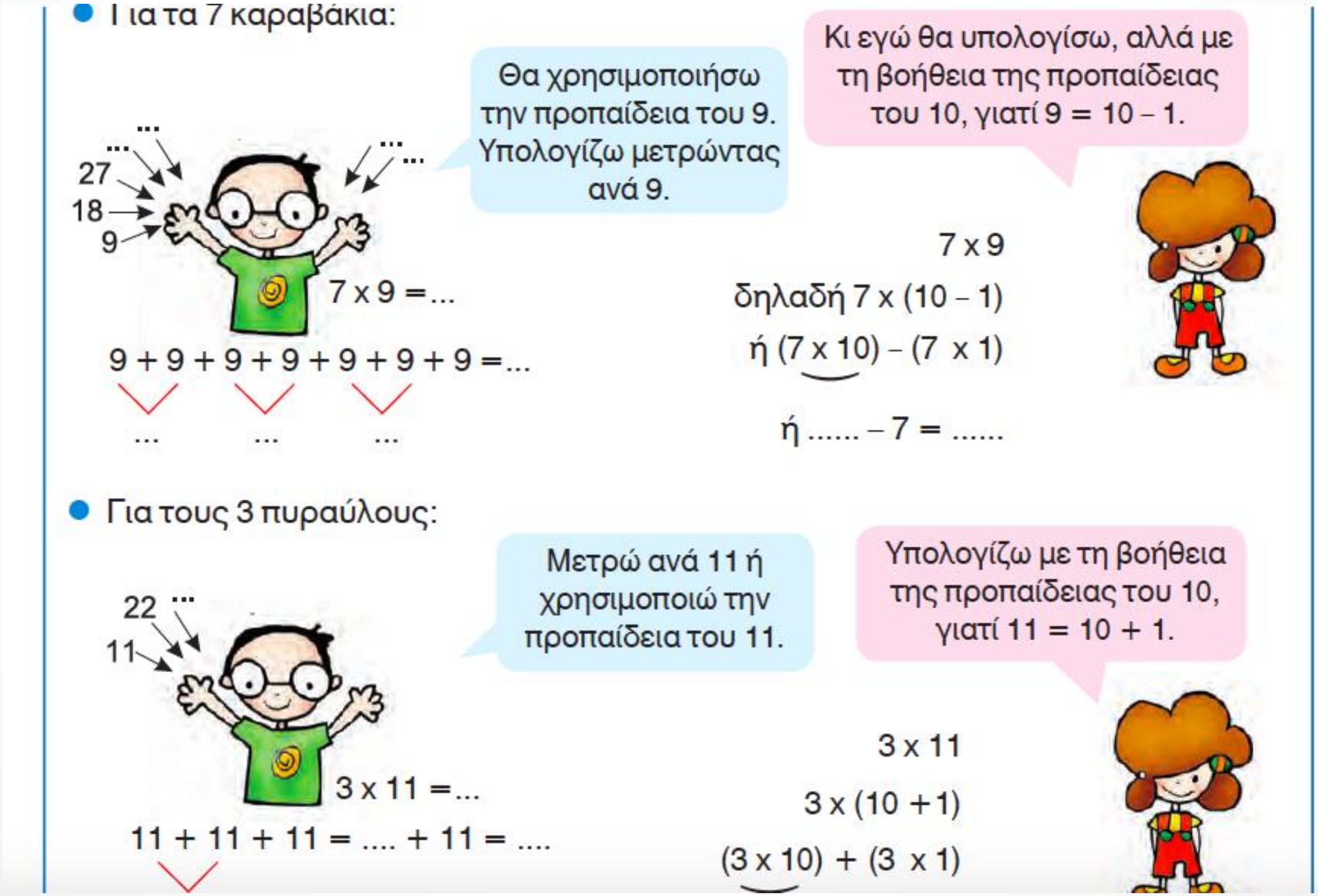
Δασκάλα	Έτσι, είναι ίδιος ο παρανομαστής και στα 2/8 και στα 4/8. Μας δείχνει τα κομμάτια, τα ίσα κομμάτια που χωρίσαμε την τούρτα. Έτσι σε 8 κομμάτια. Λοιπόν για να αντιστοιχήσουμε,…. Οι κλασματικοί αριθμοί δημιουργούνται.. για προσέξτε όλοι, διαβάστε, με ποιο ταιριάζει... οι κλασματικοί αριθμοί δημιουργούνται, ένα λεπτό να το σκεφτούν όλοι… Για λέγε Φώτη.
Φώτης	Από την επανάληψη της ίδιας κλασματικής μονάδας.
Δασκάλα	Ωραία. Οι κλασματικοί αριθμοί δημιουργούνται από την επανάληψη της ίδιας κλασματικής μονάδας. Το καταλαβαίνετει αυτό. Δηλαδή εάν θέλω εγώ να πάρω τα 4/8 από την τούρτα, τι σημαίνει αυτό…. ότι πήρα τι; Γεωργία;
Γεωργία	Ότι χωρίσατε την τούρτα σε 8 κομμάτια και ότι πήρατε τα 4.. 1/8 και 1/8 και 1/8 και 1/8 ίσον 4/8.
Δασκάλα	Ωραία επαναλαμβάνουμε δηλαδή την κλασματική μονάδα πόσες φορές; Αθηνά;
Αθηνά	4 φορές.
Δασκάλα	4 φορές. Επαναλάβαμε την κλασματική μονάδα 4 φορές. Ωραία. Ο αριθμητής τι φανερώνει είπαμε; Λέγε Ευτυχία..
Ευτυχία	Πόσα ίσα μέρη πήραμε.
Δασκάλα	Ο αριθμητής φανερώνει πόσα ίσα μέρη πήραμε. Δηλαδή όταν λέμε ότι πήραμε 4/8 πόσα ίσα μέρη πήραμε; Πόσα ίσα μέρη από την τούρτα φάγαμε;
Ευτυχία	Τέσσερα.
Δασκάλα	Πήραμε τέσσερα. Αυτό μας φανερώνει ο αριθμητής. Ο παρονομαστής τι μας φανερώνει; Για λέγε Ράνια.
Ράνια	Σε πόσα ίσα κομμάτια κόψαμε την τούρτα.

Τι Μαθηματικά;

Τι Μαθηματικά;

- Όλη η έρευνα για τη μαθηματική εκπαίδευση ασχολείται με «μαθηματικά νοήματα», «μαθηματική δράση», «μαθηματικό αποτέλεσμα» (του δάσκαλου, του μαθητή, της κοινότητας…), αλλά
- Τι χαρακτηρίζει ως «Μαθηματικά» κι ως προς τι αξιολογείται?
- Ποιος το «νομιμοποιεί» αυτό το «μαθηματικό» και το κατοχυρώνει;

Τι Μαθηματικά;



● Για τα 7 καραβάκια:

Θα χρησιμοποιήσω την προπαίδεια του 9. Υπολογίζω μετρώντας ανά 9.

Κι εγώ θα υπολογίσω, αλλά με τη βοήθεια της προπαίδειας του 10, γιατί 9 = 10 – 1.

... ... 27 18 9 ... ...

7 x 9 =...

9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 =...

... ...

7 x 9

δηλαδή 7 x (10 – 1)

ή (7 x 10) – (7 x 1)

ή ...... – 7 = ...

● Για τους 3 πυραύλους:

Μετρώ ανά 11 ή χρησιμοποιώ την προπαίδεια του 11.

Υπολογίζω με τη βοήθεια της προπαίδειας του 10, γιατί 11 = 10 + 1.

22 ... 11

3 x 11 =...

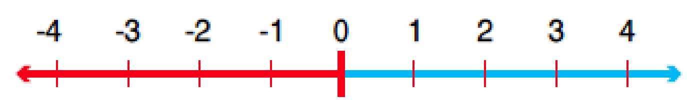
11 + 11 + 11 = ... + 11 = ...

3 x 11

3 x (10 +1)

(3 x 10) + (3 x 1)

Τι Μαθηματικά;

Βασικές μαθηματικές έννοιες και διεργασίες	Παραδείγματα
Στην καθημερινή μας ζωή χρησιμοποιούμε αριθμούς που έχουν μπροστά τους το σύμβολο «-». Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται **αρνητικοί αριθμοί.**	α. Η θερμοκρασία είναι -2 °C, δηλαδή 2 βαθμούς κάτω από το 0. β. Ο χώρος στάθμευσης είναι στο -1, έναν όροφο κάτω από το ισόγειο (0).
Οι αρνητικοί αριθμοί στην αριθμογραμμή τοποθετούνται **αριστερά από το μηδέν** και σε ίσες αποστάσεις από αυτό, όπως αντίστοιχα οι φυσικοί αριθμοί δεξιά από το μηδέν.	
Οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς λέγονται **ακέραιοι αριθμοί.**	... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
Όλοι οι αρνητικοί αριθμοί είναι μικρότεροι του 0. Όσο πιο αριστερά βρίσκεται ένας αριθμός πάνω στην αριθμογραμμή, τόσο πιο μικρός είναι.	$-3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3$

Τι Μαθηματικά;

ΟΡΙΣΜΟΣ

Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

Το σύνολο **Α** λέγεται **πεδίο ορισμού** ή **σύνολο ορισμού** της f.
Οι συναρτήσεις παριστάνονται συνήθως με τα μικρά γράμματα f, g, h κτλ. του Λατινικού αλφαβήτου.
Αν με μια συνάρτηση f από το Α στο Β, το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε:

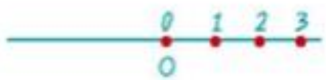
$$\mathbf{y = f(x)}$$

και διαβάζουμε «y ίσον f του x». Το $\boldsymbol{f(x)}$ λέγεται τότε **τιμή της f στο x**. Το γράμμα **x**, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου ορισμού της f, ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το y, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x, ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

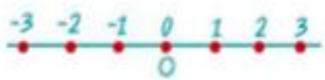
Τι Μαθηματικά;

Πραγματικοί αριθμοί

Ας μελετήσουμε όλα τα σύνολα αριθμών που έχουμε συναντήσει.



- Οι φυσικοί αριθμοί: 0, 1, 2, 3, ... παριστάνονται στη διπλανή ευθεία με σημεία.
  Στην αρχή Ο έχουμε τοποθετήσει το μηδέν (0).



- Οι ακέραιοι αριθμοί: ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ... παριστάνονται πάλι με σημεία.
  Τοποθετούμε στα δεξιά της αρχής Ο τους θετικούς ακέραιους αριθμούς και στα αριστερά τους αρνητικούς.

- Το σύνολο των ρητών αριθμών, δηλαδή των αριθμών που μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, ευθεία, αλλά όχι πλήρως.

- Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται όχι μόνο από τους ρητούς αλλά και όλους τους άρρητους.
  Οι πραγματικοί αριθμοί καλύπτουν πλήρως την ευθεία, δηλαδή κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε μοναδικό σημείο της ευθείας.
  Για το λόγο αυτό, την ευθεία αυτή την ονομάζουμε **ευθεία ή άξονα των πραγματικών αριθμών**.

Τι Μαθηματικά;

- Οι μαθηματικές γνώσεις δεν είναι κάτι που «μαθαίνεται» ή εφαρμόζεται (Sfard, 1996, Yackel, 2001), αλλά κάτι που **κατασκευάζεται**, γίνεται αποδεκτό και διαπραγματεύσιμο, και συνδέεται με ότι θα δεχόμασταν ως μαθηματική γνώση (Steinbring, 1996)

Τι Μαθηματικά;

- Η Sfard (1996, p. 493) παραθέτει ένα τμήμα της απάντησής του Γάλλου μαθηματικού Amitsur, σχετικά με το τι είναι μαθηματική δράση:
- “When I say ‘this is mathematics, I know exactly, even not
- “΄Όταν λέω αυτό είναι Μαθηματικά, ξέρω ακριβώς, έστω και άρρητα, τι είδους σκέψης αναπτύσσεται στην διαδικασία, τους σκοπούς αυτού που γίνεται και το είδος των στοιχείων που είναι απαραίτητα. … “

Τι Μαθηματικά;

- Για να καταλήξει στο ίδιο κείμενο (p.494) ότι «although, mathematicians and mathematics education

«αν και μαθηματικοί και ερευνητές της Μ.Ε. ασχολούνται με το ίδιο αντικείμενο, το γεγονός ότι προέρχονται από απόλυτα διαφορετικά επιστημονικά δεδομένα είναι πιθανό να κάνει τις οπτικές τους για τα Μαθηματικά, όχι μόνο απλά διαφορετικές σε κάποια μέρη, αλλά ασύμβατες…»

Τι Μαθηματικά;

- Αυτό βάζει μερικά σημαντικά ερωτήματα:

  - Δεν αναφερόμαστε στα Μαθηματικά τα ίδια;
  - Κατασκευάζεται μια νέα γνώση για να διδαχθεί;
  - Η αλλαγή των γνώσεων για να εισαχθούν στη διδακτική πράξη, τις αλλάζει στην ουσία τους;

  (Poll)

Μορφές γνώσεις

- ***Ακαδημαϊκή Γνώση*** παραγόμενη από τους Μαθηματικούς
- ***Μετασχηματισμός της σε γνώση*** που πρέπει να διδαχτεί όπως ορίζεται από το *πρόγραμμα σπουδών*
- **Γνώση που διδάσκουν** οι *εκπαιδευτικοί*
- **Γνώση που τελικά μαθαίνουν** οι *μαθητές*

Θεσμικοί χώροι

- Επιστημονική κοινότητα Μαθηματικών
- Πολιτική εκπαιδευτική εξουσία (υπουργοί, σύμβουλοι, σχεδιαστές προγραμμάτων)
- Εκπαιδευτικοί (περιεχόμενο και μέθοδος διδασκαλίας)
- Μαθητές

Αναγκαία σύνδεση

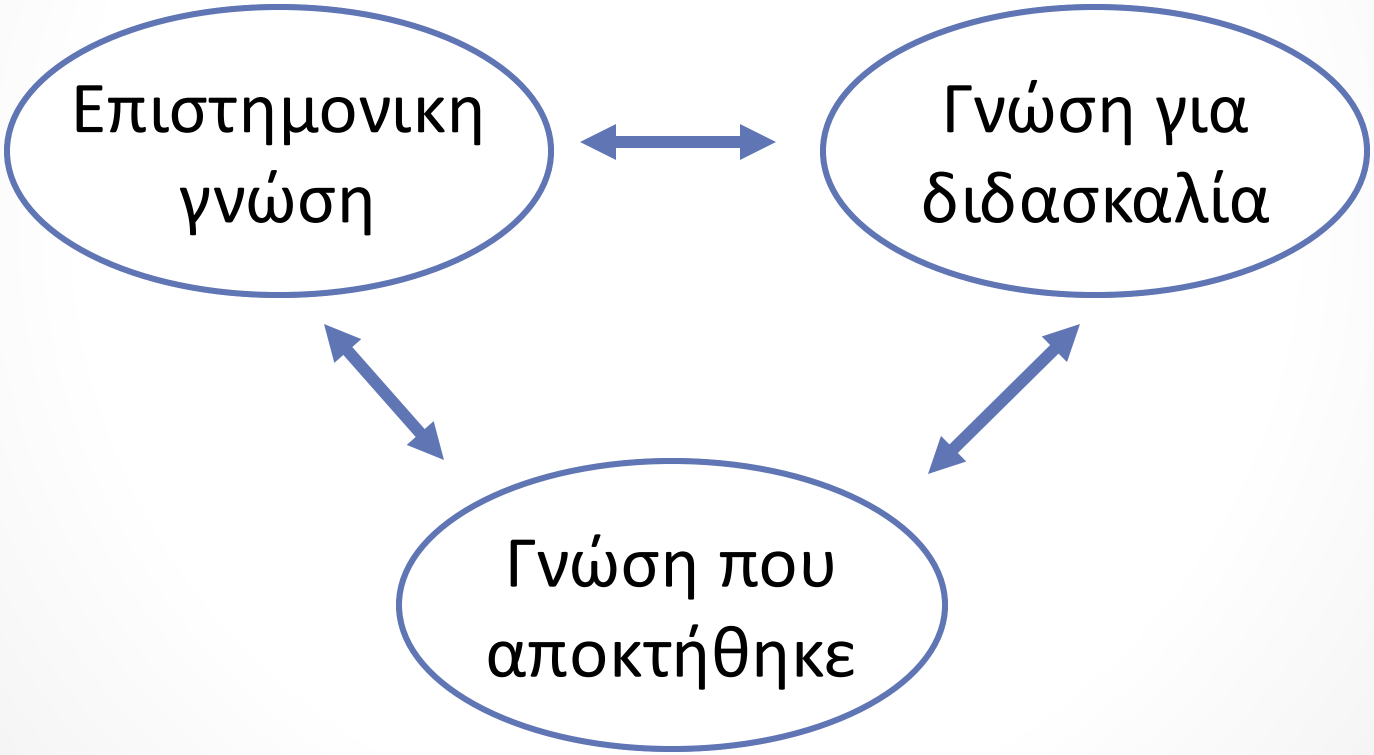
- Η σύνδεση όμως ανάμεσα στο **αντικείμενο που διδάσκεται** (teaching object) και το **μαθηματικό αντικείμενο** (mathematical object) είναι πιο σύνθετη από ότι δείχνει.
- Ernest (2006, p.73)

  «τα περισσότερα από τα σχολικά Μαθηματικά δεν είναι μέρος των ακαδημαϊκών Μαθηματικών ή έχουν αλλάξει σε διαφορετικές μορφές του (και μέσα στην ιστορία)… »

Διδακτικός μετασχηματισμός

- Η έννοια των αλλαγών (στα προγράμματα, στα βιβλία, στη διδασκαλία) που έχουν υποστεί οι μαθηματικές θεωρίες για να γίνουν σχολικά Μαθηματικά είναι παλιά.
- Ήδη από το 1985 ο γάλλος ερευνητής Y. Chevallard αποδίδει με τον όρο ***didactical transposition*** αυτή την χαρακτηριστική αλλαγή.

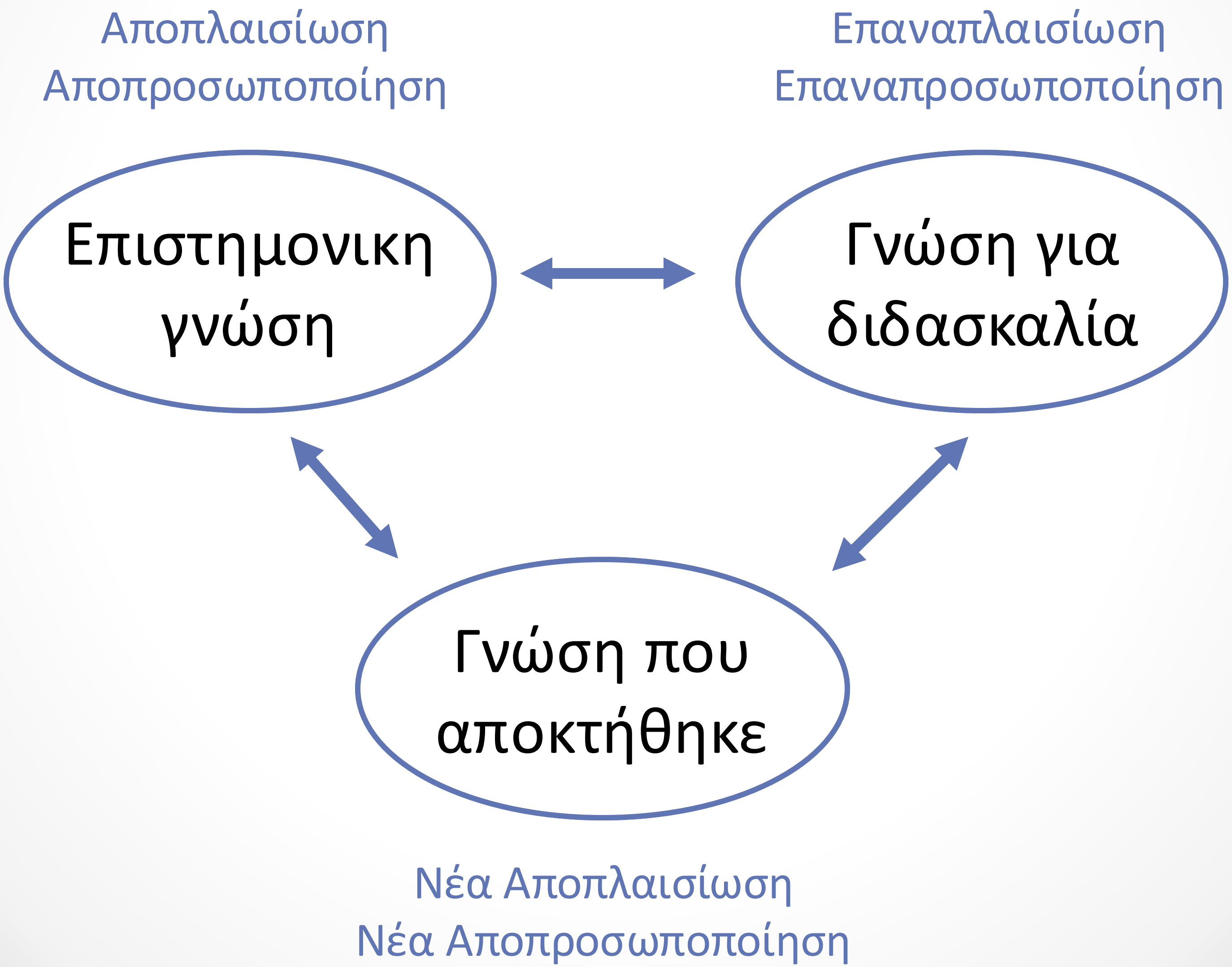
Γνώση και Θεσμικοί χώροι



Ανάπτυξη παραλληλισμών

- Ένα διδακτικό φαινόμενο στη σχολική τάξη, μια δραστηριότητα των μαθητών, μια κατασκευή, ένας διάλογος, μια αλληλεπίδραση κάτω από την οπτική της ανάπτυξης μαθηματικών νοημάτων ή μαθηματικών διαδικασιών, χρειάζεται ένα **κοινό κριτήριο**: *γιατί κάποιος θα το ονομάσει μαθηματικό και κάποιος όχι*.
- Πώς η δράση που αναπτύσσεται στην τάξη θα αντλήσει από τους *τρόπους ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης*;

Γνώση και Θεσμικοί χώροι



Διδακτικός μετασχηματισμός

- Ο όρος ***didactical transposition*** αποδίδεται ως: διδακτική μετάθεση, μετατόπιση, μετάπλαση, και μετασχηματισμός.
- Ο Chevallard αναφέρει ότι:

  *«Όταν ένα περιεχόμενο επιστημονικής γνώσης **διαλεχτεί ως γνώση** για διδασκαλία, υφίσταται μια σειρά από μετασχηματισμούς προσαρμογής που θα το κάνουν ικανό να πάρει θέση ανάμεσα στα **αντικείμενα διδασκαλίας**».*

Διδακτικός μετασχηματισμός

- **Δεν είναι μια απλή διαδικασία** με τη βοήθεια της οποίας *απλοποιούμε* την επιστημονική γνώση για να γίνει προσβάσιμη στους μαθητές ορισμένου επιπέδου.
- Ακολουθεί μια **διαδικασία** που οδηγεί μια γνώση να βγει από τον επιστημονικό χώρο από τον οποίο προέρχεται και να εισαχθεί στη σχολική πράξη.

Διδακτικός μετασχηματισμός

- Οι αλλαγές δεν είναι μόνο ποσοτικές («πιο πολύ» ή το «πιο πολύπλοκο»), αλλά είναι κυρίως **ποιοτικές.**
- *Αφορούν το ρόλο και τη σημασία της γνώσης μέσα στα ίδια τα Μαθηματικά ή γενικότερα μέσα στον πολιτισμό και στην κοινωνία.*
- Το επιστημολογικό της περιβάλλον είναι επίσης διαφορετικό όπως και η σημασία της και η εμβέλεια των εννοιών που τη δομούν.

Διδακτικός μετασχηματισμός

- Διακρίνεται
  - σε **εξωτερικό** (*extern*), από τα μαθηματικά στα σχολικά μαθηματικά – *γνώσεις για διδασκαλία*
  - σε **εσωτερικό** (*intern*), από τα προγράμματα στην τάξη – στις *γνώσεις που διδάσκονται.*
- Ανάγκη μελέτης των αλλαγών που υφίστανται οι γνώσεις για να γίνουν σχολικές.

Διδακτικός μετασχηματισμός

Παράδειγμα

- Πράξεις με τους ακέραιους (μέσα από πράξεις σε φυσικούς που δεν ενσωματώνουν το **N** μέσα στο **Z**):

(+7)-(-3)-(+5) *διδακτική πρόταση αφαίρεσης προσήμων*

7 + 3 – 5 *πράξη στο N*

- Μήπως αυτή η προσαρμογή οδηγεί σε όλες τις παρανοήσεις των παραστάσεων της μορφής α+β-γ (όπου τα α,β,γ αντιμετωπίζονται ως φυσικοί αριθμοί);

Διδακτικός μετασχηματισμός

Παράδειγμα από τον Αλγεβρικό συλλογισμό

- Η Άλγεβρα αναπτύσσεται ουσιαστικά από τους Άραβες.
- Το όνομα από τον Άραβα μαθηματικό αλ-Χουαρίσμι (825 μ.Χ.) και το έργο "*Hisâb* ***al-jabr*** *w'al-mugâbalah*" που σημαίνει "*Επιστήμη της συνένωσης και της αντίθεσης*"
- Για να επιλύσει προβλήματα οδηγείται στην ανάπτυξη εξισώσεων, συστημάτων και αλγεβρικών παραστάσεων.

Διδακτικός μετασχηματισμός

Παράδειγμα από τον Αλγεβρικό συλλογισμό

- Η ανάπτυξη του αλγεβρικού λογισμού έχει ένα καθαρό ***λειτουργικό*** χαρακτήρα που στην διδακτική πράξη γίνεται ***τυπικός*** (κατά τον Chevallard)
- Ας συγκρίνουμε την (χωρίς νόημα) πράξη

$2α+1+((2α+1)+2)= 2α+1+2α+3 = 4α+4$

- Με τα εξής προβλήματα:

Διδακτικός μετασχηματισμός

- *Να δειχθεί ότι το άθροισμά δύο διαδοχικών περιττών αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 4: (α≥0)*

  $(2\alpha+1)+((2\alpha+1)+2)= 2\alpha+1+2\alpha+3 = 4\alpha+4=4(\alpha+1)$

- *Να δειχθεί ότι το άθροισμά δύο διαδοχικών περιττών αριθμών είναι ίσο με το διπλάσιο του άρτιου που βρίσκεται ανάμεσά τους:*

  $(2\alpha+1)+((2\alpha+1)+2)= 2\alpha+1+2\alpha+3 = 4\alpha+4=2(2\alpha+2)$

  Ή ότι είναι μεγαλύτερο ή ίσο το 4:

  $(2\alpha+1)+((2\alpha+1)+2)= 2\alpha+1+2\alpha+3 = 4\alpha+4= 4 + 4\alpha$

  Ή ότι είναι πολλαπλάσιο του 3 κι ενός ακεραίου ≥ 4:

  $(2\alpha+1)+((2\alpha+1)+2)= 2\alpha+1+2\alpha+3 = 3\alpha+(\alpha+4)$

Διδακτικός μετασχηματισμός

O Chevalard υπογραμμίζει

«… Αντί για τη μαθηματική δραστηριότητα με τα ξεχωριστά κριτήρια της και τους ειδικούς της λόγους, η διδακτική πρακτική οδηγεί σε όρους ‘οικείας σκέψης‘ το οποίο υποθέτει ότι κάθε σκέψη μπορεί να ‘μειωθεί‘.

Διδακτικός μετασχηματισμός

Έτσι πχ. για να απλοποιήσουμε την έννοια των ακεραίων αριθμών – μια υπόσταση μαθηματική και πολιτισμική – χρησιμοποιούμε τον ‘κανόνα των προσήμων’ που μας δίνει ένα συγκεκριμένο μοντέλο ή μια πραγματική παράσταση.

Όταν φτάνουμε στο (-) X (-)= (+) δεν έχουμε μοντέλο και καταλήγουμε στην ’εξουσία’ του δασκάλου: *ένα κανόνα χωρίς νόημα*, όπως λέει ο ποιητής:

“Minus times minus is plus, the reason for this we must not discuss …”

Συνοψίζοντας

- Η μαθηματική γνώση και τα μαθηματικά αντικείμενα παράγονται **έξω από το σχολείο.**
- Η σχολική γνώση είναι αναμφισβήτητα διαφορετική από την επιστημονική γνώση που χρησιμεύει ως αναφορά της.
- Το αντικείμενο της θεωρίας του Διδακτικού Μετασχηματισμού είναι η ***περιγραφή και η επεξήγηση του φαινομένου του μετασχηματισμού*** της γνώσης από την παραγωγή στη διδασκαλία.

Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε:

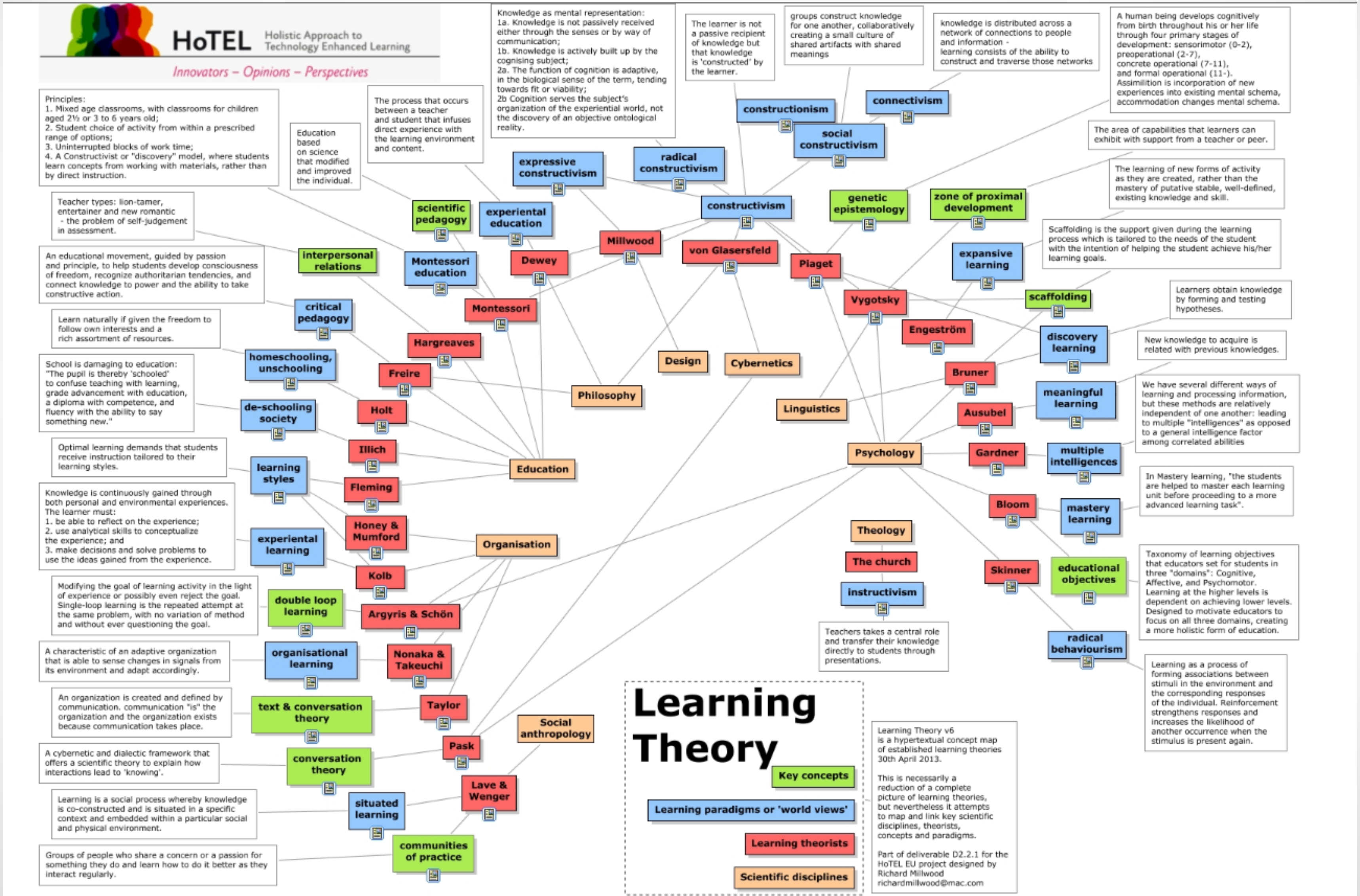
- *(Μέρος από Ομιλία του Chevalard, Y. (2005). Steps Towards A New Epistemology In Mathematics Education, CERME 4. URL: http://ermeweb.free.fr/CERME4/CERME4_2_Plenaries. -όλες οι δημοσιεύσεις http://yves.chevallard.free.fr/)*
- *Ernest, (2006).*
- García,F.J., Gascón,J., Higueras,L.R. and Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *Volume 38, Number 3* / June.
- Howson, G. (2005). "Meaning and School Meaning". In J. Kilpatric, C. Hoyles, O. Skovmose & P. Valero, *Meaning in Mathematics Education*, pp. 17-38, Springer
- Sierpinska & Kiplatric, 1998
- Sfard, A. (1998). The many faces of mathematics: do mathematicians and researchers in Mathematics Education speak about the same thing? In A. K. Sierpinska, J. (Ed.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. An ICMI Study* (Vol. 1, pp. 491- 512). London: Kluwer Academic Publishers.
- Steinbring, 1996
- Yackel, E. (2001). Explanation, Justification and argumentation in Mathematics Classroom. In van den Heuvel- Panhuizen, M. (ed.). *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Intitute, Utrecht University. 1:1-9.
- Winsløw, Carl (2007) 'Didactics of mathematics: an epistemological approach to mathematics education', Curriculum Journal,18:4,523 — 536 D
- URL: http://dx.doi.org/10.1080/09585170701687969

Δραστηριότητα 1

Θεωρίες Μάθησης
και
Διδακτικές Θεωρίες

(Poll)

Αν και οι θεωρίες μάθησης είναι πολλές…



Οι διδακτικές προτάσεις είναι περιορισμένες

- Η μαθηματική εκπαίδευση ενδιαφέρεται για διδακτικές εφαρμογές, αντλώντας από τις ψυχολογικές και τις κοινωνικές αναλύσεις.
- Η αναζήτηση πάνω στο ζήτημα αυτό οδηγεί σε ενδιαφέροντα διδακτικά πειράματα.
- Αν και εκατοντάδες τέτοια πειράματα έχουν πραγματοποιηθεί τα τελευταία είκοσι χρόνια, οι συγκροτημένες ***διδακτικές θεωρίες*** είναι πολύ περιορισμένες.

Τι αφορούν;

- Πειραματίζονται με **διδασκαλίες** και δοκιμάζουν **σχεδιασμούς** και διδακτικά περιβάλλοντα που βελτιώνουν τη μαθηματική μάθηση

  (Freudenthal, 1983, Streenfeld, 1993, Cobb et als., 1996, Brousseau, 1997, Gravemeijer, 1997, Wittman, 1998).
- Μελετούν πιο «διδακτικά» την τάξη των Μαθηματικών και τα **διδακτικά νοήματα** που παράγονται σε αυτή

  (Voight, 1995, Steinbring, 1997, 1998).

Μαθηματική δραστηριότητα

Μαθηματική Δραστηριότητα

- Κοινός τόπος όλων των προσεγγίσεων είναι ότι
- το ‘μαθαίνω Μαθηματικά’ αποτελεί ένα ‘κάνω Μαθηματικά’ δηλαδή
- λύνω ένα πρόβλημα ή γενικότερα αντιμετωπίζω μια κατάσταση.
- Ξεκινώντας από προηγούμενα στοιχεία και διαθέσιμες τεχνικές επεξεργάζομαι νέους τρόπους, νέες εξηγήσεις να πετύχω κάτι.

Μαθηματική Δραστηριότητα

- Ποιες είναι οι ιδιαιτερότητες της Μαθηματικής Δραστηριότητας;
- Ποιες μπορούμε να ονομάσουμε μαθηματικές δράσεις;
- Με τι κριτήρια αξιολογούμε τις δράσεις ως μαθηματικές;
- Ποιες ερωτήσεις, προβλήματα, έργα ή καταστάσεις που οδηγούν στην ανάπτυξη μαθηματικής δραστηριότητας ;

ΜΔ. Ιδιαίτερα Χαρακτηριστικά

- Οι Lave & Wenger (1991) σχετίζουν τη μαθηματική δραστηριότητα
  - με τη συμμετοχή σε μια ***κοινωνική πρακτική*** – μια *κουλτούρα* και μια *ταυτότητα* (αναρωτιέται, *αμφισβητεί, συλαμβάνει, κατανοεί, επιβεβαιώνει, ακόμα και φαντάζεται..;)*
  - οι ***μαθηματικές πρακτικές*** είναι επαναλαμβανόμενες δράσεις που οι μαθητές επαναλαμβάνουν ως χρήστες των Μαθηματικών, αποκτώντας και σχετικές γνώσεις.

ΜΔ. Ιδιαίτερα Χαρακτηριστικά

- Άλλοι ερευνητές (όπως πχ. Ben-Zvi and Arcavi, 2001; Serpinska, & Lerman, 1996; Resnick, 1987) υποστηρίζουν ότι οι μαθητές αναπτύσσουν ***συνήθειες και ρουτίνες σκέψης,*** μια τάση για :
  - *αναζήτηση κανονικοτήτων,*
  - την *κατανόηση δομών*
  - *δημιουργία συνδέσεων,*
  - κατάλληλη χρήση πηγών και
  - ανάπτυξη δυναμικών συλλογισμών.

ΜΔ. Ιδιαίτερα Χαρακτηριστικά

- Ο Chevallard (2007) μελετά την ανθρώπινη δράση; *τι κάνουν και σκέφτονται οι άνθρωποι όταν 'κάνουν μαθηματικά'*.
- ***Μαθηματική 'πραξεολογία'*** (δηλαδή μαθηματικής πράξης και σκέψης): αντιμετώπιση καταστάσεων που προέρχονται από ερωτήματα που «κάνουν νόημα» στο μαθηματικό σύμπαν των μαθητών.

ΜΔ. Ιδιαίτερα Χαρακτηριστικά

- Ο Freudenthal (1983) κατανοεί τη μαθηματική δραστηριότητα ως ένα ***τρόπο δημιουργίας και γενίκευσης μοντέλων*** για την αντιμετώπιση και κατανόηση των πραγματικών καταστάσεων.
- Brousseau (1997) την αντιλαμβάνεται ως την αναζήτηση ***κατάλληλων απαντήσεων που προκύπτουν από τις καταστάσεις-προβλήματα***, με την ανάπτυξη δράσης, διατύπωσης, ελέγχου και επισημοποιήσεων.

ΜΔ. Ιδιαίτερα Χαρακτηριστικά

- Ο Schoenfeld (1992) παρουσιάζει χαρακτηριστικά όπως:
  - *Επεξεργασία ‘έξυπνων’ & **λιτών τρόπων αντιμετώπισης.***
  - ***Εντοπισμός σχέσεων και ανάδειξη κανονικοτήτων.***
  - *Διερεύνηση εναλλακτικών κατανοήσεων και λύσεων.*
  - ***Αναγνώριση κοινών δομών** πίσω από καταστάσεις διαφορετικού περιεχομένου.*
  - ***Αναστοχασμό και γενίκευση εμπειρίας.***

ΜΔ. Ιδιαίτερα Χαρακτηριστικά

- Οι Sarama & Clements (2009) θεωρούν χαρακτηριστικές δράσεις της μαθηματικής επεξεργασίας :
    - την **αναζήτηση** ***κανονικοτήτων*** *και κοινών δομών*,
    - *την* ***ανάπτυξη συνδέσεων***.
    - τη διαδικασία ***ανάλυσης και σύνθεσης***,
    - την **αντίληψη των μονάδων**.

ΜΔ. Ιδιαίτερα Χαρακτηριστικά

- Οι Ball et als. (Rand, 2002) ως ένα ‘***know- how***’ που κάνουν οι επιτυχημένοι γνώστες και χρήστες των Μαθηματικών:
  - *δικαιολογούν,*
  - *κάνουν δηλώσεις,*
  - *χρησιμοποιούν συμβολικές παραστάσεις με άνεση,*
  - *κάνουν γενικεύσεις, κ.ά.*

ΜΔ. Ιδιαίτερα Χαρακτηριστικά

- Οι Noss, Healy και Hoyles (1997) υποστηρίζουν επίσης ότι τα ***μαθηματικά νοήματα προέρχονται από τις μαθηματικές συνδέσεις***.
- Ο Ernest (2006) αντιλαμβάνεται τη δράση και μάθηση των Μαθηματικών ως μια ***διαδικασία συμβολοποίησης.***

ΜΔ. Ιδιαίτερα Χαρακτηριστικά

- Αντίστοιχα ο Steinbring (2005) τα αντιμετωπίζει ως μια ***δυναμική σύνδεση καταστάσεων – σημάτων και εννοιών*** στο επιστημολογικό του τρίγωνο.
- Και Radford (2006) μια προσέγγιση ***'αντικειμενοποίησης'*** (objectification), μέσα σε συγκεκριμένες ιστορικά πολιτιστικές μορφές σκέψης, από τη δράση ή επίλυση ενός προβλήματος στην μεταφορά σε γενικότερο πλαίσιο, μια *γενίκευση.*

Μαθηματική δραστηριότητα

- Ο τρόπος με τον οποίο αντιλαμβάνονται οι εκπαιδευτικοί ή τα συστήματα εκπαίδευσης τη *φύση της μαθηματικής γνώσης* ***επιδρά πάνω στον τρόπο*** που επίσης αντιλαμβάνονται τη *μαθηματική* δραστηριότητα και την ίδια τη ***διδασκαλία των Μαθηματικών*** (Stech, 2008).

ΜΔ. Διάφορες προσεγγίσεις

- ***Η εργαλειακή αντίληψη***

  οδηγεί τη μαθηματική δραστηριότητα να γίνεται αντιληπτή ως ***απομνημόνευση και εφαρμογή διαδικασιών*** (που πιθανά ισχύει ακόμα σε κάποια εκπαιδευτικά συστήματα).

- ***Η ανακαλυπτική αντίληψη***

  οδηγεί στην αναζήτηση/ανάδειξη κάποιου **εσωτερικού κανόνα** (χωρίς κατασκευή ή δημιουργία)

ΜΔ. Διάφορες προσεγγίσεις

- ***Η κατασκευαστική αντίληψη***

  οδηγεί στην αντίληψη της ***διαχείρισης μιας συγκεκριμένης κατάστασης*** για τη δημιουργία νοήματος.

- ***Η αντίληψη ως δράση***

  οδηγεί στην αντίληψη ***κάποιων δράσεων*** (με βάση κάποιους στόχους) μέσα σε ευρύτερα κοινωνικο-πολιτισμικά πλαίσια, στη διάρκεια των οποίων το υποκείμενο βελτιώνεις τις πράξεις, τα εργαλεία, τα νοήματα, αλλά πιθανά και τη μορφή αλληλεπίδρασης με το κοινωνικό πλαίσιο.

ΜΔ. Διάφορες προσεγγίσεις

- Η μαθηματική δραστηριότητα αποτελεί (σύμφωνα και με τη θεωρία της δραστηριότητας) ένα σύνολο ***μαθηματικών δράσεων*** που είναι απαραίτητο να προκύψουν από σύνθεση θέσεων.
- Το ενδιαφέρον για τον εκπαιδευτικό και το εκπαιδευτικό σύστημα είναι να κατανοήσει ***ποιες δράσεις στο πλαίσιο μιας δραστηριοποίησης*** είναι μέσα στο πλαίσιο της μαθηματικής δραστηριότητας.

Σημαντικές μαθηματικές δράσεις

- Αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων
- Αντίληψη κανονικοτήτων και κοινών δομών
- Ανάλυση και σύνθεση στοιχείων, μερών και μοναδιαίων τμημάτων
- Δημιουργία συνδέσεων
- Σημειωτική δράση και σύνδεση με παραστάσεις, σήματα και σύμβολα,
- Εξήγηση/δικαιολόγηση,
- Αναστοχαστική δράση και δράση γενίκευσης.
- ………….

Ο κατάλογος χρειάζεται να ολοκληρωθεί

Άλλες δράσεις

- Διαφορετικές δράσεις ή χωρίς σύνδεση με τις μαθηματικές έννοιες ή ακόμα χωρίς γενίκευση δεν είναι μαθηματικές δράσεις.
- Κατά τον Radford (2006) αν και συχνά οι μαθητές εμπλέκονται και δραστηριοποιούνται σε πλούσιες και ενδιαφέρουσες δραστηριότητες δεν είναι σίγουρο ότι θα κάνουν τις απαραίτητες συνδέσεις και γενικεύσεις προς την κατεύθυνση της ανάπτυξης μαθηματικής γνώσης.

Μαθηματικές δράσεις

«… Δεν είναι η δράση που οδηγεί σε μαθηματικές έννοιες, αλλά η σκέψη πάνω στη δράση…» (Duval, 2007)

Ειδικές
Διδακτικές Προτάσεις

Γνωστικά καθοδηγούμενη διδασκαλία

- Πολλοί ερευνητές μεταφέρουν ευρήματα και ψυχολογικές αναλύσεις στην εκπαιδευτική διαδικασία.
- Τέτοια εφαρμογή το πρόγραμμα «***Γνωστικά καθοδηγούμενη διδασκαλία***» (από το 1996, Cognitive Guided Instruction)
- Δοκιμάζει να παρουσιάσει στους εκπαιδευτικούς τα ερευνητικά στοιχεία για τις αυθόρμητες στρατηγικές των μαθητών και να στηρίξει διδασκαλίες που βασίζεται πάνω σε αυτές.

Γνωστικά καθοδηγούμενη διδασκαλία

- Οι εκπαιδευτικοί ασκούνται να αντιλαμβάνονται
  - τι ξέρουν οι μαθητές τους,
  - πώς δημιουργούν με φυσικό τρόπο μαθηματικές έννοιες ή
  - τι σημαίνει να είναι *νοητικά* δραστήριοι.
- Παρατηρήθηκαν βελτιώσεις των εκπαιδευτικών στις διδακτικές τους πρακτικές (*έδιναν κυρίως προβλήματα, βάρος στις διαδικασίες και όχι στις λύσεις, έδωσαν χώρο για στρατηγικές*).

- Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε:

  Carpenter, TP., Fennema, E., Franke, ML. (1996). Cognitively guided instruction: A knowledge base for reform in primary mathematics. *The Elementary School Journal*, Volume 97, 1, University of Chicago

Πρόγραμμα Σχολικών Μαθηματικών με κατανόηση

- Η τάση αυτή εμφανίζεται τη δεκαετία 1990 – 2000 από την αμερικάνικη επιστημονική κοινότητα.
- Το «***Πρόγραμμα Σχολικών Μαθηματικών με κατανόηση***» (Comprehensive School Mathematics Program, 1994), επικεντρώθηκε σε διδασκαλίες με έμφαση

- στη λύση προβλήματος,
- την ανάπτυξη συλλογισμού και τεκμηρίωσης,
- γενικότερα στις μαθηματικές διεργασίες και τη λειτουργία των μαθητών με μαθηματικό τρόπο.

Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε

- Becker, P. J., & Selter, C. (1996). Elementary School Practices. In A. Bishop & K. Clements & C. Keitel & J. Kilpatric & C.Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 1, 511-564). Dortdrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Selter, C. (1998). Building on Children's Mathematics-a Teaching Experiment in Grade Three, Educational Studies in Mathematics, v36 n1 p1-27

Διδακτικά πειράματα Cobb και συνεργάτες

- Συνδύασαν την *κοινωνικο- πολιτισμικές* προσεγγίσεις με τα *Ρεαλιστικά Μαθηματικά*.
- Χρησιμοποιώντας δραστηριότητες επίλυσης αριθμητικών προβλημάτων, οι ερευνητές πειραματίσθηκαν με προσεγγίσεις που συνδύαζαν τα κοινωνικά με τα ψυχολογικά χαρακτηριστικά.

Διδακτικά πειράματα Cobb και συνεργάτες

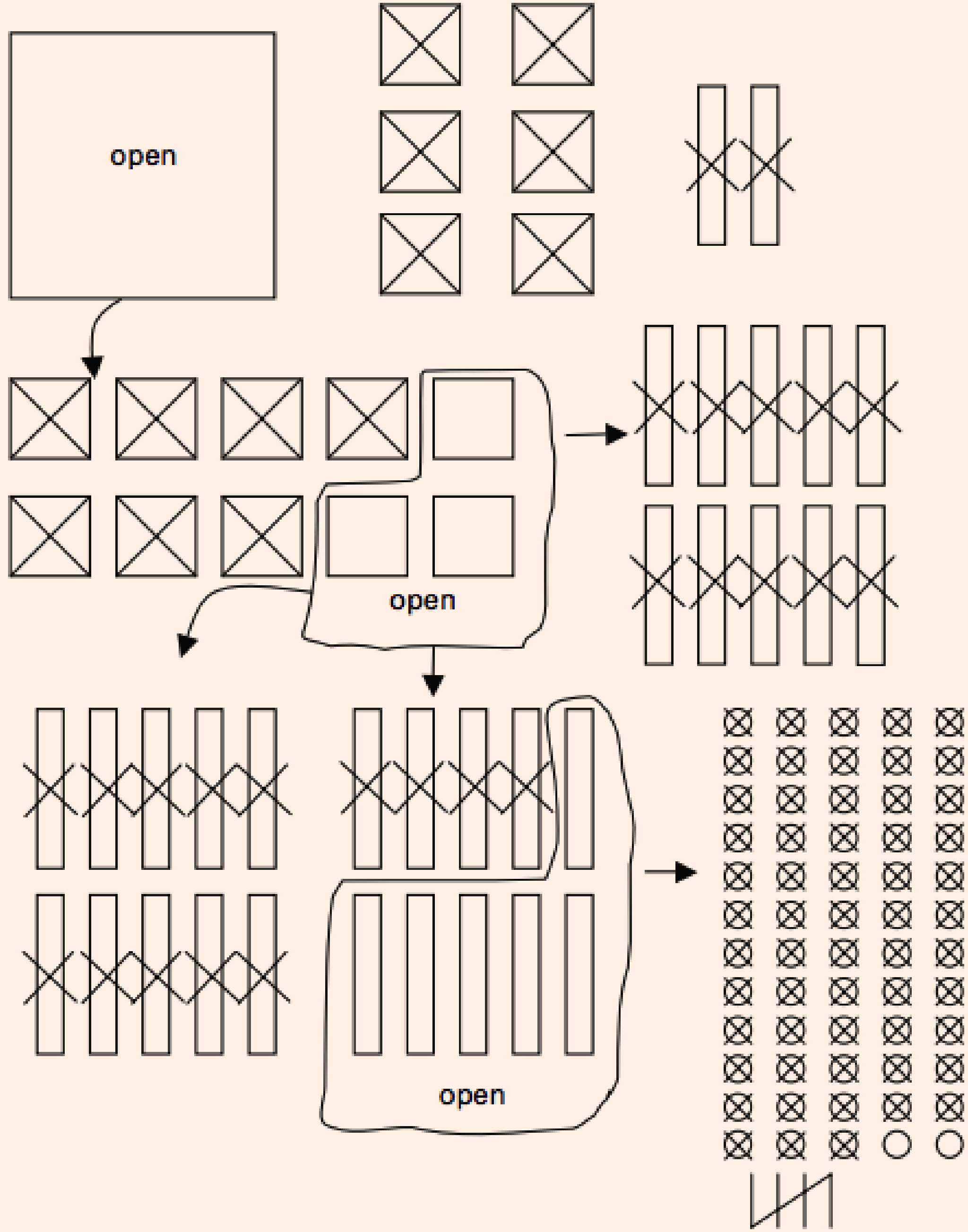
- Ανέλυσαν την μικροκουλτούρα της τάξης και τα νοήματα που μοιράζονταν μέσα σε αυτή (taken-as- shared meaning) μέσα από τις εξηγήσεις των μαθητών πάνω στις λύσεις.
- Τα αποτελέσματα έδειξαν μια ενδιαφέρουσα πρόοδο των μαθητών της πρώτης δημοτικού στην ανάπτυξη στρατηγικών.

Διδακτικά πειράματα Cobb και συνεργάτες

- Αντίστοιχα πειράματα πραγματοποιήθηκαν με μεγαλύτερα παιδιά στο «Εργοστάσιο με τις καραμέλες» (Candy Factory).
- Συνεχίσθηκαν με μελέτες σε άλλες μαθηματικές ενότητες και άλλες ηλικίες με κύριο στόχο την ανάλυση των *κοινωνικο- μαθηματικών νορμών* που τέτοιες εκπαιδευτικές διαδικασίες αναδεικνύουν.

Figure 5

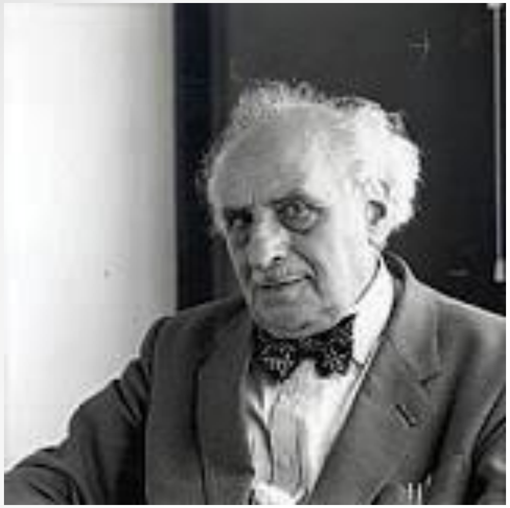
A representative pictorial solution for distributing lemon candies



Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε:

- Cobb, P. (1994). A summary of four case studies of mathematical learning in small groups. In J. P. da Ponte & J. M. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18nd Conference of the International Group for the PME* (Vol. 2, 210-218). Lisbon, Portugal.
- Cobb, P., & Bauesfeld, H. (1995). The coordination of Psychological and the Sociological perspectives in Mathematics Education. In P. Cobb. & H. Bauesfeld (Eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Culture*. Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Cobb, P., Perlwitz, M., & Underwood, D. (1996). Constructivism and Activity Theory: A Consideration of their Similarities and Differences as they relate to Mathematics Education. In H. Mansfield, Pateman, N.A. & Bednarz, N. (Ed.), *Mathematics for Tomorrow's Young Children* (10-58). Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.
- Yackel, E. (2001). Explanation, Justification and argumentation in Mathematics Classroom. In M. van den Heuvel- Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, 1-9). Utrecht: The Netherlands: Freudenthal Intitute, Utrecht University.
- Whitenach, J. W., Cobb, P., & McClain, K. (1995). A preliminary report of a first- grade teaching experiment: Mathematizing, modeling and mathematical learning in the classroom micro-culture. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19nd Conference of the International Group for the PME* (Vol. 3, pp. 256-263). Recife, Brazil.

Γενικές
Διδακτικές Θεωρήσεις



Ρεαλιστικά Μαθηματικά
1970

Freudenthal (1905 – 1990)

https://en.wikipedia.org/wiki/Hans_Freudenthal

Ρεαλιστικά Μαθηματικά

- Η προσέγγιση Freudenthal με τον όρο *διδακτική φαινομενολογία* (didactical phenomenology) στηρίζει την μάθηση των Μαθηματικών πάνω στις ατομικές-φαινομενολογικές ερμηνείες αντιμετωπιζόμενων καταστάσεων.
- *Χρήση της πραγματικότητας* ως πηγή μαθηματικοποίησης
- Στήριξη στην *διερευνητική δραστηριότητα* των μαθητών σε προβλήματα που τους προτείνονται ή δημιουργούν τα ίδια.

Ρεαλιστικά Μαθηματικά

- Τα Ρ.Μ. θεωρούν τη μαθηματική μάθηση ως μια *κατασκευαστική δραστηριότητα* μέσα σε ένα *κοινωνικό περιβάλλον* όπου μαθητές και δάσκαλοι αλληλεπιδρούν και συνεργάζονται.
- Προτείνουν το σχεδιασμό πραγματικών καταστάσεων και προβλημάτων *με νόημα* για τα παιδιά
- Τους ενθαρρύνουν να κινηθούν από τις *αυθόρμητες και άτυπες* στις *πιο τυπικές μαθηματικές* κατασκευές, με την ανάπτυξη υψηλότερων επιπέδων αφαίρεσης, γενίκευσης και τυποποίησης.

Ρεαλιστικά Μαθηματικά

- Ο ίδιος ο Freudenthal υποστηρίζει ότι οι μαθητές

  «... *χρειάζονται να διαχειριστούν και να μελετήσουν καταστάσεις με καθημερινό περιεχόμενο, αλλά η μελέτη αυτή αν και προκύπτει από πρακτικούς χειρισμούς, θα πρέπει να τους οδηγεί να* ***μετασχηματίσουν τα πραγματικά σε νοερά αντικείμενα****, να τα μορφοποιήσουν σε σχήματα και έτσι να τα αντιληφθούν σε ένα ανώτερο επίπεδο...*»

3 βασικές αρχές

- Η **1η** είναι η αρχή της καθοδηγούμενης ***επανανακάλυψης*** (guided reinvention):

  δίνει στους μαθητές ευκαιρίες να ακολουθήσουν μια διαδικασία ανακάλυψης των Μαθηματικών αντίστοιχη με αυτή που ακολούθησαν και τα ίδια τα Μαθηματικά όταν δημιουργήθηκαν.

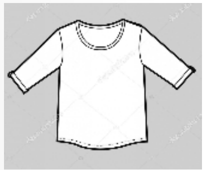
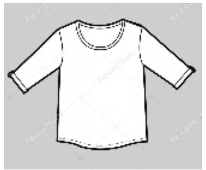
3 βασικές αρχές

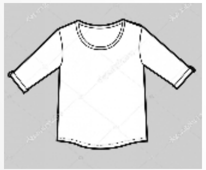
- Η **2η** είναι η αρχή της προοδευτικής **μαθηματικοποίησης** μέσα από τη διδακτική φαινομενολογία (οριζόντια και κατακόρυφη):

  Δίνει στους μαθητές ευκαιρίες φαινομενολογικής αναζήτησης μέσα σε συγκεκριμένες προβληματικές καταστάσεις που επιτρέπουν παραδειγματικές λύσεις και οδηγούν σε γενικεύσεις.

Μαθηματικοποίηση

- ***Οριζόντια μαθηματικοποίηση*** από το (πραγματικό) πρόβλημα στο μαθηματικό πρόβλημα, π.χ. με διατύπωση και αναπαράσταση, με ανακάλυψη ιδιοτήτων, σχέσεων κλπ. και χρήση μαθηματικών εργαλείων.

  και  κάνουν 44 €.

 και  κάνουν 30 €

Τα παιδιά αρχίζουν δοκιμάζοντας αλλά στη συνέχεια οργανώνουν:

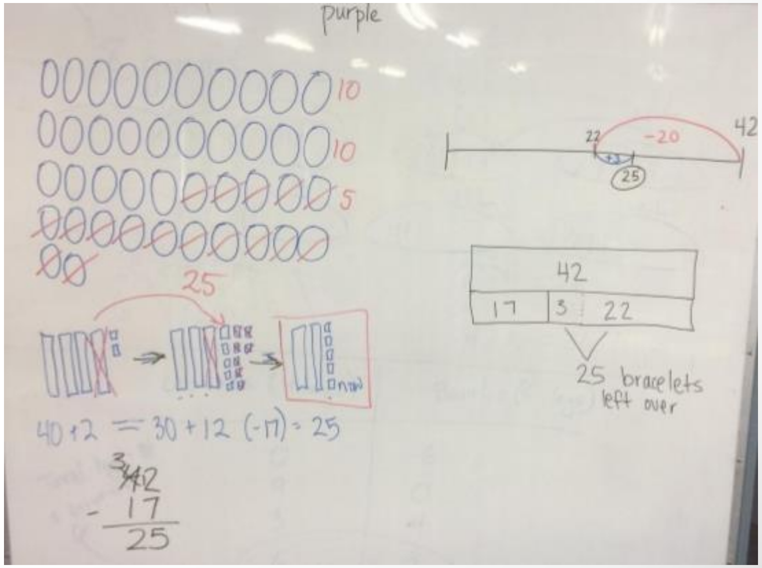
2 μπλούζες + 2 ποτά = 44 €

1 μία μπλούζα + 3 ποτά = 30 €

Μαθηματικοποίηση

- Κατά την ***κατακόρυφη μαθηματικοποίηση*** το (πραγματικό) πρόβλημα που έχει «μεταφραστεί» σε μαθηματικό, και αντιμετωπίζεται με μαθηματικά εργαλεία, πχ. αναπαράσταση σχέσεων με τύπους, απόδειξη σχέσεων, χρήση γνωστών μοντέλων κλπ.

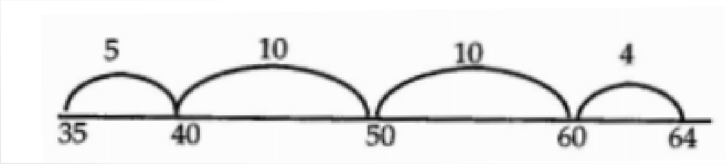
- Η Μ. είχε 42 κύβους κι έδωσε στη φίλη της 17, πόσους κύβους έχει τώρα;

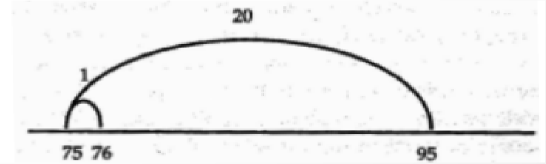


3 βασικές αρχές

- Η **3η** αρχή σχετίζεται με τα ***αυτο-αναπτυσσόμενα μοντέλων*** (self-developed models) για τη σύνδεση άτυπης και τυπικής γνώση.
- Ο μαθητής αντιμετωπίζοντας μια κατάσταση δημιουργεί *ένα μοντέλο της κατάστασης* (model of) που το χρησιμοποιεί για τη λύση της.
- Σε μια πορεία γενίκευσης, το μοντέλο αυτό μελετάται ξεχωριστά και μπορεί να αποτελέσει *ένα μοντέλο για το μαθηματικό συλλογισμό* (model for).

- Ένα *μοντέλο για την επανάληψη των μονάδων μέτρησης, σε ένα μοντέλο* για τους νοερούς υπολογισμούς (πχ. από 35 + .. =65, στη γραμμή και 95-19)

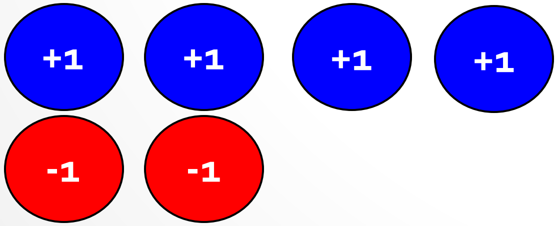




Παράδειγμα

- Αντίστοιχα, τα μέσα ή τα υλικά ως μοντέλο για υπολογισμούς σε προβλήματα, προς μοντέλο για συλλογισμούς.

- Η χρήση μοντέλου για την πρόσθεση και αφαίρεση είναι οι θετικοί και αρνητικοί «μετρητές».



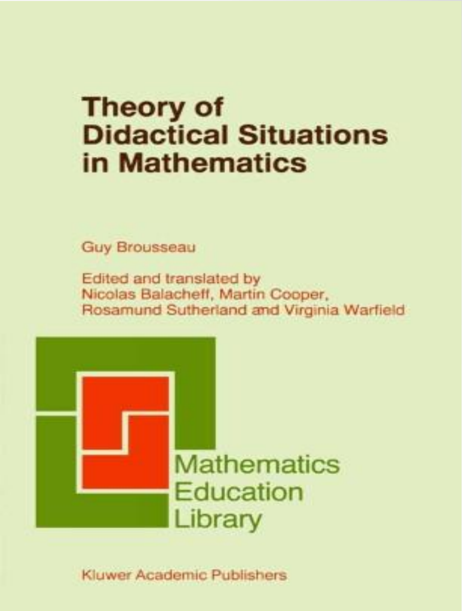
Παράδειγμα

- Τα παιδιά για να μετρήσουν και να περιγράψουν τους ανθρώπους που βρίσκονται σε ένα λεωφορείο δουλεύουν με χάντρες που χάντρες αποτελούν *ένα μοντέλο της κατάστασης* που αντιμετωπίζουν.

- Αργότερα, εξηγώντας τις απαντήσεις τους, το σχήμα αυτό θα αποτελέσει ένα *μοντέλο για το συλλογισμό* τους και ίσως αργότερα και για άλλους αντίθετους συλλογισμούς.

Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε:

- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Kluwer.
- Streenfland, L. (2003) Learning From History For Teaching In The Future, *Educational Studies in Mathematics* **54:** 37–62, 2003.
- Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. In T. Nunes & P. Bryant (Ed), *Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective* (265-284). East Sussex, UK: Psychology Press Ltd., Publishers.
- Verschaffel, L. (2002). Taking the modelling perspective seriously at the elementary school level: Promises and Pitafalls. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 64- 80). Norwich: UEA, Norwich.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic *mathematics education*: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational* Studies in *Mathematics*, 54 (1), 9-35.
- (*two special issues of ES*, 25 & 54)



Θεωρία Διδακτικών Καταστάσεων - 1970

Brousseau (1933 - 2024)

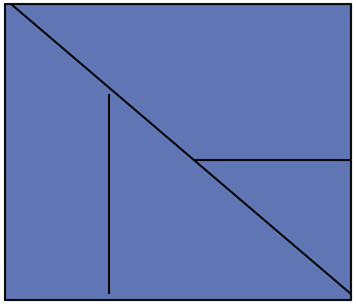
https://fr.wikipedia.org/wiki/Guy_Brousseau

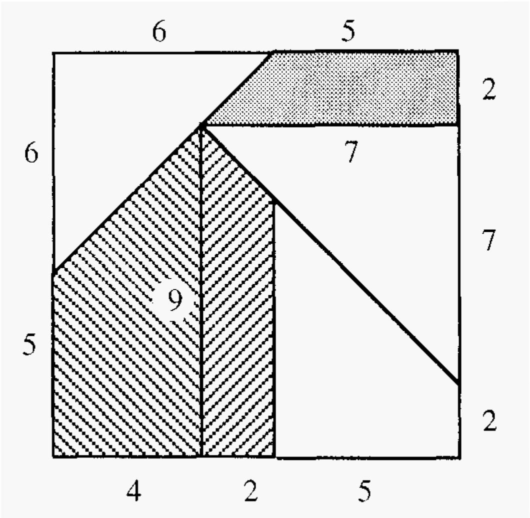
Θεωρία Διδακτικών Καταστάσεων

- Η γαλλική σχολή των διδακτικών καταστάσεων (didactical situations) και της διδακτικής μηχανικής (didactical engineering, Brousseau, 1997), στηρίζεται σημαντικά στην *επιστημολογία της μαθηματικής εκπαίδευσης*, δηλαδή στη φύση των Μαθηματικών.
- Δοκιμάζει να δημιουργήσει *συνθήκες γένεσης* μαθηματικών γνώσεων στα πλαίσια της διδασκαλίας.

Διδακτική Κατάσταση - puzzle

- Το puzzle που τα παιδιά χρειάζεται να μεγαλώσουν.





- Καθώς τα παιδιά προχωρούν στην κατασκευή διερευνούν πολλές σχετικές ιδιότητες.

Θεωρία Διδακτικών καταστάσεων

- Η διδασκαλία μας γνώσης δεν είναι η μετάδοση της, αλλά η δημιουργία μιας κατάστασης κι ενός διδακτικού περιβάλλοντος, όπου *αυτή η γνώση είναι απαραίτητη για την αντιμετώπιση της.*
- Μια διδακτική κατάσταση έχει **4 φάσεις**:

  δράση – επιβεβαίωση – διατύπωση – επισημοποίηση.
- Η επιστημονική γνώση αναπτύσσεται όμοια: ξεκινά με ένα πρόβλημα, αναζήτηση και αρχικές λύσεις, επικοινωνία αποτελεσμάτων, επιβεβαίωση, αναθεώρηση, κλπ. τελικά αποδοχή και επισημοποίηση/γενίκευση.

Θεωρία Διδακτικών Καταστάσεων

- Μια διδακτική κατάσταση εμπλέκει ένα πρόβλημα, ώστε **η *γνώση να αποτελεί τη βέλτιστη λύση του*.**
- Αποτελεί ένα σύνολο σχέσεων με ένα διδάσκοντα, έναν διδασκόμενο και μία γνώση, για την εκμάθηση της (Brousseau, 1986).
- Η ΘΔΚ πλαισιώθηκε από τις θέσεις και τις μελέτες του Vergnaud (1982) με τα *εννοιολογικά πεδία* για την ακριβή προσέγγιση μαθηματικών εννοιών και τα ίχνη τους στην αντίληψη των παιδιών.
- Τα *εννοιολογικά πεδία* καθοδηγούν την ανάπτυξη των τροχιών.

Θεωρία Διδακτικών Καταστάσεων

- Οι θεωρίες για τα *εννοιολογικά πεδία* (conceptual field) βοήθησαν να γίνει αντιληπτό ότι μία έννοια και ιδιαίτερα μια μαθηματική έννοια:
    - παίρνει το νόημά της *μέσα από μια κλάση διδακτικών καταστάσεων* στις οποίες εμπλέκεται και λειτουργεί,
    - και αντίστροφα μια κατάσταση *δεν αναλύεται μόνο* με την βοήθεια μιας έννοιας.
- Στη βάση αυτή ο Brousseau επεξεργάστηκε κλάσεις διδακτικών καταστάσεων.

Θεωρία Διδακτικών Καταστάσεων

- Κατά τη γαλλική σχολή, η διδασκαλία απαιτεί από το δάσκαλο να

  - επιλέξει τα *κατάλληλα προβλήματα* και

  - να προκαλέσει τους μαθητές να ‘αναλάβουν’ την επίλυση των προβλημάτων.

- Ο δάσκαλος δίνει το πρόβλημα και *σταματά να παρεμβαίνει* και να υποβάλει απαντήσεις ή να κρίνει αυτές τις απαντήσεις.

Θεωρία Διδακτικών Καταστάσεων

- Ο μαθητής ξέρει ότι το πρόβλημα έχει επιλεγεί για να αναπτύξει *ένα μέρος μιας νέας γνώσης*,
- Τα προβλήματα είναι επιλεγμένα να οδηγήσουν τους μαθητές (με δικό τους κίνητρο) να δράσουν, να μιλήσουν, να σκεφτούν και να εξελίξουν τη σκέψη τους.
- Επίσης γνωρίζει ότι αυτή η γνώση δικαιολογείται από την ***εσωτερική λογική της κατάστασης*** και ότι μπορεί να την κατασκευάσει χωρίς κάποια διδακτική δικαιολογία.

Μια ΔΚ απαιτεί

- τη ***σημασία της έννοιας*** μέσα στη μαθηματική θεωρία,
- ***τις ιστορικές και πολιτισμικές συνθήκες*** που οδήγησαν στη δημιουργία της στην ανθρωπότητα (ενδιάμεσες μορφές, εμπόδια στην εξέλιξη της, καταστάσεις που βοήθησαν το ξεπέρασμα αυτών των εμποδίων κλπ.),
- μια ***μελέτη των συνθηκών*** ανάπτυξης αυτής της έννοιας μέσα σε καταστάσεις όπου λειτουργεί και παίρνει το νόημά της και
- μια ***διδακτική ανάλυση***, μια μελέτη των σημασιών που μπορεί να πάρει η έννοια από τον τρόπο διαχείρισης στη διδασκαλία ή από προηγούμενες επαφές μαζί της ή άλλες έννοιες.

Θεωρία Διδακτικών Καταστάσεων

- Ο Brousseau ασχολήθηκε ερευνητικά και πειραματίσθηκε με το σχεδιασμό *διδακτικών καταστάσεων*, «γένεσης» μαθηματικών νοημάτων.
- Ο σχεδιασμός αυτός ονομάσθηκε ***Διδακτική Μηχανική*** (didactical engineering).
- Ισχυρίσθηκε ότι η προσέγγιση *κάθε μίας* μαθηματικής έννοιας απαιτεί *ένα ολοκληρωμένο πρόγραμμα*.
- Πιθανές διδακτικές επιλογές πάνω στο διαρκές ερώτημα «*τι θα κάνει και γιατί θα λειτουργήσει έτσι ο μαθητής;*» (Schubauer- Leoni, & Perret-Clermont, 1997; Brouseau, 2006).

Διδακτική μηχανική

- **Παντογράφος:**
- Ο δάσκαλος ζητάει από τα παιδιά να ‘υποθέσουν’ πόσο θα μετασχηματισθεί ένα μήκος από 1 ως 15 cm από τον παντογράφο (μια συσκευή που παράγει ομοιοθετικούς μετασχηματισμούς). Για παράδειγμα δύο διαδοχικές μεγεθύνσεις x2,5 και μετά x1,5. Τα παιδιά σχηματίζουν πίνακες:

3 → 7,5 → 11,25

Διδακτική μηχανική

Το πάχος του χαρτιού:

Πόσο είναι το πάχος του ενός χαρτιού από ένα πάκο των 200 χαρτιών.

1^o ερώτημα η εύρεση

2^o η τυποποιήση

10 φύλλα 1 mm

60 φύλλα 7 mm

30 φύλλα 2 mm ή 15 φύλλα 1 mm

3^o ερώτημα, πράξεις: ενώνω τα φύλλα, διπλασιάζω, τριπλασιάζω, τα όμοια και τα μη όμοια

19φ; 3 mm τύπος Α

19φ; 2 mm τύπος Β

9φ; 2 mm τύπος Γ

Θεωρία Διδακτικών Καταστάσεων

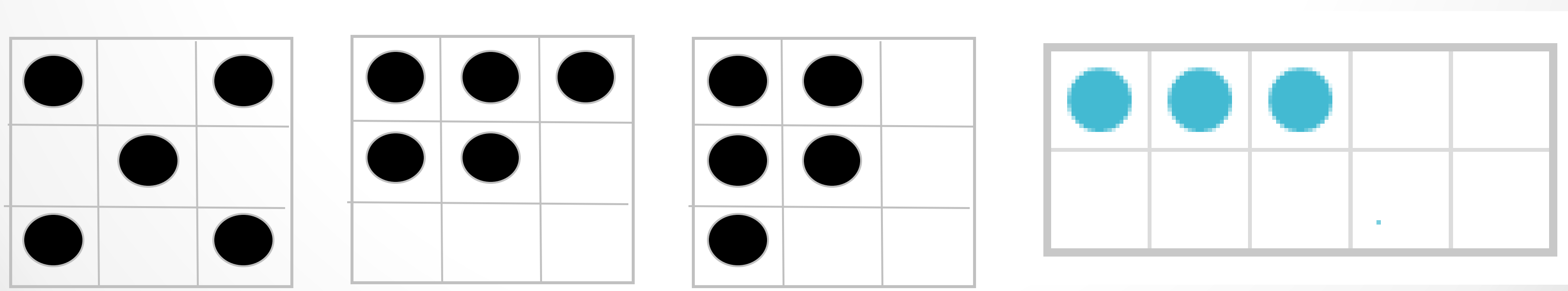
- Η απόκτηση της νέας γνώσης γίνεται κυρίως όταν ο μαθητής δοκιμάζει να το κάνει έξω από κάθε διδακτική πρόθεση.
- Μια τέτοια κατάσταση λέγεται *α-διδακτική*
- Οι μαθητές περνούν από μια πρώτη *αυθόρμητη συμμετοχή*, σε *αναγνώριση της κατάστασης* και εξέλιξη της *προηγούμενης γνώσης*.
- Κάθε τμήμα γνώσης πλαισιώνεται από ένα σύνολο διδακτικών και α- διδακτικών καταστάσεων που της δίνουν το νόημα και την δημιουργούν.

ΘΔΚ, γνώση μέσα από το παιχνίδι

Παράδειγμα

Στο πάτωμα είναι απλωμένες καρτέλες με ποσότητες σε διαφορετικούς σχηματισμούς. Τα παιδιά παίζουν σε ομάδες, που με το σύνθημα προσπαθούν να βρουν τις πιο πολλές καρτέλες με κάποια ποσότητα.

Παραλαγή πρώτη αρίθμηση



ΘΔΚ, γνώση μέσα από το παιχνίδι

Πρώτο επίπεδο : **Παιχνίδι.** Τα παιδιά παίζουν ψάχνοντας τις μορφές που ξέρουν.

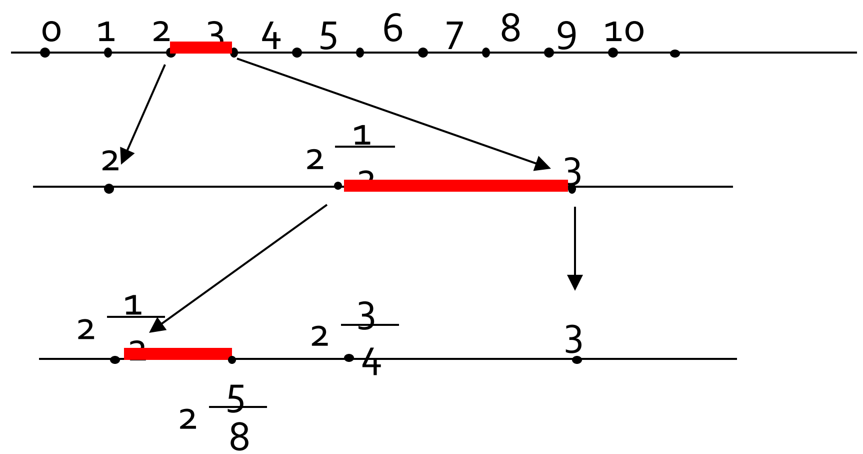
Δεύτερο επίπεδο : Αναγνώριση. Τα παιδιά καταλαβαίνουν ότι υπάρχουν κι άλλοι σχηματισμοί και προσπαθούν να τους εντοπίσουν.

Τρίτο επίπεδο : **«Γνώση».** Τα παιδιά εξοικειώνονται να αναγνωρίζουν τις ποσότητες σε διαφορετικές μορφές.

Τέταρτο επίπεδο: **«Μεταγνώση».** Τα παιδιά κατανοούν τις σχέσεις που εμφανίζονται.

ΘΔΚ, γνώση μέσα από το παιχνίδι

- Οι μαθητές παίζουν το παιχνίδι του κρυμμένου αριθμού:



Παιχνίδι. Οι μαθητές αναζητούν «τυχαία».

Αναγνώριση. Οι μαθητές καταλαβαίνουν ότι χρειάζονται ενδιάμεσους αριθμούς.

«Γνώση». Οι μαθητές 'αναζητούν' ενδιάμεσους κλασματικούς και στην ομάδα που προτείνει και στην ομάδα που αναζητά

ΘΔΚ, γνώση μέσα από το παιχνίδι

- Οι μαθητές παίζουν *τον αγώνα για το 20 με 1 ή 2*
- Κάθε παίχτης λέει 1 ή 2 με στόχο να φτάσει πρώτος στο 20.

Κερδίζουν τα 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 γενικά τα 20 -3κ, κ=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

Παιχνίδι. Οι μαθητές αρχικά αναζητούν «τυχαία»

Αναγνώριση. Οι μαθητές καταλαβαίνουν ότι χρειάζονται στρατηγική και αρχικούς αριθμούς.

«Γνώση». Οι μαθητές πετυχαίνουν την σχετική διαδοχή αντίστροφα.

Γενίκευση Ανάλογα με το επίπεδο γενικεύουν (20 -3κ), εφαρμόζουν σε άλλο πλαίσιο πχ. 50 και 2ή 3 (50 – 5κ), ή μπορούν να γενικεύσουν περισσότερο «αγώνας για τον αγώνα στο n με m ή l βήματα, n – (m+l)k

Εμπλεκόμενες έννοιες στη ΘΔΚ

Επιστημολογική ανάλυση
Εμπόδια
Διδακτικός μετασηματισμός
Διδακτική μηχανική

Διδακτικά εμπόδια

Μεταγνωστική ολίσθηση

Διδακτική κατάσταση - γνώση

Αδιδακτικές φάσεις
Κατάσταση δράσης, έκφρασης, τεκμηρίωσης επισημοποίησης

Σύστημα διδασκόμενο

Σύστημα διδάσκων

Διδακτικά φαινόμενα

Διδακτικό συμβόλαιο
Εκχώρηση

Εμπόδια

- Ένα εμπόδιο εντοπίζεται από τα επαναλαμβανόμενα λάθη των μαθητών. Αναπαράγονται και είναι επίμονα. Είναι ένας τρόπος να βλέπεις τα πράγματα, μια αντίληψη, μια προηγούμενη γνώση που τώρα δεν είναι επαρκής.
  - Πώς γράφουμε το π, πόσα ψηφία έχει,
  - Είναι το 2=1,999...,
  - Αν $|x-d| < 1/10^n$ τότε το $x=d$

- Πώς πρόκυψαν αυτά; Από κακή κατανόηση - κακή διδασκαλία των ρητών; Κάτι άλλο και τι;

Εμπόδια

- Ο Brousseau υποστηρίζει ότι τα λάθη που κάνουν οι μαθητές σχετίζονται συχνά σε εμπόδια που μπορούν να αναγνωρισθούν σε τρεις διακριτές μορφές:

  - επιστημολογικά (ανάπτυξης της επιστήμης)

  - οντογεννετικά (ανάπτυξη σκέψης), και

  - διδακτικά

Εμπόδια

- Τα προβλήματα που συναντούν οι μαθητές με τους δεκαδικούς και τα κλάσματα οφείλονται σε οντογεννετικούς, διδακτικούς και επιστημολογικούς λόγους.
- Η *προκατάληψη των ακεραίων* έχει κυρίως μια διδακτική διάσταση.
- Το *διακριτό απέναντι στο συνεχές* έχει τόσο μια οντογεννετική όσο και μια επιστημολογική διάσταση.
- Βοηθώντας τα παιδιά να προσεγγίσουν την έννοια του συνεχούς ο Brousseau προτείνει το κυνήγι του αριθμού.

Θεωρία Δράσης

1973

Davidov (1930-1998)

Διδακτική της Θεωρίας Δράσης

- Με εκκίνηση τη θεωρία δράσης (activity theory, Luria, 1973, Leont'v, 1981), ο Ρώσος μελετητής Davidov, αναπτύσσει μια διδακτική προσέγγιση που στηρίζεται στην εισαγωγή και την παρέμβαση *των κοινωνικά διαμορφωμένων εργαλείων* στην μαθηματική εκπαιδευτική διαδικασία.
- Υποστηρίζει το πέρασμα από το *γενικό και αφηρημένο* στο *ειδικό και συγκεκριμένο* ως δόκιμη πορεία ανάπτυξης μαθηματικών εννοιών.

Διδακτική της Θεωρίας Δράσης

- Η Θεωρία Δράσης (Activity theory) είναι μια ψυχολογική θεωρία που έχει τις ρίζες της στην σοβιετική κοινωνικό- ιστορική ψυχολογική προσέγγιση του Vygotsky.
- Θεμελιωτής του είναι ο Α. Leont'ev που κατανοούσε τις ανθρώπινες δράσεις ως σύνθετα, κοινωνικά φαινόμενα.

Διδακτική της Θεωρίας Δράσης

- Η θεωρία αυτή έγινε βασική ψυχολογική προσέγγιση στην πρώην Σοβιετική Ένωση με εφαρμογές σε πολλές περιοχές όπως στην εκπαίδευση, την εργονομία και την ψυχολογία της εργασίας.
- Σήμερα έχει εφαρμογές σε πολλά μέρη του κόσμου και ανέπτυξε ιδιαίτερο προσανατολισμό με τον σκανδιναβό μελετητή Y. Engeström.

Διδακτική της Θεωρίας Δράσης

- Το θεωρητικό πλαίσιο της Θεωρία Δράσης αναλύει τις *ανθρώπινες πρακτικές ως αναπτυξιακές διαδικασίες* τόσο σε ατομικό όσο και σε κοινωνικό επίπεδο
- Χρησιμοποιεί τη *δραστηριότητα* ως βασική μονάδα μελέτης των ανθρώπινων πρακτικών.
- Στη δραστηριότητα εκτός από το υποκείμενο και το αντικείμενο *διαμεσολαβούν εργαλεία* (artifacts, τεχνουργημάτων).

Θεωρία Δράσης

Διδακτική της Θεωρίας Δράσης

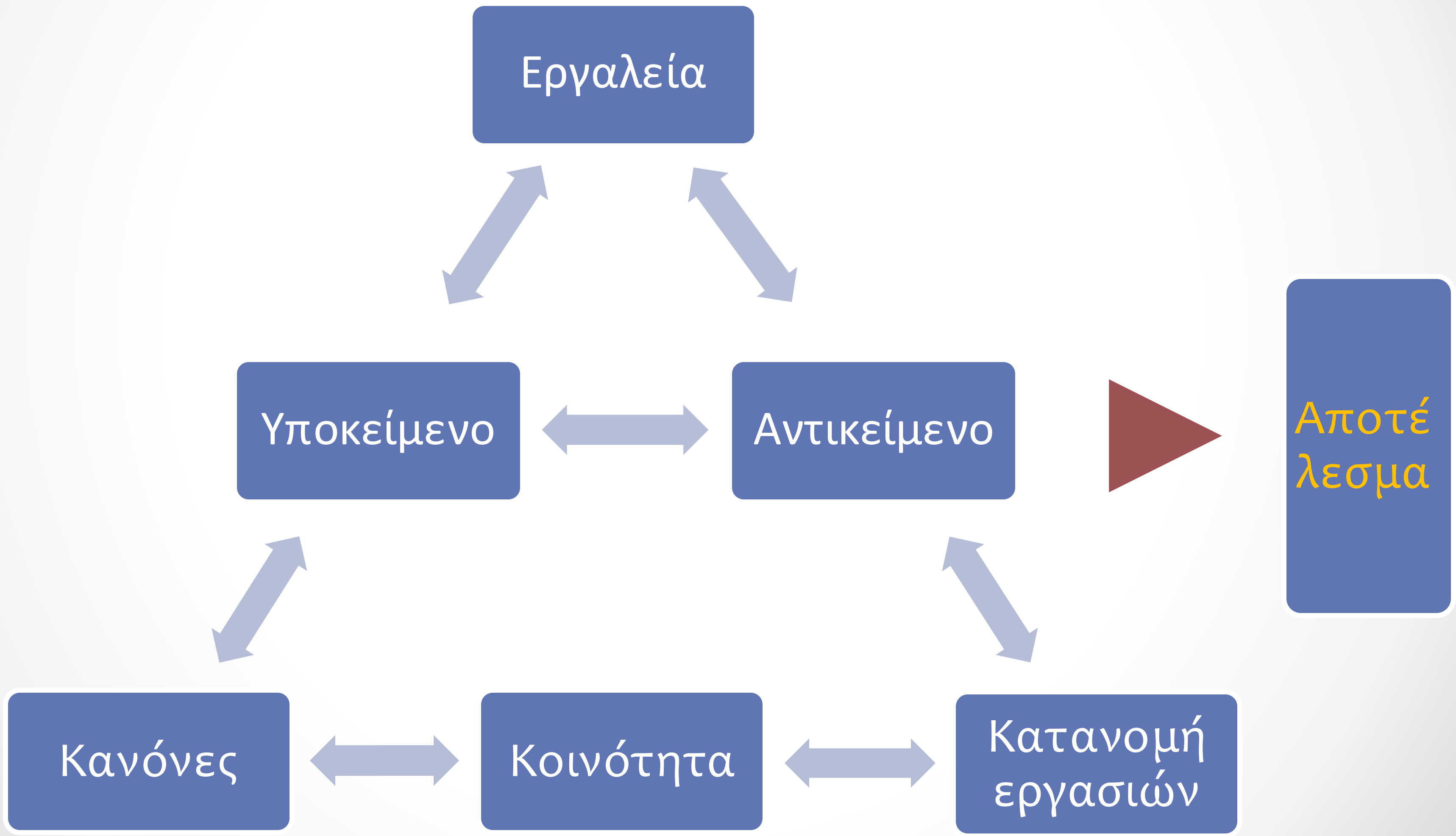
- Ένα ***εργαλείο/ τεχνούργημα (instrument/ artifact)*** είναι
- ‘*φυσικό*’ (αντικείμενο, μέσο, σχήμα, σήμα, μια παράσταση) ή
- ‘*νοητικό*’ (ιδέες, διεργασίες, στρατηγικές, κανόνες ή ρόλοι)

που διαμεσολαβούν αλλά και τροποποιούνται στη διάρκεια μιας δραστηριότητας.

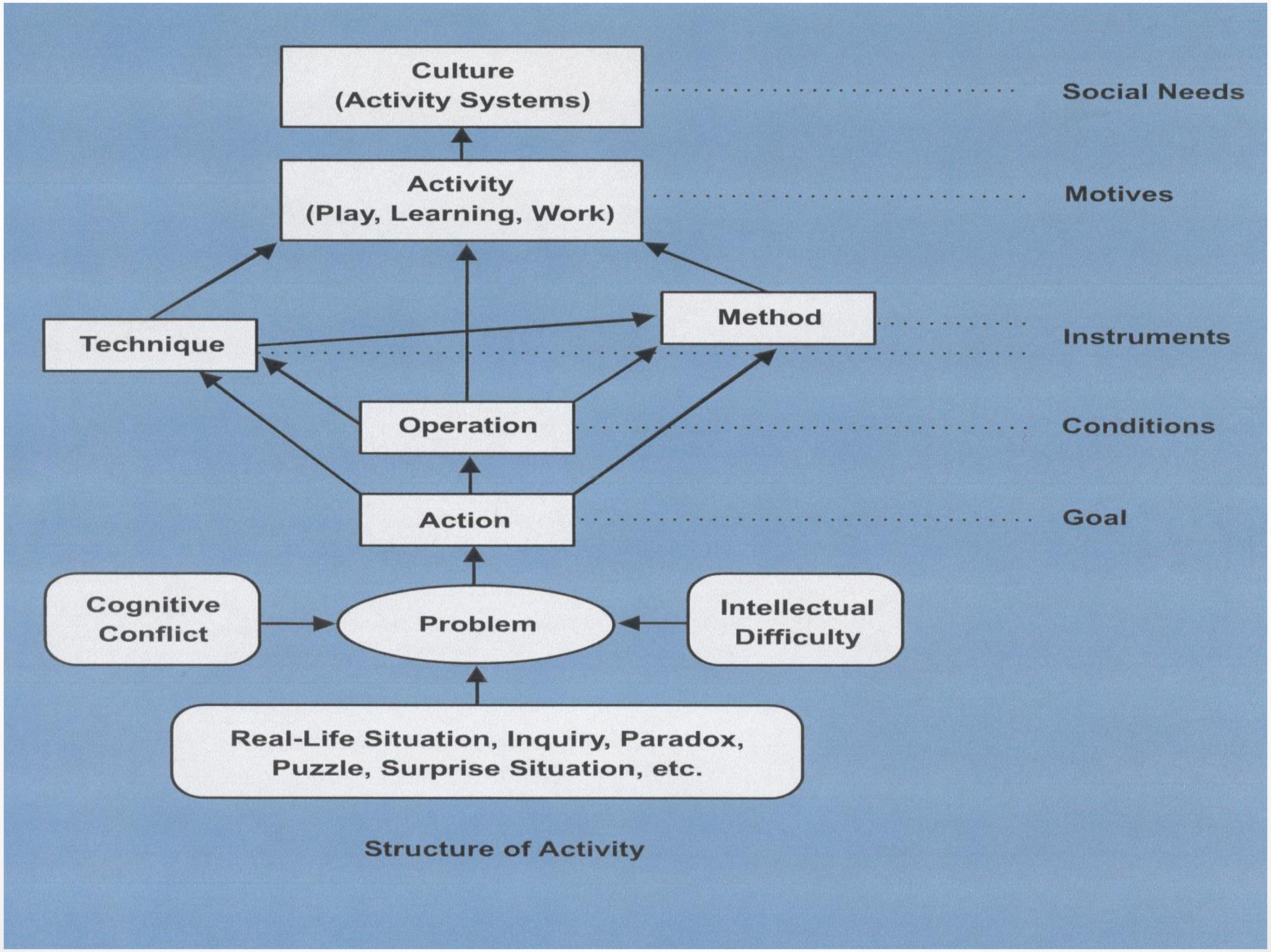
Διδακτική της Θεωρίας Δράσης

- Στο αρχικό ‘τρίγωνο΄ (υποκείμενο – αντικείμενο – εργαλεία) ο Engestrom (1999) προσθέτει
  - τους *κανόνες*,
  - την κοινότητα από τα άτομα που εμπλέκονται άμεσα ή έμμεσα με το έργο,
  - την *κατανομή εργασιών*

Θεωρία δράσης



Διδακτική της Θεωρίας Δράσης



Διδακτική της Θεωρίας Δράσης

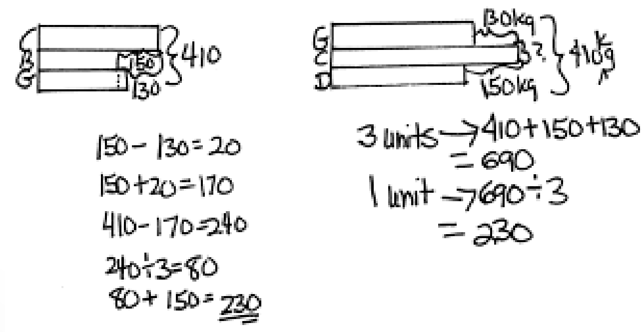
- O Davidov βάζει τη διαμεσολάβηση των *διαμορφωμένων μαθηματικών εννοιών* και τη χρήση του μαθηματικού συμβολικού συστήματος.
- Εισάγει τα *μαθηματικά στοιχεία και σύμβολα παράλληλα* με την προσέγγιση των εννοιών, όπως και τη χρήση *πιο αφηρημένης και ακριβούς γλώσσας*.
- Δεν κινείται από το ειδικο στο γενικό αλλά αντίστροφα από το *γενικό στο ειδικό*.

Διδακτική της Θεωρίας Δράσης
Παράδειγμα

- Κατά τον Davidov, για την αρίθμηση, τα παιδιά διαχειρίζονται την έννοια της ισότητας συγκρίνοντας μήκη, επιφάνειες, όγκους κλπ. και τα περιγράφουν με δηλώσεις όπως $G < R$.
- Τα γράμματα παριστάνουν ποσότητες που συγκρίνονται και όχι τα ίδια τα αντικείμενα.
- Σημειώνουμε ότι οι δηλώσεις αφορούν ποσότητες που δεν μπορούν τα παιδιά να μετρήσουν σε αυτό το στάδιο μάθησης που έχουν φτάσει.

Διδακτική της Θεωρίας Δράσης

- Στις προτεινόμενες διδακτικές πρακτικές ενθαρρύνει τους εκπαιδευτικούς στη χρήση πιο *αφηρημένης και ακριβούς γλώσσας*, στην *πρόκληση λαθών* που θα εντοπιστούν από τους μαθητές και στη *συζήτηση πάνω σε διαφωνίες* ώστε να οδηγηθεί η τάξη σε συγκρίσεις και αποφάσεις.



Διδακτική της Θεωρίας Δράσης

- Στην κριτική του μοντέλου αυτού οι Cobb et als (1996) επισημαίνουν ότι αν και ο Davidov υποστηρίζει την εισαγωγή πρακτικών προβλημάτων με νόημα για τα παιδιά, επιμένει σημαντικά *στη χρήση συμβόλων* και στη ***γρήγορη ανάπτυξη γενικεύσεων***.
- Το στοιχείο αυτό πιθανά οδηγεί σε επεμβάσεις των εκπαιδευτικών που υποβάλλουν την αναμενόμενη θεωρητική σκέψη από το παιδί.

«Measure Up» στις Η.Π.Α.

- Οι αριθμοί προκύπτουν από τις ανάγκες μέτρησης σε πραγματικές καταστάσεις (μήκος, επιφάνεια, όγκο) με τα τυπικά σύμβολα όπως το >, < ή =, να διευκολύνουν τις συγκρίσεις.
- Οι μαθητές αντιμετωπίζουν καταστάσεις μετατροπής άνισων ποσοτήτων σε ίσες ή και το αντίστροφο.
- Σε μια κατάσταση για παράδειγμα του τύπου «A < B» όπου τα παιδιά δοκιμάζουν να μετασχηματίσουν τα δύο άνισα μεγέθη (πχ. μήκη) σε ίσα, θα χρειαστεί να προσθέσουν στο A ή να αφαιρέσουν από το B.

«Measure Up» στις Η.Π.Α.

- Κατά την άποψη των ερευνητών η ισότητα είναι μια σημαντική έννοια και η προσέγγιση αυτή επιτρέπει στα παιδιά, από τη μικρότερη ηλικία να έρθουν σε επαφή με πολλές ιδιότητες (όπως αντιμεταθετικότητα, μεταβατικότητα, κλπ) που αναπτύσσονται μέσα από γενικές περιπτώσεις κι όχι μεμονωμένες αριθμητικές καταστάσεις.
- Οι συγκρίσεις πραγματικών μεγεθών, ιδιαίτερα όταν δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν διαισθητικά εισάγουν στα παιδιά την έννοια της μονάδας, που είναι απαραίτητη σε κάθε μέτρηση.

«Measure Up» στις Η.Π.Α.

- Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι, ακόμα και για παιδιά πρώτης δημοτικού, που τους ζητείται να εξετάσουν αν ισχύει $3<8$, είναι σε θέση να δώσουν απαντήσεις του τύπου:

  «*αν έχεις τρεις πραγματικά μεγάλες μονάδες για το 3 και μικρές για το 8, τότε το 3 μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το 8. Αλλά αν δουλεύεις στην αριθμογραμμή, τότε ξέρεις ότι το 3 είναι μικρότερο από το 8, γιατί εκεί όλες οι μονάδες είναι ίδιες*» (απάντηση παιδιού 6 χρόνων)

«Measure Up» στις Η.Π.Α.

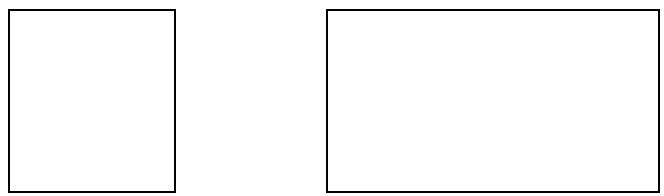
- Μαθητές της πρώτης τάξης επίσης είναι σε θέση να μελετήσουν ισότητες και ανισότητες.
- Ένας μαθητής πρόσεξε

  «*αν βάλεις την ίδια ποσότητα και στις δύο ίσες ποσότητες , παραμένουν ίδιες*».
- Κι ένας άλλος μαθητής παρατήρησε

  «*αν οι ποσότητες είναι άνισες, μπορείς να πάρεις ή να βάλεις από τη μεγαλύτερη και πάλι να παραμείνουν ίδιες (άνισες)*».
- Αυτά που καταλαβαίνουν τα παιδιά αποτελούν μια γερή βάση για την ανάπτυξη μαθηματικών ιδεών.

«Measure Up» στις Η.Π.Α.

- Συγκρίνοντας ένα τετράγωνο με ένα ορθογώνιο ένα παιδί κατάφερε να απαντήσει ως εξής:



«*αυτά τα σχήματα συνδυάζονται. Αν βάλεις δύο τετράγωνα θα είναι το ίδιο με το ορθογώνιο. Και αν βάλεις δύο ορθογώνια θα κάνουν ένα τετράγωνο αλλά μεγαλύτερο από το πρώτο*»

Κοινά στοιχεία των Τριών Θεωριών

- Τα *κοινά* τους στοιχεία είναι:

I. η ανάγκη **ατομικής δραστηριοποίησης** των μαθητών

II. η εμπλοκή τους σε **καταστάσεις με νόημα** και **ενδιαφέρον** για αυτούς,

III. Η δημιουργία προβλημάτων, καταστάσεων και διαδικασιών που δεν ενθαρρύνουν μόνο μια «τοπική» διαπραγμάτευση αλλά **οδηγούν σε γενικεύσεις και τυποποιήσεις.**

Διαφορές των Τριών Θεωριών

- Οι **διαφορές** τους βρίσκονται κυρίως :

  στη διαδικασία μέσα από την οποία η ατομική ή συλλογική ανάπτυξη θα συναντήσει την επίσημη μαθηματική γνώση.

  I. Η ΘΔΚ ενδιαφέρεται για *τα νοήματα που αναπτύσσονται στην τάξη* και τη διαπραγμάτευσή τους ακόμα κι αν διατηρούν τις αποστάσεις τους από την τυπική μαθηματική γνώση.

Διαφορές των Τριών Θεωριών

- Οι **διαφορές** τους βρίσκονται κυρίως :

  στη διαδικασία μέσα από την οποία η ατομική ή συλλογική ανάπτυξη θα συναντήσει την επίσημη μαθηματική γνώση.

  II. Τα PM δίνουν βάρος στην *εμπλοκή των μαθητών σε καταστάσεις που συνδέονται στενά με την εμπειρία* και την πραγματικότητα τους, ακόμα κι αν δεν γνωρίζουν τον ακριβή τρόπο με τον οποίο γενικεύονται.

Διαφορές των Τριών Θεωριών

- Οι **διαφορές** τους βρίσκονται κυρίως :

  στη διαδικασία μέσα από την οποία η ατομική ή συλλογική ανάπτυξη θα συναντήσει την επίσημη μαθηματική γνώση.

  II. Η ΘΔ θεωρεί ότι τα *κοινωνικά και πολιτισμικά* δημιουργήματα εισάγονται στις αντιλήψεις των μαθητών πολύ νωρίτερα από ότι οι ίδιοι είναι σε θέση να επεξεργαστούν και τους επηρεάζουν, χωρίς όμως να απαντούν στον τρόπο με τον οποίο τα κατανοούν οι μαθητές και μπορούν να τα εσωτερικεύσουν.

7 βασικοί διδακτικοί κανόνες

1. Επικέντρωση στις *μεγάλες ιδέες* των μαθηματικών.
2. Εκκίνηση από ένα *πρόβλημα – ερώτημα*.
3. Ενθάρρυνση των μαθητών να *δράσουν* *και να σκεφτούν*.
4. Ανταλλαγή και διάλογος – δεν απαντά ο δάσκαλος
5. Έλεγχος και αξιολόγηση από τους μαθητές.
6. Χρήση *υλικού και διδακτικών μέσων*
7. Χρήση διαφορετικών *μορφών* *διδακτικής* οργάνωσης της τάξης (ατομικά, σε μικρές ομάδες, όλη η τάξη).

Δραστηριότητα 2

Διαχείριση της τάξης των Μαθηματικών

Διδακτικό Συμβόλαιο

- Ο Brousseau (1997) ορίζει ως Διδακτικό Συμβόλαιο το σύνολο των συμπεριφορών του διδάσκοντος που αναμένονται από τον μαθητή και το *σύνολο των συμπεριφορών* του μαθητή που αναμένονται από τον διδάσκοντα.
- Το σύνολο αυτών των κανόνων προσδιορίζουν εν μέρει ρητά αυτή τη σχέση, αλλά πάνω απ' όλα *άρρητα* στο τι ο κάθε συμμετέχων πραγματοποιεί, ώστε να ανταποκρίνεται στις προσδοκίες του άλλου.

Διδακτικό Συμβόλαιο

- Το Διδακτικό Συμβόλαιο εξαρτάται από τη στρατηγική διδασκαλίας που έχει υιοθετηθεί:

- Τρόπος εργασίας που απαιτεί ο διδάσκων από τους μαθητές,
- οι παιδαγωγικές επιλογές του,
- η επιστημολογία του καθώς και
- οι διδακτικοί του στόχοι

είναι ουσιαστικά τμήμα των βασικών χαρακτηριστικών του συμβολαίου (Henry, 2003).

- Το συμβόλαιο αυτό «υπογράφεται» στα πρώτα στάδια της φοίτησης των παιδιών στο σχολείο.

Παράδειγμα Κανόνων ΔΣ

- **Επίλυση προβλήματος**

  Τα προβλήματα έχουν κοινά χαρακτηριστικά διαμορφώνοντας μια σειρά κανόνες (Brousseau, 1981):

  - Ένα πρόβλημα λύνεται κάνοντας πράξεις.
  - Όλα τα προβλήματα έχουν λύση.
  - Η λύση αυτή είναι ένας μοναδικός και ακριβής αριθμός.
  - Όλα τα στοιχεία που χρειάζονται για τη λύση ενός προβλήματος παρατίθενται στην εκφώνηση.
  - Η εκφώνηση οφείλει να μην έχει περιττά στοιχεία.
  - Οι ερωτήσεις που τίθενται δεν έχουν σχέση με την καθημερινή πραγματικότητα (αναστολή νοήματος)

Παράδειγμα Κανόνων ΔΣ

- **Τριγωνομετρικές συναρτήσεις**

  Τα αποτελέσματα της έρευνας Bagni (1997) έδειξαν ότι οι μαθητές, 16-19 ετών, επηρεασμένοι από τον τριγωνομετρικό πίνακα, θεωρούν ότι δεν υπάρχει απάντηση για τιμές που δεν βρίσκονται στον πίνακα.

- Για παράδειγμα, στην άσκηση «*βρείτε x ϵ R ώστε ημx=1/3*», οι μαθητές απαντούν ότι:
  - πρόκειται για αδύνατη εξίσωση,
  - δίνουν απάντηση βασισμένη στην εκτίμηση σύμφωνα με τις κοντινότερες τιμές που βρίσκονται στον πίνακα ή
  - συσχετίζουν λανθασμένα τις τιμές.

Κοινωνικομαθηματικές νόρμες

- Αντίστοιχοι κανόνες αυτοί αναπτύχθηκαν σαν ιδέα από τους Cobb & Yackel (1996) και αναπτύχθηκαν σε συνεργασία με τους Bauersfeld, για να εξειδικεύουν ένα κοινωνικό ζήτημα μέσα στην τάξη των Μαθηματικών.
- *Κοινωνικομαθηματικές Νόρμες (Sociomathematical Norms)*: Αποτελούν κανόνες κυρίως σχετικές με λύσεις ή εξηγήσεις μαθηματικών θεμάτων (βαθείς και ενορατικές ή κομψές).

Παραδείγματα Εξηγήσεων ΚΜΝ

Μια τάξη μελετά την πρόσθεση με διψήφιους αριθμούς, πχ. 12+13:

- κάποια παιδιά δίνουν εξηγήσεις του τύπου «1 και 1 κάνει 2, 2 και 3 κάνει 5»
- κάποια άλλα δίνουν εξηγήσεις του τύπου «10 και 10 κάνει 20 και 2 και 3 κάνει 5»

Είναι αυτές οι εξηγήσεις ίδιες ως προς τη φύση τους? Τις αποδέχεται ο εκπαιδευτικός? Τι σχολιάζει?

Παραδείγματα Εξηγήσεων ΚΜΝ

- Οι Yackel & Cobb (2001) χαρακτηρίζουν
  - την πρώτη ως *περιγραφή διαδικασίας* και
  - τη δεύτερη ως *περιγραφή πράξης* πάνω τις δεκάδες και μονάδες (μαθηματικά αντικείμενα).

- Ο εκπαιδευτικός επικροτεί τη δεύτερη δημιουργώντας τον κανόνα στα παιδιά ότι οι εξηγήσεις πρέπει να αφορούν πράξεις δράσεις πάνω στα αντικείμενα κι όχι περιγραφές.

Παραδείγματα Λύσεων ΚΜΝ

Μια τάξη μελετά τρεις προσθέσεις με το 9:

27+9, 37+9, 47+9:

- κάποια παιδιά κάνουν σωστά τις τρεις προσθέσεις και δίνουν τις απαντήσεις
- κάποια άλλα δίνουν μια λύση με ένα πιο γενικό κανόνα: την πρόσθεση με τη δεκάδα μείον 1.

Είναι αυτές οι λύσεις ίδιες ως προς τη φύση τους? Τις αποδέχεται ο εκπαιδευτικός? Τι σχολιάζει?

Παραδείγματα λύσεων ΚΜΝ

- Οι μαθητές αρχικά προτείνουν διάφορες λύσεις χωρίς να ξέρουν πώς θα εκτιμηθεί από το δάσκαλο και χωρίς να έχουν προκαθορισμένα κριτήρια του τι σημαίνει μαθηματικά διαφορετικό.
- Με τη συμμετοχή τους στη συζήτηση, τα παιδιά μαθαίνουν πώς και ποιες ο δάσκαλος «νομιμοποιεί».

Παραδείγματα λύσεων ΚΜΝ

- Οι Yackel & Cobb παρατηρούν ότι ο εκπαιδευτικός χαρακτηρίζει (Yackel, Cobb & Wood, 1998, 1996)
  - την πρώτη ως *απλή λύση* που είναι αποδεκτή, αλλά
  - τη δεύτερη ως *έξυπνη* και την επικροτεί δημιουργώντας στα παιδιά τον κανόνα για το τι είναι έξυπνη και αποτελεσματική λύση.
- Ζητώντας τέτοιες λύσεις κι αξιολογώντας ποια είναι απλή, καλή ή διαφορετική, ο εκπαιδευτικός οδηγεί την τάξη να διαμορφώσει κανόνες για το *τι μετράει στα Μαθηματικά* (Voigt, 1995)

Άρα, κοινωνικομαθηματικοί κανόνες

- (αντίστοιχα με το ΔΣ) είναι ένα *σύνολο συμφωνημένων αρχών συνύπαρξης και συνδιαλλαγής* των ατόμων μιας ομάδας που επιτελεί ένα σκοπό, ξεκινούν και καθοδηγούνται από το δάσκαλο και ενισχύουν τη μικροκουλτούρα της τάξης η οποία χαρακτηρίζεται από επεξήγηση, συζήτηση και επιχειρηματολογία.
- Αφορά ότι αναμένεται από τους μαθητές για την εξήγηση λύσεων ή τρόπου σκέψης.
- Αφορά ότι αναμένεται από τους μαθητές στις ερμηνείες και στις λύσεις τους ή των άλλων.

Παράδειγμα επιστημολογικής αντιστοιχίας

- ***Ο πολλαπλασιασμός των Αιγυπτίων***

  Οι Αιγύπτιοι ακολουθούσαν τη μέθοδο του διπλασιασμού

  για παράδειγμα 28 Χ 35:

2	70
4	140
8	280
16	560

  και από αυτά τα αποτελέσματα χρησιμοποιούσαν όποια ήταν βολικά,

  πχ. τα 16 και 4 και 8 = 560 +140 +280 = 980

Παράδειγμα επιστημολογικής αντιστοιχίας

- ***Ο πολλαπλασιασμός των Ελλήνων***

Οι Έλληνες χρησιμοποιούν μορφές πίνακα πχ. για το γινόμενο **426x 354=150804.**

	400	20	6
300	120000	6000	1800
50	20000	1000	300
4	1600	800	24

141.600 + 7080 + 2124 = 150804

Παράδειγμα επιστημολογικής αντιστοιχίας

Μέθοδοι των μαθητών

- Όταν δόθηκε σε μαθητές για να υπολογίσουν το γινόμενο **35x27= 945**, πριν διδαχθούν τον αλγόριθμο. ***Οι τρόποι τους είναι πολύ κοντά σε μεθόδους που χρησιμοποίησε η ανθρωπότητα ιστορικά:***

1ος τρόπος:

35 X 10 = 350

35 X 10 = 350 αποτέλεσμα 350+350+245=945

35 X 7 = 245

2ος τρόπος

35+35 →70+70→140+140→280+280→560+280→840+105

2 *φορές* 4 *φορές* 8 *φορές* 16 *φορές* +8 *φορές* +3 *φορές*

σύνολο 24 φορές ***+3 φορές***

Επικοινωνία στην τάξη των Μαθηματικών

Πολλαπλές μορφές απόδοσης μαθηματικού νοήματος

- Λεκτικές διατυπώσεις, λέξεις με περιγραφές (*προφορική λειτουργία*)
- Επικοινωνία μέσω παρουσίασης και αναφοράς (*δεικτική λειτουργία*)
- Πίνακες, γεωμετρικά διαγράμματα, γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων (*εικονιστική λειτουργία*)
- Μαθηματικά σύμβολα: αριθμοί, συμβολισμοί πράξεων, γράμματα, μεταβλητές (*συμβολική λειτουργία*)

Γλώσσα και διαχείριση

- Η γλώσσα παρουσιάζει *γραπτά* ή *προφορικά* τη σκέψη.
- Οι λέξεις ή τα σύμβολα είναι *φορείς των εννοιών* και επιδρούν όχι μόνο στην επικοινωνία αυτής της σημασίας αλλά και στην ίδια την επεξεργασία.
- Στην προβληματική για τη χρήση της γλώσσας στη μαθηματική εκπαίδευση εμπλέκονται διαφορετικά ερωτήματα και διαφορετικές θεωρήσεις.
- Η προσέγγιση του ζητήματος απαιτεί στοιχεία *γλωσσολογικά*, *σημασιολογικά*, *ψυχολογικά* και *κοινωνιολογικά*.

Γλώσσα και διαχείριση

- Σχέση καθημερινής και μαθηματικής γλώσσας;
- Λειτουργία των Μαθηματικών ως μια γλώσσα και ποιά;
- Σχέση της γλώσσας με τα διαφορετικά σημασιολογικά πεδία (σύμβολα ή άλλες αναπαραστάσεις);
- Μαθηματική γλώσσα ως ξεχωριστό σημασιολογικό πεδίο;
- Σχέση και λειτουργία γλώσσας στη μάθηση και τη διδασκαλία;

Γλώσσα και διαχείριση

- Νοήματα «5 φορές ο αριθμός είναι 2 περισσότερο από 10 φορές ο αριθμός»
- Άγνωστοι όροι και σύμβολα «ολοκλήρωμα», «τελεστής»
- Καθημερινή και μαθηματική γλώσσα «γωνία», «τετράγωνο», «ρητός», «δύναμη».
- Μείξη καθημερινής και μαθηματικής γλώσσας στα λεκτικά προβλήματα

Φυσική και Μαθηματική γλώσσα

Διαστάσεις Φυσικής Γλώσσας	**Μαθηματική γλώσσα (παραδείγματα)**
Σημασία (Semantics)	Λογάριθμος, ή, αν και μόνο αν,
Σύνταξη (Syntax)	Διαφορά 2xy συγκριτικά με 2 Χ ψ, δυνάμεις
Πραγματιστική (Pragmatics)	Επιχειρήματα, απαγωγή σε άτοπο
Φωνητική (Phonology)	Δανεισμένη από τη ΦΓ, διαφορετικοί τρόποι έκφρασης πχ. 5x(3x7) σε σχέση με (5x3)x7, με τις κατάλληλες παύσεις
Μορφολογία (Morphology)	Τρίγωνο, δια-γώνιος
Πολυσημία	Υποστηρίζεται ότι υπάρχει αλλά μάλλον τα μαθητικά είναι μια μονοσημική γλώσσα, πχ.| σημαίνει διαιρώ και επίσης απόλυτη τιμή αλλά διαφορετικό σύμβολο α | β αλλά |α-β|

Γλώσσα και ψυχολογία

- Για την *εποικοδομιστική θεώρηση* (και τις απόψεις του Piaget) η γλώσσα είναι έκφραση της σκέψης και αποδίδει τα νοήματα που το άτομο έχει αναπτύξει.
- Όπως υποστηρίζει ο Vergnaud (1997) το σύνολο των λεκτικών, παραστατικών ή συμβολικών μέσων που σχετίζονται με το νόημα που αποδίδεται σε μια έννοια, αποτελούν μία από τις τρεις συνιστώσες της.

Γλώσσα και ψυχολογία

- Για την *κοινωνικο- πολιτισμική θεώρηση* (και τις απόψεις του Vygotsky) η γλώσσα είναι μέσο πολιτισμικής μετάδοσης και εργαλείο της *σκέψης*.
- Σύμφωνα με αυτή η γλώσσα διαμεσολαβεί στη διαμόρφωση εννοιών, συμμετέχοντας στην ανάπτυξή τους.
- Όπως υποστηρίζει ο Davidov (1988) οι μαθηματικές λέξεις και τα σύμβολα επιδρούν στην ανάπτυξη των «επιστημονικών» νοημάτων από τους μαθητές.

Γλώσσα και διαχείριση

- Σε ένα διδακτικό πλαίσιο, και οι δύο λειτουργίες.
- Ο μαθητής εκφράζει με λόγια μια ιδέα, μια λύση, μια κατασκευή ή δίνει μία εξήγηση, άρα αναπαράγει νοερά τη δράση του και οργανώνει τη σκέψη του με αποτέλεσμα να την αντιλαμβάνεται σε ένα πιο ουσιαστικό επίπεδο.
- Αντίστοιχα, όταν αλληλεπιδρά με τους ενήλικες ή τα άλλα παιδιά, προσλαμβάνει νέα νοήματα ή σημασίες που είναι φορείς εννοιών.
- Οι συλλογικά ή κοινωνικά διαμορφωμένες έννοιες λειτουργούν ανατροφοδοτικά στην ανάπτυξη και της δικής τους σκέψης.

Γλώσσα και αλληλεπίδραση

- Στην αλληλεπίδραση (Bauerfeld, 1988) η γλώσσα και η *επικοινωνία* *έχουν* πολιτισμική λειτουργία *καθώς* η μάθηση είναι μια ατομική ανακατασκευή κοινωνικών νοημάτων ή μοντέλων.
- Οι εκφράσεις που ανταλλάσσονται και τα ερμηνευτικά λεκτικά σχήματα λειτουργούν καθοριστικά στην ανάπτυξη μαθηματικών νοημάτων.

Γλώσσα και νόημα

- Η *ανάλυση του εκφέροντος λόγου* (*Θεωρία του λόγου, discourse theory*) αναδεικνύεται ιδιαίτερα σημαντική γιατί συνδέουν τη χρήση της γλώσσας με τα νοήματα.
- Ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζονται ή εκφράζονται οι μαθηματικές έννοιες ή τα νοήματα σηματοδοτούν τον τρόπο με τον οποίο γίνονται αντιληπτά τόσο από τους μαθητές όσο κι από τους δασκάλους.

Γλώσσα και Μαθηματικά

- Η μαθηματική μάθηση απαιτεί κατάλληλη χρήση συμβατικών μαθηματικών όρων, σύνταξης και συμβόλων.
- Γνωρίζουμε ότι ένας μαθητής κατάλαβε μια λέξη ή σύμβολο αν το χρησιμοποιεί σωστά.
- Υποστηρίζεται ότι δεν αναφερόμαστε σε μαθηματική γλώσσα, αλλά σε *μαθηματικό λόγο*.
- Η ανάπτυξη νοημάτων συνδέεται τόσο με την κοινωνική (ενπολιτισμός – enculturation) όσο και στην εμπειρική της διάσταση.

Γλώσσα και Έρευνα

- Παλαιότερα η προφορική γλώσσα αντιμετωπίζονταν ως δευτερεύουσα στη διατύπωση μαθηματικού λόγου, σε σχέση με τα συμβολικά συστήματα των μαθηματικών, τη σύνταξη και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της μαθηματικής γλώσσας.
- Πιο πρόσφατα, εκτός από τα σημαντικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής γλώσσας οι μελετητές εξετάζουν επίσης και τη χρήση της. Ήδη ο Bruner υποστήριζε ότι η πιο σημαντική χρήση της γλώσσας γίνεται μέσα στην πράξη.

Γλώσσα και Έρευνα

- Οι σύγχρονες θεωρήσεις υποστηρίζουν ότι δεν μπορεί να εξετάσει τη μαθηματική γλώσσα κανείς χωρίς να παίρνει υπόψη του το *γλωσσικό σύστημα* που υιοθετείται όταν *κάνουμε μαθηματικά* σε όλα τα επίπεδα.
- Σε αυτό συμπεριλαμβανονται ο γραπτός και ο προφορικός λόγος, το συμβολικό σύστημα, τις παραστάσεις ακόμα και τις χειρονομίες (μη λεκτική επικοινωνία).

Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε:

Pimm, D. (1989). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classroom.* Routledge

Steinbring, H, Bartolini Bussi, M., Giuseppina, G.M.,& Sierpinska, A. (1998). *Language and communication in the mathematics classroom*, Reston, NCTM

Cobb, P., Yackel, E & McClain, K. (2000). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools and instructional design*. Lawrence Erlbaum Associates

Elerton, N., & Clarkson, P. (1996). Language Factors in Mathematics Teaching and Learning. In A. Bishop et als. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (vol.2), pp. 987-1043. Kluwer.

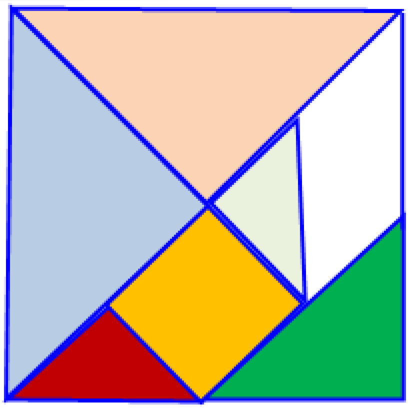
Πρακτικά CERME 4(2005) και 5 (2007) Working Group "Language and Mathematics"

Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε:

- Artigue, M. (2009). Didactical Design In Mathematics Education. in C. Winsløw (ed.) *Nordic Research in Mathematics Education. Proceedings of NORMA08.* Sense Publ.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.
- Brousseau, G. (2006). Mathematics, Didactical Engineering and Observation. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková, (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of PME*, Vol. 1, 3-18. Prague, Czech Republic: Charles University.
- Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht: Kluwer.
- Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 10:133-169.
- Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in maths. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27: 458-477.
- Yackel, E. (2001). Explanation, Justification and argumentation in Mathematics Classroom. In van den Heuvel- Panhuizen, M. (ed.). *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Intitute, Utrecht University. 1:1-9.

Είναι μαθηματική δράση;

- Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν μια κατασκευή με επικαλύψεις σχημάτων, με ένα σύνολο δράσεων:



- Κάποιοι μαθητές τοποθετούν άμεσα τα σχήματα, δοκιμάζοντας και διορθώνοντας,

- Κάποιοι άλλοι δοκιμάζουν να τα φανταστούν και μετά τα τοποθετούν

- Και κάποιοι δημιουργούν σχέδια για να βρουν τους σχηματισμούς.

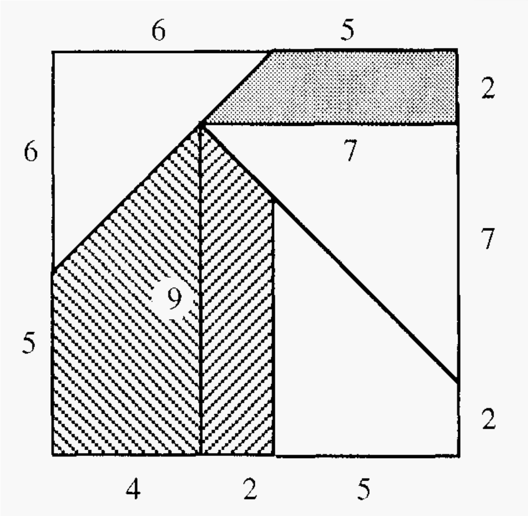
Είναι μαθηματική δράση;

- Είναι όλες αυτές οι δράσεις ίδιες, είναι απλά διαφορετικές προσεγγίσεις;
- Είναι μαθηματικές δράσεις ;
- Είναι δράσεις που οδηγούν σε μαθηματικές ιδέες;

Πώς θα τις χειριστεί ο εκπαιδευτικός, θα τις ενθαρρύνει, συγκρίνει, επεξεργαστεί;

Είναι μαθηματική δράση;

- Α θεωρήσουμε ακόμα και το παράδειγμα του περίφημου puzzle του Brousseau (1997), Τι χαρακτηριστικά έχει αυτή η δράση;
  - Καταλήγουν οι μαθητές να αντιληφθούν ή να γενικεύσουν την έννοια της αναλογίας;
  - Συνδέουν με πίνακες αναλογικών τιμών καταλήγουν;
  - Γενικεύσουν στην έννοια της αναλογικής συνάρτησης;



Συνθέτοντας τις δράσεις

- Όλα τα παραπάνω πραγματοποιούνται μέσα από ένα σύνολο διεργασιών που ξεκινώντας από ερωτήματα, προβλήματα ή άγνωστες καταστάσεις αναπτύσσουν υποθέσεις, επιλύουν και μοντελοποιούν με τη χρήση εργαλείων ή πηγών, τεκμηριώνουν, επεξεργάζονται μεταγνωστικά και τυποποιούν.
- Για το λόγο αυτό απαιτούνται κατάλληλα μαθηματικά έργα.

Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε:

Ben-Zvi, D. and Arcavi, A.(2001). Junior high school students' construction of global views of data and data representations. *Educational Studies in Mathematics* 45: 35–65.

Engestrom, Y. (1999). Activity Theory and individual and social transformation. In Y.Engestrom, R. Mietinnen, & R.L. Punamaki (eds). *Perspectives on Activity Theory*, 19-38. Cambridge University Press.

Ernest, P. (2006). A Semiotic Perspective of Mathematical Activity: The case of number. *Educational Studies in Mathematics*, 61:67-101.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors That Support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education* 28: 524-49.

Howson, G. (2005). "Meaning" and School Mathematics. In J. Kiplatric, C. Hoyles, & O. Skovsmose (eds.), *Meaning in Mathematics Education*, 17-13. Springer.

Hoyles, C. (2005). Making Mathematics and Sharing Mathematics. Two paths to Co- constructing meanings. . In J. Kiplatric, C. Hoyles, & O. Skovsmose (eds.), *Meaning in Mathematics Education*, 139-158. Springer.

Leont'v, A.N. (1981). The problem of activity in psychology. In J.V. Wertsch (ed.), *The concept of activity in soviet psychology*, 37-71, NY.: Sharpe

Hershkowitz, R., Baruch B. Schwarz, B. B.,& Dreyfus,T. (2001). Abstraction in Context: Epistemic Actions. *Journal for Research in Mathematics Education* 32 (2): 195-222.

Radford, L. (2006). Elements of a Cultural Theory of Objectification, Special Issue on Semiotics, *Culture and Mathematical Thinking*: 103-129,

Sarama, J. & Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children.* Routledge.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically; Problem Solving, Metacognition, and Sense making in Mathematics. In D. Grows (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. 334-370. NY: MacMillan Publisher Co.

Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatric, & C.Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Vol. 2, 827-876. Dortdrecht: Kluwer Academic Publishers.

Stech, S. (2008). School Mathematics as a Developmantal Activity. In A. Watson, & P. Winbourne (eds.), *New Directions for Situated Cognition in Mathematics Education*, 13- 30. Sense Publishers.

Van Oers, B. (2006). An Activity Theory Approach to the Formation of Mathematical Cognition. Developing Topics through Predication in a mathematical Community. In J. Maasz & W. Schoeglmann (eds.), *New Mathematics Education Research and Practice*, 113-140. Sense Publishers.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice. Learning, meaning, and identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Yackel, E., Cobb, P. & Wood, T. (1998). The interactive constitution of mathematical meaning in one second grade classroom: an illustrative example. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 17(4), 469-488.

Διδακτικός σχεδιασμός;

- Ας θεωρήσουμε τη διδακτική ενότητα εύρεσης του τύπου του εμβαδού ενός κύβου
- Οι μαθητές υπολογίζουν την επιφάνεια ενός στερεού, *προσθέτοντας τα εμβαδά* των εδρών:
  - Έχει αυτή η δράση μαθηματικά χαρακτηριστικά;
  - Οδηγεί τους μαθητές τελικά στην κατανόηση της επιφάνειας των στερεών και στην δημιουργία του τύπου του εμβαδού;