

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ

---

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ

---

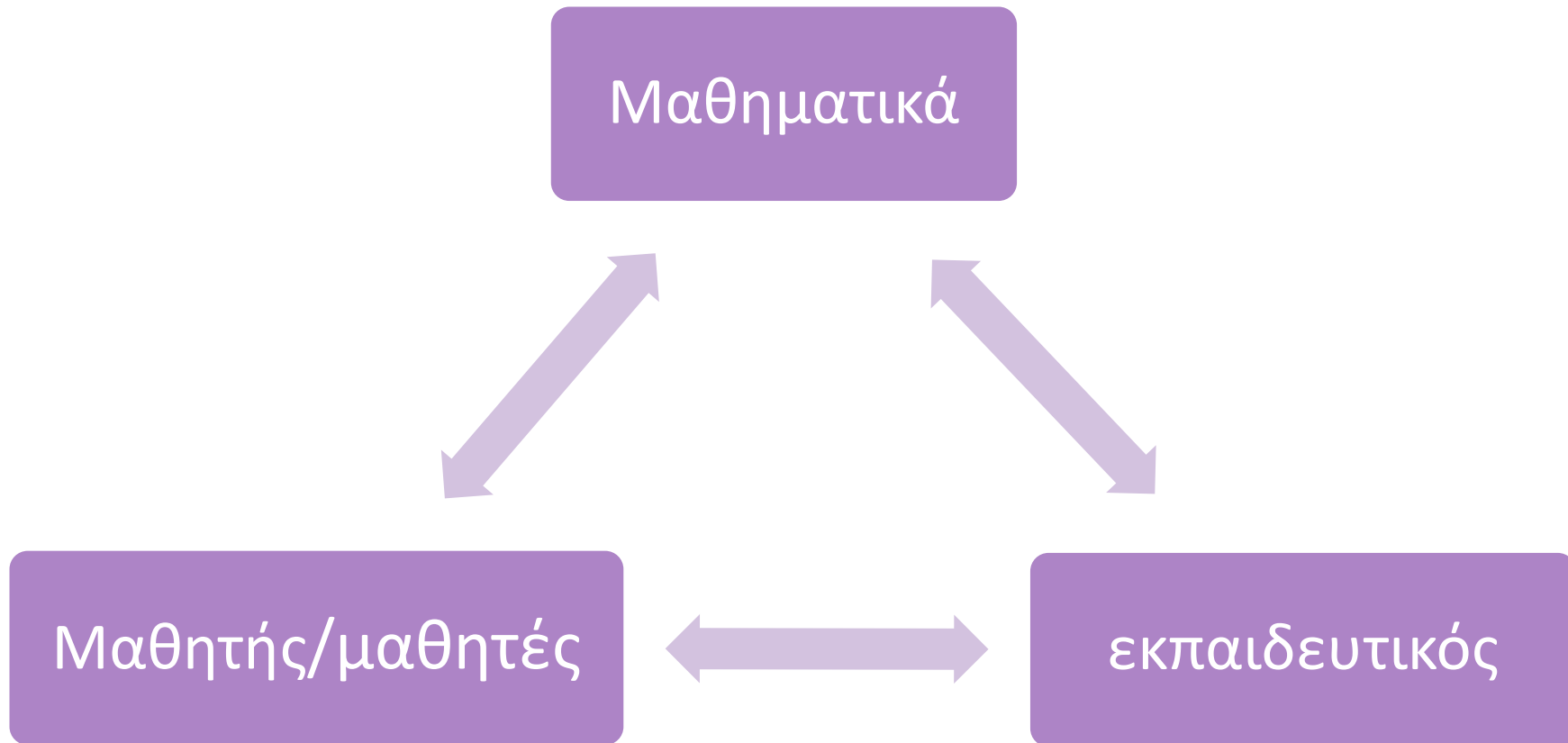
Μελέτη των φαινομένων  
διδασκαλίας και μάθησης  
των μαθηματικών

---

Σχολείο και τάξη: το  
περιβάλλον που καθορίζει  
σημαντικά τη μαθηματική  
γνώση

# Περιβάλλον μάθησης

---



# περιβάλλον

---

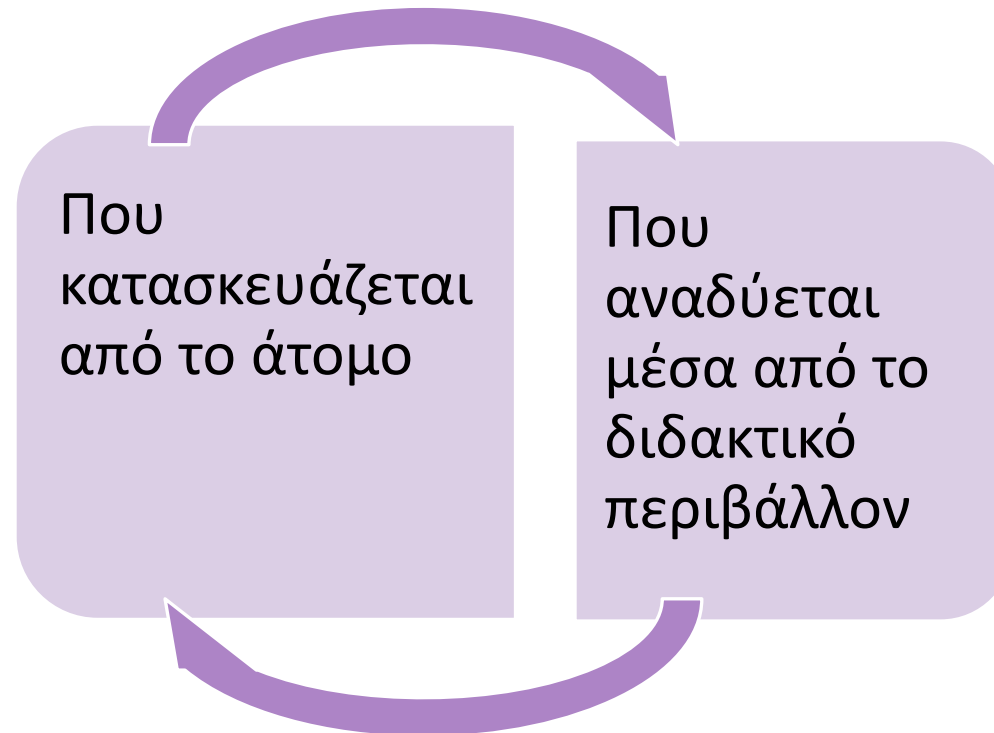
## Μαθηματικά

- ποια Μαθηματικά;
  - Μαθηματικά του Αναλυτικού προγράμματος και των σχολικών εγχειριδίων
  - Μαθηματική γνώση που **πραγματεύονται** και **διαπραγματεύονται** στην τάξη
  - Μαθηματική γνώση του εκπαιδευτικού
  - Μαθηματική γνώση των μαθητών

# Θεωρητικά εργαλεία (προσεγγίσεις)

---

για την περιγραφή, ανάλυση και ερμηνεία της μαθηματικής γνώσης



# Θεωρητικά εργαλεία (προσεγγίσεις)

---

για την περιγραφή, ανάλυση και ερμηνεία της μαθηματικής γνώσης

Που κατασκευάζεται  
από το άτομο

Επιστημολογικά χαρακτηριστικά των  
μαθηματικών

Αναπαραστατικά στοιχεία των  
μαθηματικών

Διασύνδεση και σχέσεις μεταξύ των  
μαθηματικών οντοτήτων

και

**Διδακτική οργάνωση των μαθηματικών**

# Θεωρητικά εργαλεία (προσεγγίσεις)

---

για την περιγραφή, ανάλυση και ερμηνεία της μαθηματικής γνώσης

Που αναδύεται μέσα  
από το διδακτικό  
περιβάλλον

Επιστημολογικά χαρακτηριστικά των  
μαθηματικών

Αναπαραστατικά στοιχεία των  
μαθηματικών

Διασύνδεση και σχέσεις μεταξύ των  
μαθηματικών οντοτήτων

και

**Διδακτική οργάνωση των μαθηματικών**

# Διδακτικά φαινόμενα

---



# Διδακτικά φαινόμενα

G. Brousseau

Brousseau, G. (2006). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990* (Vol. 19). Springer Science & Business Media.

Brousseau, G., & Balacheff, N. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage

---

Φαινόμενο Toraze

---

Μεταγωγικό ολίσθημα

---

Καταχρηστική χρήση της  
αναλογίας

---

Φαινόμενο Jourdain

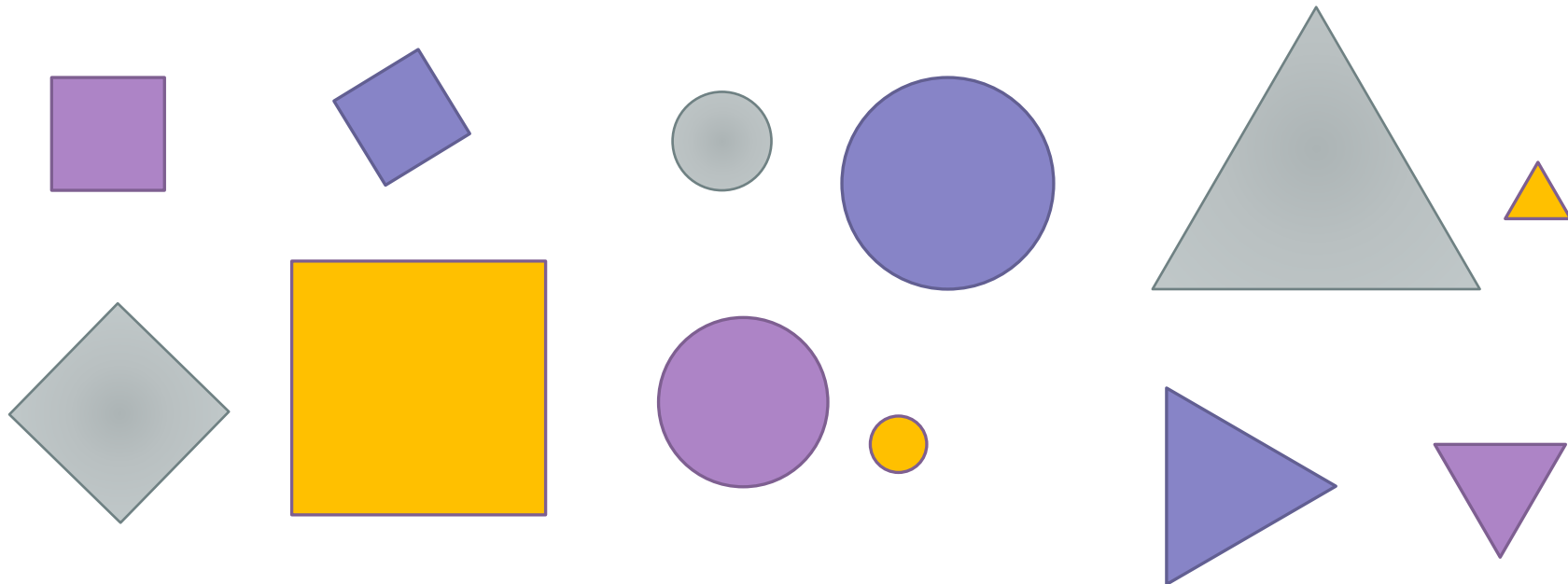
## Φαινόμενο Topaze

Ο όρος αυτός χρησιμοποιείται για να περιγράψει εκείνες τις περιπτώσεις όπου η διατύπωση των ερωτήσεων, η διατύπωση των προβλημάτων είναι τέτοια ώστε να καθοδηγεί και ουσιαστικά να υποβάλλει τη σωστή απάντηση στο μαθητή

# Φαινόμενο Toraze - παράδειγμα

---

Μπορείς να κλείσεις μέσα σε κύκλο τα πλακάκια που ταιριάζουν μεταξύ τους σε σχήμα;



## Μεταγνωστικό ολίσθημα

Με τον όρο **μεταγνωστικό ή μεταδιδακτικό ολίσθημα** αναφερόμαστε στις περιπτώσεις όπου ο λόγος από τα μαθηματικά αντικείμενα έχει περάσει στη διαχείριση των εξηγήσεων, των ευρετικών ή και ακόμα και στην αναπαράστασή τους.

## Μεταγνωστικό ολίσθημα - παράδειγμα

---

Δασκ.: Ποια είναι η διαφορά ανάμεσα στο 11 και το 6;

Μαθ.: Το 11 έχει δύο αριθμούς.

Δασκ.: Όχι, ..., προσπάθησε ξανά.

Μαθ.: Το 6 είναι κουλουριασμένο.

# Μεταγνωστικό ολίσθημα - παράδειγμα

---

Η αναγνώριση των άρτιων ή περιττών αριθμών από το ψηφίο των μονάδων ή ακόμα και οι κανόνες διαιρετότητας

Ή ακόμα

Κ: Θα ήθελα να μου πείτε ποιες από τις γωνίες του σχήματος είναι ίσες μεταξύ τους

Μ: Όταν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από.....

Κ: Όχι, να το πούμε πιο απλά! Βρίσκουμε ποιες από τις γωνίες είναι οξείες, ποιες είναι αμβλείες και τότε ξέρουμε ποιες γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους, Οι οξείες γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους και οι αμβλείες είναι ίσες μεταξύ τους

Καταχρηστική  
χρήση της  
αναλογίας

Η αναγνώριση ενδείξεων ομοιότητας  
παρόμοιων καταστάσεων και η χρήση τους  
στην παραγωγή της απάντησης

## Καταχρηστική χρήση αναλογίας- παράδειγμα

---

Η αναγνώριση λέξεων κλειδιά που οδηγούν στην επιλογή των πράξεων:

Ο Γιάννης έχει 5 αυτοκινητάκια. Ο Γιάννης έχει 2 αυτοκινητάκια περισσότερα από τον Κώστα. Πόσα αυτοκινητάκια έχει ο Κώστας;

Οι περισσότεροι μαθητές απαντούν 7

Ή ακόμα: οι «κανόνες» πράξεων στους δεκαδικούς.....



## Φαινόμενο Jourdain

Η αναγνώριση από τον διδάσκοντα της συμπεριφοράς του μαθητή σε κοινότυπες ή συνηθισμένες ή επαναλαμβανόμενες δραστηριότητες ως ένδειξη κατανόησης της μαθηματικής γνώσης που αυτές προϋποθέτουν αποτελεί το φαινόμενο Jourdain.

# Φαινόμενο Jourdain - παράδειγμα

---

Η νηπιαγωγός θέλει να κάνει μια δραστηριότητα με στόχο να προσεγγίσουν τα παιδιά τις έννοιες "βαρύ - ελαφρύ" και "άδειο - γεμάτο". Για το σκοπό αυτό, τοποθετεί 2 μπουκάλια, ένα άδειο και ένα γεμάτο, πάνω σ' ένα τραπέζι. Ζητάει από τα παιδιά να έρθουν ένα-ένα, να κρατήσουν με τα χέρια τους τα μπουκάλια, να πουν ποιο είναι το βαρύ, ποιο είναι το ελαφρύ, ποιο είναι το άδειο και ποιο το γεμάτο και να αφήσουν μετά τα μπουκάλια στη θέση τους.

Ο Νίκος είναι το **τέταρτο** νήπιο που έρχεται να κάνει τη δοκιμή. Πλησιάζει το τραπέζι και, **χωρίς να κρατήσει τα μπουκάλια, δίνει τη σωστή απάντηση**. Η νηπιαγωγός τον διορθώνει λέγοντάς του να κρατήσει πρώτα τα μπουκάλια και μετά να απαντήσει. Ο Νίκος υπακούει και δίνει την ίδια απάντηση.

# Οργάνωση και Δόμηση περιεχομένου

---

# Διδακτικός μετασχηματισμός

## Διδακτική μετάπλαση

---

Πλαίσιο

Από-  
πλαisiώση

Ανα-  
πλαisiώση

# Παράδειγμα: φυσικοί αριθμοί

---

Ορισμός  
πραγματικών  
αριθμών

Αξιωματική  
θεμελίωση  
θεωρίας συνόλων

Οργάνωση  
φαινομένων  
πλήθους και  
διάταξης

Πέρασμα από το  
εμπράγματο στο  
συμβολικό

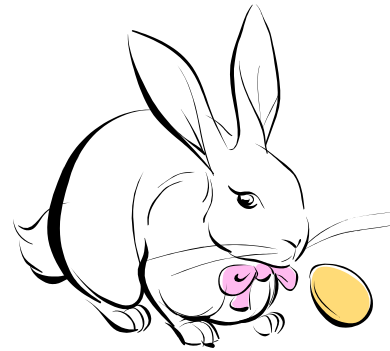
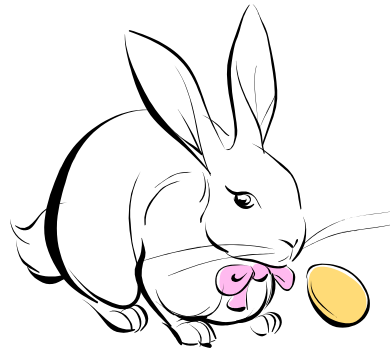
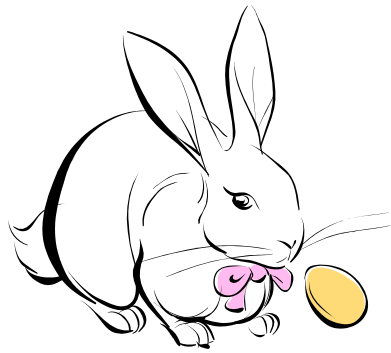
# Ορισμός των Cantor, Frege, Russel & Whitehead

---



# Παράδειγμα διδακτικής μετάπλασης των φυσικών αριθμών

---



Παράδειγμα  
διδακτικής  
μετάπλασης  
των φυσικών  
αριθμών

Η δραστηριότητα με τα κομπολόγια

Μοιράζουμε χάντρες (πχ 10 για αρχή) στα  
παιδιά και ζητάμε να φτιάξει το κάθε παιδί  
4 κομπολόγια

Βάζουμε **όλα τα κομπολόγια** σε ένα κουτί

*Τα κομπολόγια μπερδεύονται....*



Παράδειγμα  
διδασκτικής  
μετάπλασης  
των φυσικών  
αριθμών

Ζητάμε να ξεχωρίσουμε τα κομπολόγια με  
μία χάντρα

Το «ξεμπέρδεμα» των κομπολογιών δεν  
είναι εύκολη υπόθεση....

Οπότε προτείνουμε **να χωρίσουμε τα  
κομπολόγια σε διαφορετικά κουτιά,  
ανάλογα με το πλήθος από χάντρες των  
κομπολογιών**, ώστε αν τα  
ξαναχρειαστούμε να είναι πιο εύκολο

Παράδειγμα  
διδασκτικής  
μετάπλασης  
των φυσικών  
αριθμών

Την επόμενη φορά χρειαζόμαστε κάποιο  
τύπο κομπολογιών (πχ. αυτά με 4 χάντρες)

Ψάχνουμε όλα τα κουτιά...

**Μήπως να τα βάζαμε στη σειρά;**

*Αλλά το βράδυ κάποιος ανακατεύει τα  
κουτιά.....*

**Μήπως να βάζαμε μια «ετικέτα» έξω από  
κάθε κουτί;**

Παράδειγμα  
διδασκτικής  
μετάπλασης  
των φυσικών  
αριθμών

Η δραστηριότητα με τα κομπολόγια

Οικογένεια συνόλων

Ταξινόμηση με κριτήριο το πλήθος

Διάταξη με κριτήριο το πλήθος

Ο αριθμός «όνομα» οικογένειας  
ισοπληθών συνόλων

# Διαχείριση περιεχομένου

---

# Διαχείριση περιεχομένου

---

Διδακτικό συμβόλαιο

---

Διδακτική – Αδιδακτική  
κατάσταση

---

Κοινωνικομαθηματικές Νόρμες

---

Διαχείριση διδακτικού χρόνου

# Διδακτικό Συμβόλαιο

---

Brousseau, g. (2006). *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques, 1970–1990* (vol. 19). springer science & business media.

Brousseau, g., & Balacheff, n. (1998). *Théorie des situations didactiques. La pensée sauvage*

## Διδακτικό συμβόλαιο

Σύνολο συμπεριφορών (που οδηγούν σε κανόνες) του διδάσκοντα αναμένονται από τους μαθητές και των μαθητών που αναμένονται από τον διδάσκοντα. Οι κανόνες που απορρέουν δεν είναι ρητά διατυπωμένοι και αφορούν τη διαπραγμάτευση της μαθηματικής γνώσης και επιδρούν στη μαθηματική γνώση

- Για τον Αλέξανδρο (δες επόμενη διαφάνεια) η 1 προς 1 αντιστοιχία δεν έχει την υπόσταση μαθηματικής διαδικασίας που μας επιτρέπει να συγκρίνουμε σύνολα ως προς το πλήθος, αλλά ενέργειας που κάνουμε στο σχολείο

# Διδακτικό συμβόλαιο

---

(κάποια) Χαρακτηριστικά του συνηθισμένου διδακτικού συμβολαίου

- Τα προβλήματα και οι ασκήσεις εμπλέκουν την πρόσφατα διδαχθείσα ύλη
- Τα προβλήματα έχουν μία μοναδική λύση και αυτή είναι το ζητούμενο
- Τα δεδομένα που χρειάζονται για τη λύση και μόνον αυτά δίνονται στην εκφώνηση
- Η λύση προέρχεται από τα αποτελέσματα (συνήθως ακριβή) των πράξεων που γίνονται στα αριθμητικά δεδομένα
- Οι μαθητές καλούνται να εφαρμόσουν γνωστά ζητήματα και όχι να ανακαλύψουν μεθόδους ή διαδικασίες



# Διδακτικό συμβόλαιο - παράδειγμα

---

Δόθηκαν στον Αλέξανδρο δύο καλαθάκια με τουρμπίνια. Το ένα καλαθάκι περιείχε 10 κόκκινα τουρμπίνια και το άλλο 12 μπλε τουρμπίνια. Ζητήθηκε από τον Αλέξανδρο να βρει σε ποιο καλαθάκι υπήρχαν περισσότερα τουρμπίνια. Ο Αλέξανδρος απάντησε σωστά. Όταν ρωτήθηκε πώς το ξέρει, απάντησε ότι τα μέτρησε. Η συνεντεύκτρια επέμενε να της δικαιολογήσει την απάντησή του και να της εξηγήσει γιατί είναι σίγουρος. Τότε ο Αλέξανδρος είπε “Τώρα κατάλαβα, θέλεις να κάνω όπως στο σχολείο” και αμέσως τα έβαλε σε δύο σειρές αντιστοιχίζοντας ένα κόκκινο με ένα μπλε τουρμπίνι.

# Διδακτικές - Αδιδακτικές καταστάσεις

---

GUY BROUSSEAU

# Διδακτική κατάσταση

## Διδακτικό περιβάλλον

- Σύνηθες διδακτικό συμβόλαιο

## Μάθηση

- Προσαρμογή στην ήδη συγκροτημένη γνώση
- Προσαρμογή στη διδακτική πρόθεση του δασκάλου

## Διδάσκων

- Δίνει πληροφορίες, βοηθά με τεχνάσματα
- Καθιστά σαφές τι περιμένει

# Αδιδασκτική κατάσταση

## Διδακτικό περιβάλλον

- Ρήξη του διδακτικού συμβολαίου

## Μάθηση

- Διαπραγμάτευση
- Ανακάλυψη νέων μεθόδων και εννοιών

## Διδάσκων

- Δεν δίνει πληροφορίες, δεν βοηθά με τεχνάσματα
- Δεν καθιστά σαφές τι περιμένει

Αδιδακτική  
κατάσταση

Πρόβλημα - κατάσταση

Επίλυση χωρίς παρέμβαση του  
διδάσκοντα, ο οποίος διαχειρίζεται  
(εκχώρηση γνώσης)

Δυνατότητα ελέγχου

Επισημοποίηση της μαθηματικής  
γνώσης

«Καλή»  
Διδακτική  
κατάσταση

Πρόβλημα - κατάσταση

Επίλυση με διαμεσολάβηση του  
διδάσκοντα, ο οποίος διαχειρίζεται  
(εκχώρηση γνώσης)

Δυνατότητα ελέγχου

Επισημοποίηση της μαθηματικής  
γνώσης

## Θεωρία των Διδακτικών Καταστάσεων

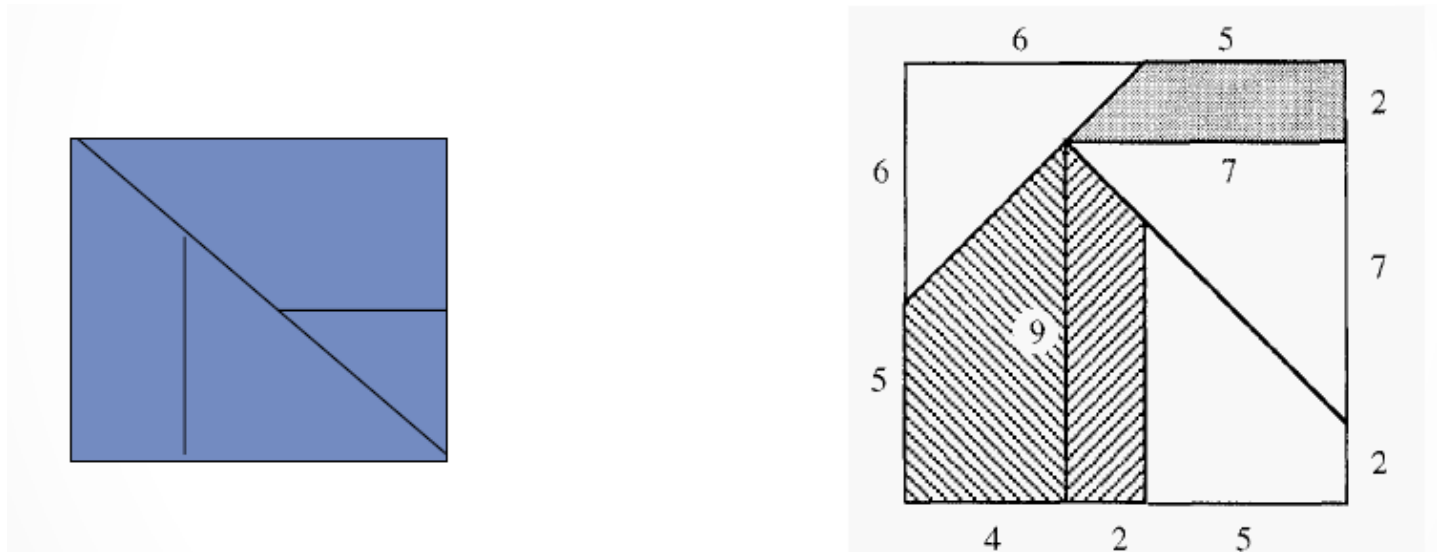
Brousseau, G., & Balacheff, N.  
(1998). *Théorie des situations  
didactiques*. La pensée sauvage. (p. 60)

Η διδασκαλία είναι η εκχώρηση μιας σωστής αδιδακτικής<sup>(\*)</sup> κατάστασης στον μαθητή και η μάθηση είναι αποτέλεσμα προσαρμογής σε αυτήν την κατάσταση

(\*) Δεν είναι πάντα δυνατή η επίλυση του προβλήματος της αδιδακτικής κατάστασης, οπότε απαιτείται εναλλαγή, μη ορατή από τους μαθητές, διδακτικών – αδιδακτικών καταστάσεων. Το βασικό σημείο είναι η επιλογή του προβλήματος που να αναδεικνύει και να απαιτεί την παραγόμενη μαθηματική γνώση

# Παραδείγματα καλών προβλημάτων

Η μεγέθυνση του παζλ

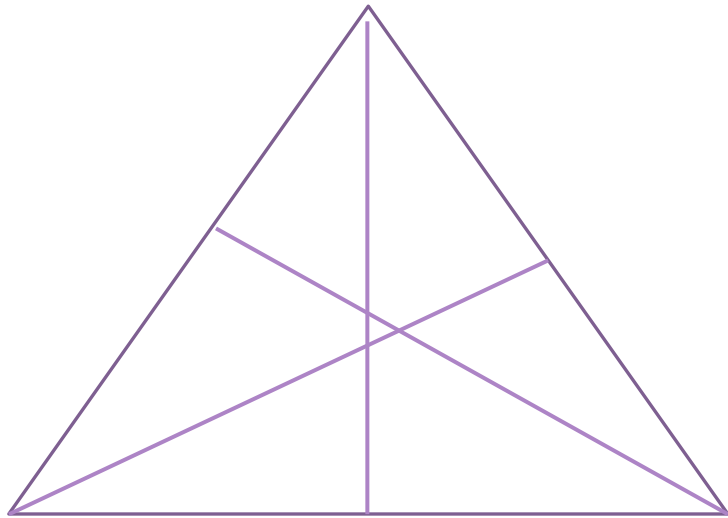




# Παραδείγματα καλών προβλημάτων

---

Το μεγαλύτερο τρίγωνο ανάμεσα στις τομές



# Παραδείγματα καλών προβλημάτων

---

Η μοιρασιά της τούρτας

# Κοινωνικομαθηματικές Νόρμες

---

COBB, YACKEL, WOOD, BAUERSFELD, .....

Cobb, P., & Bauersfeld, H. (Eds.). (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Psychology Press.

## Κοινωνικο- μαθηματικές νόρμες

Κανόνες λειτουργίας και αποδοχής στην τάξη του τι είναι αποδεκτό ως μαθηματικά και διαμορφώνουν το τι είναι μαθηματικά

Οι κανόνες αυτοί συν-διαμορφώνονται μέσα από την αλληλεπίδραση στην τάξη και διαμορφώνουν τα μαθηματικά και το νόημα που «μοιράζονται» οι συμμετέχοντες (mathematical meaning taken as shared)

# Κοινωνικο- μαθηματικές νόρμες

Οι ερευνητές θεωρούν ότι δύο ζητήματα της αλληλεπίδρασης στην τάξη ως 'σημαντικά:

- Η καθιέρωση αυτού που θεωρείται ότι μοιράζεται (αναγνωρίζεται ως κοινό για όλους) ως βάση για την επικοινωνία στα Μαθηματικά
- Η σύμπλεξη (engagement) στην αλληλεπίδραση (διάδραση, interaction) που εμπλέκει γνήσια μαθηματική επιχειρηματολογία

# Κοινωνικο- μαθηματικές νόρμες

Τα θέματα που αναδύθηκαν από τη διερεύνηση της τάξης των μαθηματικών:

- Τα επιχειρήματα και οι εξηγήσεις που δίνονται
- Οι λύσεις που προτείνονται από τους μαθητές
- Η αξιολόγηση αυτών ως προς:
  - απλότητα, διαφορετικότητα, αποτελεσματικότητα, κομψότητα, εμβάθυνση, ενορατικότητα, αποδοχή  
....
- Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στην αναγνώριση και καθιέρωση αυτών

# Κοινωνικομαθηματικές νόρμες παράδειγμα εξηγήσεων

---

Μία τάξη μελετά την πρόσθεση με διψήφιους αριθμούς, π.χ.  $12+13$

- Μία εξήγηση που δίνεται: 1 και 1 κάνει 2, 2 και 3 κάνει 5
- Μία άλλη εξήγηση που δίνεται: 10 και 10 κάνει 20, 2 και 3 κάνει 5

Ο δάσκαλος επικροτεί τη δεύτερη λέγοντας ότι οι εξηγήσεις πρέπει να αφορούν δράση πάνω στα (μαθηματικά) αντικείμενα και όχι περιγραφές (διαδικασίας)

# Κοινωνικομαθηματικές νόρμες παράδειγμα λύσεων

---

Μία τάξη μελετά τρεις προσθέσεις με το 9: π.χ.  $27+9$ ,  $37+9$ ,  $47+9$

- Κάποια παιδιά κάνουν τις 3 προσθέσεις
- Κάποια άλλα δίνουν και κανόνα: προσθέτουμε μια δεκάδα και αφαιρούμε 1

Ο δάσκαλος χαρακτηρίζει την πρώτη ως απλή που είναι αποδεκτή και επικροτεί τη δεύτερη ως έξυπνη



# Μια άλλη μεταβλητή της τάξης: ο χρόνος και η κατανομή του

---

Διαφορετικότητα των τάξεων

Clarke, D., Keitel, C., & Shimizu, Y. (2006). *Mathematics classrooms in twelve countries: The insider's perspective*. BRILL.

Clarke, D., Emanuelsson, J., Jablonka, E., & Mok, I. A. C. (2006). *Making connections: Comparing mathematics classrooms around the world*. BRILL.

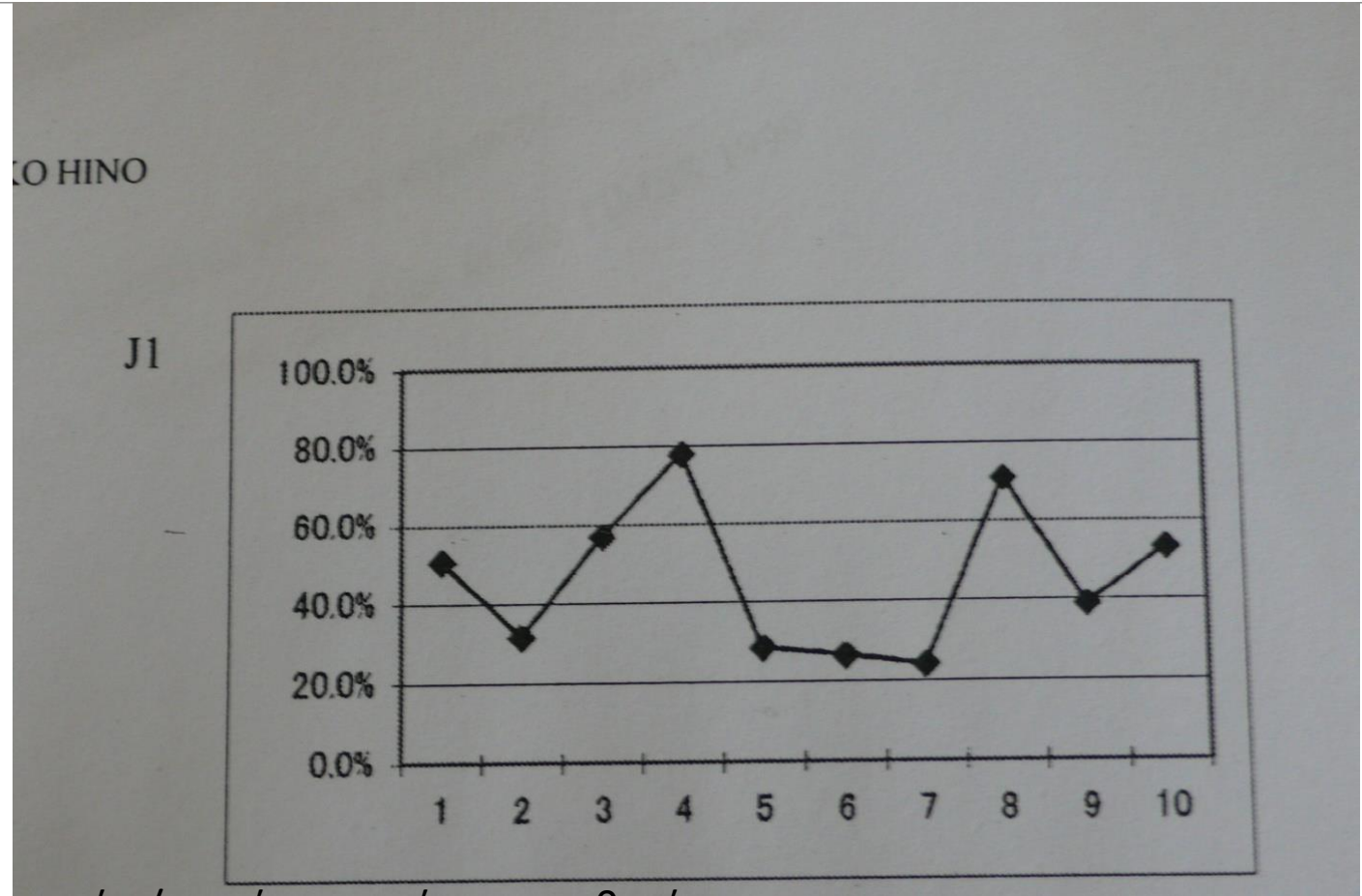
# Χρόνος και δράσεις στη τάξη

## TEACHERS' INSTRUCTIONAL APPROACHES

Table 2: Duration of lesson segments

Activity Segments	SG1		SG2	
	Total duration	Total no. of instances	Total duration	Total no. of instances
Demonstration[D]	1 hr 51 min	22	2 hr 09 min	14
Seatwork [S]	3 hr 37 min	33	2 hr 33 min	18
Review of student work [R]	2 hr 15 min	33	2 hr 23 min	19
Group Quiz [Q]	-	-	1 hr 15 min	4
Test [T]	38 min	1	-	-
Miscellaneous [M]	32 min	22	34 min	22

# Χρόνος και δράσεις στη τάξη



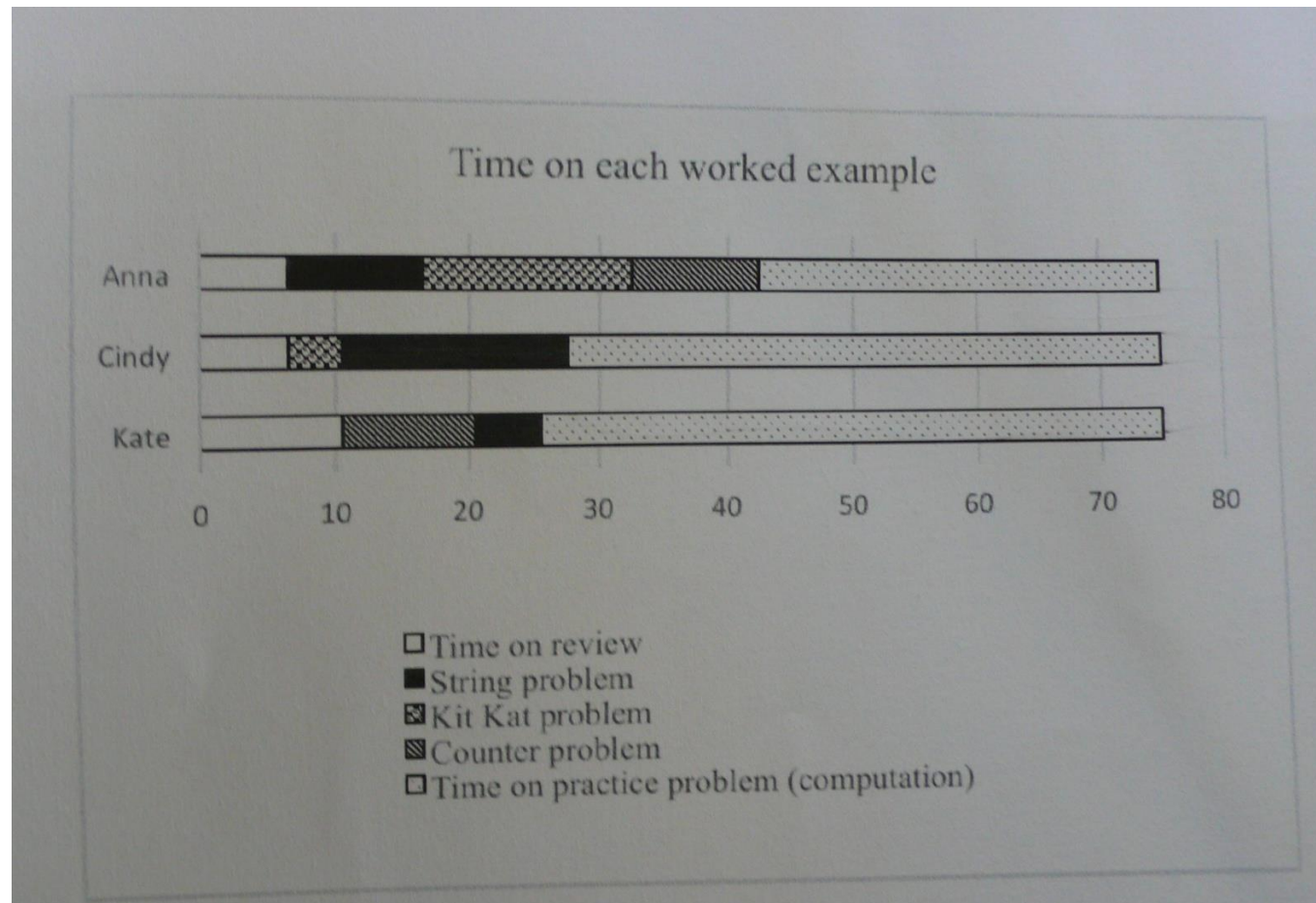
Ποσοστό χρόνου που διατέθηκε για ατομική εργασία / ασκήσεις από τους μαθητές

# Χρόνος και οργάνωση περιεχομένου

Table 2. *The Problem Structure of Subtasks Contained in Each Worked Example.*

	Worked Example	Time on Each Example	# of Subtasks within an Example	Structure of Each Subtask
Anna	<b>String</b>	<b>10'</b>	<b>1</b>	<b>a) 3 boxes of 2 sets of 4 strings</b>
	Kit Kat	16'	3	a) 3 packages of 4 b) 9 packages of 4 ( <i>1 box</i> ) c) 2 boxes of 9 packages of 4
	Counter	10'	2	a) 3 bags of 5 b) 2 sets of 3 bags of 5
Cindy	Kit Kat	4'	3	a) 3 packages of 4 b) 9 packages of 4 ( <i>1 box</i> ) c) 2 boxes of 9 packages of 4
	<b>String</b>	<b>17'</b>	<b>1</b>	<b>a) 3 boxes of 2 sets of 4 strings</b>
Kate	Counter	10'	6	a) 2 bags of 5 ( <i>1 case</i> ) b) 2 cases of 2 bags of 5 c) 3 bags of 5 ( <i>1 case</i> ) d) 2 cases of 3 bags of 5 e) 6 bags of 5 ( <i>1 case</i> ) f) 2 cases of 6 bags of 5 counters
	<b>String</b>	<b>5'</b>	<b>1</b>	<b>a) 3 boxes of 2 sets of 4 strings</b>

# Χρόνος και οργάνωση περιεχομένου





# Παραδείγματα διαχείρισης περιεχομένου

---

Table 3. Representation Uses when Unpacking Worked Examples

	Worked Examples	Concrete Only	Concrete to Abstract	Abstract Only	Abstract to Concrete
Anna	String Kit Kat Counter		√	√	√
Cindy	Kit Kat String		√ √		
Kate	Counter String		√	√	

# Παραδείγματα κατανομής τύπου αντιδράσεων εκπαιδευτικών

Table 4. *Types of Teacher Responses in the Worked Examples*

Teacher Response	Anna	Cindy	Kate
R1 (Question)	27% (n=7)	44% (n=7)	33% (n=6)
R2 (Accept)	19% (n=5)	25% (n=4)	33% (n=6)
R3 (Defend)	23% (n=6)	6% (n=1)	6% (n=1)
R4 (Explain)	27% (n=7)	19% (n=3)	28% (n=5)
R5 (Ignore)	4% (n=1)	6% (n=1)	0% (n=0)

# Παραδείγματα χρόνου και διάδρασης - ρόλων

---

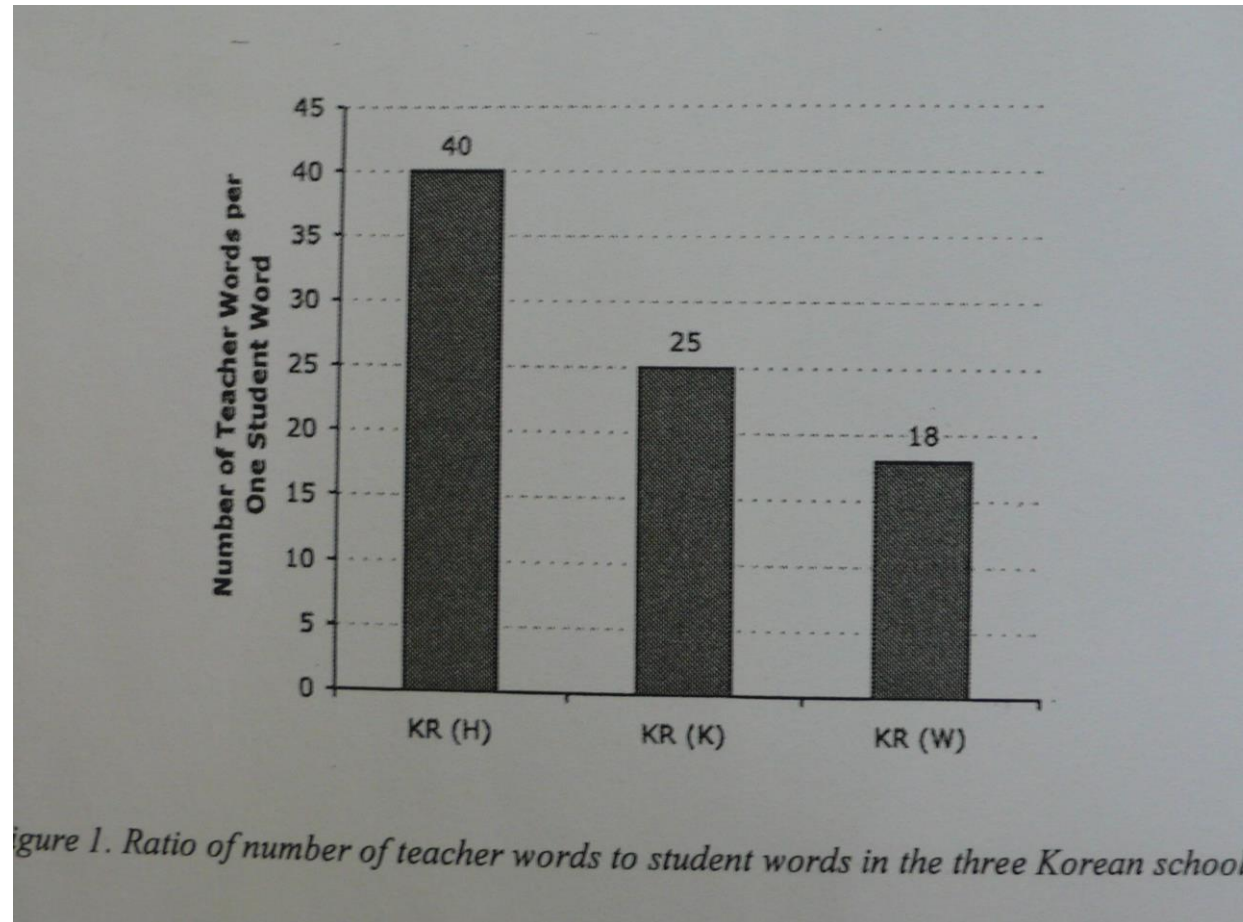
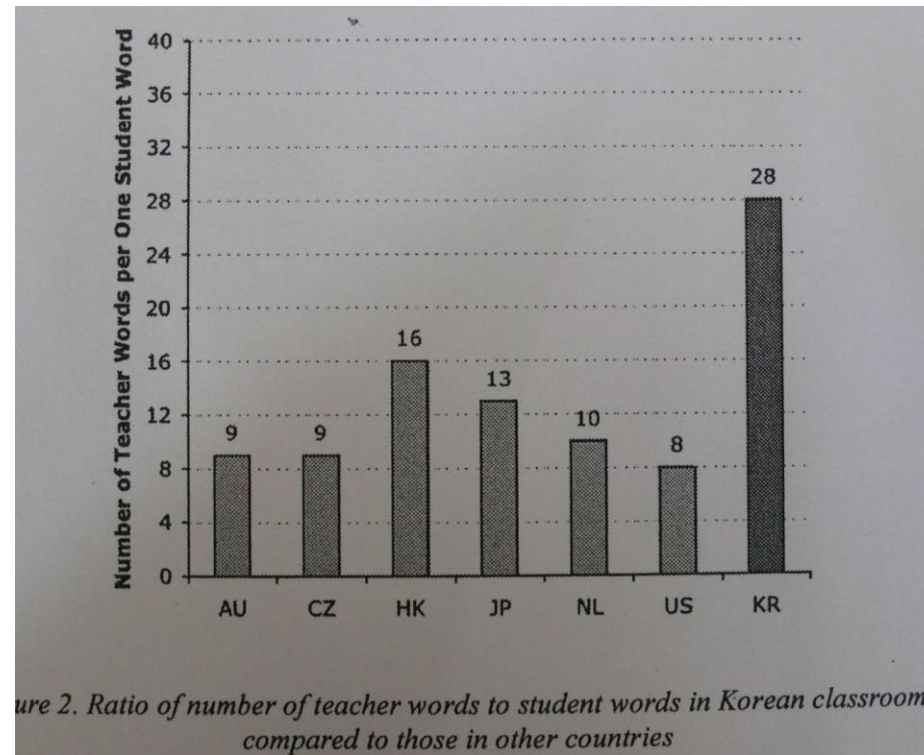


Figure 1. Ratio of number of teacher words to student words in the three Korean schools



# παραδείγματα διάδρασης - ρόλων

---



# Κλείνοντας...

---

Η επισκόπηση των θεωρητικών προσεγγίσεων που παρουσιάστηκε επιβεβαιώνει την πολυπλοκότητα του πεδίου:

– πολυπλοκότητα τόσο των μαθηματικών εννοιών και της σχέσης αυτών με τις σχολικές μαθηματικές έννοιες, όσο και των διαδικασιών μάθησης που εμπλέκουν το άτομο και

- πολυπλοκότητα της διδακτικής διαχείρισης της τάξης

Και συνδέουν την ατομική μαθηματική γνώση με την κοινωνική και συλλογική φύση της γνώσης που αναπτύσσεται στο σχολείο

---

Στον πυρήνα αυτών των προσεγγίσεων, τόσο της μάθησης όσο και της διδακτικής οργάνωσης και διαχείρισης, βρίσκουμε την ιδιαιτερότητα των μαθηματικών

Η οργάνωση του περιεχομένου και των δράσεων που λαμβάνουν χώρα, αλλά και ο λόγος που αναπτύσσεται γύρω από αυτές και για αυτές διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη τους της μαθηματικής γνώσης και της στάσης απέναντι στα μαθηματικά.