Μιγαδικοί αριθμοί (complex numbers)

Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι αριθμοί που έχουν όλες τις ιδιότητες που έχουν και οι πραγματικοί αριθμοί. Αποτελούν την τελευταία και οριστική επέκταση του συνόλου των αριθμών ξεκινώντας από τους φυσικούς αριθμούς.

Το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι αριθμοί που αντιπροσωπεύουν πλήθος φυσικών αντικειμένων. Σε αυτούς περιλαμβάνουμε και το μηδέν (απουσία φυσικών αντικειμένων)

$$N=\{0,1,2,3,4,...\}$$

Στο σύνολο των φυσικών αριθμών ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Δεν μπορούμε όμως να προσθέσουμε δυο αριθμούς και να πάρουμε μηδέν. Δηλαδή οι εξισώσεις της μορφής $x+5=0$ δεν έχουν λύση. Ονομάζουμε τις λύσεις τους αρνητικούς αριθμούς

$x+5=0 \Rightarrow x=-5$

και στη συνέχεια επεκτείνουμε το σύνολο των αριθμών μας και με αυτούς τους αρνητικούς αριθμούς ώστε οι παραπάνω εξισώσεις να έχουν λύση μέσα στο σύνολο των αριθμών. Το νέο σύνολο αριθμών το ονομάζουμε ακέραιους (ολόκληρους)

$$Z=\{...-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...\}$$

Με αρνητικούς αριθμούς μπορούμε να περιγράψουμε έννοιες όπως το χρέος ή δυο διαφορετικές κατευθύνσεις. Είμαι δύο τετράγωνα βόρεια από την πλατεία (+2), είμαι δυο τετράγωνα νότια από την πλατεία (-2). Τώρα μπορούμε να κάνουμε και άλλη μια πράξη την αφαίρεση που ισοδυναμεί με πρόσθεση του αντίθετου αριθμού:

$$a-b=a+(-b)$$

Στο σύνολο των ακεραίων (όπως και στους φυσικούς) δεν μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε δύο αριθμούς και να πάρουμε αποτέλεσμα ένα. Δηλαδή δεν έχουν λύση οι εξισώσεις της μορφής $2x=1$ Οι λύσεις τους δεν είναι «ολόκληροι» αριθμοί. Τους ονομάζουμε ρητούς, τους γράφουμε σαν λόγους δύο ακεραίων (κλάσματα)

$2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

και τους συμπεριλαμβάνουμε κι αυτούς στο σύνολο των αριθμών:

$$Q=\left\{ r=\frac{n}{m}\ ;\ n,m\in \right\}$$

Ρητός σημαίνει ότι μπορεί να γραφτεί με πεπερασμένο αριθμό ψηφίων.

Κάθε ρητός είτε γράφεται με συγκεκριμένο αριθμό ψηφίων είτε με επαναλαμβανόμενο αριθμό ψηφίων

$\frac{453}{64}=7,078125$ $\qquad$ $\frac{453}{66}$=6,86363...=6,8$\overline{63}$

Με ρητούς αριθμούς μπορούμε να περιγράψουμε την έννοια του μέρους ή κλάσματος ενός όλου. Π.χ. αν κόψω μια πίτσα σε 8 κομμάτια το 1 κομμάτι είναι το $8^{-1}=\frac{1}{8}=0,125$ της πίτσας. Αν φάω οκτώ φορές από ένα κομμάτι πίτσα, έχω φάει όλη την πίτσα $8\cdot\frac{1}{8}=1$

Τώρα μπορούμε να κάνουμε και άλλη μια πράξη τη διαίρεση που ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό με τον αντίστροφο αριθμό:

$$a:b \ \text{ ή } \ a\div b=a\cdot b^{-1}=\frac{a}{b}$$

Με τον συνεχόμενο πολλαπλασιασμό μπορούμε να φτιάξουμε δυνάμεις $x^2=x\cdot x$ και να πάρουμε πάλι έναν ρητό αριθμό. Όμως υπάρχουν ρητοί αριθμοί που δεν είναι η δύναμη κάποιου άλλου ρητού π.χ. το 2 (Αυτή ήταν η μεγάλη ανακάλυψη, το μεγάλο σοκ και το μεγάλο μυστικό που προσπάθησαν να κρατήσουν οι Πυθαγόρειοι). Δηλαδή στο σύνολο των ρητών δεν έχουν λύση οι εξισώσεις της μορφής $x^2 = 2$. Η λύση αυτής της εξίσωσης δεν είναι ρητός αριθμός $x \notin \quad R$.

Κανένα πρόβλημα. Ονομάζουμε αυτούς τους αριθμούς ρίζες, τους συμβολίζουμε $\sqrt{2}$ και τους περιλαμβάνουμε κι αυτούς στο σύνολο των αριθμών μας

$$x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

Αφού δεν χαλάνε τις ιδιότητες των πράξεων που έχουμε (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση) αλλά τις εμπλουτίζουν κιόλας με δυνάμεις και ρίζες όλα καλά. Βρίσκουμε ότι αυτοί οι αριθμοί δεν είναι ρητοί, δηλαδή δεν μπορούν να γραφτούν με πεπερασμένο αριθμό ψηφίων, ούτε καν επαναλαμβανόμενων.

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562373095048...$$

Αριθμοί όπως ο $\sqrt{2}$ που είναι λύσεις κάποιας αλγεβρικής εξίσωσης ονομάζονται αλγεβρικοί. Εκτός από αυτούς υπάρχουν και άλλοι άρρητοι αριθμοί οι οποίοι δεν αποτελούν λύση καμιάς αλγεβρικής εξίσωσης. Αυτοί ονομάζονται υπερβατικοί. Τέτοιοι είναι π.χ. το *e* και το *π*. Για αυτούς τους αριθμούς υπάρχουν πολλοί διάσημοι τύποι πολλών διάσημων μαθηματικών

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828182845904...$$

$$\pi = 3 + \frac{4}{2\cdot3\cdot4} - \frac{4}{4\cdot5\cdot6} + \frac{4}{6\cdot7\cdot8} - \frac{4}{8\cdot9\cdot10} + ... = \sqrt{\frac{6}{1^2}+\frac{6}{2^2}+\frac{6}{3^2}+\frac{6}{4^2}+...} = 3{,}14159265358979...$$

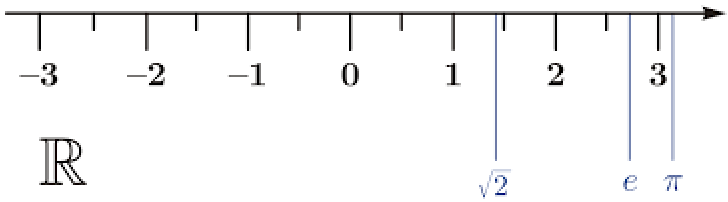
Οι άρρητοι (αλγεβρικοί και υπερβατικοί) μαζί με τους ρητούς φτιάχνουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών που συμβολίζουμε με .

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ισχύουν για τις πράξεις πρόσθεση και πολλαπλασιασμό οι παρακάτω ιδιότητες :

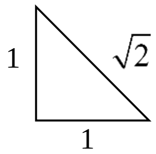
$\forall\, a,b,c \in \quad R$	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Εσωτερική πράξη	$a+b \in \quad R$	$a \cdot b \in \quad R$
Προσεταιριστική	$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$
Αντιμεταθετική	$a+b=b+a$	$a\cdot b = b\cdot a$
Ύπαρξη ουδέτερων στοιχείων	$\exists\, 0 \in R$ ώστε $\forall\, a \in \quad R$ $a+0=a$	$\exists\, 1 \in \quad R$ ώστε $\forall\, a \in \quad R$ $a \cdot 1 = a$
Ύπαρξη αντίθετου και αντίστροφου	$\forall\, a \in R\ \exists\, -a \in R$ ώστε $a+(-a)=0$	$\forall\, a \in \quad R^*\ \exists\, a^{-1} \in \quad R^*$ ώστε $a \cdot a^{-1} = 1$
Επιμεριστική	$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$	

Ένα τέτοιο σύνολο ονομάζεται σώμα. Το σώμα των πραγματικών αριθμών είναι επίσης διατεταγμένο και πλήρες. Διατεταγμένο σημαίνει ότι δύο πραγματικοί αριθμοί ή θα είναι ίσοι ή κάποιος από τους δύο θα είναι μικρότερος από τον άλλο. Πλήρες σημαίνει ότι όσο μικρή και να είναι η διαφορά μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών πάντα υπάρχει ένας άλλος πραγματικός αριθμός ανάμεσά τους. Επίσης όχι μόνο είναι άπειροι σε πλήθος (όπως άλλωστε και όλα τα προηγούμενα σύνολα αριθμών) αλλά και μη αριθμήσιμοι. Δεν υπάρχει μια προς μια αντιστοιχία κάθε πραγματικού με έναν φυσικό (για τα προηγούμενα σύνολα αυτό μπορεί να γίνει). Μεταξύ δύο οποιονδήποτε πραγματικών, όσο κοντά και να είναι αυτοί, υπάρχουν άπειροι άλλοι πραγματικοί αριθμοί.

Έτσι οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να αντιστοιχηθούν με τα σημεία μιας ευθείας. Μπορούμε να τους βάλουμε όλους στη σειρά πάνω σε μια ευθεία και η ευθεία θα γεμίσει. Δεν θα υπάρχουν σημεία της που να μην αντιστοιχούν σε κάποιο αριθμό. Η ευθεία αυτή λέγεται ευθεία των πραγματικών αριθμών.



Οι πραγματικοί αριθμοί αντιπροσωπεύουν μήκη (ή κάθε άλλο φυσικό μέγεθος που παίρνει συνεχόμενες τιμές), π.χ. ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι το μήκος της υποτείνουσας ενός ισόπλευρου ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές ίσες με τη μονάδα (αυτό τρέλανε του Πυθαγόρειους, που δεν μπορούσε αυτό το μήκος να γραφτεί σαν λόγος ακεραίων)



Όλα φαίνονται να έχουν πάει καλά, όμως ακόμα υπάρχουν πράξεις που δεν μπορούμε να τις κάνουμε σε πραγματικούς αριθμούς. Η τετραγωνική ρίζα ενός αρνητικού αριθμού δεν είναι ένας άλλος πραγματικός αριθμός. Αυτό σημαίνει ότι ή εξίσωση $x^2+1=0$ δεν έχει λύση στους πραγματικούς αριθμούς. Κανένα πρόβλημα. Λέμε τη λύση της φανταστικό αριθμό και τη συμβολίζουμε με *i*:

$$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\sqrt{-1} \Rightarrow x=i$$

Κάθε άλλη αρνητική ρίζα θα είναι πολλαπλάσιο του *i* το οποίο ονομάζουμε φανταστική μονάδα

$$\text{Π.χ. } \sqrt{-7}=\sqrt{(-1)\cdot 7}=i\sqrt{7}, \quad \sqrt{-16}=\sqrt{(-1)\cdot 4^2}=4i$$

Προφανώς ισχύουν

$$i=\sqrt{-1}\,,\ i^2=-1\,,\ i^{-1}=-i \ \text{ αφου } i\cdot(-i)=1\,,\ i^3=-i\,,\ i^4=1,\ i^5=i,\ \ldots$$

Επίσης αποδεικνύεται ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός φανταστικών αριθμών ικανοποιεί ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες με τους πραγματικούς και άρα αποτελούν σώμα. Το σώμα των φανταστικών αριθμών είναι επίσης διατεταγμένο και πλήρες.

$$\mathrm{I}=\left\{a\cdot i;\ a\in \quad,\ i^2=-1\right\}$$

Τελικά οι φανταστικοί αριθμοί δεν διαφέρουν σε τίποτα από τους πραγματικούς, μπορούν να περιγράψουν και αυτοί μήκη ή μεγέθη που παίρνουν συνεχόμενες τιμές. Μεγέθη που περιγράφουμε με φανταστικούς αριθμούς είναι η σύνθετη αντίσταση ιδανικού πηνίου (έχει μόνο επαγωγική αντίδραση) $Z_L=iX_L=iL\omega$ και η σύνθετη αντίσταση ιδανικού πυκνωτή (έχει μόνο χωρητική αντίδραση)

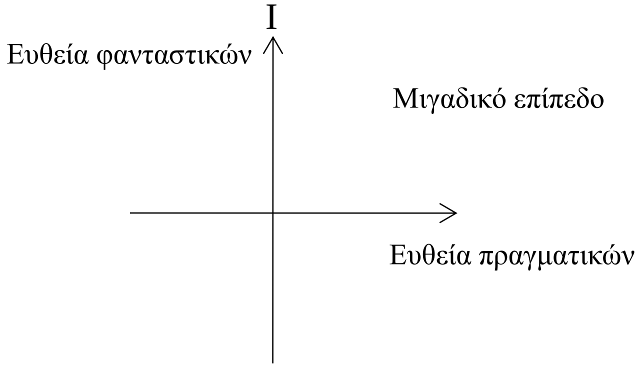
$$Z_C=\frac{1}{iC\omega}=-i\frac{1}{C\omega}=-iX_C$$

Η ενδιαφέρουσα ερώτηση είναι : «και που βρίσκονται αυτοί οι αριθμοί?». Όλοι οι υπόλοιποι αριθμοί: φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί, αλγεβρικοί, υπερβατικοί έπιαναν θέσεις πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών η οποία πλέον έχει γεμίσει.

Άρα οι φανταστικοί αριθμοί πρέπει να βρίσκονται πάνω σε μια άλλη ευθεία η οποία τέμνει κάθετα την ευθεία των πραγματικών αριθμών στο μηδέν, το οποίο είναι και ο μόνος αριθμός που μοιράζονται.

Αυτό όμως ανοίγει ένα νέο πεδίο δυνατοτήτων. Τώρα μπορούμε να έχουμε αριθμούς πάνω σε όλο το επίπεδο που ορίζεται από τις ευθείες των πραγματικών και των φανταστικών αριθμών. Οι αριθμοί αυτοί θα έχουν και πραγματικό και φανταστικό μέρος. Για το λόγο αυτό ονομάζονται παγκοσμίως σύνθετοι αριθμοί (complex numbers). Στην Ελλάδα που είμαστε πιο γλαφυροί, χρησιμοποιούμε τον «φυλετικό» όρο μιγαδικοί αριθμοί. Οι αριθμοί είναι μιγάδες, έχουν στοιχεία από δυο φυλές, την πραγματική και τη φανταστική.

Έτσι οι μιγαδικοί αριθμοί δεν είναι τίποτα παραπάνω από τα δυσδιάστατα διανύσματα του επιπέδου στα οποία όμως έχουμε ορίσει τις πράξεις πρόσθεση και πολλαπλασιασμό που είναι παρόμοιες με αυτές των πραγματικών αριθμών. Τα δυσδιάστατα διανύσματα είναι εντελώς πραγματικά αντικείμενα. Αν επιλέξουμε την διανυσματική εικόνα δεν χρειάζεται καν να κάνουμε αναφορά σε καμία φανταστική μονάδα *i* καθώς για κάποιους η έκφραση $\sqrt{-1}$ είναι αντιαισθητική.



Οι μιγαδικοί αριθμοί γράφονται είτε ως : $z = a + ib$ όπου οι αριθμοί *a, b* είναι πραγματικοί.

$$= \left\{ a + ib \ ; \ a, b \in \quad , i^2 = -1 \right\}$$

Είτε ως $z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ με $a, b \in$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} ; \ + \ ; \ \cdot \ ; \ a, b \in \quad \right\} = \quad \otimes$$

Ο πρώτος αριθμός *a* είναι το πραγματικό μέρος του μιγαδικού και ο δεύτερος, ο *b* το φανταστικό του μέρος

$$a = \operatorname{Re} z$$
$$b = \operatorname{Im} z$$

Το σημαντικό είναι ότι οι μιγαδικοί αριθμοί ικανοποιούν όλες τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού που ικανοποιούν και οι πραγματικοί. Ακόμα καλύτερα κάθε ρίζα μπορεί να υπολογιστεί και είναι ένας άλλος μιγαδικός αριθμός. Για την ακρίβεια κάθε πολυωνυμική εξίσωση θα έχει τόσες ρίζες όσες και ο βαθμός του πολυωνύμου και οι λύσεις θα είναι μιγαδικοί αριθμοί. Οποιαδήποτε αλγεβρική πράξη και να κάνουμε με μιγαδικούς αριθμούς θα βρίσκουμε αποτέλεσμα που θα είναι πάλι μιγαδικός αριθμός. Δεν υπάρχει καμία αλγεβρική ανάγκη να επεκταθεί περαιτέρω το σύνολο αυτό.

(Αριθμοί με παραπάνω διαστάσεις (τρισδιάστατοι, τετραδιάστατοι κλπ.) δεν έγινε δυνατόν να κατασκευαστούν. Το βασικό πρόβλημα είναι ότι δεν μπορούσε να οριστεί αντιμεταθετικός πολλαπλασιασμός. Τετραδιάστατοι αριθμοί με μη αντιμεταθετικό πολλαπλασιασμό κατασκευάστηκαν και είχαν κάποια χρήση στη φυσική από τα μέσα ως το τέλος του 19ου αιώνα. Ονομάζονται τετραδόνια (quaternions) και έχουν ένα πραγματικό και τρία φανταστικά μέρη

$$q = a + ib + jc + kd \quad \text{με } i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \ \text{ και } a, b, c, d \in$$

Οι εξισώσεις του Maxwell είχαν γραφτεί αρχικά με τετραδόνια.)

Η βασική χρήση των μιγαδικών αριθμών είναι στην κβαντική φυσική. Επίσης χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν μεγέθη τα οποία προσδιορίζονται από δύο παραμέτρους, όπως ένας ταλαντωτής ο οποίος περιγράφεται από το πλάτος του και τη φάση του. Η τελευταία χρήση βρίσκει μεγάλη εφαρμογή στα ηλεκτρικά κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος καθώς είναι πολύ πιο εύκολο να κάνεις πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς από το να χρησιμοποιείς τριγωνομετρικές ταυτότητες. Οι μηχανικοί χρησιμοποιούν το σύμβολο *j* για τη φανταστική μονάδα αντί για το *i*.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

$$z_1 = a_1 + ib_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad z_2 = a_2 + ib_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Ισότητα: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ και $b_1 = b_2$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ και } b_1 = b_2$$

Κανόνες πράξεων

Πρόσθεση: $z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$$

Ουδέτερο στοιχείο πρόσθεσης (μηδέν): $0 = 0 + i0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Αντίθετος : $z = a + ib = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad -z = -a - ib = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$

Αφαίρεση : $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = a_1 + ib_1 - a_2 - ib_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 \\ b_1 - b_2 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός : Για την καρτεσιανή μορφή τον βρίσκουμε από την επιμεριστική ιδιότητα και τον ορισμό του $i^2 = -1$

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i b_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + i b_1 a_2)$$

Βλέπουμε ότι πράγματι ισχύει $z_1 z_2 = z_2 z_1$ καθώς η έκφραση του γινομένου είναι συμμετρική στην αντιμετάθεση $1 \leftrightarrow 2$

Για την διανυσματική μορφή, ορίζουμε την πράξη αξιωματικά και δεν αναφέρουμε το *i*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Ουδέτερο στοιχείο πολλαπλασιασμού (μονάδα): $1 = 1 + i0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Αντίστροφος: Εδώ θέλει λίγη δουλίτσα

$$z = a + ib = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \text{ έστω } z^{-1} \equiv \frac{1}{z} \equiv \frac{1}{a + ib} = x + iy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Πρέπει να βρούμε τα *x* και *y* ώστε με τον κανόνα του πολλαπλασιασμού να ισχύει : $z \cdot z^{-1} = 1$
Απευθείας δύσκολος τρόπος. Η παραπάνω εξίσωση είναι ένα σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους καθώς το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του αριθμών στα δύο μέλη της εξίσωσης πρέπει να είναι ίσα (κανόνας ισότητας):

$$z \cdot z^{-1} = 1 \Rightarrow (ax - by) + i(ay + bx) = 1 + i0 \Rightarrow \begin{matrix} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{matrix}$$

Ορίζουσες : $D = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2$, $D_x = \begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix} = a$, $D_y = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b$

Άρα : $x = \frac{D_x}{D} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Έξυπνος, γρήγορος τρόπος. Ορίζουμε τον **συζυγή** ενός μιγαδικού αριθμού ως $\bar{z} = a - ib$ και παρατηρούμε ότι (σαν διαφορά τετραγώνων):

$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - iab + iba - (ib)^2 = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$

Οπότε $z^{-1} \equiv \frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2}$

Γενικά **συζυγής παράσταση** μιας παράστασης είναι η παράσταση που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε παντού το i με $-i$: $i \to -i$

Π.χ. $A = \frac{2-5i}{3+i} \Rightarrow \bar{A} = \frac{2+5i}{3-i}$, $B = \frac{x+yi}{\sqrt{a+ib}} e^{it} \Rightarrow \bar{B} = \frac{x-yi}{\sqrt{a-ib}} e^{-it}$

Η έκφραση $a^2 + b^2$ είναι από το Πυθαγόρειο θεώρημα το τετράγωνο του μήκους του διανύσματος δηλαδή η απόλυτη τιμή του αριθμού (πραγματικός και θετικός αριθμός)

Για τον συζυγή αριθμό ισχύουν ακόμα :

Το άθροισμα συζυγών παραστάσεων είναι πραγματικός αριθμός

$$z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a \Rightarrow a = \operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}$$

Η διαφορά συζυγών παραστάσεων είναι φανταστικός αριθμός

$$z - \bar{z} = a + ib - (a - ib) = 2ib \Rightarrow b = \operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

Μέτρο μιγαδικού αριθμού : $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$

Αντίστροφος: $z = a + ib \Rightarrow z^{-1} \equiv \frac{1}{z} \equiv \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

$$\frac{1}{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^{=1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$$

Διαίρεση (πολλαπλασιασμός με τον αντίστροφο) :

$$\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+i(b_1a_2-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}$$

Ουσιαστικά ορίσαμε διαίρεση δυσδιάστατων διανυσμάτων !

$$\frac{\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}} = \frac{1}{a_2^2+b_2^2}\begin{pmatrix} a_1a_2+b_1b_2 \\ b_1a_2-a_1b_2 \end{pmatrix}$$

Σε ορολογία δυσδιάστατων διανυσμάτων $\vec{r}_1 = x_1\hat{x} + y_1\hat{y}$, $\vec{r}_2 = x_2\hat{x} + y_2\hat{y}$ όπου έχουμε τα γνωστά γινόμενα : βαθμωτό (εσωτερικό) γινόμενο $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2$

διανυσματικό (εξωτερικό) γινόμενο $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = (x_1y_2 - y_1x_2)\hat{z}$

βλέπουμε ότι η διαίρεση δυσδιάστατων διανυσμάτων (μιγαδικών) θα γραφόταν

$$\frac{\vec{r}_1}{\vec{r}_2} = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_2|^2}\hat{x} + \frac{(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)_z}{|\vec{r}_2|^2}\hat{y}$$

Η εξίσωση του Euler

Υπάρχει μια εκπληκτική εξίσωση που συνδέει την εκθετική συνάρτηση με φανταστικό εκθέτη με τις συναρτήσεις του συνημιτόνου και του ημιτόνου που είναι πάρα πολύ χρήσιμη:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

Θέτοντας $\theta=\pi$ παίρνουμε την διάσημη ταυτότητα του Euler :

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

η οποία αποκαλύπτει μια πολύ βαθιά σύνδεση μεταξύ των πιο θεμελιωδών αριθμών των μαθηματικών: 0, 1, π, e, i.

Βλέπουμε ότι η εκθετική συνάρτηση σε φανταστική δύναμη είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π :

$$e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$$

άρα μπορεί να περιγράψει ταλάντωση.

Επίσης βλέπουμε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί της μορφής $u = e^{i\theta}$ έχουν μέτρο ίσο με τη μονάδα.

$$\left|e^{i\theta}\right|^2 = e^{i\theta}\overline{e^{i\theta}} = e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i\theta-i\theta} = e^0 = 1$$

ή $\left|e^{i\theta}\right|^2 = \left|\cos\theta + i\sin\theta\right|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Αυτοί οι αριθμοί λέγονται μοναδιαίοι.

Επειδή $\cos(-\theta) = \cos\theta,\quad \sin(-\theta) = -\sin\theta \Rightarrow e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$, μπορούμε να εκφράσουμε τις αρμονικές συναρτήσεις μέσω της εκθετικής συνάρτησης

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Όμως τι σημαίνει φανταστική δύναμη? Πως υπολογίζεται αυτό? Το να υψώσεις έναν πραγματικό αριθμό, το e, σε φανταστική δύναμη, δεν είναι τελικά κάτι τόσο εξωτικό όσο φαίνεται αρχικά.

Από τον ορισμό του e ως όριο $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ δείχνεται εύκολα με όρια ότι:

$e^2 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$, $e^3 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$ και γενικά $e^x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

Οπότε ορίζουμε να είναι $e^{i\theta} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\theta}{n}\right)^n$ το οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε με όση ακρίβεια επιθυμούμε επιλέγοντας ένα αρκετά μεγάλο n και κάνοντας πολλαπλασιασμούς του $\left(1+\frac{i\theta}{n}\right)$ με τον εαυτό του.

Η απόδειξη της εξίσωσης του Euler γίνεται εύκολα αν αναπτύξουμε τις συναρτήσεις σε δυναμοσειρές Taylor γύρω από το μηδέν (σειρά Maclaurin). Αυτό μπορεί να γίνει για όλες τις «κανονικές» συναρτήσεις δηλαδή αυτές που είναι συνεχείς και στο x=0 ορίζονται αυτές και όλες οι παράγωγοί τους:

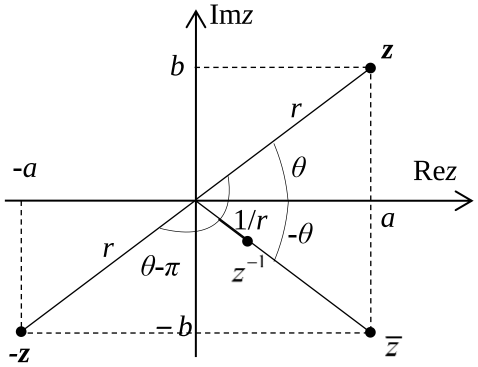
$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$

Για την ακρίβεια έτσι υπολογίζονται από τις αριθμομηχανές όλες οι γνωστές αλλά μη πολυωνυμικές συναρτήσεις όπως $e^x,\ \ln(1+x),\ \ln(1-x),\ \cos x,\ \sin x,\ \tan x,\ \arctan x,\ \sinh x$, κλπ. κρατώντας τόσους όρους στο άθροισμα ανάλογα με την επιθυμητή ακρίβεια. Το ίδιο θα κάνετε κι εσείς ως μηχανικοί όταν θα έχετε ένα μοντέλο όπου θα εμφανίζονται τέτοιες συναρτήσεις και θα θέλετε να κάνετε προσεγγίσεις. Οι πρώτοι δυο όροι της σειράς είναι η γνωστή γραμμικοποίηση του Νεύτωνα $f(x) = f(0) + xf'(0) + \ldots$

Για τις συναρτήσεις e^x, $\cos x$, $\sin x$ όλοι οι συντελεστές της ανάπτυξης Taylor υπολογίζονται εύκολα καθώς : $(e^x)' = e^x$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ και $e^0 = 1, \sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$.
Βάζω την απόδειξη στο τέλος για όποιον ενδιαφέρεται.

Μορφές μιγαδικών αριθμών και χρήση τους στις πράξεις

Αφού οι μιγαδικοί αριθμοί είναι δυσδιάστατα διανύσματα μπορούμε να τους γράψουμε σε καρτεσιανή (a,b) ή πολική μορφή (r,θ)



Καρτεσιανή μορφή : $z = a + ib$
Πολική μορφή : $z = r\angle\theta \quad -180 < \theta \le 180^o$
Εκθετική μορφή : $z = re^{i\theta} \quad 0 < \theta \le 2\pi$
Τριγωνομετρική μορφή : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

όπου : $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$ $\quad r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\theta \equiv \text{Arg}(z) = \arctan(b/a)$

Με προσοχή στην εύρεση της αζιμουθιακής γωνίας παίρνοντας υπόψη ότι τα πρόσημα των a, b καθορίζουν το τεταρτημόριο που βρίσκεται ο z. Η αζιμουθιακή γωνία θ λέγεται και φάση ή όρισμα (argument)

$$z = |z|e^{i\text{Arg}(z)}$$

Έχετε υπόψη σας ότι στην πολική μορφή (ανάλυση δικτύων) χρησιμοποιούμε τη σύμβαση $-180^o < \theta \le 180^o$ και εκφράζουμε τη γωνία σε μοίρες (deg), ενώ στην εκθετική μορφή (φυσική, μαθηματικά) χρησιμοποιούμε τη σύμβαση $0 \le \theta < 2\pi$ και εκφράζουμε τη γωνία σε ακτίνια (rad). Επίσης οι επόμενες γωνίες ταυτίζονται : $-\pi$ με την π και 0 με την 2π

Βλέπουμε ότι ο συζυγής βρίσκεται στο συμμετρικό σημείο ως προς τον οριζόντιο άξονα

$$\overline{z} = a - bi = r\angle -\theta = re^{-i\theta}$$
$$|\overline{z}| = |z| \quad \text{Arg}(\overline{z}) = -\text{Arg}(z)$$

Ο αντίστροφος είναι στην ίδια ευθεία και κατεύθυνση με τον συζυγή αλλά σε απόσταση $1/r$ από το 0

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{1}{r}\angle -\theta = \frac{e^{-i\theta}}{r}$$

$$|z^{-1}| = \frac{1}{|z|} \quad \text{Arg}(z^{-1}) = -\text{Arg}(z)$$

Ο αντίθετος βρίσκεται στο συμμετρικό σημείο ως προς την αρχή των αξόνων 0, δηλ. στην ίδια απόσταση r και σε γωνία θ-π

$$-z = -a - bi = r\angle\theta - \pi = re^{i(\theta+\pi)} = -re^{i\theta}$$
$$|-z| = |z| \quad \text{Arg}(-z) = \text{Arg}(z) + \pi$$

Η καρτεσιανή μορφή είναι ιδανική για την **πρόσθεση και την αφαίρεση**

Η **πολική ή εκθετική μορφή** είναι ιδανικές για να κάνουμε **πολλαπλασιασμό και διαίρεση** μιγαδικών καθώς και για να υπολογίζουμε **δυνάμεις και ρίζες** μιγαδικών με τους γνωστούς κανόνες για δυνάμεις και ρίζες που ξέρουμε από τους πραγματικούς αριθμούς

Έστω : $z_1 = a_1 + ib_1 = r_1 e^{i\theta_1} = r_1\angle\theta_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2 = r_2 e^{i\theta_2} = r_2\angle\theta_2$

Πολλαπλασιασμός : $z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \Rightarrow$

$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$ πολλαπλασιάζω τα μέτρα και προσθέτω τις φάσεις

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$$

$$\boxed{r_1\angle\theta_1 \cdot r_2\angle\theta_2 = r_1 r_2\angle\theta_1 + \theta_2}$$

Παρατηρούμε ότι ο πολλαπλασιασμός με μοναδιαίο αριθμό ισοδυναμεί με περιστροφή του αριθμού κατά γωνία φ ίση με τη φάση του μοναδιαίου χωρίς να αλλάξει το μέτρο του αριθμού.

$z = re^{i\theta}, \; u = e^{i\varphi} \Rightarrow zu = re^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = re^{i(\theta+\varphi)}$

$r\angle\theta \cdot 1\angle\varphi = r_1\angle\theta + \varphi$

Διαίρεση : $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \Rightarrow$

$\boxed{\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}}$ διαιρώ τα μέτρα και αφαιρώ τις φάσεις

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z_2)$$

$$\boxed{\frac{r_1\angle\theta_1}{r_2\angle\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle\theta_1 - \theta_2}$$

Δύναμη : $z = re^{i\theta} \Rightarrow z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta} \Rightarrow$

$\boxed{z^n = r^n e^{in\theta}}$ υψώνω το μέτρο στη δύναμη και πολλαπλασιάζω τη φάση με τη δύναμη

$$|z^n| = |z|^n, \quad \mathrm{Arg}(z^n) = n\mathrm{Arg}(z)$$

$$\boxed{\left(r\angle\theta\right)^n = r^n\angle n\theta}$$

Ρίζα : κάθε μιγαδικός έχει *n*, *n*-στές ρίζες, που βρίσκονται σε έναν κύκλο ακτίνας $\sqrt[n]{r}$ και ισαπέχουν μεταξύ τους κατά γωνία $2\pi/n$.

Αρχικά παίρνουμε τη ρίζα : $z = re^{i\theta} \Rightarrow \sqrt[n]{z} \equiv z^{1/n} = \left(re^{i\theta}\right)^{1/n} = r^{1/n} e^{i\theta/n} \Rightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\theta/n}$

Δηλαδή η *n*-οστή ρίζα βρίσκεται παίρνοντας την αντίστοιχη ρίζα του μέτρου και διαιρώντας τη φάση με *n*. Όμως επειδή η $e^{i\theta}$ είναι περιοδική με περίοδο 2π μπορεί να υπάρχουν κι άλλοι μιγαδικοί αριθμοί με μέτρο $\sqrt[n]{r}$ που αν τους υψώσουμε στην *n* να μας δώσουν τον *z*. Αρκεί πολλαπλασιάζοντας τη φάση τους με *n* να καταλήξω σε φάση θ συν ένα πολλαπλάσιο του 2π.

Ας συμβολίσουμε τις φάσεις τους με φ_k. Τότε

$$n\varphi_k = \theta + 2k\pi \Rightarrow \varphi_k = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n} \qquad \text{με } k\frac{2\pi}{n} < 2\pi$$

για να ισχύει αυτό πρέπει $k = 0,1,2,...,n-1$

Οπότε $\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n} + ik\frac{2\pi}{n}} \qquad k = 0,1,2,...n-1}$

$$\left|\sqrt[n]{z}\right| = \sqrt[n]{|z|}, \quad \mathrm{Arg}(\sqrt[n]{z}) = \frac{\mathrm{Arg}(z)}{n} + k\frac{2\pi}{n} \qquad k = 0,1,2,...n-1$$

$$\sqrt[n]{r\angle\theta} = \sqrt[n]{r}\angle\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n} \qquad k = 0,1,2,...,n-1$$

Έτσι ανάλογα με τις πράξεις που έχουμε να κάνουμε θα μετατρέπουμε αρχικά τους μιγαδικούς που μας δίνονται από καρτεσιανή σε πολική μορφή ή και αντίστροφα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Υπολογίστε την παράσταση $\dfrac{3+4i}{3-4i}$

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί έχουν ίσα μέτρα (είναι και συζυγείς) άρα περιμένουμε το πηλίκο να έχει μέτρο ίσο με τη μονάδα

Α) Όταν έχουμε μιγαδικό στον παρανομαστή τον διώχνουμε πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με τον συζυγή του

$$\frac{3+4i}{3-4i}=\frac{3+4i}{3-4i}\frac{3+4i}{3+4i}=\frac{3^2-4^2+2\cdot 3\cdot 4i}{3^2+4^2}=\frac{-7+24i}{25}\Rightarrow\frac{3+4i}{3-4i}=-0,28+0,96i$$

$$\left|-0,28+0,96i\right|=\sqrt{0,28^2+0,96^2}=\sqrt{0,0784+0,9216}=1$$

Βρίσκεται στο 2 τεταρτημόριο άρα:

$$\operatorname{Arg}\left(-0,28+0,96i\right)=\tan^{-1}\left(\frac{0,96}{-0,28}\right)=\tan^{-1}\left(-3,429\right)=106,26^{\circ}=1,855\text{ rad}$$

Σε πολική μορφή το αποτέλεσμα είναι $\dfrac{3+4i}{3-4i}=1\angle 106,26^{\circ}=e^{1,855i}$

Β) Εναλλακτικά μετατρέπουμε τον αριθμητή και παρανομαστή σε πολική μορφή και κάνουμε τη διαίρεση

$$\left|3+4i\right|=\left|3-4i\right|=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

$$\operatorname{Arg}\left(3+4i\right)=\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)=53,13^{\circ}\ ,\quad \operatorname{Arg}\left(3-4i\right)=\operatorname{Arg}\left(\overline{3+4i}\right)=-\operatorname{Arg}\left(3+4i\right)=-53,13^{\circ}$$

$$\frac{3+4i}{3-4i}=\frac{5\angle 53,13^{\circ}}{5\angle -53,13^{\circ}}=1\angle -53,13^{\circ}-(-53,13^{\circ})=1\angle 106,26^{\circ}$$

2. Μετατρέψτε τους παρακάτω μιγαδικούς σε πολική και εκθετική μορφή

Α) $z_1=2-2i$, Β) $z_2=3+8i$, Γ) $z_3=-5+3i$, Δ) $z_4=-4-4i$, Ε) $z_5=5+0i$, ΣΤ) $z_6=0+6i$

Ζ) $z_7=-4$, Θ) $z_8=-5i$

Λύση

Α) $z_1=2-2i\Rightarrow\left|z_1\right|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}=2,828$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{-2}{2}\right)=\tan^{-1}(-1)\ \text{ στο 4ο τεταρτημόριο}\Rightarrow$$

$$\theta=-45^{\circ}=-45^{\circ}\frac{2\pi}{360^{\circ}}=-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{7\pi}{4}=5,498\text{ rad}$$

$$z_1=2-2i=2\sqrt{2}\angle -45^{\circ}=2\sqrt{2}e^{i7\pi/4}$$

Β) $z_2=3+8i\Rightarrow\left|z_2\right|=\sqrt{3^2+8^2}=\sqrt{9+64}=\sqrt{73}=8,544$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right)\ \text{ στο 1ο τεταρτημόριο}\Rightarrow\theta=69,44^{\circ}=1,212\text{ rad}$$

$$z_2=3+8i=\sqrt{73}\angle 69,44^{\circ}=\sqrt{73}e^{1,212i}$$

Γ) $z_3 = -5+3i \Rightarrow |z_3| = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34} = 5,831$

$\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{3}{-5}\right)$ στο 2ο τεταρτημόριο $\Rightarrow \theta = 149,04^{\circ} = 2,748$ rad

$z_3 = -5+3i = \sqrt{34}\angle 149,04^{\circ} = \sqrt{34}e^{2,748i}$

Δ) $z_4 = -4-4i \Rightarrow |z_4| = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2} = 5,657$

$\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{-4}{-4}\right) = \tan^{-1}(-1)$ στο 3ο τεταρτημόριο $\Rightarrow \theta = -135^{\circ} = \dfrac{5\pi}{4}$ rad

$z_4 = -4-4i = 4\sqrt{2}\angle -135^{\circ} = 4\sqrt{2}e^{i5\pi/4}$

Ε) $z_5 = 5+0i \Rightarrow |z_5| = 5$

Θετικός πραγματικός (πάνω στον θετικό ημιάξονα x) $\theta = 0^{\circ} = 0$ rad

$z_5 = 5+0i = 5\angle 0^{\circ} = 5$

ΣΤ) $z_6 = 0+6i \Rightarrow |z_6| = 6$

Θετικός φανταστικός (πάνω στον θετικό ημιάξονα y) $\theta = 90^{\circ} = \dfrac{\pi}{2}$ rad

$z_5 = 0+6i = 6\angle 90^{\circ} = 6e^{i\pi/2}$

Ζ) $z_7 = -4 \Rightarrow |z_7| = 4$

Αρνητικός πραγματικός (πάνω στον αρνητικό ημιάξονα x) $\theta = 180^{\circ} = \pi$ rad

$z_7 = -4 = 4\angle 180^{\circ} = 4e^{\iota\pi}$

Θ) $z_8 = -5i$

Αρνητικός φανταστικός (πάνω στον αρνητικό ημιάξονα y) $\theta = -90^{\circ} = \dfrac{3\pi}{2}$ rad

$z_8 = -5i = 5\angle -90^{\circ} = 5e^{i3\pi/2}$

3. Εκφράστε τους μιγαδικούς αριθμούς $\zeta = 50\angle 53,13^{\circ}$ και $z = 100\angle -120^{\circ}$ σε καρτεσιανή μορφή και προσθέστε τους. Εκφράστε το άθροισμα σε πολική μορφή

$\mathrm{Re}(\zeta) = 50\cos 53,13^{\circ} = 50\cdot 0,6 = 30$ $\quad$ $\mathrm{Im}(\zeta) = 50\sin 53,13^{\circ} = 50\cdot 0,8 = 40$

$\mathrm{Re}(z) = 100\cos(-120^{\circ}) = 100\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 50$ $\quad$ $\mathrm{Im}(z) = 100\sin(-120^{\circ}) = 100\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 86,6$

$$\zeta + z = 30+40i-50-86,6i = -20-46,6i$$

$|\zeta + z| = \sqrt{20^2+46,6^2} = \sqrt{400+2,171,8} = 50,7$

Βρίσκεται στο 3° τεταρτημόριο άρα : $\mathrm{Arg}(\zeta+z) = \tan^{-1}\left(\dfrac{-46,6}{-20}\right) = 66,77-180 = -113,23^{\circ}$

$$\zeta + z = 50,7\angle -113,23^{\circ}$$

Επαλήθευση : $50,7\cdot\cos(-113,23^{\circ}) = -19,997 = -20$

4. Με τους αριθμούς της άσκησης **2** υπολογίστε τις εκφράσεις $z_1 z_2$, $\dfrac{z_3}{z_4}$, $\sqrt{z_1}$, $\dfrac{z_5+z_6}{z_7+z_8}$

σε πολική και καρτεσιανή μορφή

Λύση

α)

$$z_1 z_2 = (2-2i)(3+8i) = 6+16i-6i+16 = 22+10i$$

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\angle -45^\circ \cdot \sqrt{73}\angle 69,44^\circ = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{73}\angle 69,44^\circ - 45^\circ = 2\sqrt{146}\angle 24,44^\circ$$

πράγματι

$$\mathrm{Re}(z_1 z_2) = 2\sqrt{146}\cos 24,44^\circ = 2\cdot 12,083\cdot 0,9104 = 22$$

$$\mathrm{Im}(z_1 z_2) = 2\sqrt{146}\sin 24,44^\circ = 2\cdot 12,083\cdot 0,4137 = 10$$

β)

$$\frac{z_3}{z_4} = \frac{z_3}{z_4}\frac{\overline{z}_4}{\overline{z}_4} = \frac{z_3\overline{z}_4}{|z_3|^2} = \frac{(-5+3i)(-4+4i)}{32} = \frac{20-20i-12i-12}{32} = \frac{8-32i}{32} = 0,25-i$$

$$\frac{z_3}{z_4} = \frac{\sqrt{34}\angle 149,04^\circ}{4\sqrt{2}\angle -135^\circ} = \frac{\sqrt{17}}{4}\angle 149,04^\circ - (-135^\circ) = 1,03\angle 284,04^\circ > 180^\circ =$$

$$= 1,03\angle 284,04^\circ - 360^\circ = 1,03\angle -75,96^\circ$$

Πράγματι

$$\mathrm{Re}(z_3/z_4) = 1,03\cos(-75,96^\circ) = 0,249877... = 0,25$$

$$\mathrm{Im}(z_3/z_4) = 1,03\sin(-75,96^\circ) = -0,999230... = -1$$

γ)

$$z_1 = 2-2i = 2\sqrt{2}\angle -45^\circ$$

$$\sqrt{z_1} = \sqrt{2\sqrt{2}\angle -45^\circ} = \sqrt{2\sqrt{2}}\angle -22,5^\circ \;,\quad \sqrt{2\sqrt{2}}\angle -22,5^\circ + \frac{360^\circ}{2} \Rightarrow$$

$$r_1 = \sqrt{2\sqrt{2}}\angle -22,5^\circ \;,\; r_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}\angle 157,5$$

πράγματι

$$\mathrm{Re}(r_1) = \sqrt{2\sqrt{2}}\cos(-22,5^\circ) = 1,5538 \qquad \mathrm{Im}(r_1) = \sqrt{2\sqrt{2}}\sin(-22,5^\circ) = -0,6436$$

$$r_1^2 = (1,5538-0,6436i)^2 = 1,5538^2 - 2\cdot 1,5538\cdot 0,6436i - 0,6436^2 = 2,4142 - 2,0005i - 0,4142 = 2-2i$$

δ)

$$\frac{z_5+z_6}{z_7+z_8} = \frac{5+6i}{-4-5i} = -\frac{5+6i}{4+5i}\frac{4-5i}{4-5i} = -\frac{20-25i+24i+30}{16+25} = \frac{-50+i}{41} = -1,2195+0,02439i$$

$$|z_5+z_6| = |5+6i| = \sqrt{5^2+6^2} = \sqrt{25+36} = \sqrt{61} \qquad \mathrm{Arg}(z_5+z_6) = \mathrm{Arg}(5+6i) = \tan^{-1}\left(\frac{6}{5}\right) = 50,19^\circ$$

$$|z_7+z_8| = |-4-5i| = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$$

$$\mathrm{Arg}(z_5+z_6) = \mathrm{Arg}(-4-5i) = \tan^{-1}\left(\frac{-5}{-4}\right) = 51,34^\circ - 180^\circ = -128,66^\circ$$

$$\frac{z_5+z_6}{z_7+z_8} = \frac{\sqrt{61}\angle 50,19^\circ}{\sqrt{41}\angle -122,66^\circ} = \sqrt{\frac{61}{41}}\angle 50,19^\circ - (-128,66^\circ) = 1,2198\angle 178,85^\circ$$

Επαλήθευση

$$\sqrt{\frac{61}{41}}\cos(178,85^\circ) = -1,2195$$

5. Υπολογίστε την έκφραση $\dfrac{40+30i}{20\angle 36,87^\circ - 10\angle 53,13^\circ}$

Λύση

Μετατρέπουμε τους αριθμούς στον παρανομαστή σε καρτεσιανή μορφή για να μπορέσουμε να κάνουμε την αφαίρεση

$$20\angle 36,87^{o} - 10\angle 53,13^{o} = 20\left(\cos(36,87^{o}) + i\sin(36,87^{o})\right) - 10\left(\cos(53,13^{o}) + i\sin(53,13^{o})\right)$$

$$= 20(0,8 + i0,6) - 10[0,6 + i\cdot(-0,8)] = 10 + 20i$$

Κάνουμε τη διαίρεση αλγεβρικά με τις καρτεσιανές μορφές

$$\frac{40+30i}{20\angle 36,87^{o} - 10\angle 53,13^{o}} = \frac{40+30i}{10+20i} = \frac{4+3i}{1+2i} = \frac{4+3i}{1+2i}\frac{1-2i}{1-2i} = \frac{4-8i+3i+6}{1+2^2} = \frac{10-5i}{5} = 2-i$$

Εναλλακτικά μετατρέπουμε αριθμητή και παρανομαστή σε πολική μορφή

Αριθμητής στο 1^{o} τεταρτημόριο

$$|40+30i| = \sqrt{1600+900} = 50 \ , \ \ \mathrm{Arg}(40+30i) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36,87^{o}$$

Παρανομαστής στο 1^{o} τεταρτημόριο

$$|10+20i| = \sqrt{100+400} = 22,36 \ , \ \ \mathrm{Arg}(10+20i) = \tan^{-1}\left(2\right) = 63,43^{o}$$

$$\frac{40+30i}{20\angle 36,87^{o} - 10\angle 53,13^{o}} = \frac{50\angle 36,87^{o}}{22,36\angle 63,43^{o}} = 2,236\angle -26,56^{o}$$

Ελέγχουμε ότι

$$2,236\angle -26,56^{o} = 2,236\left(\cos(-26,56^{o}) + i\sin(-26,56^{o})\right) = 2,236(0,894 - i0,447) = 2-i$$

6. Υπολογίστε την παράσταση $\dfrac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}$ (συνδυασμός 2 σύνθετων αντιστάσεων παράλληλα) και δώστε το αποτέλεσμα σε πολική μορφή για τις επόμενες περιπτώσεις :

α) $z_1 = 10 + 5i, \ z_2 = 20\angle 30^{o}$ (Απ. $7,18\angle 27,81^{o}$)

β) $z_1 = 5\angle 45^{o}, \ z_2 = 10\angle -70^{o}$ (Απ. $5,5\angle 15,2^{o}$)

γ) $z_1 = 6 - 2i, \ z_2 = 1 + 8i$ (Απ. $5,52\angle 23,81^{o}$)

δ) $z_1 = 20, \ z_2 = 40i$ (Απ. $17,9\angle 26,6^{o}$)

Λύση

α) Μετατρέπουμε τον z_2 σε καρτεσιανή μορφή για να μπορέσουμε να τον προσθέσουμε στον z_1.

$$z_2 = 20\angle 30^{o} = 20\left(\cos(30^{o}) + i\sin(30^{o})\right) = 20\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 17,32 + 10i$$

$$z_1 + z_2 = 10 + 5i + 17,32 + 10i = 27,32 + 15i$$

$$\left(z_1 + z_2\right)^{-1} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{|z_1 + z_2|^2} = \frac{27,32 - 15i}{27,32^2 + 15^2} = \frac{27,32 - 15i}{971,3824} = 0,028125 - 0,015442i$$

Αφού έχουμε και τους δύο αριθμούς σε καρτεσιανή μορφή κάνουμε τον πολλαπλασιασμό αλγεβρικά

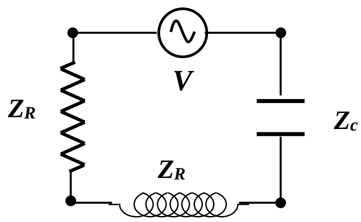
$$z_1 z_2 = \left(10 + 5i\right)\left(17,32 + 10i\right) = 173,2 + 100i + 86,6i - 50 = 123,2 + 186,6i$$

Και τη διαίρεση την κάνουμε αλγεβρικά

$$\left(z_1 + z_2\right)^{-1} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{|z_1 + z_2|^2} = \frac{27,32 - 15i}{27,32^2 + 15^2} = \frac{27,32 - 15i}{971,3824} = 0,028125 - 0,015442i$$

$$\frac{z_1 z_2}{z_1+z_2} = (123,2+186,6i)\cdot(0,028125-0,015442i)$$
$$= 3,465 + i5,248125 - 1,9024434i + 2,88146$$
$$= 6,35 + 3,35i$$
Μετατρέπουμε το αποτέλεσμα σε πολική μορφή.
$$|6,35+3,35i| = \sqrt{6,35^2+3,35^2} = 7,18$$
$$\mathrm{Arg}(6,35+3,35i) = \tan^{-1}\left(\frac{3,35}{6,35}\right) = 27,81^0$$
Κάντε τις β), γ) και δ) μόνοι σας και συγκρίνετε με τις απαντήσεις που δίνονται

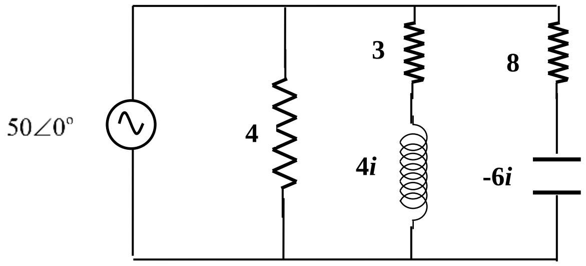
7. Στο παρακάτω κύκλωμα σειράς RLC υπολογίστε την ολική σύνθετη αντίσταση, το ρεύμα, τις επιμέρους τάσεις και ελέγξτε ότι ισχύει ο κανόνας τάσεων του Kirchhoff. Πως ταλαντώνεται το ρεύμα σε σχέση με την εφαρμοζόμενη τάση.
$V = 100\angle 0^o$ $\quad Z_R = 4\angle 0^o = 4$ $\quad Z_L = 3\angle 90^o = 3i$ $\quad Z_C = 6\angle -90^o = -6i$



Λύση
Ολική σύνθετη αντίσταση (τύπος συνδυασμού σε σειρά)
$Z_{ολ} = Z_R + Z_L + Z_C = 4+3i-6i = 4-3i$ στο 4^o τεταρτημόριο
$$|Z_{ολ}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5 \quad \mathrm{Arg}(Z_{ολ}) = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right) = -36,87^o$$
$$Z_{ολ} = 5\angle -36,87^o$$
Ρεύμα
$I = \frac{V}{Z_{ολ}} = \frac{100\angle 0^o}{5\angle -36,87^o} = 20\angle 36,87^o$ το ρεύμα προπορεύεται της τάσης κατά φάση $36,87^o$
$$I = 20\cos(36,87^o) + i20\sin(36,87^o) = 20\cdot 0,8 + i20\cdot 0,6 = 16+12i$$
Επιμέρους τάσεις
$$V_R = IZ_R = (16+12i)4 = 64+48i$$
(Εναλλακτικά $V_R = IZ_R = 20\angle 36,87^o \cdot 4\angle 0^o = 80\angle 36,87^o$
$$\mathrm{Re}(V_R) = 80\cdot\cos(36,87^o) = 80\cdot 0,8 = 64$$
$\mathrm{Im}(V_R) = 80\cdot\sin(36,87^o) = 80\cdot 0,6 = 48$)
$$V_L = IZ_L = (16+12i)3i = -36+48i$$
$$V_C = IZ_C = (16+12i)(-6i) = 72-96i$$
Κανόνας τάσεων Kirchhoff
$V = V_R + V_L + V_C = 64+48i-36+48i+72-96i = 100+0i$ ισχύει

8. Στο παρακάτω κύκλωμα RLC παράλληλης σύνδεσης υπολογίστε την ολική σύνθετη αντίσταση, το ρεύμα, τα επιμέρους ρεύματα των κλάδων και ελέγξτε ότι ισχύει ο κανόνας ρευμάτων του Kirchhoff. Πως ταλαντώνεται το ρεύμα σε σχέση με την εφαρμοζόμενη τάση.

$V = 50\angle 0^{o} = 50 \qquad Z_R = 10\angle 0^{o} = 4 \qquad Z_L = 3 + 4i \qquad Z_C = 8 - 6i$



Λύση

$$|Z_L| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad \text{Arg}(Z_L) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 53{,}13^{o} \quad Z_L = 5\angle 53{,}13^{o}$$

$$Z_L^{-1} = 0{,}2\angle -53{,}13^{o} = 0{,}2\cos(-53{,}13^{o}) + i0{,}2\sin(-53{,}13^{o}) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 + i0{,}2 \cdot (-0{,}8) = 0{,}12 - 0{,}16i$$

$$|Z_C| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \quad \text{Arg}(Z_C) = \tan^{-1}\left(\frac{8}{-6}\right) = -36{,}87^{o} \quad Z_C = 10\angle -36{,}87^{o}$$

$$Z_C^{-1} = 0{,}1\angle 36{,}87^{o} = 0{,}1\cos(36{,}87^{o}) + i0{,}1\sin(36{,}87^{o}) = 0{,}1 \cdot 0{,}8 + i0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}08 + 0{,}06i$$

Ολική σύνθετη αντίσταση (τύπος συνδυασμού παράλληλα)

$$\frac{1}{Z_{o\lambda}} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = 0{,}1 + (0{,}12 - 0{,}16i) + (0{,}08 + 0{,}06i) = 0{,}3 - 0{,}1i$$

$$Z_{o\lambda} = \frac{1}{0{,}3 - 0{,}1i} = \frac{0{,}3 - 0{,}1i}{0{,}09 + 0{,}01} = \frac{0{,}3 - 0{,}1i}{0{,}1} = 3 - i$$

Ρεύμα κυκλώματος (νόμος Ohm)

$$I = \frac{V}{Z_{o\lambda}} = V \cdot \frac{1}{Z_{o\lambda}} = 50 \cdot (0{,}3 - 0{,}1i) = 15 - 5i \quad \text{στο } 4^{o} \text{ τεταρτημόριο}$$

Το ρεύμα σε πολική μορφή είναι

$$|I| = \sqrt{15^2 + 5^2} = 15{,}81 \quad \text{Arg}(I) = \tan^{-1}\left(\frac{-5}{15}\right) = -18{,}44^{o}$$

$I = 15{,}81\angle -18{,}44^{o}$ το ρεύμα έπεται της τάσης κατά φάση $18{,}44^{o}$

Επιμέρους ρεύματα κλάδων

$$I_R = \frac{V}{Z_R} = \frac{50\angle 0^{o}}{10\angle 0^{o}} = 5$$

$$I_L = \frac{V}{Z_L} = \frac{50\angle 0^{o}}{5\angle 53{,}13^{o}} = 10\angle -53{,}13^{o} = 10\cos(-53{,}13^{o}) + i10\sin(-53{,}13^{o}) = 10 \cdot 0{,}6 + i10 \cdot (-0{,}8) = 6 - 8i$$

$$I_C = \frac{V}{Z_C} = \frac{50\angle 0^{o}}{10\angle -36{,}87^{o}} = 5\angle 36{,}87^{o} = 5\cos(36{,}87^{o}) + i5\sin(36{,}87^{o}) = 5 \cdot 0{,}8 + i5 \cdot 0{,}6 = 4 + 3i$$

Κανόνας ρευμάτων Kirchhoff

$I = I_R + I_L + I_C = 5 + 6 - 8i + 4 + 3i = 15 - 5i$ Ισχύει

Απόδειξη της εξίσωσης Euler

Επειδή η παραγωγός της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = e^x$ είναι ίση με την ίδια τη συνάρτηση και όλες οι ανώτερες παράγωγοι θα είναι ίσες με την ίδια τη συνάρτηση :

$$f'(x) = (e^x)' = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = (e^x)^{(n)} = e^x$$

Επίσης, επειδή $e^0=1$ παίρνουμε για τη δυναμοσειρά Taylor στο x=0

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+...+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Σχετικά εύκολα βρίσκονται και οι δυναμοσειρές για το ημίτονο και συνημίτονο επειδή $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$ και $\sin 0=0$, $\cos 0=1$. Π.χ. στη δυναμοσειρά για το ημίτονο θα επιβιώσουν στο x=0 μόνο οι περιττές παράγωγοι που είναι ίσες με το συνημίτονο

$(\sin x)^{(0)}=\sin x\Rightarrow(\sin 0)^{(0)}=0$, ως μηδενική παράγωγο παίρνουμε την ίδια τη συνάρτηση

$(\sin x)'=\cos x\Rightarrow(\sin 0)'=\cos 0=1$

$(\sin x)''=-\sin x\Rightarrow(\sin 0)''=\sin 0=0$

$(\sin x)'''=-\cos x\Rightarrow(\sin 0)'''=-\cos 0=-1$

$(\sin x)^{(4)}=\sin x\Rightarrow(\sin 0)^{(4)}=\sin 0=0$

$(\sin x)^{(5)}=\cos x\Rightarrow(\sin 0)^{(5)}=\cos 0=1$ και από δω και πέρα επαναλαμβάνονται .

Βλέπουμε ότι το μοτίβο είναι : για ζυγές δυνάμεις $n=2k,\ k=0,1,2,3,...$ $(\sin x)^{(2k)}=0$

για μονές δυνάμεις $n=2k+1,\ k=0,1,2,3,...$ $(\sin x)^{(2k+1)}=(-1)^k$

Οπότε $\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}...+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

Παρόμοια βρίσκουμε για το συνημίτονο

$(\cos x)^{(0)}=\cos x\Rightarrow(\cos 0)^{(0)}=1$, ως μηδενική παράγωγο παίρνουμε την ίδια τη συνάρτηση

$(\cos x)'=-\sin x\Rightarrow(\cos 0)'=-\sin 0=0$

$(\cos x)''=-\cos x\Rightarrow(\sin 0)''=-\cos 0=-1$

$(\cos x)'''=\sin x\Rightarrow(\cos 0)'''=\sin 0=0$

$(\cos x)^{(4)}=\cos x\Rightarrow(\cos 0)^{(4)}=\cos 0=1$

$(\cos x)^{(5)}=-\sin x\Rightarrow(\cos 0)^{(5)}=-\sin 0=0$ και από δω και πέρα επαναλαμβάνονται .

Βλέπουμε ότι το μοτίβο είναι : για ζυγές δυνάμεις $n=2k,\ k=0,1,2,3,...$ $(\sin x)^{(2k)}=(-1)^k$

για μονές δυνάμεις $n=2k+1,\ k=0,1,2,3,...$ $(\sin x)^{(2k+1)}=0$

Οπότε: $\cos x=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$

Αναπτύσσουμε το $e^{i\theta}$ σε δυναμοσειρά

$$e^{i\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!}=1+\frac{i\theta}{1!}+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\frac{(i\theta)^4}{4!}+\frac{(i\theta)^5}{5!}+\frac{(i\theta)^6}{6!}+\frac{(i\theta)^7}{7!}...=$$

$$=1+i\theta-\frac{\theta^2}{2!}-i\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^4}{4!}+i\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^6}{6!}-i\frac{\theta^7}{7!}...$$

$$=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+...\right)+i\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}...\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}\Rightarrow$$

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$