

Να μεταφέρετε όλα τα σχήματα στο γραπτό σας και να δίνετε τα αποτελέσματα με το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων για να πάρετε όλες τις μονάδες.

ΘΕΜΑ 1 [2,5]

Βαλλιστικός πύραυλος εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης, με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 3,43 \text{ km/s}$, σε γωνία $\theta = 53,13^\circ$ από την κατακόρυφο, όπως στο Σχήμα 1. Δίνονται η ακτίνα της Γης $R = 6.371 \text{ km}$ και η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g = 9,80 \text{ N/kg}$

1.1 [0,1] Δείξτε ότι $GM = gR^2$, όπου M η μάζα της Γης και G η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας

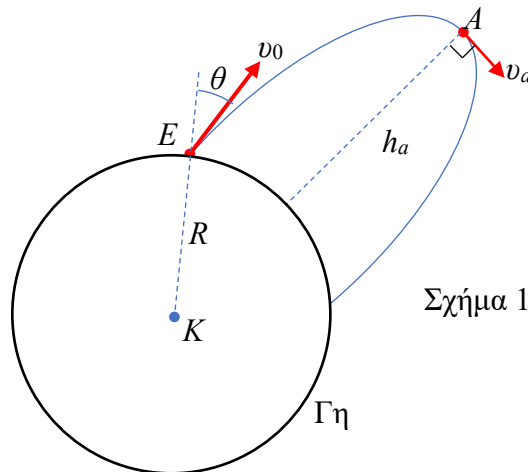
Να υπολογίσετε:

1.2 [0,6] Το μέγιστο ύψος από την επιφάνεια της Γης στο οποίο θα φτάσει ο πύραυλος

1.3 [0,6] Την ταχύτητα του στο απόγειο

1.4 [0,6] Την ταχύτητα διαφυγής στο απόγειο

1.5 [0,6] Το κλάσμα της μάζας του πυραύλου που θα του απομείνει αν πυροδοτήσει στο απόγειο για να αυξήσει το μέτρο της ταχύτητάς του σε αυτό της ταχύτητας διαφυγής ώστε να ξεφύγει από τη βαρύτητα της Γης. Ο πύραυλος χρησιμοποιεί καύσιμα που έχουν ταχύτητα καυσαερίων $u = 4,00 \text{ km/s}$.



ΛΥΣΗ

1.1 [0,1] Στην επιφάνεια της Γης: $W = F_G \Rightarrow \cancel{m}g = G\cancel{m}\frac{M}{R^2} \Rightarrow gR^2 = GM \Rightarrow$

$$GM = gR^2$$

$$GM = gR^2 = (9,80)(6.371 \times 10^3)^2 = 397.778.481,8 \times 10^6 = 3,978 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

1.2 [0,6] και **1.3 [0,6]** μαζί από σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους.

Ο πύραυλος εκτελεί ελλειπτική τροχιά με το κέντρο της Γης να είναι μια από τις εστίες της έλλειψης.

Το μέγιστο ύψος h_a επιτυγχάνεται όταν ο πύραυλος είναι στη μέγιστη απόσταση από το κέντρο της Γης, στο σημείο A που ονομάζεται απόγειο $r_a = R + h_a$

Στο απόγειο (όπως και στο περίγειο) η ταχύτητα είναι κάθετη στην ακτίνα οπότε το μέτρο της στροφορμής γράφεται: $L = |\vec{r}_a \times \vec{p}_a| = |m\vec{r}_a \times \vec{v}_a| = mr_a v_a \sin 90^\circ = mv_a r_a$

Η στροφορμή και η μηχανική ενέργεια διατηρούνται. **Εξισώνω τις τιμές τους, στο απόγειο A και στο σημείο εκτόξευσης E και παίρνω δύο εξισώσεις από όπου βρίσκω την v_a και r_a .**

Επειδή η εξίσωση της ενέργειας είναι δευτεροβάθμια θα βρω δύο λύσεις. Η δεύτερη λύση μου δίνει τις τιμές των v και r στο περίγειο (v_p και r_p) που είναι μέσα στη Γη και δεν με ενδιαφέρουν.

Διατήρηση στροφορμής :

$$L = L_E \Rightarrow \cancel{m}vr = \cancel{m}v_0 R \sin \theta \Rightarrow r = \frac{v_0 R \sin \theta}{v} \quad (1) \quad [0,2]$$

Διατήρηση μηχανικής ενέργειας: $E = E_E \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R}$ (2) [0,2]

Αντικαθιστώντας την (1) στη (2) παίρνω μια δευτεροβάθμια εξίσωση για την ταχύτητα:

$$v^2 - \frac{2GM}{v_0 R \sin \theta} v + \frac{2GM}{R} - v_0^2 = 0 \Rightarrow v^2 - \frac{2gR^2}{v_0 R \sin \theta} v + \frac{2gR^2}{R} - v_0^2 = 0 \Rightarrow$$

$$v^2 - \frac{2gR}{v_0 \sin \theta} v + (2gR - v_0^2) = 0$$

με :

$$a = 1,$$

$$b = -\frac{2gR}{v_0 \sin \theta} = -\frac{2(9,80)(6.371 \times 10^3)}{(3,43 \times 10^3) \sin(53,13^\circ)} = -45.507,2038 \text{ m/s}, \quad [0,1]$$

$$c = 2gR - v_0^2 = 2(9,80)(6.371 \times 10^3) - (3,43 \times 10^3)^2 = 113.106.700 \text{ m}^2/\text{s}^2 \quad [0,1]$$

και διακρίνουσα :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-45.507,2038)^2 - 4(113.106.700) = 1,618,478,797.694734 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 40.230,3219 \text{ m/s} \quad [0,1]$$

Οι λύσεις της είναι :

$$v_p = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{45.507,2038 + 40.230,3219}{2} = \frac{85.737,5257}{2} = 42.868,76285 = 42,9 \text{ km/s},$$

$$v_a = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{45.507,2038 - 40.230,3219}{2} = \frac{5.276,8819}{2} = 2.638,44095 = 2,64 \text{ km/s} \quad [0,1]$$

Η μεγαλύτερη λύση (+), αντιστοιχεί στην ταχύτητα στο περίγειο v_p (που στην περίπτωση μας είναι μέσα στη Γη και δεν μας ενδιαφέρει), ενώ η μικρότερη (-), αντιστοιχεί στην ταχύτητα στο απόγειο v_a .

Αυτά είναι τα μόνα δύο σημεία της τροχιάς που η ταχύτητα είναι κάθετη στην ακτίνα και ισχύει $r_a v_a = r_p v_p = L / m$ ώστε να έχουμε την παραπάνω δευτεροβάθμια εξίσωση.

$$\text{Από την (1)} \quad r_a = \frac{v_0 R \sin \theta}{v_a} = \frac{3,43 \text{ km/s} \cdot 6371 \text{ km} \cdot 0,8000}{2.638,441 \text{ km/s}} = 6.625,9 \text{ km} \Rightarrow$$

$$r_a = 6626 \text{ km} \quad [0,1]$$

$$h_a = r_a - R = 6.626 - 6.371 \Rightarrow$$

$$h_a = 255 \text{ km} \quad [0,1]$$

Πέρα από τα 100 km (όριο Κάρμαν) θεωρείται διάστημα.

1.4 [0,6] Η ταχύτητα διαφυγής στο άπειρο από συγκεκριμένη απόσταση βρίσκεται από διατήρηση της ενέργειας :

$$E_r = E_\infty \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - \frac{GmM}{\infty} \quad [0,2]$$

Αν φτάσω στο άπειρο με μηδέν ταχύτητα, η ταχύτητα στο r ήταν η ταχύτητα διαφυγής $v = v_{esc}$. Οπότε:

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 - \frac{GmM}{r} = 0 \Rightarrow v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{r}} = \sqrt{\frac{2g}{r}}R \quad [0,2]$$

Η ταχύτητα διαφυγής στο απόγειο είναι :

$$v_{esc(a)} = \sqrt{\frac{2g}{r_a}}R = \sqrt{\frac{2(9,80)}{6.622 \times 10^3}} \cdot 6.371 \times 10^3 = 0,001720416 \cdot 6.371 \times 10^3 = 10,96 \times 10^3 \Rightarrow \quad [0,2]$$

$$v_{esc(a)} = 10,96 \text{ km/s}$$

1.5 [0,6] Για να ξεφύγει ο πύραυλος στο απόγειο πρέπει να πυροδοτήσει ώστε να επιταχύνει και να πετύχει διαφορά ταχύτητας :

$$\Delta v = v_{esc(a)} - v_a = 10,96 - 2,64 = 8,32 \text{ km/s} \quad [0,3]$$

Από την εξίσωση του πυραύλου παίρνω :

$$\frac{m}{m_0} = e^{-\frac{\Delta v}{u}} = e^{-\frac{8,32}{4,00}} = 0,12493 = 12,5\% \quad [0,3]$$

Ο πύραυλος θα απομείνει με το 12,5% της μάζας του. Το 87,5% της μάζας του πήκε ως καύσιμο.

ΘΕΜΑ 2 [2,5]

Το σύστημα του σχήματος 2 αφήνεται από την ηρεμία όταν το βαρίδιο βρίσκεται σε ύψος $h = 14,0 \text{ m}$ πάνω από το έδαφος. Το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό και ξετυλίγεται χωρίς να γλιστράει, ενώ η τροχαλία περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον σταθερό άξονα που περνάει από το κέντρο της O .

2.1 [0,5] Τι ταχύτητα έχει το βαρίδιο όταν έχει κατέβει $3,50 \text{ m}$ και τι κινητική ενέργεια έχει η τροχαλία την ίδια στιγμή ;

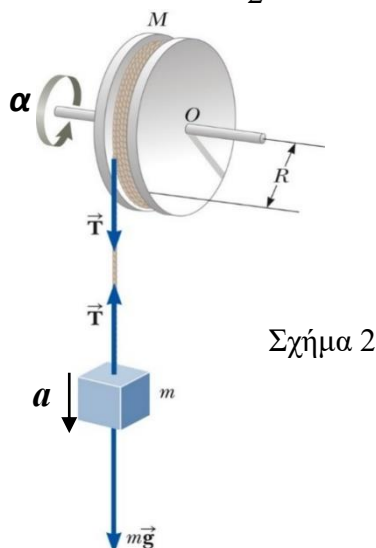
2.2 [0,5] Πόση είναι η επιτάχυνση του βαριδίου;

2.3 [0,5] Πόση είναι η τάση του νήματος;

2.4 [0,5] Πότε το βαρίδιο φτάνει στο έδαφος;

2.5 [0,5] Πόσες περιστροφές έχει κάνει η τροχαλία όταν το βαρίδιο φτάνει στο έδαφος;

Δίνονται $m = 10,0 \text{ kg}$, $M = 8,00 \text{ kg}$, $R = 0,250 \text{ m}$, $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$, $g = 9,80 \text{ N/kg}$



Σχήμα 2

ΛΥΣΗ

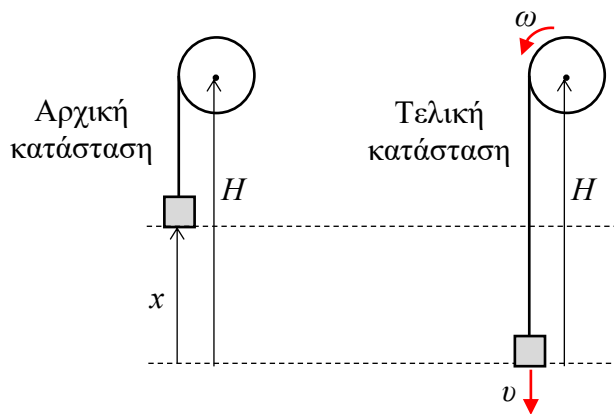
Αφού το νήμα ξετυλίγεται χωρίς να ολισθαίνει, το μήκος που έχει ξετυλιχτεί (μήκος τόξου) είναι ίσο με την κατακόρυφη μετατόπιση του βαριδίου

$$y = s \Rightarrow y = \theta R \Rightarrow \theta = \frac{y}{R}$$

Για να ισχύει διαρκώς το παραπάνω, θα πρέπει να συνδέονται με την ίδια σχέση και η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας με την ταχύτητα του βαριδίου καθώς και η γραμμική επιτάχυνση των σημείων της περιμέτρου της τροχαλίας με την επιτάχυνση του βαριδίου.

$$v = v_{\text{γραμ}} \Rightarrow v = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}, \quad a = a_{\text{γραμ}} \Rightarrow a = \alpha R \Rightarrow \alpha = \frac{a}{R}$$

2.1 [0,5] Την ταχύτητα του βαριδίου μπορούμε να την βρούμε από τη διατήρηση της ενέργειας χωρίς να ξέρουμε την επιτάχυνση. Θέτουμε το μηδέν της δυναμικής ενέργειας στα $3,5 \text{ m}$ κάτω από την αρχική θέση του βαριδίου. Έστω ότι το κέντρο της τροχαλίας απέχει από αυτό το σημείο κατακόρυφη απόσταση H .



$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow K_{\beta\alpha\rho,\alpha\rho\chi} + U_{\beta\alpha\rho,\alpha\rho\chi} + K_{\tau\rho\chi,\alpha\rho\chi} + U_{\tau\rho\chi,\alpha\rho\chi} = K_{\beta\alpha\rho,\tau\epsilon\lambda} + U_{\beta\alpha\rho,\tau\epsilon\lambda} + K_{\tau\rho\chi,\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\rho\chi,\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$0 + mgx + 0 + \cancel{MgH} = \frac{1}{2}mv^2 + 0 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \cancel{MgH} \Rightarrow$$

$$mgx = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} MR^2 \left(\frac{v}{R} \right)^2 \Rightarrow$$

$$mgx = \frac{1}{2}v^2 \left(m + \frac{M}{2} \right) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2mgx}{m + \frac{M}{2}}} = \sqrt{\frac{2(10)(9,8)(3,5)}{10 + 4}} = \sqrt{\frac{(98)(7)}{14}} = \sqrt{49} = 7,00 \text{ m/s}$$

$$\text{Ή } (10)(9,8)(3,5) = (0,5)(10)v^2 + (0,5)^2(8)(0,25)^2 \frac{v^2}{(0,25)^2} \Rightarrow 343 = 5v^2 + 2v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{343}{7} = 49 \Rightarrow v = 7$$

Άρα μετά από κάθοδο 3,50 m $v=7,00 \text{ m/s}$

$$K_{\tau\rho\chi} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} MR^2 \left(\frac{v}{R} \right)^2 = \frac{1}{4}Mv^2 = \frac{1}{4}(8)(49) = (2)(49) \Rightarrow$$

$$K_{\tau\rho\chi} = 98,0 \text{ J}$$

2.2 [0,5] και **2.3** [0,5] Από την αρχή της ορμής για το βαρίδιο και από την αρχή της στροφορμής για την τροχαλία βρίσκουμε και την επιτάχυνση και την τάση του νήματος μαζί.

Μεταφορική κίνηση βαριδίου: $\sum F = ma \Rightarrow B - T = ma$ (1) [0,3]

Στροφική κίνηση τροχαλίας: $\sum \tau = I\alpha \Rightarrow TR = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a}{R} \Rightarrow T = \frac{1}{2}Ma$ (2) [0.3]

Προσθέτοντας τις (1) και (2) βρίσκουμε την a :

$$(1)+(2): B - T + T = ma + \frac{1}{2}Ma \Rightarrow mg = a \cdot \left(m + \frac{M}{2} \right) \Rightarrow a = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}} \Rightarrow a = \frac{(10)(9,8)}{10 + \frac{8}{2}} = \frac{98}{14} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 7}{2 \cdot 7} \quad [0.2]$$

$$a = 7,00 \text{ m/s}^2$$

Αντικαθιστώντας στην (2) βρίσκουμε την τάση του νήματος T :

$$T = \frac{1}{2}Ma = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28,0 \text{ N} \quad [0.2]$$

Η επιτάχυνση του βαριδίου είναι σταθερή a και άρα και η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας $\alpha = a/R$ θα είναι σταθερή.

Έτσι, η κατακόρυφη κίνηση του βαριδίου είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη και περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$y = \frac{1}{2}at^2, \quad v = at, \quad v^2 = 2ay$$

Ενώ η περιστροφή της τροχαλίας είναι ομαλά επιταχυνόμενη και περιγράφεται από τις εξισώσεις :

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2, \quad \omega = \alpha t, \quad \omega^2 = 2\alpha\theta$$

2.4 [0,5] Το βαρίδιο φτάνει στο έδαφος όταν $y=h=14$ m :

$$h = \frac{1}{2} \alpha t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2(14)}{7}} \Rightarrow [0,4]$$

$$t = 2,00 \text{ s } [0,1]$$

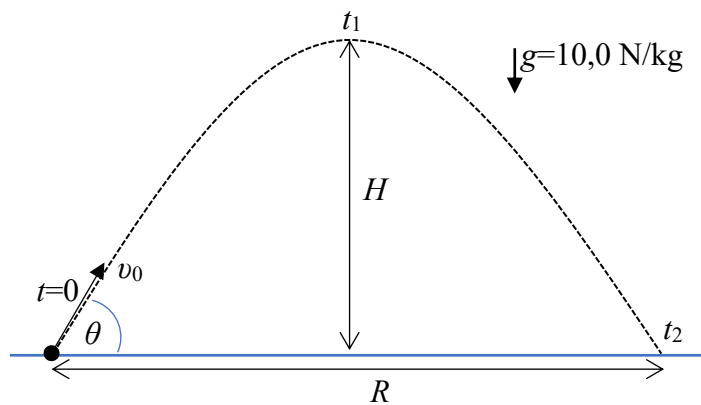
2.5 [0,5] Όταν έχει ξετυλιχτεί νήμα μήκους $s=y=h=14$ m από την τροχαλία, αυτή έχει περιστραφεί κατά γωνία

$\theta = \frac{s}{R}$ και άρα έχει κάνει N περιστροφές ίσες με :

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{s}{2\pi R} = \frac{h}{2\pi R} = \frac{14}{2\pi(0,25)} = \frac{28}{\pi} = 8,91$$

ΘΕΜΑ 3 [2,5]

Τη χρονική στιγμή $t=0$, βλήμα μάζας $m=0,100$ kg, εκτοξεύεται από μηδενικό ύψος ($y_0=0$), με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_0=100$ m/s, υπό γωνία $\theta=65^\circ$, πάνω από οριζόντιο έδαφος. Αγνοώντας την αντίσταση του αέρα να βρείτε:



3.1 [0,3] Την ενέργεια του βλήματος

3.2 [0,3] Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία θα φτάσει στο μέγιστο ύψος

3.3 [0,3] Το μέγιστο ύψος H

3.4 [0,3] Τη δυναμική και την κινητική ενέργεια που έχει στο μέγιστο ύψος

3.5 [0,3] Τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία θα χτυπήσει στο έδαφος

3.6 [0,3] Το βεληνεκές R .

3.7 [0,3] Το ύψος στο οποίο η δυναμική ενέργεια είναι ίση με την κινητική.

3.8 [0,4] Την κεντρομόλο επιτάχυνση όταν $t=2$ s.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \theta = \sigma \tau \alpha \theta \quad (1) & v_y &= v_0 \sin \theta - gt \quad (2) \\ \text{Εξισώσεις πλάγιας βολής:} & & & \\ x &= v_0 \cos \theta t \quad (3) & y &= v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} gt^2 \quad (4) \end{aligned}$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta = 100 \cos(65^\circ) = 100 \cdot 0,42262 = 42,3 \text{ m/s}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta = 100 \sin(65^\circ) = 100 \cdot 0,90631 = 90,6 \text{ m/s}$$

3.1 [0,3]

$$E = K_0 + U_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g y_0 = \frac{1}{2} (0,1)(100)^2 + (0,1)(10)(0) = 500 \text{ J}$$

3.2 [0,3] Όταν φτάσει στο μέγιστο ύψος η κατακόρυφη ταχύτητα γίνεται μηδέν. Από την (2) :

$$v_y = 0 \Rightarrow 0 = v_0 \sin \theta - g t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0 \sin \theta}{g} = \frac{100 \sin(65^\circ)}{10,0} = 9,06307787 = 9,06 \text{ s}$$

Το 9,06 δεν στρογγυλοποιείται σε 9 !! ΕΛΕΟΣ !! Χρειάζεστε 3 ψηφία !! Όσα και των δεδομένων.

Τι τις έγραψα την $g=10,0$ N/kg και την $m=0,100$ kg ? Για πλάκα?

Από αυτό το λάθος χάσατε μονάδες επειδή βγάλατε λάθος αριθμητικά αποτελέσματα στα επόμενα.

3.3 [0,3] Από την (4) βρίσκουμε το y εκείνη τη στιγμή, το οποίο είναι το μέγιστο ύψος

$$H = y(t_1) \Rightarrow H = v_0 \sin \theta t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = v_0 \sin \theta \frac{v_0 \sin \theta}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \theta}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} = \frac{100^2 \sin^2(65^\circ)}{2(10)} = 410,7 = 411 \text{ m}$$

3.4 [0,3] Η δυναμική ενέργεια είναι :

$$U = mgy \Rightarrow U_{top} = mgH = (0,1)(10)(410,7) = 410,7 = 411 \text{ J}$$

Η ενέργεια διατηρείται. Άρα η κινητική ενέργεια είναι

$$E = K_{top} + U_{top} \Rightarrow K_{top} = E - U_{top} = 500 - 411 = 89 \text{ J}$$

Το ισοδύναμα, επειδή στο μέγιστο ύψος η ταχύτητα έχει μόνο οριζόντια (x) συνιστώσα.

$$K_{top} = \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2 \theta = \frac{1}{2} (0,1)(100)^2 \cos^2(65^\circ) = 89,3 \text{ J}$$

3.5 [0,3] Όταν το βλήμα χτυπήσει στο έδαφος, το y θα είναι μηδέν

$$y(t_2) = 0 \Rightarrow v_0 \sin \theta t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = 0 \Rightarrow \left(v_0 \sin \theta - \frac{1}{2} g t_2 \right) t_2 = 0 \Rightarrow v_0 \sin \theta - \frac{1}{2} g t_2 = 0 \Rightarrow$$

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} = 2t_1 = 2(9,06) = 18,1 \text{ s}$$

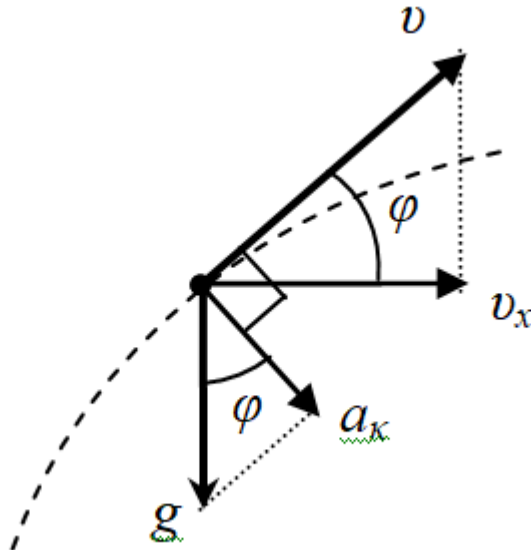
3.6 [0,3] Από την (3) βρίσκουμε το x εκείνη τη στιγμή, που είναι το βεληνεκές

$$R = x(t_2) \Rightarrow R = v_0 \cos \theta t_2 = (100) \cos(65^\circ)(18,1) = 765 \text{ m}$$

3.7 [0,3] $E = K_h + U_h = 2U_h \Rightarrow 2mgh = E \Rightarrow h = \frac{E}{2mg} \Rightarrow$

$$h = \frac{500}{2(0,1)(10)} = 250 \text{ m}$$

3.8 [0,4] Κεντρομόλος είναι η συνιστώσα της επιτάχυνσης $\vec{g}$ που είναι κάθετη στην ταχύτητα $\vec{v}$



Από το σχήμα φαίνεται ότι η γωνία της κεντρομόλου a_k με την g είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα v με τον οριζόντιο άξονα.

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{100 \sin 65^\circ - (10)(2)}{100 \cos 65^\circ} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{70,6307787}{42,2618262} \right) = 59,1058672^\circ = 59,1^\circ$$

Άρα για $t=2 \text{ s}$:

$$a_k = g \cos \varphi = 10 \cos(59,1058672^\circ) = 5,1345338 = 5,13 \text{ m/s}^2$$

ΘΕΜΑ 4 [2,5]

Να γράψετε στο SI, εξισώσεις που να περιγράφουν τη χρονική και τη χωρική εξάρτηση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου ενός ημιτονοειδούς ηλεκτρομαγνητικού κύματος συχνότητας $96,0 \times 10^{14}$ Hz που διαδίδεται προς τον θετικό ημιάξονα z και του οποίου το ηλεκτρικό πεδίο έχει πλάτος $5,40 \times 10^3$ V/m.

Θεωρήστε $c = 3,00 \times 10^8$ m/s.

ΛΥΣΗ

Πρέπει από τη θεωρία, να γνωρίζεται ότι, για τα πεδία του Η/Μ κύματος :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} \mp \omega t) \hat{e}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = B \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} \mp \omega t) \hat{b}$$

ισχύουν:

1) Το κύμα διαδίδεται στην κατεύθυνση $\pm \hat{k}$, αντίθετα με το σχετικό πρόσημο των όρων $\vec{k} \cdot \vec{r}$, ωt στη φάση.

2) Τα πεδία είναι κάθετα μεταξύ τους : $\hat{e} \perp \hat{b} \Rightarrow \hat{e} \cdot \hat{b} = 0$

3) και κάθετα στην κατεύθυνση διάδοσης (εγκάρσια κύματα) δεξιόστροφα : $\hat{e} \times \hat{b} = \hat{k}$
όπως τα $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$

4) Το κύμα διαδίδεται με ταχύτητα $\frac{\omega}{k} = c = 3 \times 10^8$ m/s

5) Τα πλάτη των δύο πεδίων συνδέονται με τη σχέση $B = \frac{E}{c}$

6) Όπως για κάθε περιοδικό κύμα : $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

Κατεύθυνση διάδοσης : $\hat{k} = +\hat{z}$ [0,3]

Κατευθύνσεις πεδίων : Κάθετα μεταξύ τους διανύσματα στο επίπεδο x - y με $\hat{e} \times \hat{b} = \hat{z}$

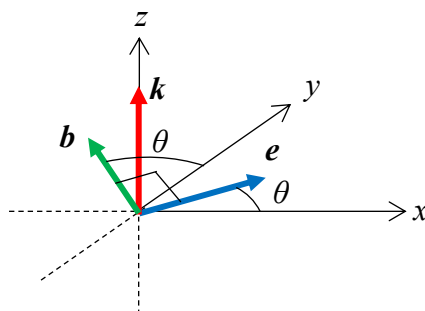
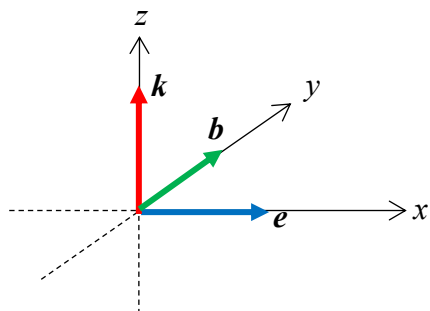
Πιο απλή μορφή : $\hat{e} = \hat{x}$, $\hat{b} = \hat{y}$ αφού $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ και $\hat{x} \cdot \hat{y} = 0$ [0,6]

Γενικότερα, τα παραπάνω διανύσματα περιστραμμένα γύρω από τον άξονα z κατά τυχαία γωνία θ

$\hat{e} = \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta$, $\hat{b} = -\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta$ αφού πάλι :

$$\hat{e} \times \hat{b} = (\hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta) \times (-\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta) = \hat{x} \times \hat{y} \cos^2 \theta - \hat{y} \times \hat{x} \sin^2 \theta = \hat{x} \times \hat{y} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \hat{z}$$

$$\hat{e} \cdot \hat{b} = (\hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta) \cdot (-\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta) = -\cos \theta \sin \theta + \cos \theta \sin \theta = 0$$



[0,3]

Κυκλική συχνότητα : $\omega = 2\pi f = 2\pi(96 \times 10^{14}) = 192\pi \times 10^{14}$ rad/s = $6,03 \times 10^{16}$ rad/s [0,4]

Κυματαριθμός : $k = \frac{\omega}{c} = \frac{192\pi \times 10^{14}}{3 \times 10^8} = 64\pi \times 10^6$ rad/m = $2,01 \times 10^8$ rad/m [0,4]

Φάση : $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = kz - \omega t = 64\pi z \times 10^6 - 192\pi t \times 10^{14} = 64\pi \times 10^6 (z - 3 \times 10^8 t)$

παραγοντοποιούμε για να φανεί ότι ο συντελεστής του χρόνου (t) είναι η ταχύτητα του φωτός (c) [0,3]

Μέτρο μαγνητικού πεδίου : $B = \frac{E}{c} = \frac{5,4 \times 10^3}{3 \times 10^8} = 1,8 \times 10^{-5} \text{ T}$ [0,3]

Άρα :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = 5,4 \times 10^3 \sin(64\pi \times 10^6 (z - 3 \times 10^8 t)) (\hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta) \quad (\text{SI}) \quad [0,1]$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = 1,8 \times 10^{-5} \sin(64\pi \times 10^6 (z - 3 \times 10^8 t)) (-\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta) \quad (\text{SI}) \quad [0,1]$$

Πρέπει να γράφεται η παρένθεση (SI) μετά από κάθε εξίσωση για να δηλώνονται οι μονάδες των αριθμητικών σταθερών που εμφανίζονται στις εκφράσεις.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ