ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2022-23

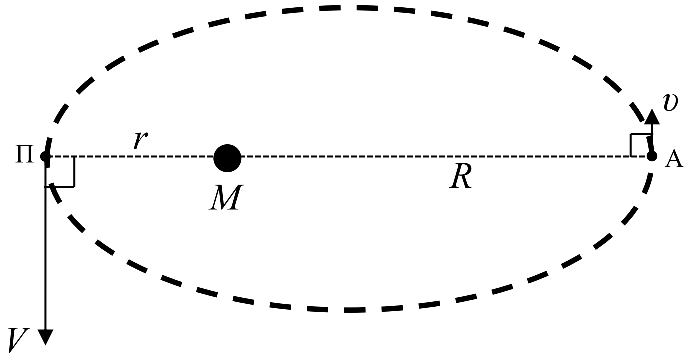
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Πέμπτη, 21 Σεπτεμβρίου 2023 18:00-21:00
Αίθουσα: Αμφιθέατρο Ηλ/γων ΑΠ1_8
Εισηγητής: Κώστας Φιλιππίδης - kphilippides@uowm.gr

ΘΕΜΑ 1. [2]

Εξωπλανήτης βρίσκεται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από άστρο με $GM = 4{,}00\times10^{14}\ \mathrm{m^3s^{-2}}$, όπως στο σχήμα. Το περίαστρο Π βρίσκεται σε απόσταση $r = 1{,}60\times10^{6}$ m και ο εξωπλανήτης εκεί έχει ταχύτητα μέτρου $V = 2{,}00\times10^{4}$ m/s.

Να βρείτε την απόσταση R στην οποία βρίσκεται το απόαστρο Α και το μέτρο υ της ταχύτητας του εξωπλανήτη στο απόαστρο.



Λύση

Κατά την κίνηση σε πεδίο κεντρικής δύναμης, όπως είναι η βαρύτητα, η μηχανική ενέργεια και η στροφορμή διατηρούνται, ενώ στο περίγειο και στο απόγειο η ταχύτητα είναι κάθετη στην επιβατική ακτίνα.

$$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{GmM}{r} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{GmM}{R} = E = \sigma\tau\alpha\theta \quad \textbf{[0,3]} \qquad mVr = m\upsilon R = L = \sigma\tau\alpha\theta \quad \textbf{[0,2]}$$

Έχουμε δύο εξισώσεις για δύο αγνώστους. Επειδή η μια είναι δευτεροβάθμια θα βρούμε δύο λύσεις να την ικανοποιούν. Την (V, r) για το περίαστρο, που ήδη γνωρίζουμε (τετριμμένη) και την (υ, R) την ταχύτητα και απόσταση στο απόαστρο.

$$mVr = m\upsilon R \Rightarrow R = r\frac{V}{\upsilon} \qquad (1) \quad \textbf{[0,1]}$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{GmM}{R} = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GmM}{r} \Rightarrow \upsilon^2 - \frac{2GM}{R} = V^2 - \frac{2GM}{r} \qquad (2)$$

$$(1) \rightarrow (2):\ \upsilon^2 - \frac{2GM}{Vr}\upsilon + \frac{2GM}{r} - V^2 = 0 \Rightarrow a\upsilon^2 + b\upsilon + c = 0 \quad \textbf{[0,6]}$$

Δευτεροβάθμια με $a = 1,\quad b = -\frac{2GM}{Vr},\quad c = \frac{2GM}{r} - V^2$ και

$$\Delta = b^2 - 4ac = \frac{4G^2M^2}{V^2r^2} - \frac{8GM}{r} + 4V^2 = 4\left[\left(\frac{GM}{Vr}\right)^2 - 2\frac{GM}{Vr}V + V^2\right] = 4\left(\frac{GM}{Vr} - V\right)^2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\left(\frac{GM}{Vr} - V\right)$$

$$\upsilon = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{GM}{Vr} \pm \left(\frac{GM}{Vr} - V\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \upsilon = V \ \text{τετριμμένη} \\ \upsilon = \dfrac{2GM}{Vr} - V \end{array} \qquad \textbf{[0,4]}$$

$$\upsilon = \frac{2GM}{Vr} - V = \frac{2\cdot\ 4{,}00\times10^{14}}{2{,}00\times10^{4}\cdot\ 1{,}60\times10^{6}} - 2{,}00\times10^{4} = 2{,}50\times10^{4} - 2{,}00\times10^{4} = 0{,}50\times10^{4}\ \text{m/s} \quad \textbf{[0,2]}$$

$$R = r\frac{V}{\upsilon} = 1{,}60\times10^{6}\,\frac{2{,}00\times10^{4}}{0{,}50\times10^{4}} = 6{,}40\times10^{6}\ \text{m} \quad \textbf{[0,2]}$$

ΘΕΜΑ 2. [2]

Να γράψετε στο SI, εξισώσεις που να περιγράφουν τη χρονική και τη χωρική εξάρτηση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου ενός ημιτονοειδούς ηλεκτρομαγνητικού κύματος συχνότητας 21×10^{14} Hz που διαδίδεται προς τον θετικό ημιάξονα x και του οποίου το ηλεκτρικό πεδίο έχει πλάτος 45 V/m. Θεωρήστε $c = 3\times10^{8}$ m/s.

Λύση

Επειδή το κύμα διαδίδεται στη θετική x κατεύθυνση τα διανυσματικά πεδία θα είναι της μορφής:

$$\vec{E} = \sin(\omega t - kx)\vec{E}_0 \qquad \vec{B} = \sin(\omega t - kx)\vec{B}_0$$

(– επειδή διαδίδεται στην $+x$)

Τα μέτρα των πλατών των πεδίων συνδέονται με τη σχέση: $B_0 = \dfrac{E_0}{c}$, άρα $B_0 = \dfrac{45}{3\times10^8} = 15\times10^{-8}$ T **[0,3]**

Οι μονάδες προκύπτουν ως εξής :

$$\frac{[E_0]}{[c]} = \frac{\mathrm{V/m}}{\mathrm{m/s}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\frac{1}{\mathrm{m^2/s}} = \frac{1}{\mathrm{C/s}}\frac{\mathrm{N\cdot m}}{\mathrm{m^2}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A\cdot m}} = \mathrm{T}$$

αφού από τον τύπο της δύναμης Laplace $F = BI\ell$ το τέσλα είναι : $\mathrm{T} = \dfrac{[F]}{[I][\ell]} = \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{A\cdot m}}$ **[0,1]**

Η κυκλική συχνότητα είναι : $\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot 21\times10^{14} = 42\pi\times10^{14}$ rad/s **[0,3]**

Ο κυματαριθμός είναι : $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{42\pi\times10^{14}}{3\times10^8} = 14\pi\times10^6\ \mathrm{m^{-1}}$ **[0,4]**

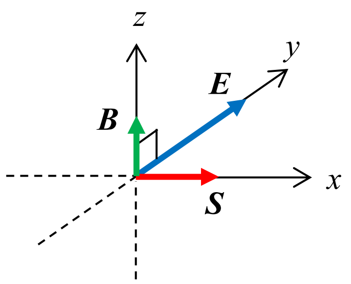
Οπότε η φάση είναι $\omega t - kx = 42\pi\times10^{14}t - 14\pi\times10^6 x = 14\pi\times10^6(3\times10^8 t - x)$. **[0,2]**

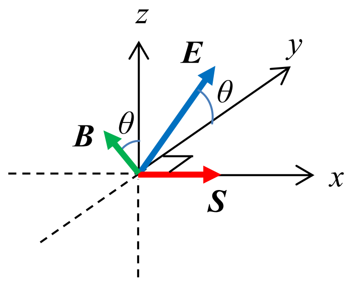
Η διάδοση του κύματος γίνεται στην κατεύθυνση $\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$ η οποία είναι η $+\hat{x}$. Άρα μια επιλογή είναι το $\vec{E}$ να είναι στην κατεύθυνση $+y$ και το $\vec{B}$ στην $+z$ αφού $\hat{y}\times\hat{z} = \hat{x}$ **[0,5]**

Οπότε μία λύση είναι :

$$\vec{E} = 45\sin\left[14\pi\times10^6(3\times10^8 t - x)\right]\hat{y} \quad \text{(SI)} \quad \textbf{[0,1]}$$

$$\vec{B} = 15\times10^{-8}\sin\left[14\pi\times10^6(3\times10^8 t - x)\right]\hat{z} \quad \text{(SI)} \quad \textbf{[0,1]}$$





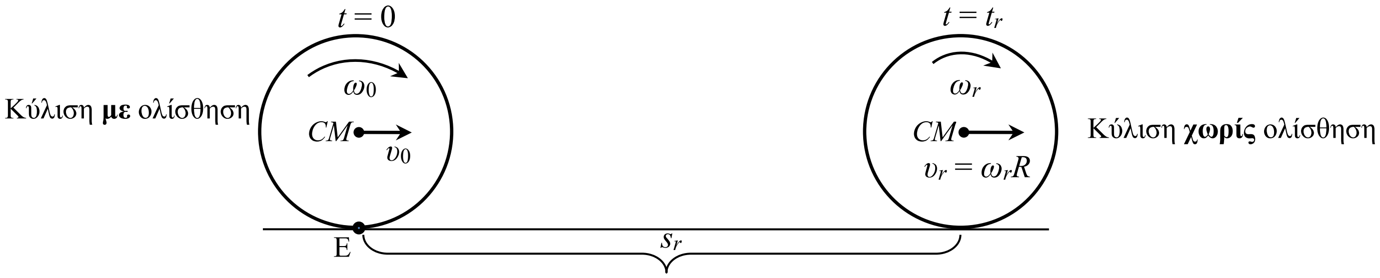
Γενικά τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ πρέπει να είναι σε κάθετες κατευθύνσεις μεταξύ τους και με το $\vec{S}$ φτιάχνοντας δεξιόστροφο σύστημα $E - B - S$. Άρα περιστρέφοντας γύρω από τον άξονα x κατά γωνία $0 \leq \theta < 2\pi$ παίρνουμε τη γενική λύση

$$\vec{E} = 45\sin\left[14\pi\times10^6(3\times10^8 t - x)\right](\hat{z}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta) \quad \text{(SI)}$$

$$\vec{B} = 15\times10^{-8}\sin\left[14\pi\times10^6(3\times10^8 t - x)\right](\hat{z}\cos\theta - \hat{y}\sin\theta) \quad \text{(SI)}$$

Θέμα 3. [3]

Σωλήνας μάζας m= 20,0 kg και ακτίνας R=0,400 m πέφτει από κινούμενο όχημα και ξεκινά να κινείται στο οδόστρωμα έχοντας αποκτήσει τόσο μεταφορική ταχύτητα υ_0=10,0 m/s όσο και γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω_0=50,0 rad/s όπως στο σχήμα. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης με το οδόστρωμα είναι μ_k =0,250. Θεωρήστε το σωλήνα ως κυλινδρική στεφάνη με ροπή αδράνειας $I_{CM} = \kappa m R^2$ όπου κ=1.



3.1 Να υπολογίσετε την αρχική στροφορμή του σωλήνα ως προς το κέντρο μάζας του CM και ως προς το σημείο Ε του δαπέδου που βρίσκεται σε επαφή με το σωλήνα. [0,4]
3.2 Να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε τις δυνάμεις που δρουν στο σωλήνα ενώ κυλίεται με ταυτόχρονη ολίσθηση και να δείξετε τη φορά της επιτάχυνσής του a και τη φορά της γωνιακής του επιτάχυνσης α. [0,6]
3.3 Να βρείτε την ταχύτητα υ_r του σωλήνα όταν επιτευχθεί κύλιση χωρίς ολίσθηση. [0,4]
3.4 Να υπολογίσετε τη γραμμική a και τη γωνιακή α επιτάχυνση του σωλήνα πριν επιτευχθεί κύλιση χωρίς ολίσθηση. [0,2]
3.5 Τι χρονικό διάστημα t_r θα χρειαστεί για να επέλθει κύλιση χωρίς ολίσθηση. [0,4]
3.6 Πόσο διάστημα s_r θα έχει διανύσει μέχρι τότε ο σωλήνας και πόσες περιστροφές θα έχει κάνει [0,4]
3.7 Να υπολογίσετε το έργο της τριβής ολίσθησης έως να επιτευχθεί κύλιση χωρίς ολίσθηση. [0,4]
3.8 Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις στο σωλήνα αφού επιτευχθεί κύλιση χωρίς ολίσθηση. [0,2]

Δίνεται g=10,0 N/kg

Λύση

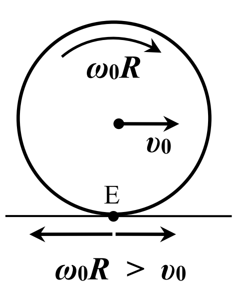
3.1 Η στροφορμή για ένα σύστημα σωματιδίων είναι ίση με τη στροφορμή του κέντρου μάζας του συν τη στροφορμή γύρω από το κέντρο μάζας. Έτσι έχουμε :

$I_{CM} = \kappa m R^2 = 1\cdot\ 20\cdot\ 0,4^2 = 3,2\ \text{kg}\cdot\ \text{m}^2$

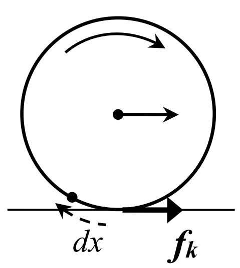
$L_{(\text{CM})} = I_{CM}\omega_0 = 3,2\cdot\ 50 \Rightarrow L_{(\text{CM})} = 160\ \text{kg}\cdot\ \text{m}^2/\text{s}$ **[0,2]**

$L_{(\text{E})} = m\upsilon_0 R + I_{CM}\omega_0 = 20\cdot\ 10\cdot\ 0,4 + 160 \Rightarrow L_{(\text{E})} = 240\ \text{kg}\cdot\ \text{m}^2/\text{s}$ **[0,2]**

3.2 Επειδή η συνθήκη κύλισης δεν ικανοποιείται $\upsilon_0 = 10 < 50\cdot 0,4 = 20 = \omega_0 R$, το σώμα θα ολισθαίνει πάνω στο δάπεδο. Δηλαδή το σημείο επαφής του σωλήνα θα σύρεται πάνω στο δάπεδο, δεν θα είναι στιγμιαία ακίνητο. Λόγω της μεταφορικής κίνησης θα μετατοπίζεται προς τα μπροστά κατά $dx_{\mu\varepsilon\tau} = \upsilon_0 dt$ ενώ λόγω της περιστροφής θα μετατοπίζεται προς τα πίσω κατά $dx_{\pi\varepsilon\rho} = -Rd\theta = -\omega_0 R dt$. Άρα, αφού $\omega_0 R > \upsilon_0$ η συνολική μετατόπιση κάθε dt θα είναι προς τα πίσω και ίση με $dx = dx_{\mu\varepsilon\tau} + dx_{\pi\varepsilon\rho} = \upsilon_0 dt - \omega_0 R dt = -(\omega_0 R - \upsilon_0)dt$. Οπότε η τριβή ολίσθησης f_k που θα εμφανιστεί θα είναι προς τα μπροστά. **[0,2]**



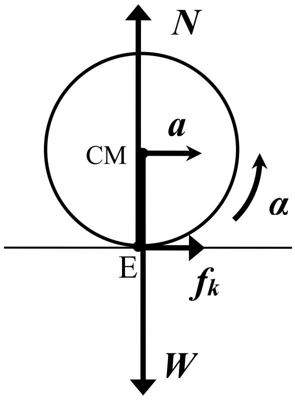
Το σημείο επαφής Ε δεν παραμένει στιγμιαία ακίνητο αλλά σε χρόνο dt ολισθαίνει προς τα πίσω, διάστημα $dx = dx_{\mu\varepsilon\tau} + dx_{\pi\varepsilon\rho} = \upsilon_0 dt - R\,\omega_0 dt$ επειδή η ταχύτητα από περιστροφή είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα μεταφοράς. Άρα εμφανίζεται τριβή ολίσθησης προς τα μπροστά



$W = mg = 20,0\cdot 10,0 = 200\ \text{N}$ **[0,05]**

y-ισορροπία: $\sum F_y = 0 \Rightarrow N = W \Rightarrow N = 200\ \mathrm{N}$ **[0,05]**

$f_k = \mu_k N = 0,250 \cdot 200 = 50,0\ \mathrm{N}$ **[0,1]**



[0,2]

3.3 Μπορούμε να βρούμε την τελική ταχύτητα κύλισης $\upsilon_r = \omega_r R$ πριν να λύσουμε τις εξισώσεις του Νεύτωνα. Αφού όλες οι δυνάμεις (B, N, f_k) διέρχονται από το σημείο επαφής Ε, δεν επάγουν ροπή γύρω από το σημείο Ε και έτσι η στροφορμή γύρω από το σημείο επαφής Ε θα παραμένει σταθερή: $L_{(\mathrm{E})} = L'_{(\mathrm{E})} \Rightarrow m\upsilon_0 R + I\omega_0 = m\upsilon_r R + I\omega_r \Rightarrow m\upsilon_0 R + \kappa m R^2 \omega_0 = m\upsilon_r R + \kappa m R^2\, \upsilon_r / R \Rightarrow$ **[0,3]**

$$\upsilon_0 + \kappa R\omega_0 = \upsilon_r (1+\kappa) \Rightarrow \boxed{\upsilon_r = \frac{\upsilon_0 + \kappa R\omega_0}{1+\kappa}}$$

$$\upsilon_r = \frac{10 + 1\cdot 0,4 \cdot 50}{1+1} = \frac{30}{2} \Rightarrow \boxed{\upsilon_r = 15,0\ \mathrm{m/s}}$$ **[0,1]**

$$\omega_r = \upsilon_r / R = 15,0/0,400 \Rightarrow \boxed{\omega_r = 37,5\ \mathrm{rad/s}}$$

3.4 Η τριβή ολίσθησης είναι η μόνη οριζόντια δύναμη που ασκείται στον κύλινδρο και το αποτέλεσμά της είναι να επιταχύνει την μεταφορική του κίνηση αυξάνοντας την ταχύτητα του κέντρου μάζας ($\upsilon_0 \uparrow$) ενώ ταυτόχρονα η ροπή της ως προς το κέντρο μάζας επιβραδύνει την περιστροφική του κίνηση μειώνοντας την γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου ($\omega_0 \downarrow$). Οι νόμοι του Νεύτωνα δίνουν :

$$\left.\begin{array}{l} x\text{-μετακίνηση}: \; f_k = ma \\ z\text{-περιστροφή}: \; f_k R = I\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \mu_k mg = ma \\ \mu_k mgR = \kappa m R^2 \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} a = \mu_k g \\ \alpha = \dfrac{\mu_k g}{\kappa R} \end{array}$$

$$a = 0,250 \cdot 10,0 \Rightarrow \boxed{a = 2,50\ \mathrm{m/s^2}} \qquad \alpha = \frac{0,250\cdot 10}{1\cdot 0,400} \Rightarrow \boxed{\alpha = 6,25\,\mathrm{rad/s}}, \qquad \alpha R = 2,50\ \mathrm{m/s^2}$$

(Το ότι εδώ ισχύει $\alpha R = a$ αριθμητικά, σαν να υπάρχει κύλιση χωρίς ολίσθηση, είναι τυχαίο, οφείλεται στο κ=1 και δεν ισχύει γενικά.)

3.5 Επειδή η ροπή είναι σταθερή βρίσκουμε το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να επέλθει κύλιση από το 2ο νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφική κίνηση:

$$\sum_{(\mathrm{CM})} \tau = \frac{dL_{(\mathrm{CM})}}{dt} \Rightarrow \tau_f = \frac{\Delta L_{(\mathrm{CM})}}{\Delta t} \Rightarrow$$ **[0,2]**

$$t_r = \Delta t = \frac{L'_{(\mathrm{CM})} - L_{(\mathrm{CM})}}{-f_k R} = \frac{\kappa m R^2 (\omega_0 - \omega_r)}{\mu_k mgR} = \frac{\kappa(\omega_0 R - \upsilon_r)}{\mu_k g} = \frac{\kappa}{\mu_k g}\left(\omega_0 R - \frac{\upsilon_0 + \kappa R\omega_0}{1+\kappa}\right) = \frac{\kappa\left(\omega_0 R(1+\kappa) - \upsilon_0 + \kappa R\omega_0\right)}{\mu_k g(1+\kappa)} \Rightarrow$$

$$\boxed{t_r = \frac{\kappa}{1+\kappa}\,\frac{R\omega_0 - \upsilon_0}{\mu_k g}} \qquad t_r = \frac{1}{1+1}\cdot\frac{20-10}{0,25\cdot 10} \Rightarrow \boxed{t_r = 2\ \mathrm{s}}$$ **[0,2]**

Θα μπορούσαμε να βρούμε το t_r και από καθεμιά από τις παρακάτω κινηματικές εξισώσεις :

$$\upsilon_r = \upsilon_0 + at_r \quad , \quad \omega_r = \omega_0 - \alpha t_r \quad , \quad \upsilon_0 + at_r = R(\omega_0 - \alpha t_r)$$

3.6 Ο σωλήνας, πριν επιτευχθεί κύλιση, θα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ταυτόχρονα με ομαλά επιβραδυνόμενη περιστροφική κίνηση σύμφωνα με τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\upsilon = \upsilon_0 + at \qquad s = x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2ax$$

$$\omega = \omega_0 - \alpha t \qquad \theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - 2\alpha\theta$$

Πριν αρχίσει να κυλάει το CM του σωλήνα θα διανύσει διάστημα :

$s_r = x_{\mu\varepsilon\tau} = \upsilon_0 t_r + \frac{1}{2}at_r^2 = 10\cdot\ 2 + \frac{1}{2}2{,}5\cdot\ 2^2 \Rightarrow \boxed{x_r = 25\ \text{m}}$ προς τα δεξιά **[0,2]**

και θα διαγράψει γωνία

$\theta_r = \omega_0 t_t - \frac{1}{2}\alpha t_r^2 = 50\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 6{,}25\cdot 2^2 = 100 - 12{,}5 = 87{,}5\ \text{rad}$ ανθωρολογιακά

Αυτό ισοδυναμεί με $N = \frac{\theta_r}{2\pi} = \frac{87{,}5}{2(3{,}141)} \Rightarrow \boxed{N = 13{,}9}$ περιστροφές ανθωρολογιακά **[0,2]**

και μήκος τόξου $x_{\pi\varepsilon\rho} = R\theta_r = 0{,}4\cdot\ 87{,}5 = 35\ \text{m}$ προς τα αριστερά

3.7 Η τριβή είναι εφαπτόμενη στις δύο επιφάνειες και άρα θα μετακινήσει το σημείο εφαρμογής της κατά $\Delta x = \int_0^{x_{\pi\varepsilon\rho}} dx_{\mu\varepsilon\tau} + \int_0^{-x_{\pi\varepsilon\rho}} dx_{\pi\varepsilon\rho} = x_{\mu\varepsilon\tau} - x_{\pi\varepsilon\rho} = 25 - 35 = -10\,\text{m}$.

Οπότε από τον ορισμό του έργου, το έργο της τριβής, που είναι σταθερή δύναμη, βρίσκεται από:

$W_f = f_k\Delta x = \mu_k mg\Delta x$ **[0,2]**

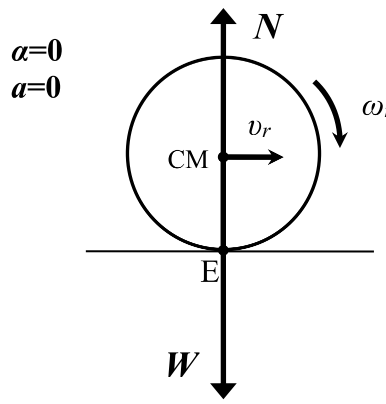
$W_f = 0{,}25\cdot\ 20\cdot\ 10\cdot\ (-10) = -500\ \text{J}$ **[0,2]**

Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να βρούμε το έργο της τριβής και από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας

$W_f = \Delta K = \Delta K_{\mu\varepsilon\tau} + \Delta K_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2}m\left(\upsilon_r^2 - \upsilon_0^2\right) + \frac{1}{2}I\left(\omega_r^2 - \omega_0^2\right)$ **[0,2]**

$W_f = \frac{1}{2}20\left(15^2 - 10^2\right) + \frac{1}{2}3{,}2\left(37{,}5^2 - 50^2\right) = 1250 - 1750 \Rightarrow \boxed{W_f = -500\ \text{J}}$ **[0,2]**

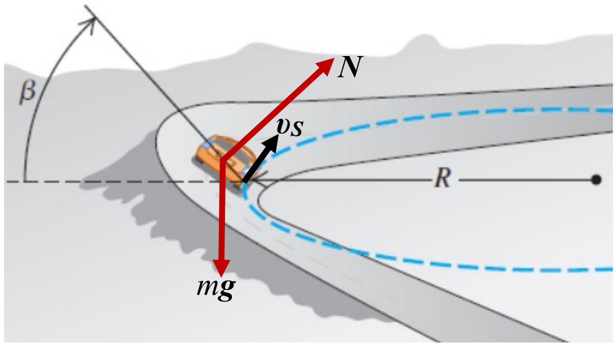
3.8 Αφού επέλθει κύλιση παύει να ασκείται τριβή ολίσθησης εφόσον το σημείο επαφής παραμένει στιγμιαία ακίνητο. Επίσης δεν εμφανίζεται στατική τριβή στο σημείο επαφής. Η στατική τριβή είναι παθητική δύναμη, εμφανίζεται ως αντίδραση όταν επίκειται σχετική κίνηση μεταξύ δυο επιφανειών σε επαφή λόγω κάποιας άλλης δύναμης που προσπαθεί να κινήσει ή κινεί τη μια από τις δύο επιφάνειες. Εδώ δεν υπάρχει καμιά άλλη οριζόντια δύναμη και άρα δεν θα παρουσιαστεί στατική τριβή.



Οπότε οι μόνες δυνάμεις πάνω στον σωλήνα θα είναι το βάρος και η κάθετη αντίδραση του οδοστρώματος οι οποίες αλληλοαναιρούνται. Ο σωλήνας ισορροπεί και το CM του εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με υ_r . Ταυτόχρονα ο σωλήνας περιστρέφεται με ομαλή κυκλική κίνηση με $\omega_r = \upsilon_r/R$ γύρω από το CM. Το ιδανικό άκαμπτο σώμα θα κυλούσε έτσι στο διηνεκές, χωρίς ποτέ να σταματήσει.

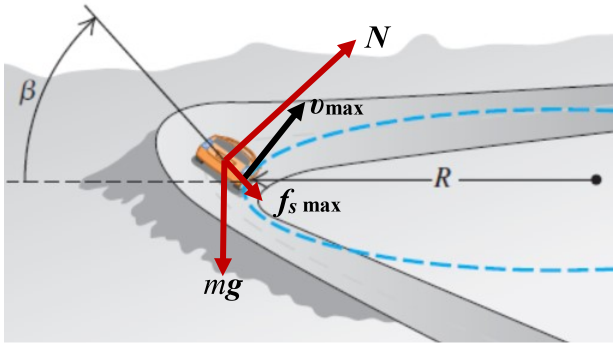
ΘΕΜΑ 4. [3]

4.1 Ποιο είναι το μέτρο υ_S της ταχύτητας ασφαλείας της κεκλιμένης στροφής; Δηλαδή, της ταχύτητα που πρέπει να έχει το όχημα ώστε να καταφέρει να πάρει τη στροφή χωρίς την ανάγκη στατικής τριβής $f_s = 0$ (π.χ. όταν ο δρόμος είναι λείος επειδή καλύπτεται από πάγο). [1,0]



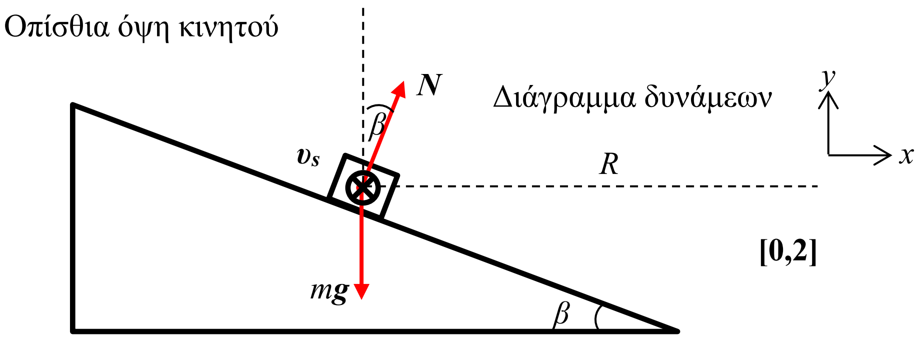
4.2 Η μέγιστη τιμή της ταχύτητας ώστε το όχημα να κρατηθεί πάνω στο οδόστρωμα καθορίζεται από τη μέγιστη τιμή της στατική τριβής. Ποιο είναι το μέτρο υ_{max} της μέγιστης ταχύτητας με την οποία μπορεί το όχημα να πάρει τη στροφή ; [1,0]

4.3 Όταν το μέτρο της ταχύτητας υ του οχήματος έχει μια ενδιάμεση τιμή, στο διάστημα $\upsilon_S \le \upsilon \le \upsilon_{max}$ από ποια έκφραση δίνεται η στατική τριβή f_s σαν συνάρτηση του μέτρου της ταχύτητας υ; [1,0]



Λύση

4.1 Ταχύτητα ασφαλείας



[0,2]

$N_x = N\sin\beta, \qquad N_y = N\cos\beta$

$$\sum F_x = m\frac{\upsilon_s^2}{R} \Rightarrow N_x = m\frac{\upsilon_s^2}{R} \Rightarrow N\sin\beta = m\frac{\upsilon_s^2}{R} \qquad (1) \qquad \textbf{[0,3]}$$

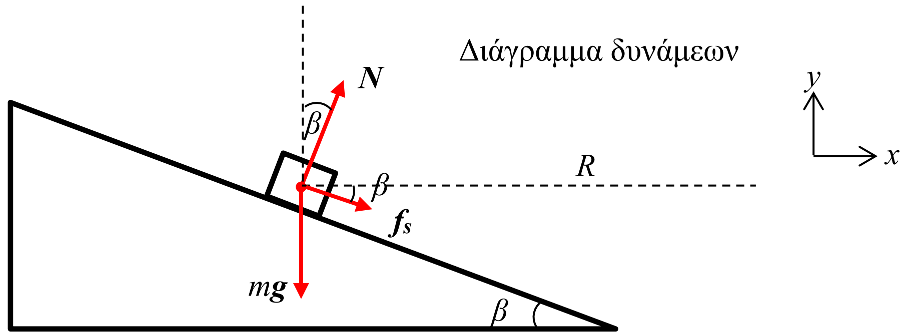
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_y - mg = 0 \Rightarrow N\cos\beta = mg \qquad (2) \qquad \textbf{[0,3]}$$

Διαιρώντας την (1) με τη (2)

$$\frac{N\sin\beta}{N\cos\beta} = \frac{m\upsilon_s^2 / R}{mg} \Rightarrow \upsilon_s^2 = gR\tan\beta \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon_s = \sqrt{gR\tan\beta} \quad \textbf{[0,2]}}$$

4.2 Μέγιστη ταχύτητα



$f_{sx} = N\cos\beta$, $\quad f_{sy} = f_s \sin\beta$

$$\sum F_x = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow N_x + f_{sx} = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow N\sin\beta + f_s\cos\beta = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_y - f_{sy} - mg = 0 \Rightarrow N\cos\beta - f_s\sin\beta - mg = 0 \quad (2)$$

Από την εξίσωση (1) βλέπουμε ότι όσο αυξάνεται η ταχύτητα αυξάνονται και οι δυνάμεις που παρέχουν την κεντρομόλο δύναμη, δηλαδή η N και η f_s . Η ταχύτητα θα φτάσει στη μέγιστη δυνατή τιμή της όταν η στατική τριβή θα φτάσει στη μέγιστη επιτρεπτή τιμή της $f_{s,\max} = \mu_s N$. Αν η ταχύτητα αυξηθεί παραπάνω ώστε να απαιτείται μεγαλύτερη f_s , που δεν υπάρχει, τότε το όχημα θα φύγει από το δρόμο προς τα πάνω ώστε να μεγαλώσει η ακτίνα (και να ελαττωθεί η δεξιά πλευρά της (1)). Αν αυτό δεν είναι δυνατό (βρίσκεται στα όρια του δρόμου) θα φύγει από το δρόμο.

$$N\sin\beta + \mu_s N\cos\beta = m\frac{\upsilon_{\max}^2}{R} \Rightarrow N(\sin\beta + \mu_s\cos\beta) = m\frac{\upsilon_{\max}^2}{R} \quad (1)$$

$$N\cos\beta - \mu_s N\sin\beta - mg = 0 \Rightarrow N(\cos\beta - \mu_s\sin\beta) = mg \quad (2)$$

Διαιρώντας την (1) με την (2))

$$\frac{\cancel{m}\frac{\upsilon_{\max}^2}{R}}{\cancel{m}g} = \frac{\cancel{N}(\sin\beta + \mu_s\cos\beta)}{\cancel{N}(\cos\beta - \mu_s\sin\beta)} \Rightarrow \upsilon_{\max}^2 = gR\frac{\sin\beta + \mu_s\cos\beta}{\cos\beta - \mu_s\sin\beta} = gR\frac{\tan\beta + \mu_s}{1 - \mu_s\tan\beta}$$

$$\boxed{\upsilon_{\max} = \sqrt{gR\frac{\tan\beta + \mu_s}{1 - \mu_s\tan\beta}}}$$

4.3 Τιμή μέτρου στατικής τριβής σαν συνάρτηση της ταχύτητας, όταν $f_s < \mu_s N$ και $\upsilon_S < \upsilon < \upsilon_{\max}$

$$\sum F_x = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow N\sin\beta + f\cos\beta = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow N\sin\beta = m\frac{\upsilon^2}{R} - f\cos\beta \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N\cos\beta - f\sin\beta - mg = 0 \Rightarrow N\cos\beta = mg + f\sin\beta \quad (2)$$

Διαιρώ (1) δια (2)

$$\frac{\cancel{N}\sin\beta}{\cancel{N}\cos\beta} = \frac{m\frac{\upsilon^2}{R} - f\cos\beta}{mg + f\sin\beta} \Rightarrow mg\sin\beta + f\sin^2\beta = m\frac{\upsilon^2}{R}\cos\beta - f\cos^2\beta \Rightarrow$$

$$f(\sin^2\beta + \cos^2\beta) = m\frac{\upsilon^2}{R}\cos\beta - mg\frac{R}{R}\sin\beta \Rightarrow f = \frac{m\cos\beta}{R}(\upsilon^2 - gR\tan\beta) \Rightarrow$$

$$\boxed{f = \frac{m\cos\beta}{R}(\upsilon^2 - \upsilon_s^2)}$$