

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΕΠΙ ΠΤΥΧΙΩ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Δευτέρα, 16 Ιουνίου 2025 12:00-14:00, Αιθ. ΒΠ1_11
Εισηγητής: Κώστας Φιλίππιδης (kphilippides@uowm.gr)

ΘΕΜΑ 1 [4]

Διαστημικό όχημα είναι σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τη Γη με απόγειο $r_a = 3R$ και περίγειο $r_p = 2R$ αντίστοιχα, όπου $R = 6.371 \text{ km}$ η ακτίνα της Γης.

1.1 [0,2] Δείξτε ότι η σταθερά $GM = gR^2$ και υπολογίστε την αριθμητική της τιμή.

1.2 [0,5] Βρείτε τον τύπο που δίνει την ταχύτητα διαφυγής από απόσταση r .

1.3 [3,3] Βρείτε το ελάχιστο κλάσμα της μάζας του που πρέπει να κάνει το όχημα, ώστε να διαφύγει από την έλξη της Γης αν η πυροδότηση των πυραύλων γίνει αντίστοιχα στο απόγειο ή στο περίγειο και αποφανθείτε που είναι πιο οικονομικό να γίνει η πυροδότηση.

Δίνονται : ταχύτητα ελλειπτικής τροχιάς $v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$, μεγάλος ημιάξονας $a = \frac{r_p + r_a}{2}$ ταχύτητα καυσαερίων $v_e = 3,70 \text{ km/s}$, ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης $g = 9,80067 \text{ N/kg}$.

ΛΥΣΗ

Αποτελέσματα ταχυτήτων σε 4 σημαντικά ψηφία (από 6.371), κλασμάτων μάζας σε 3 σημαντικά ψηφία (από 3,70)

1.1 [0,2] Στην επιφάνεια κάθε πλανήτη

$$W = F_G \Rightarrow \cancel{m}g = G \frac{\cancel{m}M}{R^2} \Rightarrow gR^2 = GM$$

$$GM = gR^2 = (9,80067 \text{ m/s}^2)(6.371 \times 10^3 \text{ m})^2 = 397.805.676.859.470 \text{ m}^3/\text{s}^2 = 3,978 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

1.2 [0,5] Η ταχύτητα διαφυγής v_{esc} από απόσταση r , βρίσκεται από διατήρηση της ενέργειας:

$$E_r = E_\infty \Rightarrow K_r + U_r = K_\infty + U_\infty \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - \frac{GMm}{\infty}$$

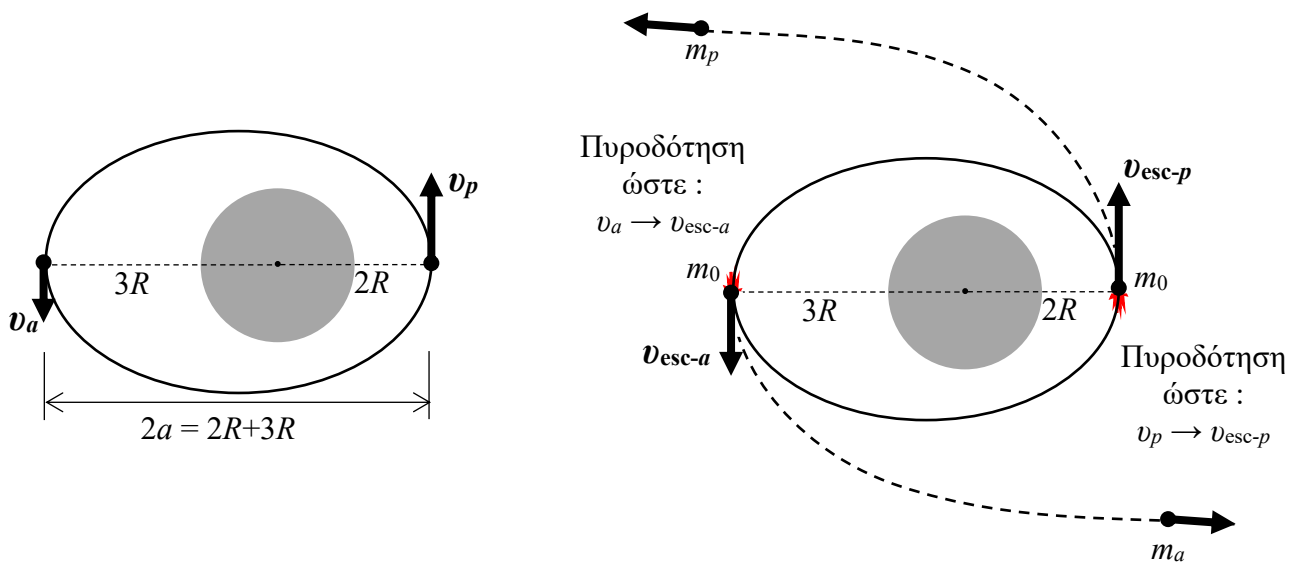
Όταν η αρχική ταχύτητα είναι $v = v_{esc}$ τότε μόλις και φτάνει στο ∞ , δηλ. $v_\infty = 0$

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 - \frac{GMm}{r} = 0 \Rightarrow v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

1.3 [3,3] Για να διαφύγει από συγκεκριμένη απόσταση r πρέπει να έχει τουλάχιστον την ταχύτητα διαφυγής v_{esc} που αντιστοιχεί σε αυτήν την απόσταση.

Ο μεγάλος ημιάξονας της ελλειπτικής τροχιάς είναι:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{2R + 3R}{2} = \frac{5}{2}R = 2,5R \quad [0,1]$$



Υπολογισμοί στο περίγειο

$$v_{esc,p} = \sqrt{\frac{2GM}{r_p}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{2R}} = \sqrt{gR}, \quad [0,4]$$

$$v_p = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{gR^2 \left(\frac{2}{2R} - \frac{2}{5R} \right)} = \sqrt{gR} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{0,6} \sqrt{gR} \quad [0,4]$$

Υπολογίζουμε μια φορά το $\sqrt{gR}$ και το κρατάμε και για παρακάτω

$$\sqrt{gR} = \sqrt{(9,80067)(6.371 \times 10^3)} = 7.901,903 = 7,902 \text{ km/s}$$

Η απαιτούμενη διαφορά ταχυτήτων στο περίγειο είναι:

$$\Delta v_p = v_{esc,p} - v_p = (1 - \sqrt{0,6}) \sqrt{gR} = (1 - 0,774597)(7,902 \text{ km/s}) = 1,781 \text{ km/s} \quad [0,3]$$

Από την εξίσωση του πυραύλου :

$$m_p = m_0 e^{-\Delta v_p / u_e} = m_0 e^{-\frac{1,781}{3,70}} = m_0 (0,618) = 61,8\% m_0 \quad [0,4]$$

Έχει μείνει μάζα ίση με το 61,8% της αρχικής.

Άρα τα καύσιμα που καταναλώθηκαν είχαν μάζα ίση με το 38,2% της συνολικής αρχικής μάζας.

Υπολογισμοί στο απόγειο

$$v_{esc,a} = \sqrt{\frac{2GM}{r_a}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{3R}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{gR}, \quad [0,4]$$

$$\text{από διατήρηση στροφορμής : } v_a = \frac{r_p}{r_a} v_p = \frac{2}{3} \sqrt{0,6} \sqrt{gR}, \quad [0,4]$$

[δεν χρησιμοποιείτε ξανά τον τύπο $v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$ για να αποφύγετε πηγές λαθών]

Η απαιτούμενη διαφορά ταχυτήτων στο απόγειο είναι:

$$\Delta v_a = v_{esc,a} - v_a = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} \sqrt{0,6} \right) \sqrt{gR} = (0,3000988)(7,902 \text{ km/s}) = 2,371 \text{ km/s} \quad [0,3]$$

Στο απόγειο πρέπει να πετύχω μεγαλύτερη Δv .

Από την εξίσωση του πυραύλου :

$$m_a = m_0 e^{-\Delta v_a / u_e} = m_0 e^{-\frac{2,371}{3,70}} = m_0 (0,527) = 52,7\% m_0 \quad [0,4]$$

Έχει μείνει μάζα ίση με το 52,7% της αρχικής (λιγότερη από ό,τι θα έμενε στο περίγειο)

Άρα τα καύσιμα που καταναλώθηκαν είχαν μάζα ίση με το 47,3% της συνολικής αρχικής μάζας (περισσότερα από όσα θα καταναλώνονταν στο περίγειο).

Άρα η μετάβαση γίνεται πιο οικονομικά στο περίγειο. [0,2]
Είναι πιο οικονομική εκεί που η Δv είναι μικρότερη

Οι αριθμητικές τιμές των ταχυτήτων, αν τις υπολογίσατε, είναι :

$$\begin{aligned} v_{esc,p} &= \sqrt{gR} = 7,902 \text{ km/s}, & v_p &= \sqrt{0,6} \sqrt{gR} = \sqrt{0,6}(7.901,903) = 6,121 \text{ km/s} \\ v_{esc,a} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{gR} = \sqrt{\frac{2}{3}}(7.901,903) = 6,452 \text{ km/s}, & v_a &= \frac{2}{3} \sqrt{0,6} \sqrt{gR} = \frac{2}{3} \sqrt{0,6}(7.901,903) = 4,081 \text{ km/s} \end{aligned}$$

Για να είναι η μετάβαση από τυχαίο σημείο $2 \rightarrow \infty$ πιο οικονομική από ότι από άλλο σημείο $1 \rightarrow \infty$, θα πρέπει για την εναπομείνασα μάζα να ισχύει :

$$m_2 > m_1 \Rightarrow m_0 e^{-\Delta v_2/u_e} > m_0 e^{-\Delta v_1/u_e} \Rightarrow e^{-\Delta v_2/u_e} > e^{-\Delta v_1/u_e} \Rightarrow e^{\Delta v_2/u_e} < e^{\Delta v_1/u_e} \Rightarrow \Delta v_2 < \Delta v_1$$

Για τη μάζα των καταναλωθέντων καυσίμων m_F :

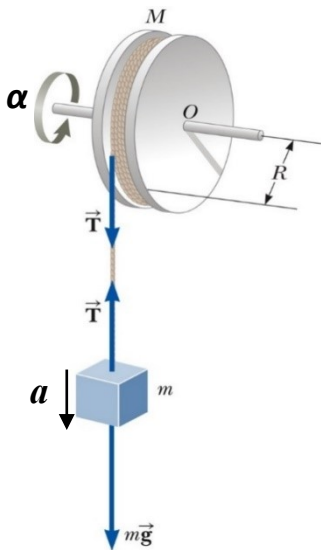
$$m_0 = m + m_F \Rightarrow m_F = m_0 - m \Rightarrow m_F = m_0 (1 - e^{-\Delta v/u_e})$$

θα πρέπει να ισχύει :

$$\begin{aligned} m_{F2} < m_{F1} &\Rightarrow m_0 (1 - e^{-\Delta v_2/u_e}) < m_0 (1 - e^{-\Delta v_1/u_e}) \Rightarrow -e^{-\Delta v_2/u_e} < -e^{-\Delta v_1/u_e} \Rightarrow e^{-\Delta v_2/u_e} > e^{-\Delta v_1/u_e} \Rightarrow \\ e^{\Delta v_2/u_e} &< e^{\Delta v_1/u_e} \Rightarrow \Delta v_2 < \Delta v_1 \end{aligned}$$

Άρα η μετάβαση είναι πιο οικονομική από το σημείο όπου η απαιτούμενη Δv είναι μικρότερη

Για όσους/όσες δεν κατάλαβαν την ερώτηση, για να πάει το διαστημόπλοιο από το περίγειο στο απόγειο δεν χρειάζεται πυροδότηση και κατανάλωση καυσίμων, το πάει η βαρύτητα τσάμπα (αυτό σημαίνει είναι σε τροχιά).



ΘΕΜΑ 2 [3,5]

Το σύστημα αφήνεται από την ηρεμία όταν το βαρίδιο βρίσκεται σε ύψος $h = 14,00 \text{ m}$ πάνω από το έδαφος. Το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό και ξετυλίγεται χωρίς να γλιστράει, ενώ η τροχαλία περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον σταθερό άξονα που περνάει από το κέντρο της O .

2.1 Τι ταχύτητα έχει το βαρίδιο όταν έχει κατέβει $3,50 \text{ m}$ και τι κινητική ενέργεια έχει η τροχαλία την ίδια στιγμή ;

2.2 Πόση είναι η επιτάχυνση του βαριδίου;

2.3 Πόση είναι η τάση του νήματος;

2.4 Πότε το βαρίδιο φτάνει στο έδαφος;

2.5 Πόσες περιστροφές έχει κάνει η τροχαλία όταν το βαρίδιο φτάνει στο έδαφος;

$$\text{Δίνονται } m = 10,0 \text{ kg}, \quad M = 8,00 \text{ kg}, \quad R = 0,250 \text{ m}, \quad I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2, \quad g = 9,80 \text{ N/kg}$$

ΛΥΣΗ

Αποτελέσματα σε τρία σημαντικά ψηφία.

Αφού το νήμα ξετυλίγεται χωρίς να ολισθαίνει, το μήκος του τόξου που έχει ξετυλιχτεί το νήμα είναι ίσο με την κατακόρυφη μετατόπιση του βαριδίου

$$y = s \Rightarrow y = \theta R \Rightarrow \theta = \frac{y}{R}$$

Για να ισχύει διαρκώς το παραπάνω, θα πρέπει να συνδέονται με την ίδια σχέση και η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας με την ταχύτητα του βαριδίου καθώς και η γραμμική επιτάχυνση των σημείων της περιμέτρου της τροχαλίας με την επιτάχυνση του βαριδίου.

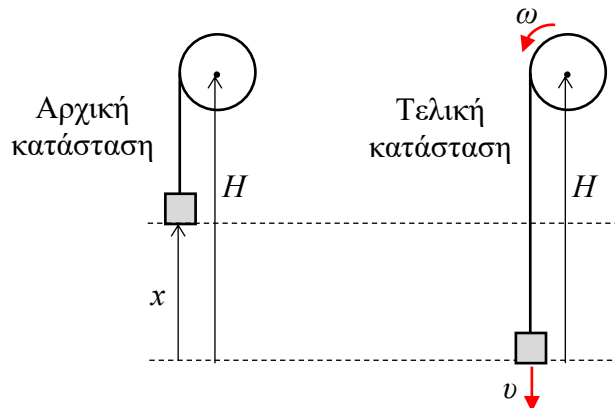
$$v = v_{\gamma\rho\alpha\mu} \Rightarrow v = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}, \quad a = a_{\gamma\rho\alpha\mu} \Rightarrow a = \alpha R \Rightarrow \alpha = \frac{a}{R}$$

2.1 [0,7] Την ταχύτητα του βαριδίου μπορούμε να την βρούμε από τη διατήρηση της ενέργειας χωρίς να ξέρουμε την επιτάχυνση. Θέτουμε το μηδέν της δυναμικής ενέργειας στα 3,5 m κάτω από την αρχική θέση του βαριδίου. Έστω ότι το κέντρο της τροχαλίας απέχει από αυτό το σημείο κατακόρυφη απόσταση H .

$$E_{\text{αρχ}} = E_{\text{τελ}} \Rightarrow K_{\text{βαρ,αρχ}} + U_{\text{βαρ,αρχ}} + K_{\text{τροχ,αρχ}} + U_{\text{τροχ,αρχ}} = K_{\text{βαρ,τελ}} + U_{\text{βαρ,τελ}} + K_{\text{τροχ,τελ}} + U_{\text{τροχ,τελ}} \Rightarrow$$

$$0 + mgx + 0 + \cancel{MgH} = \frac{1}{2}mv^2 + 0 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \cancel{MgH} \Rightarrow mgx = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2}MR^2 \left(\frac{v}{R} \right)^2 \Rightarrow$$

$$mgx = \frac{1}{2}v^2 \left(m + \frac{M}{2} \right) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2mgx}{m + \frac{M}{2}}} = \sqrt{\frac{2(10)(9,8)(3,5)}{10 + 4}} = \sqrt{\frac{(98)(7)}{14}} = \sqrt{49} = 7,00 \text{ m/s}$$



Άρα μετά από κάθοδο 3,50 m $v=7,00 \text{ m/s}$

$$K_{\text{τροχ}} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2}MR^2 \left(\frac{v}{R} \right)^2 = \frac{1}{4}Mv^2 = \frac{1}{4}(8)(49) = (2)(49) \Rightarrow$$

$$K_{\text{τροχ}} = 98,0 \text{ J}$$

2.2 [0,7] και **2.3** [0,7] Από την αρχή της ορμής για το βαρίδιο και από την αρχή της στροφορμής για την τροχαλία βρίσκουμε και την επιτάχυνση και την τάση του νήματος μαζί.

$$\text{Μεταφορική κίνηση βαριδίου: } \sum F = ma \Rightarrow B - T = ma \quad (1)$$

$$\text{Στροφική κίνηση τροχαλίας: } \sum \tau = I\alpha \Rightarrow TR = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{a}{R} \Rightarrow T = \frac{1}{2}Ma \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) βρίσκουμε την a :

$$(1)+(2): B - T + T = ma + \frac{1}{2}Ma \Rightarrow mg = a \cdot \left(m + \frac{M}{2} \right) \Rightarrow a = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}} \Rightarrow a = \frac{(10)(9,8)}{10 + \frac{8}{2}} = \frac{98}{14} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 7}{2 \cdot 7}$$

$$a = 7,00 \text{ m/s}^2$$

Αντικαθιστώντας στην (2) βρίσκουμε την τάση του νήματος T :

$$T = \frac{1}{2}Ma = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28,0 \text{ N}$$

Η επιτάχυνση του βαριδίου είναι σταθερή a και άρα και η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας $\alpha = a/R$ θα είναι σταθερή.

Έτσι, η κατακόρυφη κίνηση του βαριδίου είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη και περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$y = \frac{1}{2}at^2, \quad v = at, \quad v^2 = 2ay$$

Ενώ η περιστροφή της τροχαλίας είναι ομαλά επιταχυνόμενη και περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2, \quad \omega = \alpha t, \quad \omega^2 = 2\alpha\theta$$

2.4 [0,7] Το βαρίδιο φτάνει στο έδαφος όταν $y=h=14$ m :

$$h = \frac{1}{2} \alpha t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2(14)}{7}} \Rightarrow$$

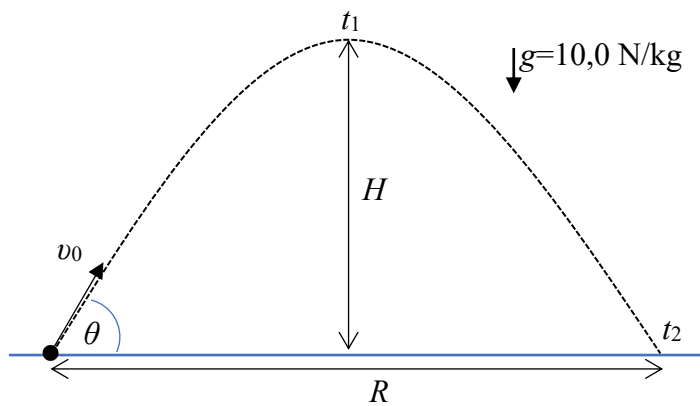
$$t = 2,00 \text{ s}$$

2.5 [0,7] Όταν έχει ξετυλιχτεί νήμα μήκους $s=y=h=14$ m από την τροχαλία, αυτή έχει περιστραφεί κατά γωνία $\theta = \frac{s}{R}$ και άρα έχει κάνει N περιστροφές ίσες με :

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{h}{2\pi R} = \frac{14}{2\pi(0,25)} = \frac{28}{\pi} = 8,91$$

ΘΕΜΑ 3 [3,5]

Τη χρονική στιγμή $t=0$, βλήμα μάζας $m=0,100$ kg, εκτοξεύεται από μηδενικό ύψος ($y_0=0$), με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_0=100$ m/s, υπό γωνία $\theta=65^\circ$, πάνω από οριζόντιο έδαφος. Αγνοώντας την αντίσταση του αέρα να βρείτε:



3.1 Την ενέργεια του βλήματος

3.2 Τη χρονική στιγμή t_1 στην οποία θα φτάσει στο μέγιστο ύψος

3.3 Το μέγιστο ύψος H

3.4 Τη δυναμική και την κινητική ενέργεια που έχει στο μέγιστο ύψος

3.5 Τη χρονική στιγμή t_2 στην οποία θα χτυπήσει στο έδαφος

3.6 Το βεληνεκές R .

3.7 Το ύψος στο οποίο η δυναμική ενέργεια είναι ίση με την κινητική.

3.8 [0,7] Την κεντρομόλο επιτάχυνση όταν $t=2$ s.

ΛΥΣΗ

Απαντήσεις σε τρία σημαντικά ψηφία

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \theta = \sigma \tau \alpha \theta \quad (1) & v_y &= v_0 \sin \theta - gt \quad (2) \\ \text{Εξισώσεις πλάγιας βολής:} & & & \\ x &= v_0 \cos \theta t \quad (3) & y &= v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} gt^2 \quad (4) \end{aligned}$$

3.1 [0,4]

$$E = K_0 + U_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g y_0 = \frac{1}{2} (0,1)(100)^2 + (0,1)(10)(0) = 500 \text{ J}$$

3.2 [0,4] Όταν φτάσει στο μέγιστο ύψος η κατακόρυφη ταχύτητα γίνεται μηδέν. Από την (2) :

$$v_y = 0 \Rightarrow 0 = v_0 \sin \theta - gt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0 \sin \theta}{g} = \frac{100 \sin(63^\circ)}{10} = 9,06 \text{ s}$$

3.3 [0,4] Από την (4) βρίσκουμε το y εκείνη τη στιγμή, το οποίο είναι το μέγιστο ύψος

$$H = y(t_1) \Rightarrow H = v_0 \sin \theta t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = v_0 \sin \theta \frac{v_0 \sin \theta}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \theta}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} = \frac{100^2 \sin^2(63^\circ)}{2(10)} = 411 \text{ m}$$

3.4 [0,4] Η δυναμική ενέργεια είναι :

$$U = mgy \Rightarrow U_{top} = mgH = (0,1)(10)(411) = 411 \text{ J}$$

Η ενέργεια διατηρείται. Άρα η κινητική ενέργεια είναι

$$E = K_{top} + U_{top} \Rightarrow K_{top} = E - U_{top} = 500 - 411 = 89 \text{ J}$$

Η ισοδύναμα, επειδή στο μέγιστο ύψος η ταχύτητα έχει μόνο οριζόντια (x) συνιστώσα.

$$K_{top} = \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2 \theta = \frac{1}{2} (0,1)(100)^2 \cos^2(63^\circ) = 89,3 = 89 \text{ J}$$

3.5 [0,4] Όταν το βλήμα χτυπήσει στο έδαφος, το y θα είναι μηδέν

$$y(t_2) = 0 \Rightarrow v_0 \sin \theta t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = 0 \Rightarrow \left(v_0 \sin \theta - \frac{1}{2} g t_2 \right) t_2 = 0 \Rightarrow v_0 \sin \theta - \frac{1}{2} g t_2 = 0 \Rightarrow$$

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} = 2t_1 = 2(9,06) = 18,1 \text{ s}$$

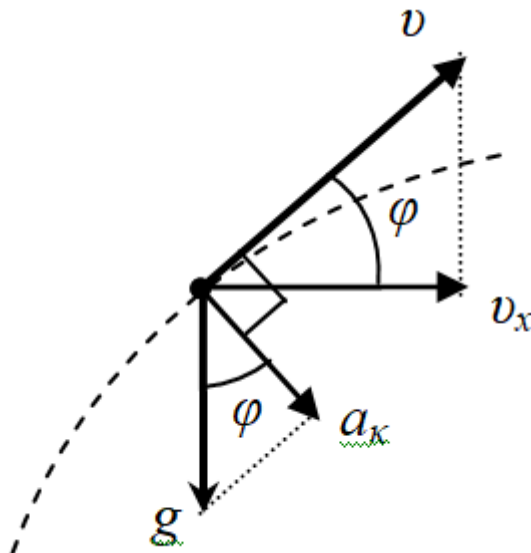
3.6 [0,4] Από την (3) βρίσκουμε το x εκείνη τη στιγμή, που είναι το βεληνεκές

$$R = x(t_2) \Rightarrow R = v_0 \cos \theta t_2 = (100) \cos(63^\circ)(18,1) = 765 \text{ m}$$

3.7 [0,4] $E = K_h + U_h = 2U_h \Rightarrow 2mgh = E \Rightarrow h = \frac{E}{2mg} \Rightarrow$

$$h = \frac{500}{2(0,1)(10)} = 250 \text{ m}$$

3.8 [0,7] Κεντρομόλος είναι η συνιστώσα της επιτάχυνσης $\vec{g}$ που είναι κάθετη στην ταχύτητα $\vec{v}$



Από το σχήμα φαίνεται ότι η γωνία της κεντρομόλου a_k με την g είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα v με τον οριζόντιο άξονα.

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right)$$

Άρα για $t=2 \text{ s}$:

$$a_k = g \cos \varphi = g \cos \left(\tan^{-1} \left(\frac{v_0 \sin \theta - gt}{v_0 \cos \theta} \right) \right) = (10) \cos \left(\tan^{-1} \left(\frac{100 \sin 65^\circ - (10)(2)}{100 \cos 65^\circ} \right) \right) = 5,13 \text{ m/s}^2$$

ΘΕΜΑ 4 [3]

Να γράψετε στο SI, εξισώσεις που να περιγράφουν τη χρονική και τη χωρική εξάρτηση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου ενός ημιτονοειδούς ηλεκτρομαγνητικού κύματος συχνότητας 48×10^{14} Hz που διαδίδεται προς τον θετικό ημιάξονα z και του οποίου το ηλεκτρικό πεδίο έχει πλάτος $1,80 \times 10^3$ V/m.

Θεωρήστε $c = 3 \times 10^8$ m/s.

ΛΥΣΗ

Πρέπει από τη θεωρία, να γνωρίζεται ότι, για τα πεδία του H/M κύματος :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} \mp \omega t) \hat{e}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = B \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} \mp \omega t) \hat{b}$$

ισχύουν:

1) Το κύμα διαδίδεται στην κατεύθυνση $\pm \hat{k}$, αντίθετα με το σχετικό πρόσημο των όρων $\vec{k} \cdot \vec{r}$, ωt στη φάση.

2) Τα πεδία είναι κάθετα στην κατεύθυνση διάδοσης (εγκάρσια κύματα) με : $\hat{e} \times \hat{b} = \hat{k}$

3) Τα πεδία είναι κάθετα μεταξύ τους : $\hat{e} \cdot \hat{b} = 0$

4) Το κύμα διαδίδεται με ταχύτητα $\frac{\omega}{k} = c = 3 \times 10^8$ m/s

5) Τα πλάτη των δύο πεδίων συνδέονται με τη σχέση $B = \frac{E}{c}$

6) Όπως για κάθε περιοδικό κύμα : $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

Κατεύθυνση διάδοσης : $\hat{k} = +\hat{z}$ [0,4]

Κατευθύνσεις πεδίων : Κάθετα μεταξύ τους διανύσματα στο επίπεδο x - y με $\hat{e} \times \hat{b} = \hat{z}$

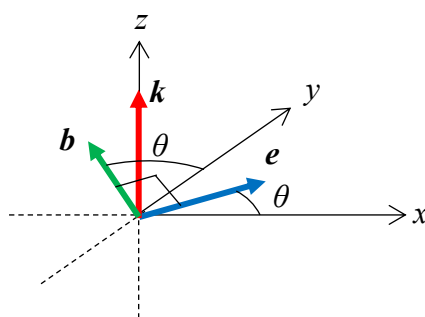
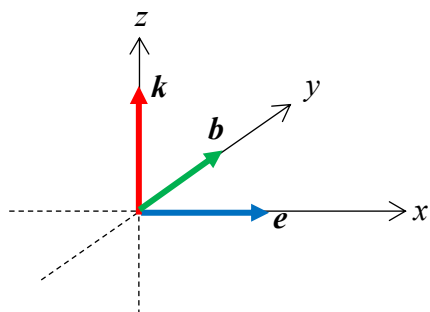
Πιο απλή μορφή : $\hat{e} = \hat{x}$, $\hat{b} = \hat{y}$ αφού $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ και $\hat{x} \cdot \hat{y} = 0$ [0,4]

Γενικότερα, τα παραπάνω διανύσματα περιστραμμένα γύρω από τον άξονα z κατά τυχαία γωνία θ

$\hat{e} = \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta$, $\hat{b} = -\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta$ αφού πάλι :

$$\hat{e} \times \hat{b} = (\hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta) \times (-\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta) = \hat{x} \times \hat{y} \cos^2 \theta - \hat{y} \times \hat{x} \sin^2 \theta = \hat{x} \times \hat{y} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \hat{z}$$

$$\hat{e} \cdot \hat{b} = (\hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta) \cdot (-\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta) = -\cos \theta \sin \theta + \cos \theta \sin \theta = 0$$



0,4

Κυκλική συχνότητα : $\omega = 2\pi f = 2\pi(48 \times 10^{14}) = 96\pi \times 10^{14}$ rad/s [0,4]

Κυματαριθμός : $k = \frac{\omega}{c} = \frac{96\pi \times 10^{14}}{3 \times 10^8} = 32\pi \times 10^6$ rad/m [0,4]

Φάση : $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = kz - \omega t = 32\pi z \times 10^6 - 96\pi t \times 10^{14} = 32\pi \times 10^6 (z - 3 \times 10^8 t)$ [0,4]

Μέτρο μαγνητικού πεδίου : $B = \frac{E}{c} = \frac{1,8 \times 10^3}{3 \times 10^8} = 6,0 \times 10^{-6} \text{ T}$ [0,4]

Άρα :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = 1,8 \times 10^3 \sin(32\pi \times 10^6 (z - 3 \times 10^8 t)) (\hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta) \quad (\text{SI}) \quad [0,1]$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = 6,0 \times 10^{-6} \sin(32\pi \times 10^6 (z - 3 \times 10^8 t)) (-\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta) \quad (\text{SI}) \quad [0,1]$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ