ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2022-23

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Παρασκευή, 17 Φεβρουαρίου 2023: 18:00-20:40 π.μ. Αίθουσες: Αμφιθέατρο ΑΠ1_8
Εισηγητής: Κώστας Φιλιππίδης (kphilippides@uowm.gr)

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα και αξίας 2,5 μονάδων το καθένα
Μεταφέρετε όλα τα σχήματα στην κόλλα σας.
Να δώσετε τα αριθμητικά αποτελέσματα με ακρίβεια τριών σημαντικών ψηφίων.
Η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης είναι $g = 9{,}80$ N/kg

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

1.1 [0,1] Δείξτε ότι για την ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης ισχύει $gR^2 = GM$ όπου R η ακτίνα της Γης και M η μάζα της Γης. (Θα το χρειαστείτε για τους αριθμητικούς υπολογισμούς)

1.2 [0,4] Βρείτε την ταχύτητα διαφυγής υ_e από την επιφάνεια της Γης και την ταχύτητα υ_c της κυκλικής τροχιάς ακριβώς γύρω από την επιφάνεια της Γης (δηλαδή με ακτίνα τροχιάς όση η ακτίνα της Γης)
Δίνεται η ακτίνα της Γης R=6.371 km.

Βλήμα εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_c \le \upsilon_0 \le \upsilon_e$ και σε γωνία α από την κατακόρυφο ώστε να εκτελέσει βολή.

1.3 [1] Δείξτε ότι τα μέτρα των ταχυτήτων υ_p και υ_a στο περίγειο και στο απόγειο αντίστοιχα, δίνονται από την έκφραση : $\upsilon_{p,a} = \dfrac{\upsilon_e}{2\delta\sin\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1-4\delta^2(1-\delta^2)\sin^2\alpha}\right)$ όπου $\delta = \dfrac{\upsilon_0}{\upsilon_e}$

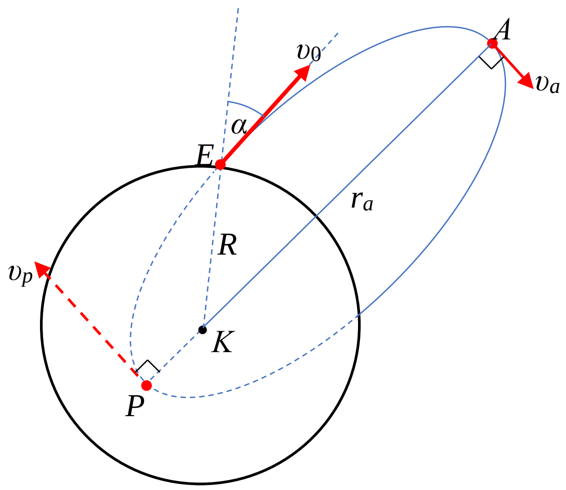
1.4 [0,1] Δείξτε ότι στον παραπάνω τύπο η έκφραση κάτω από τη ρίζα είναι θετική και ότι $2\delta^2 \ge 1$.

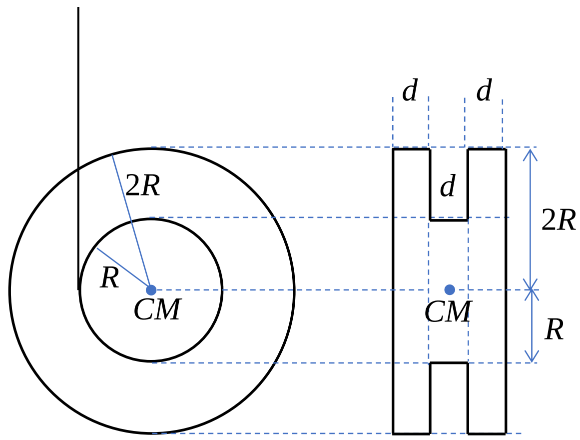
1.5 [0,5] Επιβεβαιώστε ότι η παραπάνω έκφραση ικανοποιεί τα απαραίτητα όρια :

α) $\upsilon_0 = \upsilon_e \Rightarrow \upsilon_a = 0$ και β) $\alpha = 90^\circ \Rightarrow \upsilon_p = \upsilon_0$

Εξηγείστε γιατί πρέπει να ικανοποιούνται τα παραπάνω όρια.

1.6 [0,4] Αν το βλήμα εκτοξεύεται με υ_0 =10,0 km/s και α=53,13°, υπολογίστε το μέτρο της ταχύτητάς του υ_a στο απόγειο και την απόσταση του απογείου r_a από το κέντρο της Γης.
(*Να βάζετε την* υ_e *με τουλάχιστον* 5 *ψηφία και στο τέλος θα στρογγυλοποιείτε τα αποτελέσματα στα* 3)





ΘΕΜΑ 2

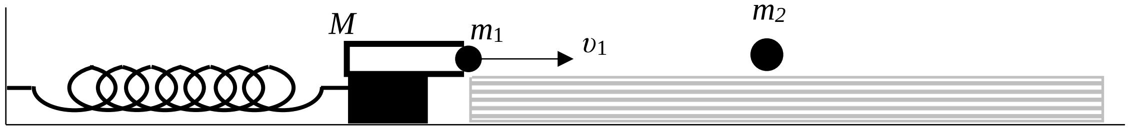
2.1 [1] Γιο-γιο αποτελείται από τρεις ισοπαχείς δίσκους ομογενούς υλικού. Η ακτίνα των ακραίων δίσκων είναι διπλάσια από αυτή του κεντρικού. Δώστε την έκφραση της στροφικής αδράνειας του γιο-γιο I, σαν συνάρτηση της συνολικής μάζας του M και της ακτίνας του κεντρικού δίσκου R.

2.2 [1] Το γιο-γιο αφήνεται να ξετυλιχτεί από αβαρές νήμα που είναι τυλιγμένο στον κεντρικό δίσκο. Το νήμα δεν ολισθαίνει όπως ξετυλίγεται. Θεωρήστε ότι ξετυλίγεται κατακόρυφα. Να δείξετε ότι η επιτάχυνση του γιο-γιό είναι ανεξάρτητη της ακτίνας και της μάζας του (άρα και του υλικού) και είναι ίση με (6/17)g.

2.3 [0,5] Αν η μάζα του γιο-γιό είναι M=170 g βρείτε την τάση του νήματος.

ΘΕΜΑ 3

Πυροβόλο όπλο M = 10 kg που εκπυρσοκροτεί, εκτοξεύει από την κάνη του ελαστικό σφαιρικό βλήμα μάζας m_1 = 2 kg με οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_1 =100 m/s. Το πυροβόλο είναι συνδεδεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Μετά την εκπυρσοκρότηση, το πυροβόλο κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο συμπιέζοντας το ελατήριο ενώ το ελαστικό βλήμα κινείται πάνω από οριζόντια αεροτράπεζα με μηδενική τριβή μέχρι να συναντήσει δεύτερη ακίνητη ελαστική σφαίρα μάζας m_2 = 3 kg που ισορροπεί αιωρούμενη πάνω από την αεροτράπεζα.



Να βρείτε:

3.1 [0,3] Την ταχύτητα ανάκρουσης του πυροβόλου μετά την εκτόξευση του βλήματος

3.2 [0,3] Την ταχύτητα της σφαίρας m_2 μετά από την κρούση της με το ελαστικό βλήμα.

3.3 [0,9] Την μέγιστη δυναμική ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης κατά τη διάρκεια της κρούσης των δύο ελαστικών σφαιρών.

3.4 [1] Την ώθηση που δέχτηκε από το ελατήριο το πυροβόλο, από τη στιγμή της εκπυρσοκρότησης μέχρι να συσπειρωθεί κατά το μισό της μέγιστης συσπείρωσης του.

ΘΕΜΑ 4

4.1 [2] Από τις εξισώσεις του Maxwell στο κενό ($\rho = 0, \quad \vec{J} = 0$) και χρησιμοποιώντας την διανυσματική ταυτότητα $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\ \vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A}$ που ισχύει για κάθε διανυσματικό πεδίο, να δείξετε ότι το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ και το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ ικανοποιούν την κυματική εξίσωση.

4.2 [0,5] Να βρείτε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος με ακρίβεια 9 σημαντικών ψηφίων (αριθμητική τιμή και μονάδες).

Δίνονται $\mu_0 = 1{,}256\ 637\ 062\times10^{-6}\ \text{kg}\cdot\ \text{m}\cdot\ \text{s}^{-2}\cdot\ \text{A}^{-2}$, $\varepsilon_0 = 8{,}854\ 187\ 813\times10^{-12}\ \text{A}^2\cdot\ \text{s}^4\cdot\ \text{kg}^{-1}\cdot\ \text{m}^{-3}$

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ 1

1.1 Στην επιφάνεια της Γης: $W = F_G \Rightarrow \cancel{m} g = G\dfrac{\cancel{m}M}{R^2} \Rightarrow gR^2 = GM \quad [0,1]$

1.2 <u>Ταχύτητα διαφυγής</u> είναι η αρχική ταχύτητα εκτόξευσης που επιτρέπει στο βλήμα μόλις και να φτάσει στο άπειρο, δηλαδή με $\upsilon_\infty = 0$. Από διατήρηση ενέργειας :

$$\frac{1}{2}m\upsilon_e^2 - \frac{GmM}{R} = \frac{1}{2}m\upsilon_\infty^2 - \frac{GmM}{\infty} \Rightarrow \frac{1}{2}\upsilon_e^2 - \frac{GM}{R} = 0 \Rightarrow$$

$$\upsilon_e^2 = \frac{2GM}{R} = 2gR \Rightarrow \upsilon_e = \sqrt{2gR} = \sqrt{2\cdot\ 9{,}80\cdot\ 6{,}371\times10^6} = 11.17460\times10^3 = 11{,}2\ \text{km/s}\ \ [0,2]$$

Στην <u>κυκλική τροχιά</u> η βαρυτική δύναμη παίζει το ρόλο της κεντρομόλου.

$$F_{net} = ma \Rightarrow F_G = ma_c \Rightarrow G\frac{mM}{R^2} = m\frac{\upsilon_c^2}{R} \Rightarrow \upsilon_c^2 = \frac{GM}{R} = \frac{\upsilon_e^2}{2} \Rightarrow \upsilon_c = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \frac{\upsilon_e}{\sqrt{2}} = \frac{1.17460\times10^3}{\sqrt{2}} = 7{,}90\ \text{km/s}$$

[0,2]

[*Αν δίνονταν η μάζα* M= 6,00 ×10^{24} kg *και η ακτίνα της Γης* R=6.400 km *καθώς και η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας* G=20/3×10^{-11} $\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ *τότε* :

$$\upsilon_e^2 = \frac{2GM}{R} \Rightarrow \upsilon_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2\frac{20}{3}10^{-11}\frac{6\times10^{24}}{64\times10^5}} = \sqrt{\frac{5}{4}10^8} = \frac{\sqrt{5}}{2}10^4 = 1{,}118034\times10^4 = 11{,}2\,\text{km/s}\ ]$$

1.3 Στο απόγειο και στο περίγειο η ταχύτητα είναι κάθετη στην ακτίνα οπότε η στροφορμή θα είναι ίση με : $L = m\upsilon r$

Η στροφορμή και η μηχανική ενέργεια διατηρούνται. Εξισώνω τις τιμές τους με τις αρχικές τιμές στο σημείο εκτόξευσης Ε.

Διατήρηση στροφορμής : $L = L_E \Rightarrow m\upsilon r = m\upsilon_0 R\sin\alpha \Rightarrow r = \dfrac{\upsilon_0 R\sin\alpha}{\upsilon}$ (1)

Διατήρηση μηχανικής ενέργειας: $E = E_E \Rightarrow \dfrac{1}{2}m\upsilon^2 - \dfrac{GmM}{r} = \dfrac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \dfrac{GmM}{R}$ (2)

Αντικαθιστώντας την (1) στη (2) παίρνω μια δευτεροβάθμια εξίσωση για την ταχύτητα ($a\upsilon^2 + b\upsilon + c = 0$)

$$\upsilon^2 - \frac{2GM}{\upsilon_0 R\sin\alpha}\upsilon + \frac{2GM}{R} - \upsilon_0^2 = 0$$

με : $a = 1,\quad b = -\dfrac{2GM}{\upsilon_0 R\sin\alpha},\quad c = \dfrac{2GM}{R} - \upsilon_0^2,\quad \Delta = b^2 - 4ac = \dfrac{4G^2M^2}{\upsilon_0^2 R^2\sin^2\alpha} - \dfrac{8GM}{R} + 4\upsilon_0^2$

Οι λύσεις της είναι :

$$\upsilon_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{GM}{\upsilon_0 R\sin\alpha} \pm \sqrt{\frac{G^2M^2}{\upsilon_0^2 R^2\sin^2\alpha} - \frac{2GM}{R} + \upsilon_0^2} \quad (3)$$

Η μεγαλύτερη λύση (+), αντιστοιχεί στην ταχύτητα στο περίγειο $\upsilon_1 = \upsilon_p$ (που στην περίπτωσή μας είναι μέσα στη Γη), ενώ η μικρότερη (–), αντιστοιχεί στην ταχύτητα στο απόγειο $\upsilon_2 = \upsilon_a$. Αυτά είναι τα δύο μόνα σημεία της τροχιάς που η ταχύτητα είναι κάθετη στην ακτίνα και ισχύει $r_a\upsilon_a = r_p\upsilon_p = L/m$.

Αντικαθιστώντας $\dfrac{GM}{R} = \dfrac{\upsilon_e^2}{2}$ και ορίζοντας $\delta = \dfrac{\upsilon_0}{\upsilon_e}$, η έκφραση (3) γίνεται :

$$\upsilon_{p,a} = \frac{\upsilon_e^2}{2\upsilon_0\sin\alpha} \pm \sqrt{\frac{\upsilon_e^4}{4\upsilon_0^2\sin^2\alpha} - \upsilon_e^2 + \upsilon_0^2} = \frac{\upsilon_e}{2\delta\sin\alpha} \pm \sqrt{\frac{\upsilon_e^2}{4\delta^2\sin^2\alpha} - \upsilon_e^2(1-\delta^2)} \quad (4)$$

Ο πρώτος όρος κάτω από τη ρίζα είναι το τετράγωνο του όρου έξω από τη ρίζα. Τον βγάζω κοινό παράγοντα και παίρνω

$$\upsilon_{p,a} = \frac{\upsilon_e}{2\delta\sin\alpha} \pm \sqrt{\frac{\upsilon_e^2}{4\delta^2\sin^2\alpha} - \upsilon_e^2(1-\delta^2)\frac{4\delta^2\sin^2\alpha}{4\delta^2\sin^2\alpha}} = \frac{\upsilon_e}{2\delta\sin\alpha} \pm \frac{\upsilon_e}{2\delta\sin\alpha}\sqrt{1-(1-\delta^2)4\delta^2\sin^2\alpha} \quad (5)$$

Παραγοντοποιώ ξανά και άρα

$$\upsilon_{p,a} = \frac{\upsilon_e}{2\delta\sin\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1-4\delta^2(1-\delta^2)\sin^2\alpha}\right) \qquad [1]$$

1.4 Για να είναι οι λύσεις πραγματικές και θετικές πρέπει η διακρίνουσα, δηλαδή ισοδύναμα η έκφραση κάτω από τη ρίζα να είναι θετική. Για αυτό αρκεί να είναι θετική όταν ο αρνητικός όρος γίνεται μέγιστος, δηλαδή το ημίτονο παίρνει τη μέγιστή τιμή του όπου $\sin^2\alpha = 1$.

$1 - 4\delta^2(1-\delta^2) = 1 - 2\cdot\ 2\delta^2\cdot\ 1 + \left(2\delta^2\right)^2 = (2\delta^2-1)^2 \geq 0$ επειδή είναι τέλειο τετράγωνο. [0,05]

Επειδή $\upsilon_c \leq \upsilon_0 \leq \upsilon_e \Rightarrow \dfrac{\upsilon_e}{\sqrt{2}} \leq \upsilon_0 \leq \upsilon_e \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq \delta \leq 1 \Rightarrow 2\delta^2 \geq 1$ [0,05]

1.5 α) $\upsilon_0 = \upsilon_e \Rightarrow \delta = 1 \Rightarrow \upsilon_a = \dfrac{\upsilon_e}{2\cdot\ 1\cdot\ \sin\alpha}\left(1 - \sqrt{1-4\cdot\ 1^2(1-1^2)\sin^2\alpha}\right) = \dfrac{\upsilon_e}{2\sin\alpha}\left(1-\sqrt{1}\right) = 0$

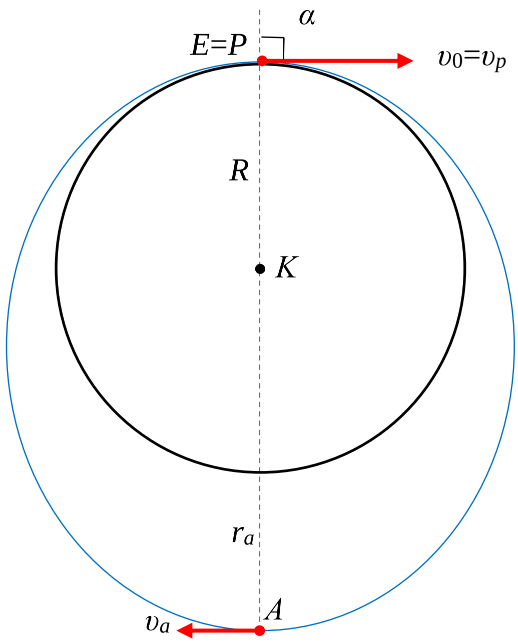
Αν η αρχική ταχύτητα είναι η ταχύτητα διαφυγής τότε η μεγαλύτερη απόσταση που θα φτάσει το βλήμα (απόγειο) θα είναι το άπειρο όπου θα έχει ταχύτητα $\upsilon_a = \upsilon_\infty = 0$.

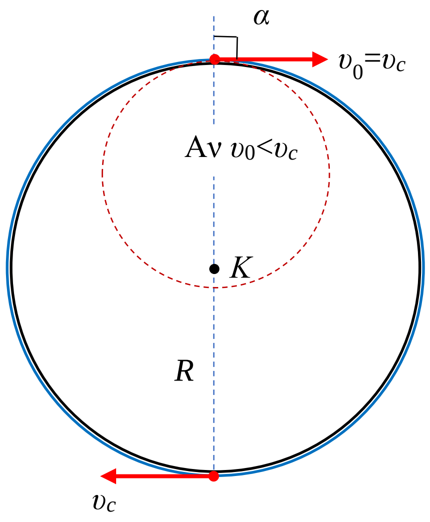
β) $\alpha = 90^\circ \Rightarrow \sin\alpha = 1 \Rightarrow \upsilon_p = \dfrac{\upsilon_e}{2\delta}\left(1 + \sqrt{\left(2\delta^2-1\right)^2}\right) = \dfrac{\upsilon_e}{2\delta}\left(1 + 2\delta^2 - 1\right) = \upsilon_e\delta = \upsilon_0$

Για $\alpha = 90^\circ$ η αρχική ταχύτητα είναι κάθετη στην ακτίνα (παράλληλη στο έδαφος) και αφού στη συνέχεια η ακτίνα θα μεγαλώσει αυτό σημαίνει ότι αρχικά βρίσκομαι στο περίγειο. Δηλαδή το σημείο εκτόξευσης Ε=Ρ είναι το περίγειο της τροχιάς του βλήματος. Το βλήμα μπαίνει σε ελλειπτική τροχιά που δεν χτυπάει τη Γη. Επιστρέφει και περνάει πάλι εφαπτομενικά από το Ε.

Αν η υ_0 είναι η ταχύτητα της κυκλικής τροχιάς, $\upsilon_0=\upsilon_c$, το βλήμα θα μπει σε τροχιά και θα εκτελεί κυκλική κίνηση λίγο πάνω από το έδαφος.
Αν η αρχική ταχύτητα είναι μικρότερη από την ταχύτητα της κυκλικής τροχιάς, $\upsilon_0<\upsilon_c$, τότε η βολή παράλληλα με το έδαφος δεν είναι εφικτή. Το βλήμα δεν θα ξεκολλήσει από την επιφάνεια αλλά θα καρφωθεί κατευθείαν στο έδαφος, λόγω της βαρύτητας.

Αν $\upsilon_0=\upsilon_e$ τότε πάλι $\upsilon_p=\dfrac{\upsilon_e}{2\cdot 1\cdot 1}\left(1+\sqrt{1-4\cdot 1^2(1-1^2)\sin^2\alpha}\right)=\dfrac{\upsilon_e}{2}\left(1+\sqrt{1}\right)=\upsilon_e=\upsilon_0$ [0,5]





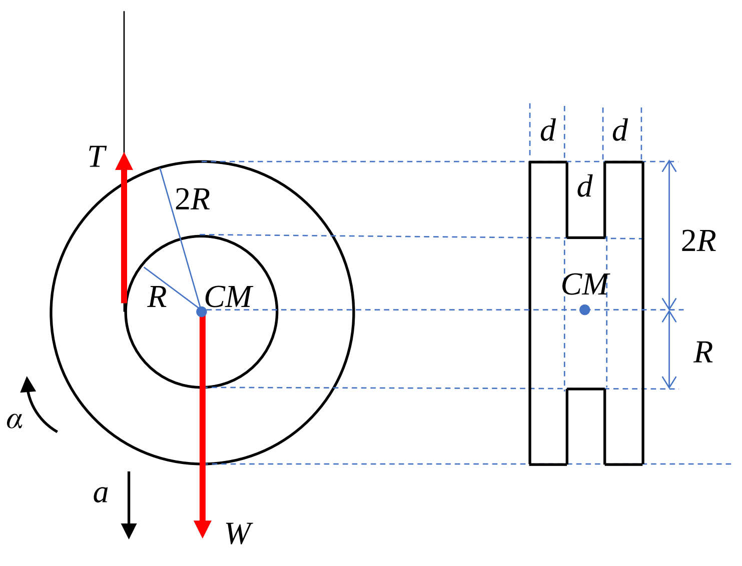
1.6 $\delta=\dfrac{\upsilon_0}{\upsilon_e}=\dfrac{10,0}{11,175}=0,89489$, $\sin\alpha=\sin(53,13^{\circ})=0,80000$

$1-4\delta^2(1-\delta^2)\sin^2\alpha=1-4(0,89489)^2\left[1-(0,89489)^2\right]0,80000^2=0,59167$

$\upsilon_a=\dfrac{\upsilon_e}{2\delta\sin\alpha}\left(1-\sqrt{1-4\delta^2(1-\delta^2)\sin^2\alpha}\right)=\dfrac{11,175}{2(0,89489)0,80000}\left(1-\sqrt{0,59167}\right)=1,8013=1,80 \text{ km/s}$

Από την (1) $r_a=\dfrac{\upsilon_0 R\sin\alpha}{\upsilon_a}=\dfrac{10,0\cdot 6371\cdot 0,80000}{1,8013}=28.295=28.300 \text{ km}$ [0,4]

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ 2



2.1 Μάζα μεσαίου δίσκου = $m = \rho V_1 = \rho d\pi R^2$
Μάζες ακραίων δίσκων = $M_{\alpha\kappa\rho} = \rho V_2 = \rho d\pi(2R)^2 = 4m$
Μάζα γιό-γιό = $M = M_{\alpha\kappa\rho} + m + M_{\alpha\kappa\rho} = 4m + m + 4m = 9m$
Ροπή αδράνειας γιο-γιό :

$$I = I_{\alpha\kappa\rho} + I_{\mu\varepsilon\sigma} + I_{\alpha\kappa\rho} = 2\frac{1}{2}M_{\alpha\kappa\rho}(2R)^2 + \frac{1}{2}mR^2 = 4m\cdot\ 4R^2 + \frac{1}{2}mR^2 = \frac{33}{2}mR^2 = \frac{33}{2}\frac{M}{9}R^2 = \frac{11}{6}MR^2 \quad [1]$$

2.2 Το νήμα δεν ολισθαίνει : $a = \alpha R$
Νόμοι Νεύτωνα μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης:

$$Mg - T = M\,a \qquad (1)$$

$$TR = I\alpha \Rightarrow T = \frac{I}{R}\frac{a}{R} \Rightarrow T = \left(I/R^2\right)a \qquad (2)$$

Αντικαθιστούμε την (2) στην (1) και παίρνουμε:

$$Mg - \left(I/R^2\right)a = Ma \Rightarrow \left(M + I/R^2\right)a = Mg \Rightarrow a = \frac{M}{M + I/R^2}g$$

Άρα $a = \dfrac{M}{M + (11/6)M}g = \dfrac{1}{1 + (11/6)}g = \dfrac{1}{(6/6) + (11/6)}g = \dfrac{1}{17/6}g = \dfrac{6}{17}g$ [1]

Ανεξάρτητη και από την ακτίνα R (μέγεθος) και από τη μάζα M , άρα ανεξάρτητη και από το υλικό του γιο-γιο. Εξαρτάται μόνο από το σχήμα.

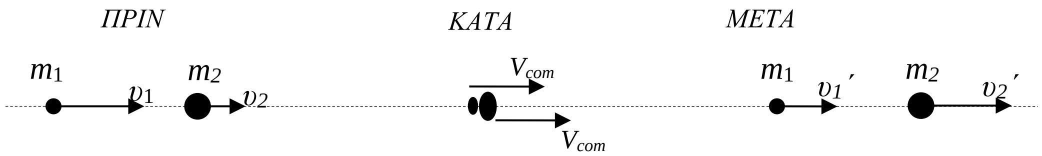
2.3 $T = \dfrac{I}{R^2}a \Rightarrow T = \dfrac{11}{6}MR^2\cdot\ \dfrac{I}{R^2}\cdot\ \dfrac{6}{17}g = \dfrac{11}{17}Mg = \dfrac{11}{17}(0{,}170)9{,}8 = 1{,}078 = 1{,}08\,\mathrm{N}$ [0,5]

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ 3

3.1 Διατήρηση ορμής

$$0 = m_1\upsilon_1 + MV \Rightarrow V = -\frac{m_1}{M}\upsilon_1 = -\frac{2}{10}(100) = -20\ \mathrm{m/s} \quad [0{,}3]$$

3.2 Αφού οι σφαίρες είναι ελαστικές η κρούση θα είναι ελαστική. Δηλαδή, εκτός από την ορμή θα διατηρείται τελικά και η κινητική ενέργεια μέρος της οποίας μετατρέπεται σε ελαστική δυναμική ενέργεια κατά την επαφή των σφαιρών και στη συνέχεια μετατρέπεται πάλι σε κινητική.



Μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατευθείαν οι τύποι της ελαστικής κρούσης βλήματος σε ακίνητο στόχο ($\upsilon_2 = 0$) :

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \qquad \text{και} \qquad \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \qquad (0)$$

$$\upsilon_1' = \frac{2-3}{2+3}100 = -20\ \mathrm{m/s} \qquad \upsilon_2' = \frac{2(2)}{2+3}(100) = 80\,\mathrm{m/s} \quad [0{,}3]$$

Αλλιώς πρέπει να επιλυθεί το δευτεροβάθμιο σύστημα

$$\left.\begin{array}{ll} m_1\upsilon_1 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' & (1) \\ \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 & (2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \upsilon_1' = \upsilon_1 - \dfrac{m_2\upsilon_2'}{m_1} \\ \upsilon_1^2 = \left(\upsilon_1 - \dfrac{m_2\upsilon_2'}{m_1}\right)^2 + \dfrac{m_2}{m_1}\upsilon_2'^2 \end{array}$$

ή με το παρακάτω τέχνασμα, «διαιρώντας» με την τετριμμένη λύση μη κρούσης : $\upsilon_1' = \upsilon_1$, $\upsilon_2' = 0$,
να κάνουμε το σύστημα πρωτοβάθμιο

$$\left.\begin{aligned} m_1(\upsilon_1^2-\upsilon_1'^2)&=m_2\upsilon_2'^2 \quad (2)\\ m_1(\upsilon_1-\upsilon_1')&=m_2\upsilon_2' \quad\ \ (1)\end{aligned}\right\} \text{ διαιρούμε } (2)\div(1)\Rightarrow \upsilon_1'+\upsilon_1=\upsilon_2'$$

Το σύστημα εξισώσεων γίνεται τώρα

$$m_1\upsilon_1=m_1\upsilon_1'+m_2\upsilon_2'$$
$$\upsilon_1'+\upsilon_1=\upsilon_2'$$

από όπου παίρνουμε εύκολα τις εξισώσεις (0) ή αντικαθιστούμε αριθμητικές τιμές και τις λύνουμε σαν σύστημα 2×2

$$\left.\begin{aligned}2(100)&=2\upsilon_1'+3\upsilon_2'\\ \upsilon_1'+100&=\upsilon_2'\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned}200&=2\upsilon_1'+3(\upsilon_1'+100)\\ \upsilon_2'&=\upsilon_1'+100\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned}-100&=5\upsilon_1'\\ \upsilon_2'&=\upsilon_1'+100\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}\upsilon_1'&=-100/5=-20\,\text{m/s}\\ \upsilon_2'&=-20+100=80\text{ m/s}\end{aligned}$$

Οι πράξεις στη δευτεροβάθμια είναι

$$\upsilon_1^2=\left(\upsilon_1-\frac{m_2\upsilon_2'}{m_1}\right)^2+\frac{m_2}{m_1}\upsilon_2'^2\Rightarrow\cancel{\upsilon_1^2}=\cancel{\upsilon_1^2}-2\frac{m_2}{m_1}\upsilon_1\upsilon_2'+\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\upsilon_2'^2+\frac{m_2}{m_1}\upsilon_2'^2$$

$$\frac{m_2}{m_1}\left[\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\upsilon'_2-2\upsilon_1\right]\upsilon_2'=0\Rightarrow\upsilon'_2=\frac{2\upsilon_1}{1+m_2/m_1}=\frac{2(100)}{1+1,5}=80\,\text{m/s}\quad\text{ή}\quad \upsilon'_2=0$$

Ή αντικαθιστώντας τιμές κατευθείαν

$$-2\frac{3}{2}100\upsilon_2'+\left(\frac{3}{2}\right)^2\upsilon_2'^2+\frac{3}{2}\upsilon_2'^2=0\Rightarrow\frac{3}{2}\left[\left(1+\frac{3}{2}\right)\upsilon'_2-200\right]\upsilon_2'=0\Rightarrow\left[\frac{5}{2}\upsilon'_2-200\right]\upsilon_2'=0\Rightarrow$$

$$\upsilon_2'=0\quad\text{ή}\quad\upsilon'_2=\frac{2(200)}{5}=\frac{400}{5}=80\,\text{m/s}$$

3.3 Κατά την ελαστική κρούση, δηλαδή όσο οι σφαίρες είναι σε επαφή, η σφαίρα 1 επιβραδύνεται ενώ η 2 επιταχύνεται από τη μεταξύ τους ελαστική άπωση. Η δυνάμεις είναι ζεύγος δράσης αντίδρασης οπότε η ορμή διατηρείται και το κέντρο μάζας των δύο σφαιρών κινείται διαρκώς με σταθερή ταχύτητα. Τη στιγμή που θα εξισωθούν οι ταχύτητές τους, οι σφαίρες θα έχουν την ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους (άρα τη μέγιστη παραμόρφωσή τους) και συνεπώς τη μέγιστη ελαστική δυναμική ενέργεια. Τη στιγμή αυτή οι ταχύτητές τους είναι ίσες και η σχετική τους ταχύτητα είναι μηδέν. Αυτή είναι η φάση της προσέγγισης όπου μέρος της κινητικής ενέργειας μετατρέπεται σε δυναμική. Στη συνέχεια και όσο εξακολουθούν να είναι σε επαφή η σφαίρα 1 συνεχίζει να επιβραδύνεται ενώ η 2 συνεχίζει να επιταχύνεται οπότε πλέον απομακρύνονται. Κατά τη φάση της απομάκρυνσης η ελαστική δυναμική ενέργεια μετατρέπεται πίσω σε κινητική.

1ος τρόπος (ο πιο γρήγορος)

Γράφουμε την κινητική ενέργεια των δύο σωμάτων σαν το άθροισμα της κινητικής ενέργειας του CM συν την κινητική ενέργεια της σχετικής τους κίνησης

$$E=K+U=K_{CM}+K_{\sigma\chi\varepsilon\tau}+U=\frac{1}{2}MV_{CM}^2+\frac{1}{2}\mu\upsilon^2+U$$

όπου : $M=m_1+m_2=2+3=5\,\text{kg}$ συνολική μάζα,

$$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}=\frac{2\cdot 3}{2+3}=\frac{6}{5}=1,2\,\text{kg} \text{ ανηγμένη μάζα}$$

$$V_{CM}=\frac{m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2}{m_1+m_2}=\frac{2(100)+3(0)}{2+3}=\frac{200}{5}=40\,\text{m/s}=\sigma\tau\alpha\theta. \text{ ταχύτητα του CM,}$$

$$\upsilon=\upsilon_1-\upsilon_2=100-0=100\,\text{m/s} \text{ σχετική ταχύτητα}$$

Δυναμική ενέργεια *U*, υπάρχει μόνο όταν οι σφαίρες είναι σε επαφή.

Διατήρηση ενέργειας :

$$E_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}}=E_{\varepsilon\gamma\gamma\acute{\upsilon}\tau\varepsilon\rho\eta\,\pi\rho\sigma\sigma\acute{\varepsilon}\gamma\gamma\iota\sigma\eta}\Rightarrow\cancel{K_{CM}}+K_{\sigma\chi\varepsilon\tau-\alpha\rho\chi}+U_{\alpha\rho\chi}=\cancel{K_{CM}}+K_{\sigma\chi\varepsilon\tau-\varepsilon\gamma\gamma\upsilon\tau.\pi\rho\sigma\sigma.}+U_{\varepsilon\gamma\gamma\upsilon\tau.\pi\rho\sigma\sigma}$$

$$\frac{1}{2}\mu\upsilon^2+0=0+U_{\max}\Rightarrow U_{\max}=\frac{1}{2}\left(\frac{2\cdot 3}{2+3}\right)(100-0)^2=6.000\,\text{J}\quad[0,9]$$

2ος τρόπος

Βρίσκουμε την κοινή ταχύτητα μέγιστης προσέγγισης από διατήρηση ορμής. Η ταχύτητα αυτή είναι η ταχύτητα του CM.

$$m_1\upsilon_1 = m_1V_{com} + m_2V_{com} \Rightarrow V_{com} = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1+m_2} = \frac{2\cdot\ 100}{2+3} = 40\,\text{m/s}$$

Διατήρηση ενέργειας

$$E_{αρχική} = E_{εγγύτερη\,προσέγγιση} \Rightarrow K_1 + K_2 + U_{αρχ} = K_1{}' + K_2{}' + U_{εγγυτ.προσ}$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + 0 + 0 = \frac{1}{2}m_1V_{com}^2 + \frac{1}{2}m_2V_{com}^2 + U_{\max} \Rightarrow U_{\max} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}\left[m_1+m_2\right]V_{com}^2 \Rightarrow$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2}2(100)^2 - \frac{1}{2}\left[2+3\right](40)^2 = 10.000 - \frac{5}{2}1.600 = 10.000 - 5\cdot\ 800 = 10.000 - 4.000 = 6.000\,\text{J}$$

δ) Το κανόνι αφού ανακρούσει κάνει απλή αρμονική ταλάντωση ξεκινώντας από τη θέση ισορροπίας όπου $x_0 = 0$, $\upsilon_0 = -V = 20$ m/s (θεωρώντας θετική την κατεύθυνση προς τα αριστερά), με κυκλική συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \Rightarrow k = M\omega^2$$

και ενέργεια

$$E = \frac{1}{2}M\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow M\upsilon_0^2 = kA^2 \Rightarrow \upsilon_0 = \omega A \ \ (1)$$

Η εξίσωση κίνησης του κανονιού θα είναι

$$x(t) = A\sin(\omega t)$$

και άρα η δύναμη από το ελατήριο θα είναι

$$F = -kx = -kA\sin(\omega t)$$

Δεν γνωρίζουμε τη σταθερά του ελατηρίου k και δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το πλάτος της ταλάντωσης A ούτε την ω.

Η ώθηση της δύναμης είναι

$$\Omega = \Delta p = \int_0^{t_{A/2}} F dt$$

και μπορεί να υπολογιστεί και με τους δύο τρόπους

1^{ος} τρόπος $\Omega = \Delta p$

Από διατήρηση της ενέργειας

$$E(x) = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2 = σταθ. \Rightarrow$$

$$E(A/2) = E(0) \Rightarrow \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_0^2 \Rightarrow M\upsilon^2 + \frac{1}{4}kA^2 = M\upsilon_0^2 \Rightarrow M\upsilon^2 + \frac{1}{4}M\upsilon_0^2 = M\upsilon_0^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 - \frac{1}{4}\upsilon_0^2 \Rightarrow \upsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}\upsilon_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}(20) = 10\sqrt{3}\ \text{m/s}$$

$$\Omega = \Delta p = M\upsilon - M\upsilon_0 = M\frac{\sqrt{3}}{2}\upsilon_0 - M\upsilon_0 = M\upsilon_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = (10)(20)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = -26,8\ \text{kg}\cdot\ \text{m/s} \quad [1]$$

$$\Omega = \Delta p = M\upsilon - M\upsilon_0 = M(\upsilon - \upsilon_0) = (10)\left(10\sqrt{3} - 20\right) = -26,8\ \text{kg}\cdot\ \text{m/s}$$

2^{ος} τρόπος $\Omega = \int_0^{t_{A/2}} F dt$

Βρίσκουμε τη χρονική στιγμή που η απομάκρυνση είναι ίση με το μισό του πλάτους.

$$x(t_{A/2}) = \frac{A}{2} \Rightarrow A\sin\omega t_{A/2} = \frac{A}{2} \Rightarrow \sin\omega t_{A/2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega t_{A/2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\Omega = \int_0^{t_{A/2}} F dt = -kA\int_0^{t_{A/2}} \sin(\omega t) dt$$

αλλαγή μεταβλητής $\varphi = \omega t \Rightarrow dt = \frac{1}{\omega}dt,$ για $t = 0$, $\varphi = 0$ και για $t = t_{A/2}$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$

$$\Omega = -\frac{kA}{\omega}\int_0^{\pi/6}\sin\varphi d\varphi = -\frac{kA^2}{\omega A}\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi/6} = -\frac{M\upsilon_0^2}{\upsilon_0}\left[-\cos\frac{\pi}{6}+\cos 0\right] \Rightarrow$$

$$\Omega = -M\upsilon_0\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right] = -(10)(20)\frac{2-\sqrt{3}}{2} = -26{,}8\ \text{N}\cdot\ \text{s}$$

όπου για τη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την (1)

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ 4

4.1 Οι εξισώσεις του Maxwell είναι:

$\vec{\nabla}\cdot\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	Gauss	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	Faraday
$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$	Gauss	$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$	Ampere-Maxwell

Στο κενό, όπου δεν υπάρχουν ηλεκτρικά φορτία ($\rho = 0$) και ηλεκτρικά ρεύματα ($\vec{J} = 0$), οι εξισώσεις του Maxwell γίνονται:

1) $\vec{\nabla}\cdot\ \vec{E} = 0$ 2) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ 3) $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ 4) $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Για να διαδίδεται ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{A}$ ως κύμα, με ταχύτητα διάδοσης υ, θα πρέπει να ικανοποιεί την κυματική εξίσωση η οποία έχει τη μορφή :

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

Παίρνουμε το στροβιλισμό της εξίσωσης 3) $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = -\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)}{\partial t}$$

Η χρονική και οι χωρικές παράγωγοι αντιμετατίθενται $\vec{\nabla}\times\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times$

Χρησιμοποιούμε τη διανυσματική ταυτότητα που δίνεται στην εκφώνηση για να ξαναγράψουμε το αριστερό σκέλος της εξίσωσης :

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\ \vec{E}\right) - \nabla^2\vec{E} = -\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)}{\partial t}$$

Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις 1) $\vec{\nabla}\cdot\ \vec{E} = 0$ και 4) $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ για να αντικαταστήσουμε τα

$\vec{\nabla}\cdot\ \vec{E}$ και $\vec{\nabla}\times\vec{B}$

$$0 - \nabla^2\vec{E} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \quad \nabla^2\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad (6) \quad [1]$$

Συγκρίνοντας με την 5) βλέπουμε ότι η 6) είναι για το ηλεκτρικό πεδίο, κυματική εξίσωση κύματος που διαδίδεται με ταχύτητα

$$\frac{1}{\upsilon^2} = \mu_0\varepsilon_0$$

Παρομοίως, παίρνουμε το στροβιλισμό της εξίσωσης 4) : $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)}{\partial t} \Leftrightarrow$

Χρησιμοποιούμε τη διανυσματική ταυτότητα που δίνεται στην εκφώνηση για να ξαναγράψουμε το αριστερό σκέλος της εξίσωσης :

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\ \vec{B}\right)-\nabla^2\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)}{\partial t}$$

Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις 2) και 3) για να αντικαταστήσουμε τα $\vec{\nabla}\cdot\ \vec{B}$ και $\vec{\nabla}\times\vec{E}$

$$-\nabla^2\vec{E}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\ \Rightarrow\qquad \nabla^2\vec{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\quad (7)\quad [1]$$

Συγκρίνοντας με την 5) βλέπουμε ότι η 7) είναι για το μαγνητικό πεδίο, κυματική εξίσωση κύματος που διαδίδεται με ταχύτητα ίδια με αυτή που διαδίδεται και το ηλεκτρικό πεδίο

$$\frac{1}{\upsilon^2}=\mu_0\varepsilon_0$$

4.2

$$\frac{1}{\upsilon^2}=\mu_0\varepsilon_0\Rightarrow\upsilon=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\Rightarrow$$

$$\upsilon=\frac{1}{\sqrt{1{,}256\ 637\ 062\times10^{-6}\ \ \mathrm{kg}\cdot\ \mathrm{m}\cdot\ \mathrm{s}^{-2}\cdot\ \mathrm{A}^{-2}\cdot\ 8{,}854\ 187\ 813\times10^{-12}\ \mathrm{A}^{2}\cdot\ \mathrm{s}^{4}\cdot\ \mathrm{kg}^{-1}\cdot\ \mathrm{m}^{-3}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1{,}256\ 637\ 062\times8{,}854\ 187\ 813}}\frac{1}{\sqrt{10^{-6}\times10^{-12}}}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{kg}\cdot\ \mathrm{m}\cdot\ \mathrm{s}^{-2}\cdot\ \mathrm{A}^{-2}\times\mathrm{A}^{2}\cdot\ \mathrm{s}^{4}\cdot\ \mathrm{kg}^{-1}\cdot\ \mathrm{m}^{-3}}}$$

$$=0{,}299\,792\,458\times10^{9}\ \mathrm{s}^{-1}\cdot\ \mathrm{m}\ \ \Rightarrow$$

$$\upsilon=299\,792\,458\ \mathrm{m/s}\quad [0{,}5]$$

Αυτή τυχαίνει να είναι η ταχύτητα του φωτός.