ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΠΙ ΠΤΥΧΙΩ, ΙΟΥΝΙΟΥ, ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2022-23

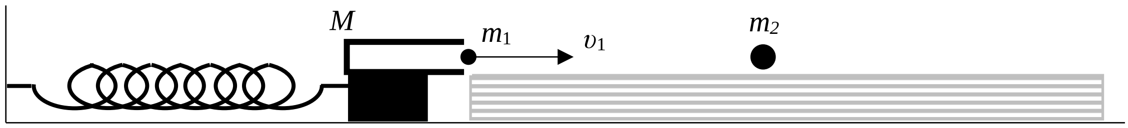
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Τετάρτη, 14 Ιουνίου 2023 10:00-12:00, ΒΠ1_11

Εισηγητής: Κώστας Φιλιππίδης (kphilippides@uowm.gr)

ΘΕΜΑ 1 [4]

Πυροβόλο όπλο M = 5 kg που εκπυρσοκροτεί, εκτοξεύει από την κάνη του ελαστικό σφαιρικό βλήμα μάζας m_1 = 1 kg με οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_1 =50 m/s. Το πυροβόλο είναι συνδεδεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Μετά την εκπυρσοκρότηση, το πυροβόλο κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο συμπιέζοντας το ελατήριο ενώ το ελαστικό βλήμα κινείται πάνω από οριζόντια αεροτράπεζα με μηδενική τριβή μέχρι να συναντήσει δεύτερη ακίνητη ελαστική σφαίρα μάζας m_2 = 3 kg που ισορροπεί αιωρούμενη πάνω από την αεροτράπεζα και με την οποία συγκρούεται κεντρικά.



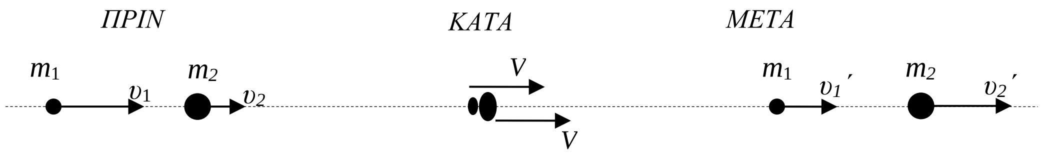
Να βρείτε:
1.1 [0,5] Την ταχύτητα ανάκρουσης του πυροβόλου μετά την εκτόξευση του βλήματος
1.2 [0,5] Την ταχύτητα της σφαίρας m_2 μετά από την κρούση της με το ελαστικό βλήμα.
1.3 [1,5] Την μέγιστη δυναμική ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης κατά τη διάρκεια της κρούσης των δύο ελαστικών σφαιρών.
1.4 [1,5] Την ώθηση που δέχτηκε από το ελατήριο το πυροβόλο, από τη στιγμή της εκπυρσοκρότησης μέχρι να συσπειρωθεί κατά το μισό της μέγιστης συσπείρωσης του.

ΛΥΣΗ

1.1 Διατήρηση ορμής

$$0 = m_1\upsilon_1 + MV \Rightarrow V = -\frac{m_1}{M}\upsilon_1 = -\frac{1}{5}(50) = -10 \text{ m/s} \quad [0,5]$$

1.2 Αφού οι σφαίρες είναι ελαστικές η κρούση θα είναι ελαστική. Δηλαδή, εκτός από την ορμή θα διατηρείται τελικά και η κινητική ενέργεια μέρος της οποίας μετατρέπεται σε ελαστική δυναμική ενέργεια κατά την επαφή των σφαιρών και στη συνέχεια μετατρέπεται πάλι σε κινητική.



Μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατευθείαν οι τύποι της ελαστικής κρούσης βλήματος σε ακίνητο στόχο ($\upsilon_2 = 0$) :

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \qquad \text{και} \qquad \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \qquad (0)$$

$$\upsilon_1' = \frac{1-3}{1+3}50 = -25 \text{ m/s} \qquad \upsilon_2' = \frac{2(1)}{1+3}(50) = 25 \text{m/s} \quad [0,5]$$

Αλλιώς πρέπει να επιλυθεί το δευτεροβάθμιο σύστημα

$$\left.\begin{array}{ll} m_1\upsilon_1 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' & (1) \\ \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 & (2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \upsilon_1' = \upsilon_1 - \dfrac{m_2\upsilon_2'}{m_1} \\ \upsilon_1^2 = \left(\upsilon_1 - \dfrac{m_2\upsilon_2'}{m_1}\right)^2 + \dfrac{m_2}{m_1}\upsilon_2'^2 \end{array}$$

ή με το παρακάτω τέχνασμα, «διαιρώντας» με την τετριμμένη λύση μη κρούσης : $\upsilon_1' = \upsilon_1$, $\upsilon_2' = 0$,
να κάνουμε το σύστημα πρωτοβάθμιο

$$\left.\begin{matrix} m_1(\upsilon_1^2 - \upsilon_1'^2) = m_2\upsilon_2'^2 \quad (2) \\ m_1(\upsilon_1 - \upsilon_1') = m_2\upsilon_2' \quad (1) \end{matrix}\right\} \text{ διαιρούμε } (2) \div (1) \Rightarrow \upsilon_1' + \upsilon_1 = \upsilon_2'$$

Το σύστημα εξισώσεων γίνεται τώρα

$$m_1\upsilon_1 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2'$$
$$\upsilon_1' + \upsilon_1 = \upsilon_2'$$

από όπου παίρνουμε εύκολα τις εξισώσεις (0) ή αντικαθιστούμε αριθμητικές τιμές και τις λύνουμε σαν σύστημα 2×2

$$\left.\begin{matrix} 1(50) = 1\upsilon_1' + 3\upsilon_2' \\ \upsilon_1' + 50 = \upsilon_2' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 50 = \upsilon_1' + 3(\upsilon_1' + 50) \\ \upsilon_2' = \upsilon_1' + 50 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -100 = 4\upsilon_1' \\ \upsilon_2' = \upsilon_1' + 50 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \upsilon_1' = -100/4 = -25\,\text{m/s} \\ \upsilon_2' = -25 + 50 = 25\text{ m/s} \end{matrix}$$

Οι πράξεις στη δευτεροβάθμια είναι

$$\upsilon_1^2 = \left(\upsilon_1 - \frac{m_2\upsilon_2'}{m_1}\right)^2 + \frac{m_2}{m_1}\upsilon_2'^2 \Rightarrow \qquad \cancel{\upsilon_1^2} = \cancel{\upsilon_1^2} - 2\frac{m_2}{m_1}\upsilon_1\upsilon_2' + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\upsilon_2'^2 + \frac{m_2}{m_1}\upsilon_2'^2 \quad (3)$$

$$\frac{m_2}{m_1}\left[\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\upsilon_2' - 2\upsilon_1\right]\upsilon_2' = 0 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2\upsilon_1}{1 + m_2/m_1} = \frac{2(50)}{1+3} = 25\,\text{m/s} \quad \text{ή} \quad \upsilon_2' = 0$$

Ή αντικαθιστώντας τιμές κατευθείαν στην 3

$$-2\frac{3}{1}50\upsilon_2' + \left(\frac{3}{1}\right)^2\upsilon_2'^2 + \frac{3}{1}\upsilon_2'^2 = 0 \Rightarrow 3\left[(1+3)\upsilon_2' - 100\right]\upsilon_2' = 0 \Rightarrow \left[4\upsilon_2' - 100\right]\upsilon_2' = 0 \Rightarrow$$

$$\upsilon_2' = 0 \quad \text{ή} \quad \upsilon_2' = \frac{100}{4} = 25\,\text{m/s}$$

1.3 Κατά την ελαστική κρούση, δηλαδή όσο οι σφαίρες είναι σε επαφή, η σφαίρα 1 επιβραδύνεται ενώ η 2 επιταχύνεται από τη μεταξύ τους ελαστική άπωση. Η δυνάμεις είναι ζεύγος δράσης αντίδρασης οπότε η ορμή διατηρείται και το κέντρο μάζας των δύο σφαιρών κινείται διαρκώς με σταθερή ταχύτητα. Τη στιγμή που θα εξισωθούν οι ταχύτητές τους, οι σφαίρες θα έχουν την ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους (άρα τη μέγιστη παραμόρφωσή τους) και συνεπώς τη μέγιστη ελαστική δυναμική ενέργεια. Τη στιγμή αυτή οι ταχύτητές τους είναι ίσες και η σχετική τους ταχύτητα είναι μηδέν. Αυτή είναι η φάση της προσέγγισης όπου μέρος της κινητικής ενέργειας μετατρέπεται σε δυναμική. Στη συνέχεια και όσο εξακολουθούν να είναι σε επαφή η σφαίρα 1 συνεχίζει να επιβραδύνεται ενώ η 2 συνεχίζει να επιταχύνεται οπότε πλέον απομακρύνονται. Κατά τη φάση της απομάκρυνσης η ελαστική δυναμική ενέργεια μετατρέπεται πίσω σε κινητική.

1^{ος} τρόπος (ο πιο γρήγορος)

Γράφουμε την κινητική ενέργεια των δύο σωμάτων σαν το άθροισμα της κινητικής ενέργειας του CM συν την κινητική ενέργεια της σχετικής τους κίνησης

$$E = K + U = K_{CM} + K_{\sigma\chi\varepsilon\tau} + U = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu\upsilon^2 + U$$

όπου : $M = m_1 + m_2 = 1 + 3 = 4$ kg συνολική μάζα,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1\cdot 3}{1+3} = \frac{3}{4} = 0{,}75\,\text{kg} \text{ ανηγμένη μάζα}$$

$$V_{CM} = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} = \frac{1(50) + 3(0)}{1+3} = \frac{50}{4} = 12{,}5\,\text{m/s} = \sigma\tau\alpha\theta. \text{ ταχύτητα του CM,}$$

$$\upsilon = \upsilon_1 - \upsilon_2 = 50 - 0 = 50\,\text{m/s} \text{ σχετική ταχύτητα}$$

Δυναμική ενέργεια U, υπάρχει μόνο όταν οι σφαίρες είναι σε επαφή.

Διατήρηση ενέργειας :

$$E_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}} = E_{\varepsilon\gamma\gamma\acute{\upsilon}\tau\varepsilon\rho\eta\,\pi\rho o\sigma\acute{\varepsilon}\gamma\gamma\iota\sigma\eta} \Rightarrow \cancel{K_{CM}} + K_{\sigma\chi\varepsilon\tau-\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = \cancel{K_{CM}} + K_{\sigma\chi\varepsilon\tau-\varepsilon\gamma\gamma\upsilon\tau.\pi\rho o\sigma.} + U_{\varepsilon\gamma\gamma\upsilon\tau.\pi\rho o\sigma}$$

$$\frac{1}{2}\mu\upsilon^2 + 0 = 0 + U_{\max} \Rightarrow U_{\max} = \frac{1}{2}\left(\frac{1\cdot 3}{1+3}\right)(50-0)^2 = 937{,}5\text{ J} \quad [1{,}5]$$

$2^{ος}$ τρόπος

Βρίσκουμε την κοινή ταχύτητα V_κ μέγιστης προσέγγισης από διατήρηση ορμής. Η ταχύτητα αυτή είναι η ταχύτητα του CM.

$$m_1\upsilon_1 = m_1V_\kappa + m_2V_\kappa \Rightarrow V_\kappa = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1+m_2} = \frac{1\cdot\ 50}{1+3} = 12{,}5\,\text{m/s}$$

Διατήρηση ενέργειας

$$E_{αρχική} = E_{εγγύτερη\,προσέγγιση} \Rightarrow K_1 + K_2 + U_{αρχ} = K_1' + K_2' + U_{εγγυτ.προσ}$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + 0 + 0 = \frac{1}{2}m_1V^2 + \frac{1}{2}m_2V^2 + U_{\max} \Rightarrow U_{\max} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}\left[m_1+m_2\right]V^2 \Rightarrow$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2}1(50)^2 - \frac{1}{2}\left[1+3\right](12{,}5)^2 = 1.250 - 2(156{,}25) = 1.250 - 312{,}5 = 937{,}5\ \text{J}$$

1.4 Το κανόνι αφού ανακρούσει κάνει απλή αρμονική ταλάντωση ξεκινώντας από τη θέση ισορροπίας όπου $x_0 = 0$, $\upsilon_0 = -V = 10$ m/s (θεωρώντας θετική την κατεύθυνση προς τα αριστερά), με κυκλική συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \Rightarrow k = M\omega^2$$

και ενέργεια

$$E = \frac{1}{2}M\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow M\upsilon_0^2 = kA^2 \Rightarrow \upsilon_0 = \omega A \ \ (1)$$

Η εξίσωση κίνησης του κανονιού θα είναι

$$x(t) = A\sin(\omega t)$$

και άρα η δύναμη από το ελατήριο θα είναι

$$F = -kx = -kA\sin(\omega t)$$

Δεν γνωρίζουμε τη σταθερά του ελατηρίου k και δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το πλάτος της ταλάντωσης A ούτε την ω.

Η ώθηση της δύναμης είναι

$$\Omega = \Delta p = \int_0^{t_{A/2}} Fdt$$

και μπορεί να υπολογιστεί και με τους δύο τρόπους

$1^{ος}$ τρόπος $\Omega = \Delta p$

Από διατήρηση της ενέργειας

$$E(x) = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2 = σταθ. \Rightarrow$$

$$E(A/2) = E(0) \Rightarrow \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_0^2 \Rightarrow M\upsilon^2 + \frac{1}{4}kA^2 = M\upsilon_0^2 \Rightarrow M\upsilon^2 + \frac{1}{4}M\upsilon_0^2 = M\upsilon_0^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 - \frac{1}{4}\upsilon_0^2 \Rightarrow \upsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}\upsilon_0$$

$$\Omega = \Delta p = M\upsilon - M\upsilon_0 = M\frac{\sqrt{3}}{2}\upsilon_0 - M\upsilon_0 = M\upsilon_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = (5)(10)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = -6{,}6987 = -6{,}70\ \text{kg}\cdot\ \text{m/s}$$

[1,5]

$2^{ος}$ τρόπος $\Omega = \int_0^{t_{A/2}} Fdt$

Βρίσκουμε τη χρονική στιγμή που η απομάκρυνση είναι ίση με το μισό του πλάτους.

$$x(t_{A/2}) = \frac{A}{2} \Rightarrow A\sin\omega t_{A/2} = \frac{A}{2} \Rightarrow \sin\omega t_{A/2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ \omega t_{A/2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\Omega = \int_0^{t_{A/2}} Fdt = -kA\int_0^{t_{A/2}} \sin(\omega t)dt$$

αλλαγή μεταβλητής $\varphi = \omega t \Rightarrow\ dt = \frac{1}{\omega}dt,\quad$ για $t=0$, $\varphi = 0$ και για $t = t_{A/2}$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$

$$\Omega = -\frac{kA}{\omega}\int_0^{\pi/6}\sin\varphi d\varphi = -\frac{kA^2}{\omega A}\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi/6} = -\frac{M\upsilon_0^2}{\upsilon_0}\left[-\cos\frac{\pi}{6}+\cos 0\right] \Rightarrow$$

$$\Omega = -M\upsilon_0\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right] = -(5)(10)\frac{2-\sqrt{3}}{2} = -6,70\ \text{N}\cdot\text{s}$$

όπου για τη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την (1)

ΘΕΜΑ 2. [3]

Να γράψετε στο SI τις εξισώσεις που δίνουν τη χρονική και τη χωρική εξάρτηση των διανυσμάτων του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου ενός ημιτονοειδούς ηλεκτρομαγνητικού κύματος συχνότητας 12×10^{14} Hz που διαδίδεται προς τον θετικό ημιάξονα x και του οποίου το ηλεκτρικό πεδίο έχει πλάτος 24 V/m.

Δίνεται $c = 3\times10^8$ m/s.

ΛΥΣΗ

Επειδή το κύμα διαδίδεται στο θετικό ημιάξονα x η φάση θα είναι : $\omega t - kx$ ή $kx - \omega t$ χωρίς να έχει σημασία ποιος όρος έχει το αρνητικό πρόσημο. Το βασικό είναι ότι χρειάζεται σχετικό πρόσημο μείον (–) μεταξύ των δύο όρων. Το συνολικό πρόσημο μπορεί να απορροφηθεί στην κατεύθυνση των πλατών $\vec{E}_{\max}$, $\vec{B}_{\max}$.

Άρα :

$$\vec{E} = \sin(\omega t - kx)\vec{E}_{\max}, \qquad \vec{B} = \sin(\omega t - kx)\vec{B}_{\max}$$

όπου $\vec{E}_{\max} = E_{\max}\hat{E}$, $\vec{B}_{\max} = B_{\max}\hat{B}$ με τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{E}$, $\hat{B}$ να δείχνουν τις κατευθύνσεις στις οποίες βρίσκονται το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα.

Η κυκλική συχνότητα είναι : $\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot 12\times10^{14} = 24\pi\times10^{14}$ rad/s

Ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται στο κενό με την ταχύτητα του φωτός άρα πρέπει : $\frac{\omega}{k} = c$

Ο κυματαριθμός είναι : $k = \frac{\omega}{c} = \frac{24\pi\times10^{14}}{3\times10^8} = 8\pi\times10^6\ \text{m}^{-1}$

Οπότε η φάση είναι: $\omega t - kx = 24\pi\times10^{14}t - 8\pi\times10^6 x = 8\pi10^6(3\times10^8 t - x)$

Άρα : $\vec{E} = E_{\max}\sin\left(8\pi10^6(3\cdot 10^8 t - x)\right)\hat{E}$, $\qquad \vec{B} = B_{\max}\sin\left(8\pi10^6(3\cdot 10^8 t - x)\right)\hat{B} \qquad$ (SI)

Τα μέτρα των πλατών των πεδίων ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος συνδέονται με τη σχέση:

$$B_{\max} = \frac{E_{\max}}{c} = \frac{24}{3\times10^8} = 8\times10^{-8}\ \text{T}$$

Άρα : $\vec{E} = 24\sin\left(8\pi10^6(3\cdot 10^8 t - x)\right)\hat{E}$, $\qquad \vec{B} = 8\times10^{-8}\sin\left(8\pi10^6(3\cdot 10^8 t - x)\right)\hat{B} \qquad$ (SI)

Μένει μόνο να καθορίσουμε τις κατευθύνσεις $\hat{E}$, $\hat{B}$ των πεδίων. Ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι εγκάρσιο. Τα πεδία είναι κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης :

$$\hat{E}\cdot\hat{x} = 0, \quad \hat{B}\cdot\hat{x} = 0, \quad \hat{E}\cdot\hat{B} = 0,$$

οπότε θα βρίσκονται στο επίπεδο $y - z$. Έστω $\hat{E} = \hat{y}\cos\theta + \hat{z}\sin\theta$

Η διάδοση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος γίνεται στη διεύθυνση του διανύσματος Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} \text{ η οποία είναι η } \hat{x}$$

Οπότε πρέπει $\hat{B} = -\hat{y}\sin\theta + \hat{z}\cos\theta$ ώστε :

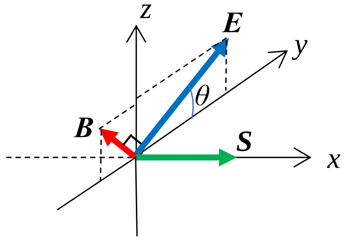
$$\hat{E}\cdot\hat{B} = (\hat{y}\cos\theta + \hat{z}\sin\theta)\cdot(-\hat{y}\sin\theta + \hat{z}\cos\theta) = \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta = 0$$

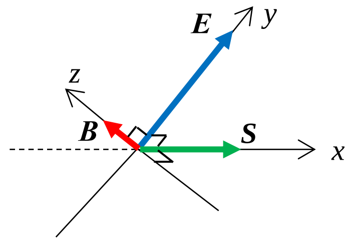
$$\hat{E}\times\hat{B}=(\hat{y}\cos\theta+\hat{z}\sin\theta)\times(-\hat{y}\sin\theta+\hat{z}\cos\theta)=\hat{y}\times\hat{z}\cos^2\theta-\hat{z}\times\hat{y}\sin^2\theta=\hat{x}\cos^2\theta-(-\hat{x})\sin^2\theta=\hat{x}$$

Άρα :

$$\vec{E}=24\sin\left(8\pi 10^6(3\cdot\ 10^8 t-x)\right)\left(\hat{y}\cos\theta+\hat{z}\sin\theta\right)\qquad \text{(SI)}$$

$$\vec{B}=8\times 10^{-8}\sin\left(8\pi 10^6(3\cdot\ 10^8 t-x)\right)\left(-\hat{y}\sin\theta+\hat{z}\cos\theta\right)\qquad \text{(SI)}$$





Χωρίς απώλεια γενικότητας, επειδή οι άξονες είναι αυθαίρετοι, δηλ. η θ είναι αυθαίρετη, θα μπορούσατε να ορίσετε ως άξονα *y* την κατεύθυνση στην οποία βρίσκεται το ηλεκτρικό πεδίο, δηλ. θ=0 οπότε

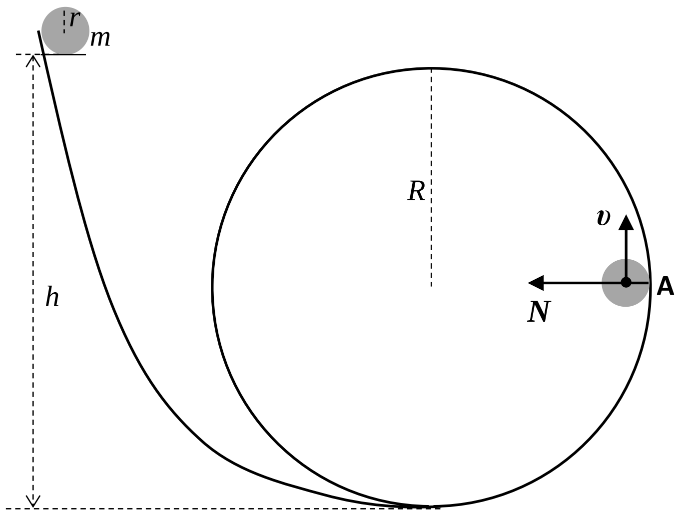
$$\vec{E}=24\sin\left(8\pi 10^6(3\cdot\ 10^8 t-x)\right)\hat{y}\qquad \text{(SI)}$$

$$\vec{B}=8\times 10^{-8}\sin\left(8\pi 10^6(3\cdot\ 10^8 t-x)\right)\hat{z}\qquad \text{(SI)}$$

απάντηση η οποία θεωρείται επίσης σωστή.

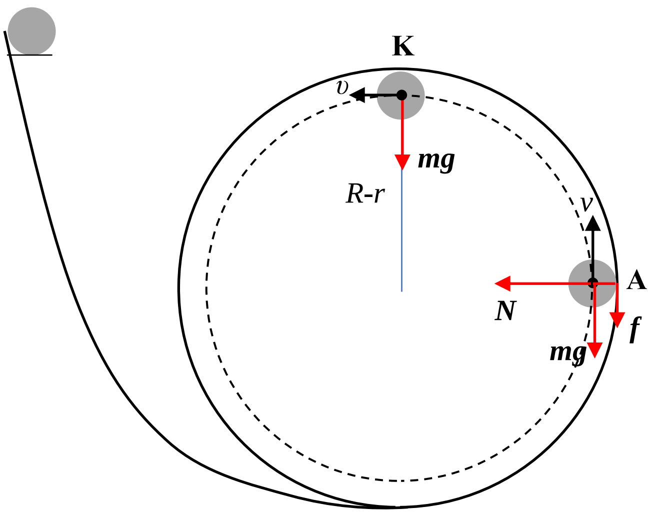
ΘΕΜΑ 3. [3]

Η συμπαγής μικρή σφαίρα αφήνεται να κυλίσει από το ελάχιστο απαιτούμενο ύψος ώστε να εκτελέσει οριακά ανακύκλωση μέσα στον μεγαλύτερο κυκλικό οδηγό. Να βρείτε το λόγο της κάθετης αντίδρασης από το δάπεδο προς το βάρος της σφαίρας *N*/*mg* στο σημείο Α που η ταχύτητά της είναι κατακόρυφη. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας είναι ίση με I = 0,7mr^2



ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στη σφαίρα στο σημείο Α και στην κορυφή Κ.



Στο σημείο **Α η κάθετη αντίδραση είναι η κεντρομόλος** : $\sum F_r = ma_c \Rightarrow \; N = m\dfrac{v^2}{R-r}$ (1)

Βρίσκουμε την ταχύτητα v στο Α από την ταχύτητα υ στο Κ από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας. Βρίσκουμε την ταχύτητα στο Κ από τη συνθήκη οριακής ανακύκλωσης :
«η κάθετη αντίδραση είναι μηδέν στο **Κ και άρα μόνο το βάρος να παρέχει την κεντρομόλο δύναμη**»

$$\sum F_r = ma_c \Rightarrow \; mg = m\frac{\upsilon^2}{R-r} \Rightarrow \upsilon^2 = g(R-r) \;\; (2)$$

Η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει οπότε σε κάθε σημείο Σ του κυκλικού οδηγού ισχύει: $\omega_\Sigma = \dfrac{\upsilon_\Sigma}{r}$ (3)

Εξισώνουμε τη μηχανική ενέργεια στα σημεία Κ και Α, χρησιμοποιούμε τις (2) και (3) και παίρνουμε :

$$E_K = E_A \Rightarrow mg(R-r) + \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I^2\omega_K^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I^2\omega_A^2 \Rightarrow$$

$$mg(R-r) + \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}0,7mr^2\frac{\upsilon^2}{r^2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}0,7mr^2\frac{v^2}{r^2} \Rightarrow$$

$$2g(R-r) + \upsilon^2 + 0,6\upsilon^2 = v^2 + 0,6r^2v^2 \Rightarrow$$

$$(2+1+0,7)g(R-r) = (1+0,7)v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{3,7}{1,7}g(R-r) = \frac{37}{17}g(R-r)$$

Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε τελικά :

$$N = m\frac{v^2}{R-r} = m\frac{37g(R-r)/17}{R-r} \Rightarrow \; \frac{N}{mg} = \frac{37}{17} = 2{,}1765$$