ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2021-22

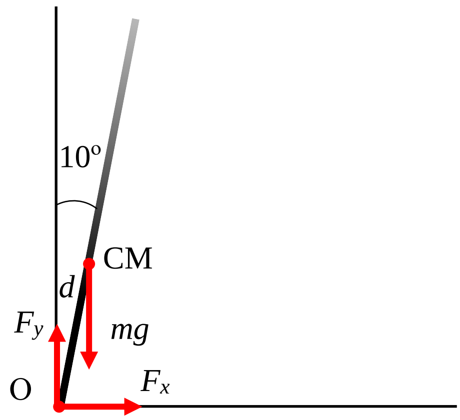
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Παρασκευή, 24 Ιανουαρίου 2022 12-14:30 μ.μ. ΑΜΦ1
Εισηγητής: Κώστας Φιλιππίδης (kphilippides@uowm.gr)

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα και αξίας 2,5 μονάδων

ΘΕΜΑ 1.

Η λεπτή ευθύγραμμη μη ομογενής ράβδος του σχήματος, αφήνεται ελεύθερη από αρχική γωνία $\theta_0 = 10^{\text{o}}$. Ο κατακόρυφος τοίχος και το οριζόντιο δάπεδο είναι λεία. Να βρείτε τη γωνία θ στην οποία η ράβδος θα χάσει την επαφή με τον τοίχο.



Όταν η ράβδος χάσει την επαφή με τον τοίχο η οριζόντια δύναμη F_y θα μηδενιστεί και μαζί της θα μηδενιστεί και η οριζόντια επιτάχυνση $\ddot{x}$ του CM. Θέτοντας $\ddot{x}=0$ βρίσκουμε τη γωνία που χάνεται η επαφή.

$$x = d\sin\theta \Rightarrow \dot{x} = d\cos\theta\cdot\ \dot{\theta} \Rightarrow \ddot{x} = d\cos\theta\cdot\ \ddot{\theta} - d\sin\theta\cdot\ \dot{\theta}^2$$

Χρειαζόμαστε εκφράσεις για την γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}$ και την γωνιακή επιτάχυνση $\ddot{\theta}$. Η ράβδος περιστρέφεται γύρω από το Ο. Τη γωνιακή επιτάχυνση την βρίσκουμε από την αρχή της στροφορμής και την γωνιακή επιτάχυνση από την αρχή διατήρησης της ενέργειας.

$$\tau_{\text{O}} = I_{\text{O}}\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{mgd\sin\theta}{I_{\text{O}}} \quad , \qquad mgy_0 = mgy + \frac{1}{2}I_{\text{O}}\dot{\theta}^2 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2mgd(\cos\theta_0 - \cos\theta)}{I_{\text{O}}}$$

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow d\cos\theta\cdot\ \ddot{\theta} - d\sin\theta\cdot\ \dot{\theta}^2 = 0 \Rightarrow d\cos\theta\frac{mgd\sin\theta}{I_{\text{O}}} - d\sin\theta\frac{2mgd(\cos\theta_0 - \cos\theta)}{I_{\text{O}}} = 0 \Rightarrow$$

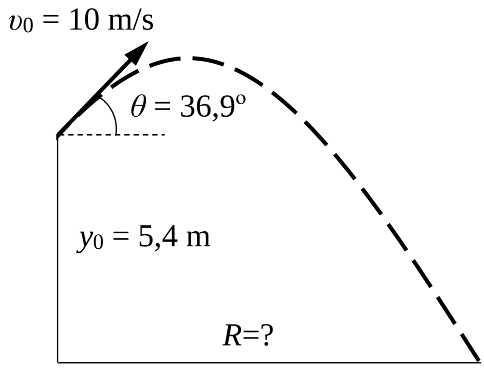
$$\frac{mgd^2}{I_{\text{O}}}\sin\theta\left[\cos\theta - 2\cos\theta_0 + 2\cos\theta\right] = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}\cos\theta_0 \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\cos 10^{\text{o}}\right) \Rightarrow$$

$$\theta = \cos^{-1}(0,65655385) = 48,964^{\text{o}} \simeq 49^{\text{o}}$$

Όσοι και όσες ξέχασαν να βάλουν τις τελίτσες στην $\dot{\theta}$ και στην $\ddot{\theta}$ επειδή από εκεί που τις αντέγραψαν δεν φαινόντουσαν καθαρά οι τελίτσες κόβονται με 4,9.

ΘΕΜΑ 2.

Βρείτε το βεληνεκές R της βολής.
g = 10 N/kg.



$$y = y_0 + \upsilon_0\sin\theta\cdot\ t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = 5,4 + 6\cdot\ t - 5t^2$$

Βρίσκουμε το χρόνο πτήσης T>0 , θέτοντας y=0 και λύνοντας τη δευτεροβάθμια

$$5,4+6\cdot t-5t^2=0 \Rightarrow t^2-1,2t-1,08=0$$
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}=\sqrt{1,2^2-4\cdot 1\cdot(-1,08)}=\sqrt{1,44+4,32}=\sqrt{5,76}=2,4$$
$$t_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{1,2\pm 2,4}{2}=1,8 \quad \text{και} \quad -0,6 \quad \text{άρα} \quad T=1,8\ \text{s}$$
Το βεληνεκές είναι : $R=\upsilon_{0x}T=\upsilon_0\cos\theta\cdot T=10\cdot 0,8\cdot 1,8=14,4$ m

Όσοι και όσες χρησιμοποίησαν έτοιμο τον τύπο $R=\frac{R_0}{2}\left(1+\sqrt{1+y_0/h_0}\right)$!!!! από τις λυμένες ασκήσεις κόβονται με 4,9 (γιατί να το κάνει κάποιος αυτό !? και που να τον βρει αυτόν τον τύπο !?1?).

ΘΕΜΑ 3.

Να γράψετε στο SI τις εξισώσεις που δίνουν τη χρονική και τη χωρική εξάρτηση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου ενός ημιτονοειδούς ηλεκτρομαγνητικού κύματος συχνότητας 6×10^{14} Hz που διαδίδεται προς τον αρνητικό ημιάξονα $-z$ και του οποίου το ηλεκτρικό πεδίο έχει σταθερό πλάτος 12 V/m. Δίνεται $c=3\times10^8$ m/s.

$\frac{\text{V}}{\text{m}}=\frac{\text{J}}{\text{C}}\frac{1}{\text{m}}=\frac{\text{N}\times\text{m}}{\text{C}\times\text{m}}=\frac{\text{N}}{\text{C}}$ όπως προκύπτει από τον ορισμό του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{F}=q\vec{E}$

Άρα όλες οι μονάδες είναι στο SI, οπότε και τα αποτελέσματα θα είναι στο SI.

Τα μέτρα των πεδίων συνδέονται με τη σχέση: $B=\frac{E}{c}=\frac{12}{3\times10^8}=4\times10^{-8}$ T

Τα πεδία είναι κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης (εγκάρσιο κύμα) ενώ έχουν την ίδια φάση.

Η κυκλική συχνότητα είναι : $\omega=2\pi f=2\pi\cdot 6\times10^{14}=12\pi\times10^{14}$ rad/s

Το κύμα διαδίδεται με την ταχύτητα του φωτός : $c=\frac{\omega}{k}$

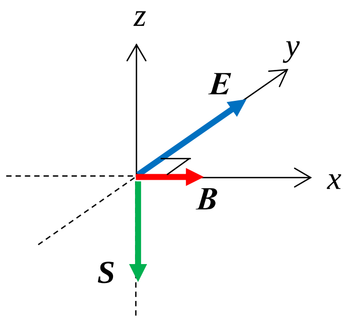
Ο κυματαριθμός είναι : $k=\frac{\omega}{c}=\frac{12\pi\times10^{14}}{3\times10^8}=4\pi\times10^6\ \text{m}^{-1}$

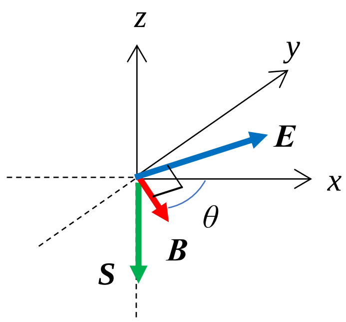
Η φάση είναι $kz+\omega t=4\pi\times10^6 z+12\pi\times10^{14}t=4\pi\times10^6(z+3\times10^8 t)$, (+ επειδή διαδίδεται στην $-z$)

Η διάδοση του κύματος γίνεται στην κατεύθυνση $\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$ η οποία είναι η $-\hat{z}$

$$\vec{E}\times\vec{B}\uparrow\uparrow-\hat{z}\Rightarrow\vec{B}\times\vec{E}\uparrow\uparrow\hat{z}\Rightarrow\vec{B}\uparrow\uparrow\hat{x} \quad \text{και} \quad \hat{E}\uparrow\uparrow\hat{y} \quad \text{αφού} \quad \hat{x}\times\hat{y}=\hat{z}$$

Άρα μία λύση είναι :
$$\vec{E}=12\sin\left\lfloor 4\pi\times10^6(z+3\times10^8 t)\right\rfloor\hat{y} \qquad \text{(SI)}$$
$$\vec{B}=4\times10^{-8}\sin\left\lfloor 4\pi\times10^6(z+3\times10^8 t)\right\rfloor\hat{x} \qquad \text{(SI)}$$



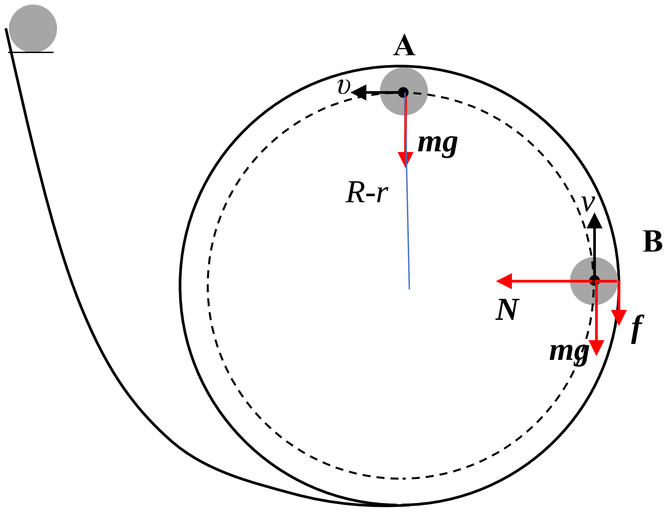


Γενικά τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ πρέπει να είναι σε κάθετες διευθύνσεις στο επίπεδο *x-y* φτιάχνοντας ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων με το $-\hat{z}$. Άρα περιστρέφοντας γύρω από τον άξονα *z* κατά γωνία $0\leq\theta<2\pi$ είναι επίσης αποδεκτή λύση
$$\vec{E}=12\sin\left\lfloor 4\pi\times10^6(z+3\times10^8 t)\right\rfloor(\hat{x}\sin\theta+\hat{y}\cos\theta) \qquad \text{(SI)}$$

$$\vec{B} = 4\times10^{-8}\sin\left\lfloor 4\pi\times10^{6}(z+3\times10^{8}t)\right\rfloor(\hat{x}\cos\theta-\hat{y}\sin\theta) \quad \text{(SI)}$$

ΘΕΜΑ 4.

Η συμπαγής ομογενής μικρή σφαίρα αφήνεται να κυλίσει από το ελάχιστο απαιτούμενο ύψος ώστε να εκτελέσει οριακά ανακύκλωση μέσα στον μεγαλύτερο κυκλικό οδηγό. Να βρείτε το λόγο της κάθετης αντίδρασης από το δάπεδο προς το βάρος της σφαίρας N/mg στο σημείο Β που η ταχύτητά της είναι κατακόρυφη. Η ροπή αδράνειας συμπαγούς ομογενούς σφαίρας δίνεται από τον τύπο $I = 0{,}4mr^2$



Στο σημείο Β η κάθετη αντίδραση είναι η κεντρομόλος : $N = m\dfrac{v^2}{R-r}$

Βρίσκουμε την ταχύτητα στο Β από την ταχύτητα στο Α με διατήρηση ενέργειας. Βρίσκουμε την ταχύτητα στο Α από τη συνθήκη οριακής ανακύκλωσης : η κάθετη αντίδραση στο Α είναι μηδέν και άρα μόνο το βάρος παρέχει την κεντρομόλο δύναμη: $mg = m\dfrac{\upsilon^2}{R-r} \Rightarrow \upsilon^2 = g(R-r)$

$$E_A = E_B \Rightarrow mg(R-r)+\frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}0{,}4mr^2\frac{\upsilon^2}{r^2} = \frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}0{,}4mr^2\frac{v^2}{r^2} \Rightarrow$$

$$(2+1+0{,}4)g(R-r) = (1+0{,}4)v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{3{,}4}{1{,}4}g(R-r) = \frac{17}{7}g(R-r)$$

$$N = m\frac{v^2}{R-r} = m\frac{17g(R-r)/7}{R-r} \Rightarrow \frac{N}{mg} = \frac{17}{7} = 2{,}429$$

Όσοι και όσες έδωσαν αποτέλεσμα με τον τύπο $v^2 = \dfrac{3+\kappa}{1+\kappa}g(R-r)$ από τις λυμένες ασκήσεις χωρίς καν να καταλάβουν ότι το κ=0,4 και να καταλήξουν σε αριθμητικό αποτέλεσμα κόβονται με 4,9.
