ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2023-24

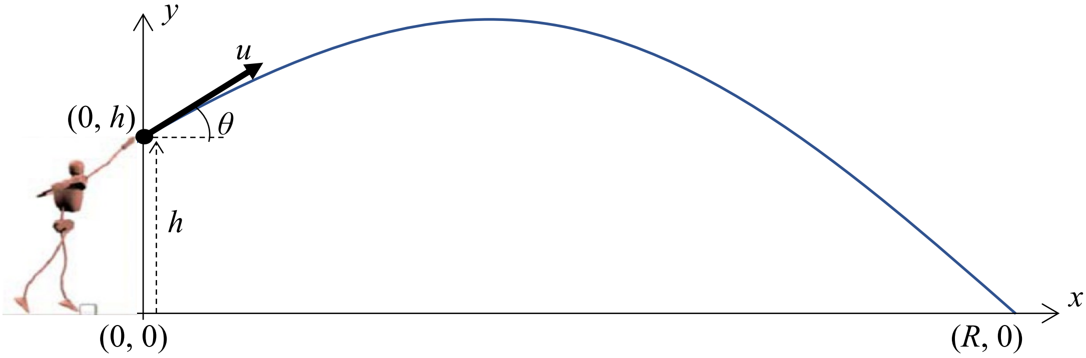
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Παρασκευή, 9 Φεβρουαρίου 2024: 15:00-18:00 π.μ. Αίθουσες: Αμφιθέατρο ΑΠ1_8
Εισηγητής: Κώστας Φιλιππίδης (kphilippides@uowm.gr)

Μεταφέρετε όλα τα σχήματα στο γραπτό σας.

ΘΕΜΑ 1

Άνδρας σφαιροβόλος, επιδόσεων παγκοσμίου επιπέδου, εκτοξεύει τη σφαίρα με ταχύτητα μέτρου $u = 14\,\text{m/s}$ από ύψος $h = 2,2$ m σε γωνία θ. Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και η σφαίρα υλικό σημείο. Η ένταση του πεδίου βαρύτητας είναι $g = 9,807$ N/kg .



1.1 [0,5] Από τις χρονικές εξισώσεις $x(t)$ και $y(t)$ της βολής και ορίζοντας, για συντομία, το μήκος $L = u^2/g$ δείξτε ότι η εξίσωση της τροχιάς της σφαίρας είναι: $y = h + x\tan\theta - x^2(1+\tan^2\theta)/2L$ (1)

1.2 [1] Αντικαθιστώντας το σημείο πρόσκρουσης $x = R,\ y = 0$ στην (1) βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει το βεληνεκές R με τη γωνία βολής θ : $0 = h + R\tan\theta - R^2(1+\tan^2\theta)/2L$ (2).

Δείξτε ότι το βεληνεκές γίνεται μέγιστο, όταν ισχύει: $\tan\theta = L/R$ (3).

(Υπόδειξη: Παραγωγίστε την (2) ως προς θ για να βρείτε την $\dfrac{dR}{d\theta}$ και θέστε $\dfrac{dR}{d\theta} = 0$)

Δίνεται: $\dfrac{d(\tan\theta)}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

1.3 [0,5] Δείξτε ότι το μέγιστο βεληνεκές είναι $R_{\max} = \sqrt{L(L+2h)}$

1.4 [0,5] Δείξτε ότι ο παραπάνω αθλητής πρέπει να εκτελέσει τη βολή σε γωνία 42° για να πετύχει τη μέγιστη δυνατή επίδοση.

ΛΥΣΗ

1.1 [0,5] Χρονικές εξισώσεις κίνησης

άξονας x : ευθύγραμμη ομαλή κίνηση από την αρχή του άξονα με ταχύτητα $\upsilon_{0x} = u\cos\theta$

άξονας y : ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση με επιτάχυνση $a = -g$, αντίθετη από την αρχική ταχύτητα $\upsilon_{0y} = u\sin\theta$, από αρχική θέση $y_0 = h$

$$x(t) = u\cos\theta\cdot t, \qquad y(t) = h + u\sin\theta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad [0,1]$$

Λύνουμε την πρώτη ως προς t

$$t = \frac{x}{u\cos\theta} \qquad [0,1]$$

και αντικαθιστούμε στη δεύτερη

$$y = h + u\sin\theta\cdot\frac{x}{u\cos\theta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{u\cos\theta}\right)^2 \Rightarrow$$

[σωστές πράξεις 0,3]

$$y = h + x\tan\theta - \frac{x^2}{2\left(u^2/g\right)}\frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow$$

για να πάρουμε την εξίσωση της τροχιάς:

$$\boxed{y = h + x\tan\theta - \frac{x^2}{2L}(1+\tan^2\theta) \qquad (1)}$$

Είτε θυμάστε την ταυτότητα ή κάνετε τις πράξεις και δείχνετε ότι

$$1+\tan^2\theta = 1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

Το μήκος L είναι το μέγιστο βεληνεκές αν η βολή γινόταν από μηδενικό αρχικό ύψος (h=0).

$$y(t) = 0 + u\sin\theta\cdot\ t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow\ 0 = u\sin\theta\cdot\ t_{\pi\tau\eta\sigma\eta\varsigma} - \frac{1}{2}gt^2_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma} \Rightarrow\ t_{\pi\tau\eta\sigma\eta\varsigma} = \frac{2u\sin\theta}{g}$$

$$R_0 = u\cos\theta\cdot\ t_{\pi\tau\acute{\eta}\sigma\eta\varsigma} = u\cos\theta\cdot\ \frac{2u\sin\theta}{g} = \left(\frac{u^2}{g}\right)2\sin\theta\cos\theta = L\sin 2\theta \xrightarrow[\theta=45^0]{} R_{0\max} = L$$

1.2 Για $x = R,\ \ y = 0$ η (1) γίνεται

$$0 = h + R\tan\theta - \frac{R^2}{2L}(1+\tan^2\theta) \quad (2)$$

Το βεληνεκές R εξαρτάται από τη γωνία θ σύμφωνα με την παραπάνω περίπλοκη σχέση (2). Αν η $R(\theta)$ έχει ακρότατο τότε, αυτό μπορεί να είναι ***μόνο μέγιστο*** καθώς το R είναι πάντα θετικό και είναι μηδέν για θ=π/2 (κατακόρυφη βολή προς τα πάνω) και θ = –π/2 (κατακόρυφη βολή προς τα κάτω). [0,2]

Επειδή ψάχνω για ακρότατη τιμή του R (πρόβλημα ελαχίστων-μεγίστων) **παραγωγίζω τη σχέση (2)** ως προς θ και στην έκφραση που βρίσκω **θέτω** $R' \equiv \frac{dR}{d\theta} = 0$ ώστε να βρω την ειδική σχέση μεταξύ του μέγιστου βεληνεκούς $R_{\max}$ και της γωνίας θ_{opt} που αυτό επιτυγχάνεται χωρίς να χρειαστεί να βρω την ακριβή έκφραση για την $R(\theta)$ πρώτα. [0,2]

$$\frac{d}{d\theta}\left[h + R\tan\theta - \frac{R^2}{2L}(1+\tan^2\theta)\right] = \frac{d}{d\theta}(0) \Rightarrow$$

$$0 + R'\tan\theta + R(\tan\theta)' - \frac{1}{2L}(R^2)'(1+\tan^2\theta) - \frac{R^2}{2L}(1+\tan^2\theta)' = 0 \Rightarrow$$

$$0 = R'\tan\theta + \frac{R}{\cos^2\theta} - \frac{1}{\cancel{2}L}\cancel{2}RR'(1+\tan^2\theta) - \frac{1}{\cancel{2}L}R^2\cancel{2}\tan\theta(\tan\theta)' \Rightarrow$$

$$0 = R'\tan\theta + \frac{R}{\cos^2\theta} - \frac{R}{L}R'(1+\tan^2\theta) - \frac{R^2}{L}\frac{\tan\theta}{\cos^2\theta} \qquad [0,4]$$

Θέτω $R' = 0$. Τότε $R = R_{\max}$ και $\theta = \theta_{\text{opt}}$

$$0 = 0 + \frac{R_{\max}}{\cos^2\theta_{\text{opt}}} - 0 - \frac{R^2_{\max}}{L}\frac{\tan\theta_{\text{opt}}}{\cos^2\theta_{\text{opt}}}$$

και απλοποιώ τους κοινούς παράγοντες

$$\frac{\cancel{R_{\max}}}{\cancel{\cos^2\theta_{\text{opt}}}} = \frac{R^{\cancel{2}}_{\max}}{L}\frac{\tan\theta_{\text{opt}}}{\cancel{\cos^2\theta_{\text{opt}}}}$$

$$\boxed{\tan\theta_{opt} = \frac{L}{R_{\max}} \quad (3) \qquad [0,2]}$$

Όταν η γωνία συνδέεται με το βεληνεκές με αυτή τη σχέση τότε αυτό το βεληνεκές θα είναι και το μέγιστο $R_{\max}$. Η γωνία αυτή θα είναι η βέλτιστη (optimum)

1.3 [0,5] Αντικαθιστώ την (3) στην (2) για να βρω το μέγιστο βεληνεκές από τα δεδομένα L και h :

$$0 = h + R_{\max}\frac{L}{R_{\max}} - \frac{1}{2L}R^2_{\max}\left(1+\frac{L^2}{R^2_{\max}}\right) \Rightarrow \qquad [0,3]$$

$$0 = h + L - \frac{R^2_{\max}}{2L} - \frac{L}{2} \Rightarrow \text{ όλα επί } 2L$$

$$0 = 2hL + L^2 - R_{\max}^2 \Rightarrow R_{\max} = \sqrt{L^2 + 2hL}$$

$$\boxed{R_{\max} = \sqrt{L(L+2h)} \qquad (4) \quad [0,2]}$$

(έλεγχος: για $h \to 0$ δίνει σωστό όριο $R_{\max} \to L$)

Το υπολογίζω : $R_{\max} = \sqrt{L(L+2h)} = \sqrt{20(20+2\cdot\ 2,2)} = 22,09$ m

1.4 [0,5] Αντικαθιστώ την (4) στην (3) για να βρω τη βέλτιστη γωνία από τα δεδομένα L και h :

$$\tan\theta_{opt} = \frac{L}{R_{\max}} = \frac{L}{\sqrt{L(L+2h)}} \Rightarrow \tan\theta_{opt} = \frac{1}{\sqrt{1+2h/L}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta_{opt} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2h/L}}\right)}$$

Αριθμητικός υπολογισμός για τον αθλητή του θέματος :

$$u = 14\,\text{m/s} \ , \quad h = 2,2 \text{ m}, \quad L = \frac{u^2}{g} = \frac{14^2}{9,807} = 19,98572445 = 19,99\,\text{m}$$

$$\theta_{opt} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1+2h/L}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1+2\times 2,2/20}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1+0,22}}\right) = \arctan(0,90536) = 42,16^{\circ} \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta_{opt} = 42^{\circ}}$$

Ή κατευθείαν $\tan\theta_{opt} = \dfrac{L}{R_{\max}} = \dfrac{19,99}{22,09} = 0,9049 \Rightarrow \quad \theta_{opt} = 42,14^{\circ} = 42^{\circ}$

ΘΕΜΑ 2

Πυρήνας θορίου σε ηρεμία διασπάται σε πυρήνα ραδίου και ένα σωμάτιο α: Th $\to$ Ra + α

2.1 [0,5] Από την διατήρηση της ενέργειας βρείτε την κινητική ενέργεια των προϊόντων της διάσπασης. ($6,567\times10^{-13}$ J)

(Ενέργεια σωματιδίου : $E = mc^2 + K$)

2.2 [1,5] Αποδείξτε ότι τα μέτρα των ταχυτήτων των προϊόντων δίνονται από τους τύπους

$$\upsilon_{\alpha} = c\sqrt{\frac{2\Delta m}{m_{\alpha}+m_{\text{Ra}}}\cdot\frac{m_{\text{Ra}}}{m_{\alpha}}} \qquad \text{και} \qquad \upsilon_{\text{Ra}} = c\sqrt{\frac{2\Delta m}{m_{\alpha}+m_{\text{Ra}}}\cdot\frac{m_{\alpha}}{m_{\text{Ra}}}}$$

(Για την κινητική ενέργεια χρησιμοποιήστε τον τύπο : $K = m\upsilon^2/2$)

2.3 [0,5] Υπολογίστε τις ταχύτητες των προϊόντων. ($13,94\times10^{6}$ m/s $0,2446\times10^{6}$ m/s)

Δεδομένα: $m_{\text{Th}} = 232,0381$ u , $m_{\text{Ra}} = 228,0311$ u , $m_{\alpha} = 4,0026$ u ,

u $= 1,660539\times10^{-27}$ kg , $c = 2,99792458\times10^{8}$ m/s *ακριβώς*

ΛΥΣΗ

2.1 [0,6] Διατήρηση της ενέργειας :

$$E_{\pi\rho\iota\nu} = E_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \Rightarrow m_{\text{Th}}c^2 = m_{\text{Ra}}c^2 + K_{\text{Ra}} + m_{\alpha}c^2 + K_{\alpha} \Rightarrow$$
$$K_{\text{Ra}} + K_{\alpha} = (m_{\text{Th}} - m_{\text{Ra}} - m_{\alpha})c^2 = \Delta m\, c^2 \qquad [0,3]$$

Ονομάζω την κινητική ενέργεια των προϊόντων Q : $\qquad Q \equiv K_{\alpha} + K_{\text{Ra}} = \Delta m\, c^2$

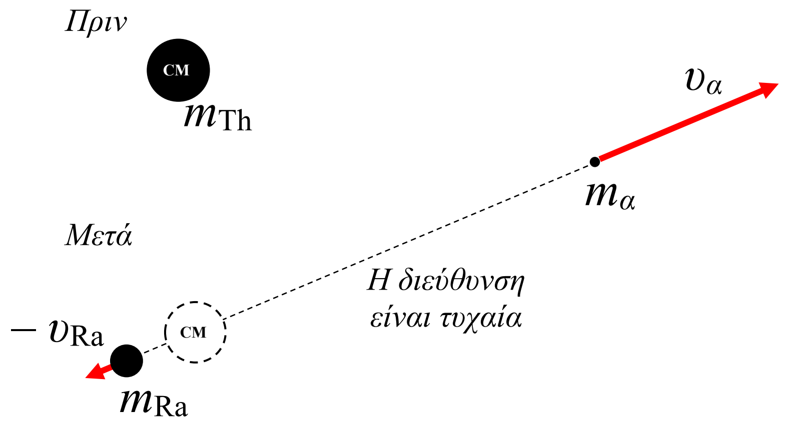
Υπολογίζω:

$$\Delta m = m_{\text{Th}} - m_{\text{Ra}} - m_{\alpha} = 232,0381\text{ u} - 228,0311\text{ u} - 4,0026\text{ u} = 0,0044\text{ u} =$$
$$= 0,0044\cdot\ 1,660539\times10^{-27}\text{ kg} = 7,306372\times10^{-30}\text{ kg} \qquad [0,1]$$

$$Q = \Delta m c^2 = (7,306372\times10^{-30}\text{ kg})\times(2,99792458\times10^{8}\text{ m/s})^2 = 6,566639\times10^{-13}\text{ J} \Rightarrow \quad [0,1]$$

$$\boxed{Q = 6,567\times10^{-13}\text{ J} \qquad [0,1]}$$

2.2 [1,4] Το σύστημα είναι απομονωμένο άρα η ορμή διατηρείται στην αρχική τιμή μηδέν που σημαίνει ότι το κέντρο μάζας (CM) των προϊόντων παραμένει ακίνητο. Για να είναι η ορμή μηδέν ο θυγατρικός πυρήνας και το σωμάτιο α θα φύγουν σε αντίθετες κατευθύνσεις και το σωματίδιο με τη μικρότερη μάζα (α) θα έχει το μεγαλύτερο μέτρο ταχύτητας. Η διεύθυνση στην οποία θα φύγουν τα σωματίδια μπορεί να είναι η οποιαδήποτε. Μέτρα ταχύτητας: $\upsilon_\alpha, \upsilon_{\mathrm{Ra}} > 0$ με $\upsilon_\alpha > \upsilon_{\mathrm{Ra}}$



Διατήρηση ορμής : $0 = m_\alpha \upsilon_\alpha + m_{\mathrm{Ra}}(-\upsilon_{\mathrm{Ra}}) \Rightarrow \upsilon_\alpha = \dfrac{m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}\upsilon_{\mathrm{Ra}}$ (1) [0,3]

Αν γράψω την κινητική ενέργεια συστήματος δύο σωματιδίων ως :

$$Q = K_\alpha + K_{\mathrm{Ra}} = \cancel{K_{CM}} + K_{\sigma\chi\varepsilon\tau} = \frac{1}{2}\mu\upsilon^2 \qquad [0,3]$$

όπου : $\mu = \dfrac{m_\alpha m_{Ra}}{m_\alpha + m_{Ra}}$ η ανηγμένη μάζα και $\upsilon = \upsilon_\alpha - (-\upsilon_{\mathrm{Ra}}) = \upsilon_\alpha + \upsilon_{\mathrm{Ra}}$ η σχετική ταχύτητα των προϊόντων, τότε από τη διατήρηση της ενέργειας βρίσκω κατευθείαν τη σχετική ταχύτητα

$$Q = \frac{1}{2}\mu(\upsilon_\alpha + \upsilon_{\mathrm{Ra}})^2 \Rightarrow \upsilon_\alpha + \upsilon_{\mathrm{Ra}} = \sqrt{\frac{2Q}{\mu}} \qquad (2)$$

και έχω ένα σύστημα δυο εξισώσεων για τους δύο αγνώστους $\upsilon_\alpha, \upsilon_{\mathrm{Ra}}$.

$$\upsilon_\alpha = \frac{m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}\upsilon_{\mathrm{Ra}} \qquad (1)$$

$$\upsilon_\alpha + \upsilon_{\mathrm{Ra}} = \sqrt{\frac{2Q}{\mu}} \qquad (2)$$

(λύση συστήματος, πράξεις [0,8])

Αντικαθιστώ την (1) στη (2) και βρίσκω :

$$\frac{m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}\upsilon_{\mathrm{Ra}} + \upsilon_{\mathrm{Ra}} = \sqrt{\frac{2Q}{\mu}} \Rightarrow \upsilon_{\mathrm{Ra}} = \frac{\sqrt{\dfrac{2Q}{\mu}}}{1 + \dfrac{m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}}$$

Κάνω πράξεις για να τη φέρω στη ζητούμενη μορφή :

$$\upsilon_{\mathrm{Ra}} = \frac{1}{1 + \dfrac{m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}}\sqrt{\frac{2\Delta mc^2}{\dfrac{m_\alpha m_{Ra}}{m_\alpha + m_{Ra}}}} = \frac{c}{\dfrac{m_\alpha + m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}}\sqrt{\frac{2\Delta m(m_\alpha + m_{Ra})}{m_\alpha m_{Ra}}} = c\sqrt{\frac{m_\alpha^{\cancel{2}}}{(m_\alpha + m_{Ra})^{\cancel{2}}}}\sqrt{\frac{2\Delta m\,\cancel{(m_\alpha + m_{Ra})}}{\cancel{m_\alpha} m_{Ra}}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon_{\mathrm{Ra}} = c\sqrt{\frac{2\Delta m}{m_\alpha + m_{\mathrm{Ra}}} \cdot \frac{m_\alpha}{m_{\mathrm{Ra}}}}}$$

$$\upsilon_\alpha = \frac{m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}\upsilon_{\mathrm{Ra}} = \frac{m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}c\sqrt{\frac{2\Delta m}{m_\alpha + m_{\mathrm{Ra}}} \cdot \frac{m_\alpha}{m_{\mathrm{Ra}}}} = c\sqrt{\frac{m_{\mathrm{Ra}}^{\cancel{2}}}{m_\alpha^{\cancel{2}}} \cdot \frac{2\Delta m}{m_\alpha + m_{\mathrm{Ra}}} \cdot \frac{\cancel{m_\alpha}}{\cancel{m_{\mathrm{Ra}}}}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon_\alpha = c\sqrt{\frac{2\Delta m}{m_\alpha + m_{\mathrm{Ra}}}\frac{m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}}}$$

Μπορούσατε και χωρίς την $K_{\sigma\chi\varepsilon\tau}$

Διατήρηση ορμής : $\upsilon_\alpha = \frac{m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}\upsilon_{\mathrm{Ra}}$ (1)

Διατήρηση ενέργειας : $\Delta m\, c^2 = \frac{1}{2}m_\alpha \upsilon_\alpha^2 + \frac{1}{2}m_{\mathrm{Ra}}\upsilon_{\mathrm{Ra}}^2$ (2)

(1) → (2) : $\Delta m\, c^2 = \frac{1}{2}m_\alpha\left(\frac{m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}\upsilon_{\mathrm{Ra}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_{\mathrm{Ra}}\upsilon_{\mathrm{Ra}}^2 \Rightarrow 2\Delta m\, c^2 = \left(m_\alpha\frac{m_{\mathrm{Ra}}^2}{m_\alpha^2} + m_{\mathrm{Ra}}\right)\upsilon_{\mathrm{Ra}}^2 \Rightarrow$

$$2\Delta m\, c^2 = \left(\frac{m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha} + 1\right)m_{\mathrm{Ra}}\upsilon_{\mathrm{Ra}}^2 \Rightarrow 2\Delta m\, c^2 = \left(\frac{m_{\mathrm{Ra}} + m_\alpha}{m_\alpha}\right)m_{\mathrm{Ra}}\upsilon_{\mathrm{Ra}}^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon_{\mathrm{Ra}}^2 = \frac{2\Delta m\, c^2}{m_\alpha + m_{\mathrm{Ra}}}\cdot\frac{m_\alpha}{m_{\mathrm{Ra}}}$$

2.3 [0,5] Αριθμητικοί υπολογισμοί
αντικατάσταση – μονάδες :

$$\upsilon_{\mathrm{Ra}} = 2{,}99792458\times10^8\,\mathrm{m/s}\sqrt{\frac{0{,}0088\,\cancel{u}}{232{,}0337\,\cancel{u}}\frac{228{,}0311\,\cancel{u}}{4{,}0026\,\cancel{u}}} \quad\Rightarrow\quad [0{,}1]$$

ενδιάμεσοι υπολογισμοί (προαιρετικό, αλλά προτείνεται για να μην χάνετε τη μπάλα) :

$$\upsilon_{\mathrm{Ra}} = 2{,}99792458\sqrt{\frac{0{,}0088}{232{,}0337}0{,}01755287}\times10^8\,\mathrm{m/s} = 2{,}99792458\sqrt{6{,}657018\times10^{-7}}\times10^8\,\mathrm{m/s} =$$

$$= 2{,}99792458\cdot 8{,}159055\times10^{-4}\times10^8\,\mathrm{m/s} \quad\Rightarrow$$

αποτέλεσμα αριθμομηχανής :

$$\upsilon_{\mathrm{Ra}} = 244.602{,}3214738\ \mathrm{m/s} \qquad [0{,}1]$$

στρογγυλοποίηση – μετακίνηση υποδιαστολής :

$$\boxed{\upsilon_{\mathrm{Ra}} = 0{,}2446\times10^6\ \mathrm{m/s} \qquad [0{,}1]}$$

$$\upsilon_\alpha = \frac{m_{\mathrm{Ra}}}{m_\alpha}\upsilon_{\mathrm{Ra}} = \frac{228{,}0311\,\cancel{u}}{4{,}0026\,\cancel{u}}0{,}2446\times10^6\ \mathrm{m/s} = 13{,}935044\times10^6\ \mathrm{m/s} \Rightarrow [0{,}1]$$

$$\boxed{\upsilon_\alpha = 13{,}94\times10^6\ \mathrm{m/s} \quad [0{,}1]}$$

Για να πάρετε τις 0,5 μονάδες του 2.3 πρέπει να αντικαταστήσετε τα μεγέθη με τις σωστές μονάδες στον τύπο και με τουλάχιστον τόσα σημαντικά ψηφία όσα έχει και η δοσμένη απάντηση (4), **πρέπει να δείξετε το αποτέλεσμα όπως σας το δίνει η αριθμομηχανή**, μετά να μετακινήσετε την υποδιαστολή ώστε να εμφανιστεί η ζητούμενη δύναμη του 10 και τέλος να κάνετε σωστά τη στρογγυλοποίηση στα 4 σημαντικά ψηφία της απάντησης που σας δίνεται.

Άμα βάλετε τις μάζες σε kg πρέπει να έχετε:

$m_{\mathrm{Th}} = 232{,}0381\ \mathrm{u}\cdot 1{,}660539\times10^{-27}\ \mathrm{kg/u} = 385{,}3083\times10^{-27}\ \mathrm{kg}$,

$m_{\mathrm{Ra}} = 228{,}0311\ \mathrm{u}\cdot 1{,}660539\times10^{-27}\ \mathrm{kg/u} = 378{,}6545\times10^{-27}\ \mathrm{kg}$,

$m_\alpha = 4{,}0026\ \mathrm{u}\cdot 1{,}660539\times10^{-27}\ \mathrm{kg/u} = 6{,}6465\times10^{-27}\mathrm{kg}$,

$m_{\mathrm{Ra}} + m_\alpha = 232{,}0337\ \mathrm{u}\cdot 1{,}660539\times10^{-27}\ \mathrm{kg/u} = 385{,}2967\times10^{-27}\ \mathrm{kg}$

$\Delta m = 7{,}306372\times10^{-30}\ \mathrm{kg}$

$$\frac{\Delta m}{m_{\mathrm{Ra}}+m_{\alpha}}=\frac{7,306372\times10^{-30}\ \mathrm{kg}}{385,2967\times10^{-27}\ \mathrm{kg}}=1,896298\times10^{-5}$$

ΘΕΜΑ 3

Διαστημικό όχημα βρίσκεται σε κυκλική τροχιά, ακτίνας $r_c=2R$, γύρω από τη Γη, όπου R η ακτίνα της Γης. Το όχημα πυροδοτεί στιγμιαία τους πυραύλους του, κατά τη διεύθυνση κίνησής του, ώστε να μεταβεί σε ελλειπτική τροχιά (διακεκομμένη καμπύλη) με περίγειο $r_p=r_c$ και απόγειο $r_a=4R$. Χρησιμοποιεί καύσιμα τα οποία εκτοξεύονται με ταχύτητα $u=3,0\ \mathrm{km/s}$ ως προς το όχημα.

Δίνονται : $g=9,807\ \mathrm{N/kg}$, $R=6371\ \mathrm{km}$, $\upsilon=\sqrt{GM\left(2/r-1/a\right)}$ *όπου a ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης, G η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας και M η μάζα της Γης.*

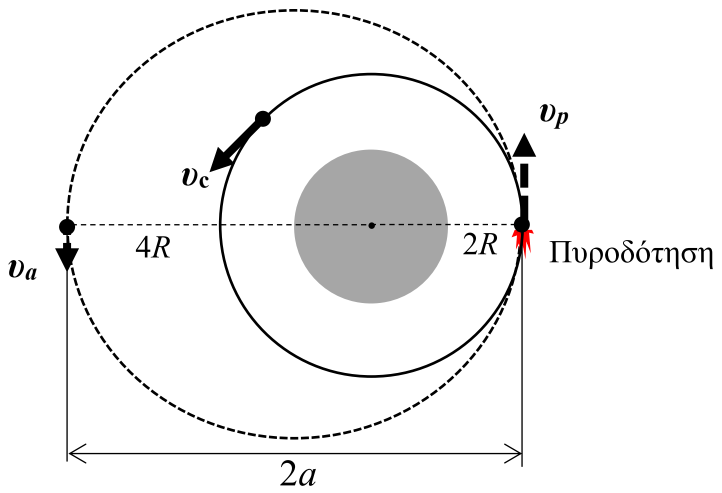
3.1 [0,1] Δείξτε ότι $GM=gR^2$.

3.2 [0,6] Βρείτε τον τύπο που δίνει την ταχύτητα της κυκλικής τροχιάς και υπολογίστε την ;

3.3 [0,6] Πόση είναι η ταχύτητα της ελλειπτικής τροχιάς στο περίγειο ;

3.4 [0,6] Από την ταχύτητα στο περίγειο και τη διατήρηση της στροφορμής βρείτε την ταχύτητα στο απόγειο. Επαληθεύστε ότι παίρνετε την ίδια τιμή και με τον παραπάνω τύπο.

3.5 [0,6] Τι ποσοστό της μάζας του οχήματος ήταν τα καύσιμα που καταναλώθηκαν ώστε να επιτευχθεί η απαραίτητη διαφορά ταχύτητας; (25%)



ΛΥΣΗ

3.1 [0,1] Στην επιφάνεια της Γης $W=F_G\Rightarrow \cancel{m}g=G\dfrac{\cancel{m}M}{R^2}\Rightarrow gR^2=GM$

3.2 [0,6] Εφαρμόζουμε την αρχή της ορμής : $\dfrac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}_{net}\Rightarrow\ m\vec{a}=\vec{F}_{net}$ στην ακτινική διεύθυνση (που είναι κάθετη στην τροχιά). Άρα η επιτάχυνση θα είναι η κεντρομόλος και η συνισταμένη δύναμη θα είναι η βαρυτική δύναμη:

$$ma_c=F_G\Rightarrow m\frac{\upsilon^2}{r}=G\frac{Mm}{r^2}\Rightarrow \upsilon=\sqrt{\frac{GM}{r}}=\sqrt{\frac{gR^2}{r}}\quad[0,3]$$

$$\upsilon_c=\sqrt{\frac{gR^2}{r_c}}=\sqrt{\frac{gR^2}{2R}}=\sqrt{\frac{gR}{2}}=\sqrt{\frac{(9,807)(6.371.000)}{2}}=5.589,29=5.589\ \mathrm{m/s}\quad[0,3]$$

Το R πρέπει να μπαίνει σε μέτρα (m) επειδή η ένταση g είναι σε $\mathrm{N/kg}=\mathrm{m/s^2}$!!!

$$gR=9,807\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\times6.371.000\ \mathrm{m}=62.480.397\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\ \mathrm{m}=62,48\times10^6\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

3.3 [0,6] $a=\dfrac{r_p+r_a}{2}=\dfrac{2R+4R}{2}=3R$ [0,2]

$$\upsilon_p = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r_p}-\frac{1}{a}\right)} = \sqrt{gR^2\left(\frac{2}{2R}-\frac{1}{3R}\right)} = \sqrt{gR\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2(9{,}807)(6.371.000)}{3}} = 6.453{,}96 = 6.454 \text{ m/s } [0{,}4]$$

3.4 [0,6] Διατήρηση της στροφορμής:

$$m\upsilon_a r_a = m\upsilon_p r_p \Rightarrow \upsilon_a 4R = \upsilon_p 2R \Rightarrow \upsilon_a = \frac{2}{4}\upsilon_p = \frac{1}{2}(6.454) = 3.227 \text{ m/s } [0{,}3]$$

$$\upsilon_a = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r_a}-\frac{1}{a}\right)} = \sqrt{gR^2\left(\frac{2}{4R}-\frac{1}{3R}\right)} = \sqrt{gR\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{(9{,}807)(6.371.000)}{6}} = 3.226{,}97993 = 3.227 \text{ m/s}$$

[0,3]

3.5 [0,6] Η απαιτούμενη μεταβολή στο μέτρο της ταχύτητας που πρέπει να επιτευχθεί στο σημείο της πυροδότησης είναι:

$$\Delta\upsilon = \upsilon_p - \upsilon_c = 6.453{,}96 - 5.589{,}29 = 864{,}7 \text{ m/s } [0{,}1]$$

Από την εξίσωση του πυραύλου (στο κενό ή για στιγμιαία πυροδότηση) :

$$\frac{m}{m_0} = e^{-\frac{\Delta\upsilon}{u}} = e^{-\frac{864{,}7}{3.000}} = e^{-0{,}2882} = 0{,}7496 = 0{,}75 = 75\% \ [0{,}4]$$

Η μάζα των καυσίμων που καταναλώθηκαν είναι : $\Delta m = m_0 - m$

$$\frac{\Delta m}{m_0} = \frac{m_0 - m}{m_0} = 1 - \frac{m}{m_0} = 1 - 0{,}75 = 0{,}25 = 25\% \ [0{,}1]$$

Η μάζα του πυραύλου μειώθηκε κατά 25%.

ΘΕΜΑ 4

Το μαγνητικό πεδίο ηλεκτρομαγνητικού κύματος που παράγεται στην πηγή φούρνου μικροκυμάτων δίνεται από την παρακάτω έκφραση:

$$\vec{B}(x,y,z,t) = 9\times10^{-6}\sin\left\lfloor 2\pi(3\times10^9 t - bz)\right\rfloor \hat{x} \qquad \text{(SI)}$$

Να δικαιολογείτε τις απαντήσεις σας στα παρακάτω ερωτήματα :

4.1 [0,3] Σε ποια κατεύθυνση διαδίδεται το κύμα ;

4.2 [0,4] Ποιες είναι οι μονάδες της σταθεράς 3×10^9 μέσα στη φάση και ποια είναι η τιμή και οι μονάδες της σταθεράς b ;

4.3 [0,3] Πόσο είναι το μήκος κύματος λ ;

4.4 [0,3] Πόση είναι η συχνότητα f του κύματος ;

4.5 [0,4] Πόσο είναι το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου του κύματος ;

4.6 [0,4] Σε ποια κατεύθυνση βρίσκεται το ηλεκτρικό πεδίο του κύματος ;

4.7 [0,4] Γράψτε την έκφραση που δίνει το ηλεκτρικό πεδίο του κύματος στο SI : $\vec{E}(x,y,z,t) = \ldots$ (SI)

Δίνεται : $c = 3{,}00\times10^8$ m/s

ΛΥΣΗ

4.1 [0,3] Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι εγκάρσια. Άρα αφού το μαγνητικό πεδίο είναι στη διεύθυνση *x* το κύμα θα διαδίδεται ή στην y ή στην z διεύθυνση.

Στη φάση $2\pi(3\times10^9 t - bz) = \omega t - kz$ εμφανίζεται μόνο η διεύθυνση z , άρα κατά τη διεύθυνση y η ένταση του *B* θα έχει παντού την ίδια τιμή. Μεταβολή (κυματισμό) στην ένταση του *B* θα βλέπουμε μόνο στη διεύθυνση *z*. Άρα το κύμα διαδίδεται στη διεύθυνση *z* και είναι επίπεδο (στο *x*-*y*).

Σε ποια κατεύθυνση; Στην $\hat{z}$ ή στην $-\hat{z}$; Όλα τα σημεία με ίδιο *z* θα έχουν την ίδια τιμή για το *B* κάποια χρονική στιγμή t , ανεξαρτήτως του *x* και *y*. Αυτά τα σημεία φτιάχνουν ένα μέτωπο κύματος που στην περίπτωσή μας είναι επίπεδο, παράλληλο με το επίπεδο *x*-*y*. Στη φάση $\varphi = \omega t - kz$, μεταξύ του όρου του *z* και του όρου του χρόνου *t* υπάρχει σχετικό πρόσημο μείον (–). Την χρονική στιγμή *t*=0 στο επίπεδο *z*=0 η φάση είναι μηδέν $\varphi = \omega t - kz = \omega\cdot\ 0 - k\cdot\ 0 = 0$ και το συγκεκριμένο κύμα έχει *B*=0. Προς τα πού θα μετακινηθεί αυτό το μέτωπο του κύματος (*B*=0) όπως περνάει ο χρόνος *t*>0. Όπως μεγαλώνει το *t* (*t*>0) πρέπει να μεγαλώσει και το *z* (*z*>0) για να παραμείνει η φάση σταθερά 0. Δηλαδή το κύμα (η τιμή *B*=0) θα πρέπει να κινηθεί προς τα θετικά *z*. Γενικά

$\omega t - kz =$ κάποια τιμη $a \Rightarrow \; z = \dfrac{\omega}{k} t - \dfrac{a}{k} \Rightarrow z = \upsilon t - z_0 \Rightarrow \Delta z = \upsilon \Delta t$ άρα για $\Delta t > 0$ είναι $\Delta z > 0$

Άρα η κατεύθυνση διάδοσης του κύματος $\hat{k}$ είναι η κατεύθυνση +z:

$$\boxed{\hat{k} = \hat{z}}$$

(Το αντίθετο θα συνέβαινε αν η φάση ήταν $\omega t + kz$.Το κύμα θα πήγαινε προς τα αρνητικά z, $z = -\upsilon t - z_0$)

4.2 [0,4] Ο συντελεστής 3×10^9 του χρόνου t, (όπου ο χρόνος στο SI μετριέται σε s) πρέπει να έχει μονάδες s^{-1} ώστε το γινόμενό τους να είναι αδιάστατο επειδή η φάση είναι αδιάστατη. [0,1]

Παρομοίως ο συντελεστής b του z (που μετριέται σε m) πρέπει να έχει μονάδες m^{-1} ώστε το bz να είναι επίσης καθαρός αριθμός. [0,1]

Ο λόγος του συντελεστή του t ως προς τον συντελεστή του z στη φάση $\omega t - kz$ ισούται με την ταχύτητα διάδοσης του κύματος : $\upsilon = \dfrac{\omega}{k}$

Για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα η ταχύτητα ισούται με c:

$$\frac{2\pi \cdot \; 3\times10^9}{2\pi b} = c \Rightarrow b = \frac{3\cdot\; 10^9 \text{ s}^{-1}}{3\cdot\; 10^8 \text{ m/s}} = 10 \text{ m}^{-1} \quad [0,2]$$

4.3 [0,3] – 4.4 [0,3] Η φάση γράφεται $\omega t - kz = 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{z}{\lambda}\right) = 2\pi\left(ft - \dfrac{z}{\lambda}\right)$ από όπου διαβάζουμε :

$$f = 3\times10^9 \text{ Hz} = 3 \text{ GHz} \text{ (στη ζώνη των μικροκυμάτων)}$$

$$\lambda = \frac{1}{b} = \frac{1}{10 \text{ m}^{-1}} = 0{,}1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

Το λ πρέπει να είναι πολύ μεγαλύτερο από τα κενά του μεταλλικού πλέγματος του παράθυρου του φούρνου, και πράγματι είναι.

4.5 [0,4] Στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα για τα πλάτη των δυο πεδίων ισχύει:

$$\frac{E_{\max}}{B_{\max}} = c \Rightarrow E_{\max} = cB_{\max} = (3\times10^8)(9\times10^{-6}) = 2.700 \text{ V/m ή N/C}$$

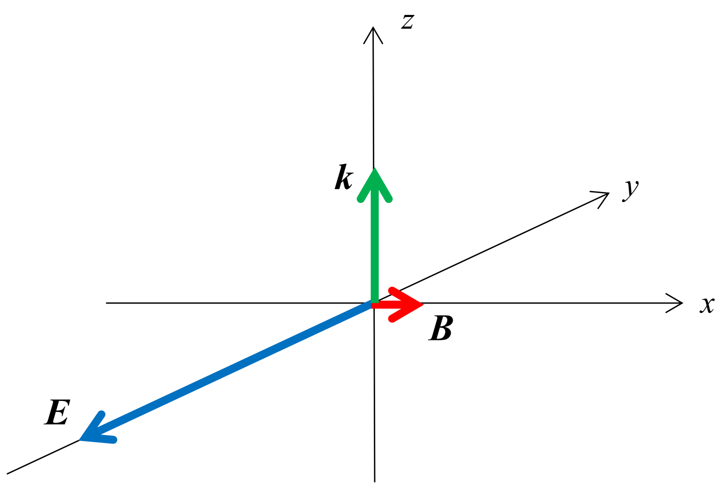
4.6 [0,4] Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι εγκάρσια, με τα δύο πεδία επίσης κάθετα μεταξύ τους. Οι κατευθύνσεις των τριών διανυσμάτων $\hat{E}, \hat{B}, \hat{k}$ αποτελούν ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα καθώς ισχύει :

$$\hat{E} \times \hat{B} = \hat{k}$$

Για να ισχύει η παραπάνω σχέση, αφού το μαγνητικό πεδίο δείχνει στην κατεύθυνση $\hat{x}$ τότε το ηλεκτρικό πεδίο θα δείχνει στην κατεύθυνση $-\hat{y}$

$$\hat{E} \times \hat{B} = -\hat{y} \times \hat{x} = \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} = \hat{k}$$

$$\boxed{\text{Άρα} \quad \hat{E} = -\hat{y}}$$



4.7 [0,4] Από όλα τα παραπάνω έχουμε

$$\vec{E}(x,y,z,t) = -2.700\sin\left\lfloor\, 2\pi(3\times10^{9}t-10z)\right\rfloor \hat{y} \qquad \text{(SI)}$$

Σωστή μεταφορά : $E_{\max}$, b, $\hat{E}$ [0,1]

Ίδια συνάρτηση με B : sin [0,1]

Ίδια φάση με B : $2\pi(3\times10^{9}t-10z)$ [0,1]

Πρέπει στην έκφραση να υπάρχουν **μόνο αριθμοί** και επομένως να δηλώνεται αναγκαστικά το σύστημα μονάδων αναγράφοντας (SI) [0,1]