

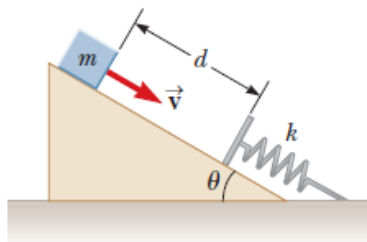
Θέμα 1°

Κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\theta = 20^\circ$ έχει ένα ελατήριο σταθερής δύναμης $k = 500 \text{ N/m}$ στερεωμένο με ασφάλεια στο κάτω μέρος έτσι ώστε το ελατήριο να είναι παράλληλο με την επιφάνεια, όπως φαίνεται στο σχήμα της Εικ. 1. Ένα σώμα μάζας $m = 2.50 \text{ kg}$ τοποθετείται στο επίπεδο σε απόσταση $d = 0.300 \text{ m}$ από το ελατήριο. Από αυτή τη θέση, το σώμα εκτοξεύεται προς το ελατήριο με ταχύτητα $v = 0.750 \text{ m/s}$. Θεωρήστε ότι το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο, δηλαδή, το σώμα ολισθαίνει σε αυτό χωρίς τριβές.

(α) Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που φτάνει στο ελατήριο;

(β) Σε ποια απόσταση συμπιέζεται το ελατήριο όταν το σώμα ακινητοποιείται στιγμιαία;

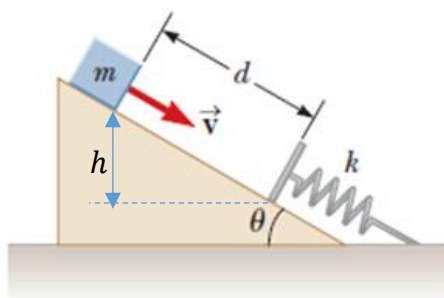
Επιτάχυνση βαρύτητας 9.80 m/s^2



Εικόνα 1

Λύση

(α) (1 μον.) Έστω v' η ταχύτητα του σώματος όταν φτάνει στο ελατήριο



$$\begin{aligned}\Delta E = 0 &\Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0 \Rightarrow \Delta K = -\Delta U \Rightarrow K_f - K_i = -(U_f - U_i) \Rightarrow K_f - K_i = U_i - U_f \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2 = mgh - 0 \Rightarrow v' = \sqrt{v^2 + 2gh} \quad (1) \\ h &= d \sin \theta \quad (2)\end{aligned}$$

Από (1),(2) έχουμε

$$v' = \sqrt{v^2 + 2gd \sin \theta} = \sqrt{(0.750 \text{ m/s})^2 + 2(9.80 \text{ m/s}^2)(0.300 \text{ m})(\sin 20.0^\circ)} = 1.60 \text{ m/s}$$

(β) (2 μον.) Έστω x το μήκος κατά το οποίο συμπιέζεται το ελατήριο. Για την κίνηση από το σημείο εκτόξευσης ως το τελικό σημείο ακινητοποίησης του σώματος, έχουμε πάλι $\Delta E = 0$

$$\Rightarrow \Delta K + \Delta U_{\betaαρυτ} + \Delta U_{ελατ} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta K = -\Delta U_{\betaαρυτ} - \Delta U_{ελατ}$$

$$\Rightarrow K_f - K_i = -(U_{\betaαρυτ,f} - U_{\betaαρυτ,i}) - (U_{ελατ,f} - U_{ελατ,i})$$

$$\Rightarrow K_f - K_i = U_{\betaαρυτ,i} + U_{ελατ,i} - U_{\betaαρυτ,f} - U_{ελατ,f}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m0^2 - \frac{1}{2}mv^2 = mgH + 0 - 0 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow -mv^2 = 2mgH - kx^2$$

$$\Rightarrow kx^2 - 2mgH - mv^2 = 0 \quad (3)$$

$$H = (d + x) \sin \theta \quad (4)$$

Από (3),(4) έχουμε

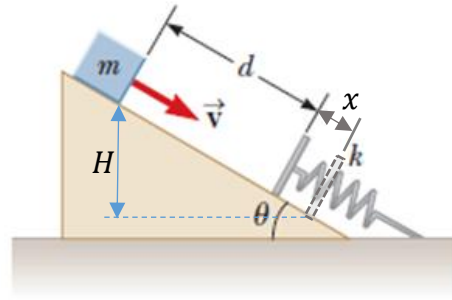
$$kx^2 - 2mg(d + x) \sin \theta - mv^2 = 0$$

$$\Rightarrow 500x^2 - 2(2.50)(9.80)(0.300 + x) \sin 20^\circ - (2.50)(0.750)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 500x^2 - 16.8(0.300 + x) - 1.41 = 0$$

$$\Rightarrow 500x^2 - 16.8x - 6.45 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{16.8 \pm \sqrt{(16.8)^2 + 4(500)(6.45)}}{2(500)} = \mathbf{0.132 \text{ m}}$$



Θέμα 2°

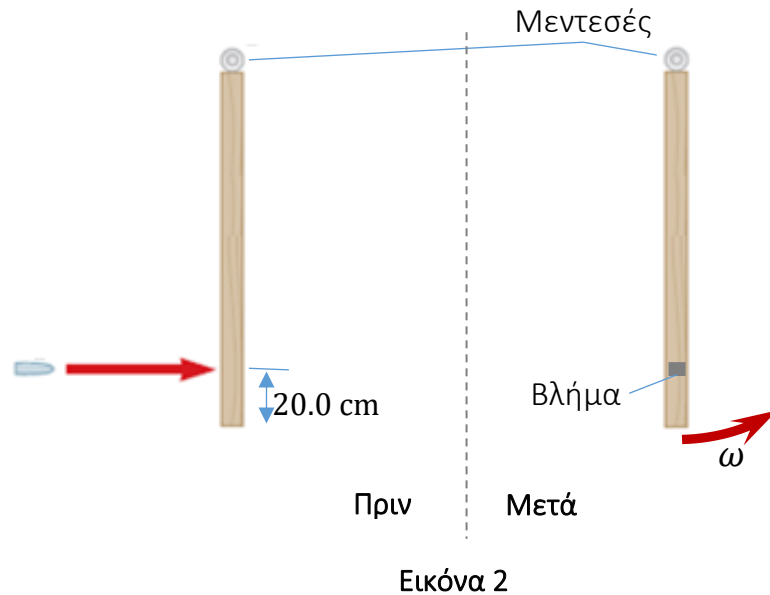
Βλήμα 0.0120 kg που κινείται οριζόντια με ταχύτητα $1.50 \times 10^3 \text{ m/s}$ χτυπά σε μια πόρτα 20.0 kg και σφηνώνεται 20.0 cm από την πλευρά της πόρτας απέναντι από τους μεντεσέδες, όπως φαίνεται στην Εικ. 2 (εικόνα συστήματος από πάνω). Η πόρτα πλάτους 1.20 m είναι ελεύθερη να στρέφεται ως προς τους μεντεσέδες της χωρίς τριβή.

(α) Υπολογίστε τη στροφορμή του βλήματος σε σχέση με τον άξονα περιστροφής της πόρτας πριν χτυπήσει την πόρτα.

(β) Μετά την κρούση, υπολογίστε τη ροπή αδράνειας του συστήματος (πόρτα + σφηνωμένο βλήμα).

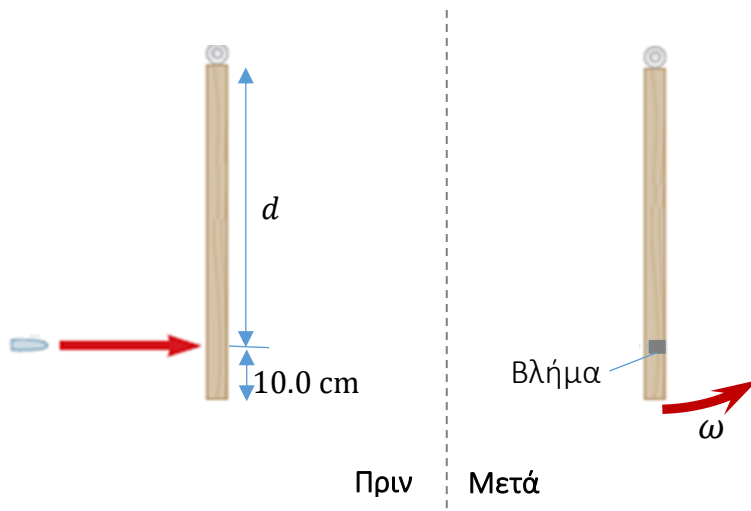
(γ) Με ποια γωνιακή ταχύτητα (ω) ανοίγει η πόρτα αμέσως μετά τη σύγκρουση;

(δ) Υπολογίστε τη μηχανική ενέργεια του συστήματος πριν και μετά την κρούση.



1

Λύση



(α) (0.8 μον.) $m = 0.0120 \text{ kg}, v = 1.50 \times 10^3 \text{ m/s}, d = 1.00 \text{ m}$

$$L_{\text{before}} = mvd = (0.0120 \text{ kg})(1.50 \times 10^3 \text{ m/s})(1.00 \text{ m}) = \mathbf{18.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}}$$

(β) (1 μον.) $M = 20.0 \text{ kg}, L = 1.20 \text{ m}$

$$I = \frac{1}{3}ML^2 + md^2 = \frac{1}{3}(20.0 \text{ kg})(1.20 \text{ m})^2 + (0.0120 \text{ kg})(1.00 \text{ m})^2 = \mathbf{9.61 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

(γ) (0.8 μον.) Η στροφορμή του συστήματος διατηρείται,

$$L_{\text{after}} = L_{\text{before}} \Rightarrow I\omega = L_{\text{before}} \Rightarrow \omega = \frac{L_{\text{before}}}{I} = \frac{18.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}}{9.61 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = \mathbf{1.87 \text{ rad/s}}$$

(δ) (0.8 μον.) $K_{\text{before}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.0120 \text{ kg})\left(1.50 \times 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = \mathbf{13.5 \text{ kJ}}$

$$K_{\text{after}} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(9.61 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)\left(1.87 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 = \mathbf{16.8 \text{ J}}$$

Θέμα 3^ο

Αντικείμενο 2.00 kg κιλών είναι προσαρτημένο στην άκρη ελατηρίου και το σύστημα είναι τοποθετημένο σε μια οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Απαιτείται οριζόντια δύναμη 20.0 N για να συγκρατηθεί το αντικείμενο σε ηρεμία όταν τραβιέται οριζόντια πάνω την επιφάνεια 0.200 m από τη θέση ισορροπίας του. Το αντικείμενο απελευθερώνεται τώρα από την ηρεμία από αυτή την τεντωμένη θέση και στη συνέχεια υφίσταται απλές αρμονικές ταλαντώσεις. Βρείτε

- (α) τη συχνότητα των ταλαντώσεων και
- (β) την ολική ενέργεια του ταλαντευόμενου συστήματος.
- (γ) Γράψτε τη μαθηματική έκφραση της θέσης και της ταχύτητας σαν συνάρτηση του χρόνου, $x(t)$ και $v(t)$, αντίστοιχα.
- (δ) Ποια είναι η ταχύτητα του αντικειμένου όταν η θέση του είναι ίση με το μισό της μέγιστης τιμής;

Λύση

(α) (0.7 μον.) Μάζα $m = 2.00 \text{ kg}$, $F = 20.0 \text{ N}$ όταν $x = 0.200 \text{ m}$ επομένως σταθερά ελατηρίου

$$k = \frac{F}{x} = \frac{20.0 \text{ N}}{0.200 \text{ m}} = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100 \text{ N/m}}{2.00 \text{ kg}}} = 7.07 \text{ rad/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{7.07}{2\pi} = 1.13 \text{ Hz}$$

(β) (0.6 μον.) $E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(100 \text{ N/m})(0.200 \text{ m})^2 = 2 \text{ J}$

(γ) (1.5 μον.) Πλάτος ταλάντωσης $A = 0.200 \text{ m}$ και $v_{\max} = A\omega = (0.200 \text{ m})(7.07 \text{ rad/s}) = 1.41 \text{ m/s}$

$$x(t) = A \cos \omega t = 0.200 \cos 7.07t \text{ m}$$

$$v(t) = -A\omega \sin \omega t \text{ ή } v(t) = A\omega \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = 1.41 \cos \left(7.07t + \frac{\pi}{2} \right)$$

(δ) (0.8 μον.) $v = \omega \sqrt{A^2 - x^2} = \omega \sqrt{A^2 - \left(\frac{A}{2} \right)^2} = \omega A \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} v_{\max} = 1.22 \text{ m/s}$