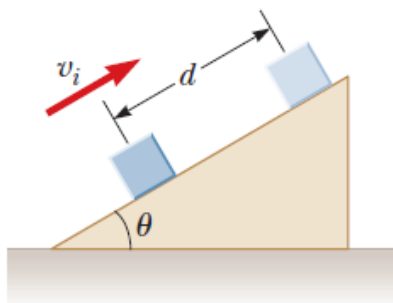


Θέμα 1^ο

Σώμα μάζας **5.00 kg** τίθεται σε κίνηση ολίσθησης στο κεκλιμένο επίπεδο της Εικ. 1 με αρχική ταχύτητα **8.00 m/s**. Το σώμα ακινητοποιείται αφού διανύσει απόσταση **$d = 3.00 \text{ m}$** κατά μήκος του επιπέδου, το οποίο έχει κλίση υπό γωνία **$\theta = 30^\circ$** ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Για αυτήν την κίνηση, προσδιορίστε:

- (α) τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος,
- (β) τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος σώμα-Γη και
- (γ) τη δύναμη τριβής που ασκείται στο σώμα (υποτίθεται ότι είναι σταθερή).
- (δ) Ποιος είναι ο συντελεστής κινητικής τριβής;

Επιτάχυνση βαρύτητας **9.80 m/s^2**



Εικόνα 1

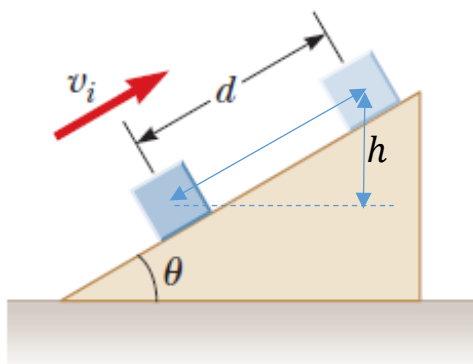
Λύση

- (α) (0.5 μον.) $m = 5.00 \text{ kg}$, $v_i = 8.00 \text{ m/s}$, $v_f = 0$

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = 0 - \frac{1}{2}(5.00 \text{ kg})(8.00 \text{ m/s})^2 = -160 \text{ J}$$

- (β) (0.7 μον.) $\Delta U = U_f - U_i$.

Θέτοντας $U_i = 0$, παίρνουμε $U = U_f = mgh$ με $h = d \sin \theta$, οπότε



$$\Delta U = mgd \sin \theta = (5.00 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(3.00 \text{ m})(\sin 30^\circ) = 73.5 \text{ J}$$

- (γ) (1.2 μον.) Το έργο της τριβής ισούται με τη μεταβολή της ολικής ενέργειας,

$$W_f = \Delta E = \Delta K + \Delta U \quad (1)$$

Θεωρώντας τη δύναμη της τριβής f σταθερή, το έργο της είναι

$$W_f = -fd \quad (2)$$

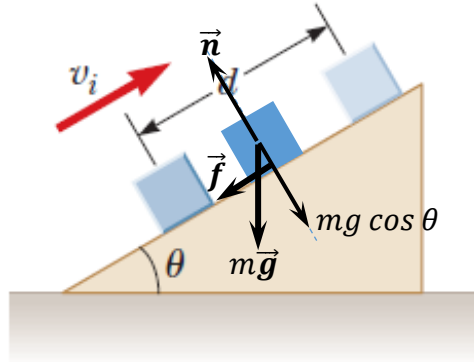
Από (1) και (2) έχουμε

$$-fd = \Delta K + \Delta U \Rightarrow f = -\frac{\Delta K + \Delta U}{d} = -\frac{-160 \text{ J} + 73.5 \text{ J}}{3.00 \text{ m}} = \mathbf{28.8 \text{ N}}$$

(δ) (1.2 μον.) Ο συντελεστής κινητικής τριβής εξ'ορισμού είναι

$$\mu_k = \frac{f}{n}$$

Όμως, $n = mg \cos \theta$, οπότε

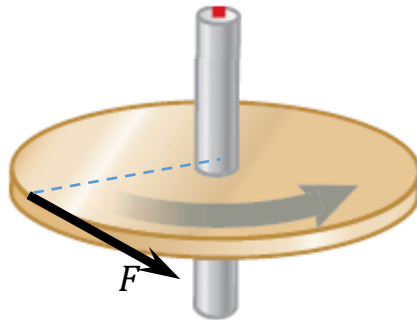


$$\mu_k = \frac{f}{mg \cos \theta} = \frac{28.8 \text{ N}}{(5.00 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(\cos 30^\circ)} = \mathbf{0.679}$$

Θέμα 2°

Ο ομοιόμορφος συμπαγής δίσκος της Εικ. 2, μάζας **3.0 kg** και ακτίνας **0.20 m**, περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από έναν σταθερό άξονα κάθετο στην επιφάνειά του που περνάει από το κέντρο του με γωνιακή συχνότητα **2.0 rad/s**. Στη συνέχεια, στο δίσκο ασκείται η δύναμη ***F*** σταθερού μέτρου, εφαπτόμενη στην περιφέρειά του για χρονικό διάστημα **4.0 s**, με συνέπεια η ταχύτητά του να αυξηθεί σε **32 rad/s**. Υπολογίστε:

- (α) τη ροπή αδράνειας του δίσκου,
- (β) την επιτάχυνση του δίσκου κατά τη διάρκεια των 4.0 s,
- (γ) το μέτρο της δύναμη ***F***
- (δ) τον αριθμό των περιστροφών που κάνει ο δίσκος κατά τη διάρκεια των 4.0 s.



Εικόνα 2

Λύση

- (α) (0.5 μον.) $m = 3.0 \text{ kg}, r = 0.20 \text{ m}$

$$I = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}(3.0 \text{ kg})(0.20 \text{ m})^2 = \mathbf{0.060 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

- (β) (0.8 μον.) $\omega_i = 2.0 \text{ rad/s}, \omega_f = 32 \text{ rad/s}, \Delta t = 4.0 \text{ s}$

$$a_\omega = \frac{\omega_f - \omega_i}{\Delta t} = \frac{32 - 2.0}{4.0} = \mathbf{7.5 \text{ rad/s}^2}$$

- (γ) (1.2 μον.) Η ροπή της ***F*** είναι $\tau_F = F \cdot r$

Από το 2° νόμο Νεύτωνα έχουμε $\tau_F = I a_\omega$

Οπότε

$$F \cdot r = I a_\omega \Rightarrow F = \frac{I a_\omega}{r} = \frac{(0.060 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(7.5 \text{ rad/s}^2)}{0.20 \text{ m}} = \mathbf{2.25 \text{ N}}$$

- (δ) (0.8 μον.) $\theta = \frac{1}{2}(\omega_f + \omega_i)\Delta t = \frac{1}{2}(32 + 2.0)4.0 = \mathbf{68 \text{ rad}}$

Αριθμός περιστροφών $\frac{\theta}{2\pi} \approx \mathbf{11}$ περιστροφές

Θέμα 3^ο

Σώμα μάζας 10.6 kg ταλαντώνεται στην άκρη ενός κατακόρυφου ελατηρίου που έχει σταθερά ελατηρίου $2.05 \times 10^4 \text{ N/m}$. Η επίδραση της αντίστασης του αέρα αντιπροσωπεύεται από τον συντελεστή απόσβεσης $b = 3.00 \text{ N} \cdot \text{s/m}$.

(α) Υπολογίστε τη συχνότητα της ταλάντωσης.

(β) Κατά ποιο ποσοστό μειώνεται το πλάτος της ταλάντωσης σε κάθε κύκλο;

(γ) Βρείτε το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί ενώ η ενέργεια του συστήματος πέφτει στο 5.00% της αρχικής του τιμής.

Λύση

(α) (0.7 μον.) Μάζα $m = 10.6 \text{ kg}$, σταθερά ελατηρίου $k = 2.05 \times 10^4 \text{ N/m}$, επομένως

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\frac{2.05 \times 10^4 \text{ N/m}}{10.6 \text{ kg}} - \left(\frac{3.00 \text{ N} \cdot \text{s/m}}{2 \cdot 10.6 \text{ kg}}\right)^2} = \mathbf{44.0 \text{ rad/s}}$$
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{44.0}{2\pi} = \mathbf{7.00 \text{ Hz}}$$

(β) (1.2 μον.) Πλάτος ταλάντωσης $Ae^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t}$, επομένως σε κάθε κύκλο ($t = T$) το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται στο

$$e^{-\left(\frac{b}{2m}\right)T} = e^{-\left(\frac{b}{2m}\right)\frac{1}{f}} = e^{-\left(\frac{3.00}{2 \cdot 10.6}\right)\frac{1}{7.00}} = \mathbf{0.98}$$

της προηγούμενη τιμής, δηλαδή, μειώνεται κατά **2%**.

(γ) (1.2 μον.) Ενέργεια συστήματος $E = \frac{1}{2}k \left[Ae^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t} \right]^2$

Αρχική τιμή ενέργειας (για $t = 0$) $E_i = \frac{1}{2}kA^2$ οπότε

$$E = 0.05E_i \Rightarrow \frac{1}{2}k \left[Ae^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t} \right]^2 = 0.05 \frac{1}{2}kA^2$$
$$\Rightarrow e^{-2\left(\frac{b}{2m}\right)t} = 0.05$$
$$\Rightarrow -\frac{b}{m}t = \ln 0.05$$
$$\Rightarrow t = -\frac{m}{b} \ln 0.05 = -\frac{10.6}{3.00} \ln 0.05 = \mathbf{10.6 \text{ s}}$$