ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ ΕΤΟΥΣ 2023-24

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΗΧΑΝΙΚΗ

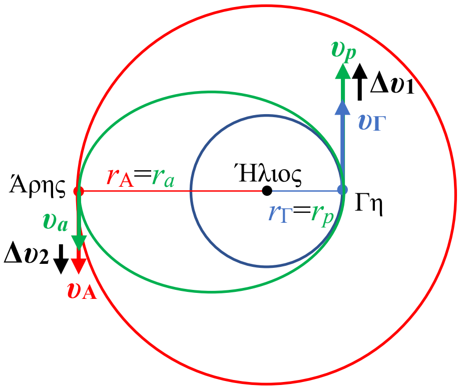
Τετάρτη, 22 Ιανουαρίου 2025: 15:00-18:00 π.μ. Αίθουσες: Αμφιθέατρο ΑΠ1_8
Εισηγητής: Κώστας Φιλιππίδης (kphilippides@uowm.gr)

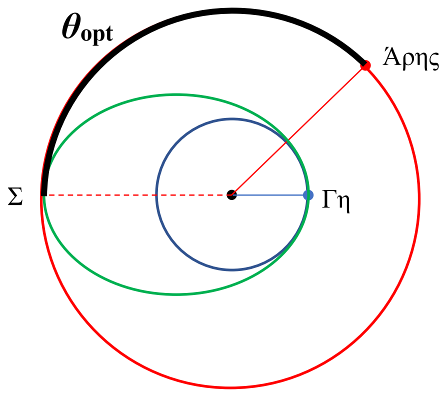
Να μεταφέρετε όλα τα σχήματα στο γραπτό σας και να δίνετε τα αποτελέσματα με το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων για να πάρετε όλες τις μονάδες.
$g = 9{,}80067$ N/kg (Κοζάνη)

ΘΕΜΑ 1 Από τη Γη στον Άρη [3,5]

Πύραυλος που βρίσκεται πάνω στη Γη και άρα έχει την ταχύτητα της Γης, πυροδοτεί τη στιγμή t=0 ώστε να μπει σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τον Ήλιο που να εφάπτεται στην τροχιά του Άρη ώστε να φτάσει στον Άρη. Θεωρείστε τις τροχιές της Γης και του Άρη γύρω από τον Ήλιο ομοεπίπεδες και κυκλικές, με ακτίνες $r_\Gamma = 1{,}495\,978\,707\times 10^{11}\ \text{m} = 1\ \text{au}$ και $r_\text{A} = 1{,}524$ au αντίστοιχα και αγνοήστε τη βαρυτική τους επίδραση στον πύραυλο. Τα καύσιμα του πυραύλου αποτελούν το 92,0 % της συνολικής του μάζας και έχουν ταχύτητα καυσαερίων $u_e = 4{,}50$ km/s .

Δίνονται : για τον ήλιο $GM_S = 1{,}3271\times 10^{20}\ \text{m}^3/\text{s}^2$, ταχύτητα ελλειπτικής τροχιά; $\upsilon = \sqrt{GM_S\left(\dfrac{2}{r}-\dfrac{1}{a}\right)}$.





1.1 Πόσος είναι ο μεγάλος ημιάξονας a και πόση η περίοδος T της ελλειπτικής τροχιάς. [0,5]

1.2 Υπολογίστε τις ταχύτητες υ_Γ (Γη), υ_p (περιήλιο), υ_a (αφήλιο), υ_A (Άρης) καθώς και τις μεταβολές ταχύτητας $\Delta\upsilon_1$ και $\Delta\upsilon_2$ που πρέπει να πετύχει ο πύραυλος σε km/s. [1]

1.3 Υπολογίστε το ποσοστό της μάζας του που καίει ο πύραυλος για να μεταβεί στον Άρη και αποφανθείτε αν έχει αρκετά καύσιμα για να επιστρέψει στη Γη. [1,2]

1.4 Σε τι γωνία θ_opt σε μοίρες ως προς το σημείο συνάντησης Σ, πρέπει να βρίσκεται ο Άρης τη στιγμή της εκτόξευσης ώστε η μετάβαση να πραγματοποιηθεί στο συντομότερο χρονικό διάστημα και πόσο είναι αυτό. [0,8]

ΛΥΣΗ

Ταχύτητες στον Άρη, περίοδος, γωνία σε 4 σημαντικά ψηφία (από 1,524). Ποσοστά μάζας σε 3 σημαντικά ψηφία (από 4,50).

1.1 [0,5]

Περιήλιο (perihelion) : $r_p = r_\Gamma = 1{,}495\,978\,707\times 10^{11}\ \text{m}$,

Αφήλιο (aphelion) :

$$r_a = r_\text{A} = (1{,}524)(1{,}495\,978\,707\times 10^{11}\text{m}) = 2{,}279871549468\times 10^{11}\text{m} = 2{,}280\times 10^{11}\ \text{m}$$

Μεγάλος **ημι**άξονας έλλειψης (από το σχήμα) :

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{r_\Gamma + r_\text{A}}{2} = \frac{1+1{,}524}{2} r_\Gamma = 1{,}262 r_\Gamma = 1{,}8879251282\times 10^{11}\text{m} = 1{,}888\times 10^{11}\text{m})\quad \textbf{[0,2]}$$

Από τον 3ο νόμο του Kepler (τον οποίο μπορείτε να ξέρετε απ΄έξω) :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_S}}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\left[(1,262)(1,495978707)10^{11}\right]^3}{1,3271\times10^{20}}}=2\pi\sqrt{\frac{(1,8879251282)^3 10^{33}}{1,3271\times10^{20}}}=2\pi\sqrt{\frac{(6,729058453)(10)}{1,3271}\times10^{12}}\Rightarrow$$

$$T=2\pi\sqrt{50,704984196}\times10^6=2\pi(7,120743233)\times10^6=44,7409492602\times10^6\Rightarrow$$

$$T=44,74\times10^6\ \text{s}\ =44,74\times10^6\ \text{s}\frac{1\text{ημέρα}}{60\times60\times24\ \text{s}}=517,8\ \text{ημέρες}$$

Ή από τα μεγέθη της Γης που επίσης είναι σε τροχιά γύρω από τον ήλιο

$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{T_\Gamma^2}{r_\Gamma^3}=\sigma\tau\alpha\theta$$

$$\frac{T^2}{\left(1,262\cancel{r_\Gamma}\right)^3}=\frac{(1\ \text{y})^2}{\cancel{r_\Gamma^3}}\Rightarrow T\ =\sqrt{1,262^3}\ \text{y}=1,4177153198\cancel{\text{y}}\left(\frac{365,25\ \cancel{\text{d}}}{1\ \cancel{\text{y}}}\right)\left(\frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{d}}}\right)\left(\frac{60\times60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}}\right)=44,74\times10^6\ \text{s}$$

[Αν δεν θυμάστε τον 3ο νόμο, τον βρίσκετε για την κυκλική τροχιά και αντικαθιστάτε στον τύπο, την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς με το μεγάλο ημιάξονα $r\rightarrow a$:

$$F_{net}=ma\Rightarrow F_G=ma_c\Rightarrow G\frac{M_S m}{r^2}=m\omega^2 r\Rightarrow\frac{GM_S}{r^3}=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\Rightarrow\frac{T^2}{r^3}=\frac{4\pi^2}{GM_S}=\sigma\tau\alpha\theta.]$$

1.2 [1]

[Τον τύπο της κυκλικής τροχιάς μπορείτε να τον ξέρετε απ΄ έξω. Αν δεν τον ξέρετε τον βρίσκεται από

$$F_{net}=ma\Rightarrow F_G=ma_c\Rightarrow G\frac{M_S m}{r^2}=m\frac{\upsilon^2}{r}\Rightarrow\upsilon=\sqrt{\frac{GM_S}{r}}\ ]$$

Υπολογισμοί στην αρχική θέση (Γη)

Μέτρο ταχύτητας κυκλικής τροχιάς Γης

$$\upsilon_\Gamma=\sqrt{\frac{GM_S}{r_\Gamma}}=\sqrt{\frac{1,3271\times10^{20}\ \text{m}^3\text{s}^{-2}}{1,495978707\times10^{11}\ \text{m}}}=\sqrt{\frac{13,271\times10^8}{1,495978707}}\text{m/s}=\sqrt{8,87111557}\times10^4\ \text{m/s}$$

$$=2,978442\times10^4\text{m/s}=29,784\ \text{km/s}\qquad \mathbf{[0,2]}$$

Το κρατάμε για να το χρησιμοποιήσουμε πάλι παρακάτω, χωρίς να επαναλάβουμε όλον τον υπολογισμό, ώστε να αποφύγουμε λάθη.

Μέτρο ταχύτητας περίγειου ελλειπτικής τροχιάς

$$\upsilon_p=\sqrt{GM\left(\frac{2}{r_\Gamma}-\frac{1}{a}\right)}=\sqrt{\frac{GM}{r_\Gamma}}\sqrt{\left(2-\frac{r_\Gamma}{a}\right)}=2,978442\times10^4\sqrt{2-\frac{1}{1,262}}=32,730\ \text{km/s}\qquad\mathbf{[0,2]}$$

$$\boxed{\upsilon_\Gamma=29,784\ \text{km/s}\ \xrightarrow{\text{με πυροδότηση}}\ \upsilon_p=32,730\ \text{km/s}}$$

Μεταβολή ταχύτητας που πρέπει να πετύχει ο πύραυλος για να μπει στην ελλειπτική τροχιά:

$\Delta\upsilon_1=\upsilon_p-\upsilon_\Gamma=32,730-29,784=2,946\ \text{km/s}\quad\mathbf{[0,1]}$

Υπολογισμοί στην τελική θέση (Άρης)

Μέτρο ταχύτητας απόγειου ελλειπτικής τροχιάς

Χρησιμοποιούμε τη διατήρηση της στροφορμής για να μην επαναλάβουμε όλον τον υπολογισμό με τον τύπο της ελλειπτικής τροχιάς, ώστε να αποφύγουμε λάθη.

$$\upsilon_a r_a=\upsilon_p r_p\Rightarrow\upsilon_a=\upsilon_p\frac{r_p}{r_a}=32,730\ \text{km/s}\frac{1}{1,524}=21,48\ \text{km/s}\qquad\mathbf{[0,2]}$$

$$\boxed{\upsilon_p=32,730\ \text{km/s}\ \xrightarrow{\text{σε ηλιοκεντρική τροχιά}}\ \upsilon_a=21,48\ \text{km/s}\quad\text{δεν χρειάζονται καύσιμα}}$$

Ταχύτητα κυκλικής τροχιάς Άρη :

$$\upsilon_A=\sqrt{\frac{GM_S}{r_A}}=\sqrt{\frac{GM_S}{1,524 r_\Gamma}}=\frac{\upsilon_\Gamma}{\sqrt{1,524}}=\frac{29,78442}{\sqrt{1,524}}\text{km/s}=24,12663=24,13\text{km/s}\quad\mathbf{[0,2]}$$

$$\upsilon_a = 21,48 \text{ km/s} \xrightarrow{\text{με πυροδότηση}} \upsilon_{\mathrm{A}} = 24,13 \text{km/s}$$

Μεταβολή ταχύτητας που πρέπει να πετύχει ο πύραυλος για να μπει στην κυκλική τροχιά του Άρη:
$\Delta\upsilon_2 = \upsilon_{\mathrm{A}} - \upsilon_a = 24,13 - 21,48 = 2,65 \text{ km/s}$ **[0,1]**

1.2 [1,2]
Η απαιτούμενη συνολική μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας για τη μετάβαση στον Άρη είναι
$\Delta\upsilon_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}\beta\alpha\sigma\eta} = \Delta\upsilon_1 + \Delta\upsilon_2 = 2,946 + 2,65 = 5,60 \text{ km/s}$ **[0,2]**

Για την επιστροφή θα χρειαστεί να πετύχουμε τις ίδιες διαφορές ταχύτητας, αντίθετα αυτή τη φορά. Άρα η απαιτούμενη συνολική μεταβολή των μέτρων της ταχύτητας για την επιστροφή θα είναι η ίδια.
$\Delta\upsilon_{\varepsilon\pi\iota\sigma\tau\rho o\varphi\acute{\eta}} = 5,60 \text{ km/s}$ **[0,2]**

Εξίσωση πυραύλου (μετάβαση): $m_{\mathrm{A}} = m_0 e^{-\frac{\Delta\upsilon}{u_e}} = m_0 e^{-\frac{5,60}{4,50}} = m_0 e^{-1,244} = m_0(0,2881)$ **[0,3]**

Όταν φτάσει στον Άρη θα έχει μείνει στον πύραυλο το 28,8% της αρχικής μάζας m_0 που είχε στη Γη κατά την εκτόξευση. Το υπόλοιπο 71,2% είναι τα καύσιμα που έχουν καεί. Του έχουν μείνει καύσιμα ίσα με το 92%-71,2%=20,8% της αρχικής μάζας. Φαινομενικά δεν μπορεί να γυρίσει, αφού για να πάει χρειάστηκε 71,2%m_0 και τώρα έχει μόνο 20,8%m_0.
Όμως τώρα πρέπει να επιταχύνει πολύ μικρότερη μάζα!

Αν καταφέρει να επιστρέψει στη Γη θα έχει απομείνει στον πύραυλο πάλι το 28,8% της μάζας που είχε όταν ξεκίνησε από τον Άρη.

Εξίσωση πυραύλου (επιστροφή): $m_\Gamma = m_{\mathrm{A}} e^{-\frac{\Delta\upsilon}{u_e}} = m_0(0,2881) e^{-\frac{5,60}{4,50}} = m_0(0,2881)^2 = m_0(0,08300)$ **[0,3]**

Άρα η μάζα m_Γ του πυραύλου κατά την επιστροφή στη Γη θα είναι ίση με το 8,30% της αρχικής m_0. Το υπόλοιπο 91,7% είναι τα καύσιμα που κάηκαν. Εφόσον αυτό το ποσοστό είναι λίγο μεγαλύτερο από 8%<8,3% (ή ισοδύναμα 91,7%<92%) σημαίνει ότι δεν έχουν καταναλωθεί όλα τα καύσιμα και ο πύραυλος μπορεί, οριακά βέβαια, να επιστρέψει. **[0,2]**

Για το λόγο αυτό, ώστε να διευκολύνουν το ταξίδι τους, οι πύραυλοι πετάνε τις δεξαμενές καυσίμων όταν αδειάζουν για να μην κουβαλούν άχρηστη πρόσθετη μάζα την οποία για να την επιταχύνουν πρέπει να καταναλώσουν καύσιμα.

1.4 [0,8] Μετά την εκτόξευση τη χρονική στιγμή t=0 ο πύραυλος θα φτάσει στην τροχιά του Άρη σε χρόνο τ ίσο με το μισό της περιόδου της ελλειπτικής τροχιάς :

$$\tau = \frac{T}{2} = 22,37 \times 10^6 \text{ s}, \quad \textbf{[0,2]}$$

που είναι ίσος με σχεδόν 259 ημέρες ($1 \text{ d} = 24 \times 60 \times 60 = 86.400 \text{ s}$).
Αυτός είναι και ο συντομότερος χρόνος που θα διαρκέσει το ταξίδι στον Άρη εφόσον ο Άρης ήταν στη γωνία θ_{opt} την οποία πρέπει να καλύψει στο ίδιο χρονικό διάστημα τ για να συναντηθεί με το διαστημόπλοιο. :

$$\theta_{\text{opt}} = \omega_{\mathrm{A}}\,\tau = \frac{\upsilon_{\mathrm{A}}}{r_{\mathrm{A}}}\tau \Rightarrow \quad \textbf{[0,3]}$$

$$\theta_{\text{opt}} = \frac{24.126,63}{(1,524)(1,495978707 \times 10^{11})} \frac{44,7409492602 \times 10^6}{2} = 2,367 \text{ rad} \; \frac{180^{\text{o}}}{\pi \text{ rad}} = 135,61911^{\text{o}} = 135,6^{\text{o}} \quad \textbf{[0,3]}$$

Αν ο Άρης δεν ήταν στη γωνία θ_{opt} του σχήματος ο πύραυλος θα έπρεπε να συνεχίσει κάνοντας μια ολόκληρη ελλειπτική τροχιά (περνώντας πάλι από την τροχιά της Γης) για να επιστρέψει στο σημείο συνάντησης Σ και να συναντήσει τον Άρη τη 2η φορά. Αυτό θα γίνει αν ο Άρης τη στιγμή της εκτόξευσης βρισκόταν στη γωνία $\theta = \omega_{\mathrm{A}}\left(\frac{T}{2} + T\right) = 3\theta_{\text{opt}} = 3(135,61911) = 406,85733 = 406,9^{\text{o}} \xrightarrow{-360^{\text{o}}} 46,9^{\text{o}}$.

Λαμβάνοντας αυτόν τον παράγοντα υπόψη, δηλαδή τη θέση που βρίσκεται ο Άρης σήμερα, προσδιορίζεται η επόμενη δυνατή ημερομηνία εκτόξευσης για συνάντηση και ο χρόνος που θα διαρκέσει το ταξίδι.
Αν τα υπολογίσατε:

$$\omega_{\mathrm{A}} = \frac{\upsilon_{\mathrm{A}}}{r_{\mathrm{A}}} = \frac{24.126,63}{(1,524)(1,495978707\times10^{11})} = 1,058\times10^{-7}\ \text{rad/s}$$

$$T_A = \frac{2\pi}{\omega_A} = 5,937\times10^{7}\ \text{s} = 687,2\ \text{d} = 1,881\ \text{y}$$

Ή

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{r_A^3}{GM_S}} = 2\pi\sqrt{\frac{\left[(1,524)(1,495978707)10^{11}\right]^3}{1,3271\times10^{20}}} = 5,937\times10^{7}\ \text{s}$$

Ή

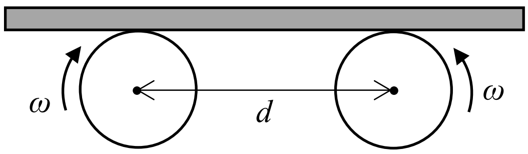
$$\frac{T_{\mathrm{A}}^2}{r_{\mathrm{A}}^3} = \frac{T_{\Gamma}^2}{r_{\Gamma}^3} \Rightarrow \frac{T_{\mathrm{A}}^2}{\left(1,524\cancel{r_{\Gamma}}\right)^3} = \frac{(1\ \text{y})^2}{\cancel{r_{\Gamma}^3}} \Rightarrow T_{\mathrm{A}} = \sqrt{1,524^3}\ \text{y} = 1,881\ \text{y}$$

και

$$\omega_{\mathrm{A}} = \frac{2\pi}{T_{\mathrm{A}}} = \frac{2\pi}{5,937\times10^{7}} = 1,058\times10^{-7}\ \text{rad/s}$$

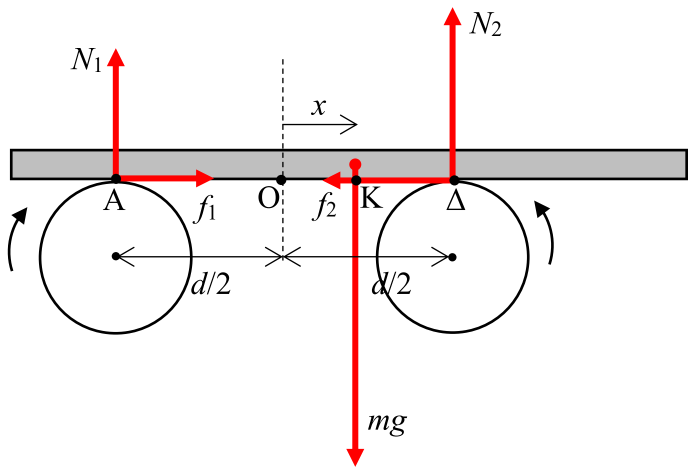
ΘΕΜΑ 2 Ταλαντωτής Timoshenko [2]

Για να μετρήσουμε το συντελεστή κινητικής τριβής χρησιμοποιούμε έναν ταλαντωτή Timoshenko ο οποίος αποτελείται από μια ομογενή πλάκα που ισορροπεί πάνω στους περιστρεφόμενους κυλίνδρους του σχήματος με *d*= 89 mm



2.1 Μετακινείστε την πλάκα οριζόντια κατά *x* από τη θέση ισορροπίας της, σχεδιάστε όλες τις δυνάμεις που δρουν πάνω της σε κλίμακα και δείξτε ότι θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση. [1,5]
2.2 Αν η περίοδος της ταλάντωσης μετρηθεί και είναι ίση με $T = 0,80\ \text{s}$, βρείτε το συντελεστή κινητικής τριβής μεταξύ των υλικών της πλάκας και των κυλίνδρων. [0,5]

ΛΥΣΗ
Αποτέλεσμα σε δύο σημαντικά ψηφία
2.1 [1,5]



[0,5]

Ισορροπία $y:$ $N_1 + N_2 = mg$ (1) [0,1]
Επιτάχυνση $x:$ $f_1 - f_2 = ma \Rightarrow \mu_k(N_1 - N_2) = m\ddot{x}$ (2) [0,2]
Ισορροπία ροπών γύρω από το O (στο μέσο της απόστασης μεταξύ των κυλίνδρων στο ύψος της κάτω επιφάνειας της ράβδου) :

$$mgx + N_1\frac{d}{2} = N_2\frac{d}{2} \Rightarrow\ N_1 - N_2 = -\frac{2mg}{d}x \quad (3) \quad [0,3]$$

Άρα η συνισταμένη στον άξονα x :

$$f_1 - f_2 = \mu_k (N_1 - N_2) = -\frac{2\mu_k mg}{d} x \quad (4) \quad [0,1]$$

είναι δύναμη επαναφοράς με :

$$k = \frac{2\mu_k mg}{d} \quad (5) \quad [0,1]$$

Άρα, η πλάκα θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση στον άξονα x, με κυκλική συχνότητα :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2\mu_k g}{d}} \quad (6) \quad [0,1]$$

και περίοδο :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{2\mu_k g}} = \pi\sqrt{\frac{2d}{\mu_k g}} \quad (7) \quad [0,1]$$

Αν πήρατε ροπές γύρω από άλλα σημεία, σε συνδυασμό με την (1) $N_1 + N_2 = mg$ **έπρεπε να καταλήξετε στο ίδιο αποτέλεσμα:**

$$N_1 - N_2 = -\frac{2mg}{d} x$$

Ισορροπία ροπών γύρω από το Κ (κάτω από το κέντρο μάζας) :

$$N_1\left(\frac{d}{2} + x\right) = N_2\left(\frac{d}{2} - x\right) \Rightarrow (N_1 - N_2)\frac{d}{2} = -(N_1 + N_2)x \Rightarrow (N_1 - N_2)\frac{d}{2} = -mgx \Rightarrow N_1 - N_2 = -\frac{2mg}{d} x$$

Ισορροπία ροπών γύρω από το Α (αριστερό σημείο επαφής) :

$$N_2 d = mg\left(\frac{d}{2} + x\right) \Rightarrow N_2 d = (N_1 + N_2)\frac{d}{2} + mgx \Rightarrow -mgx = (N_1 - N_2)\frac{d}{2} \Rightarrow N_1 - N_2 = -\frac{2mg}{d} x$$

Ισορροπία ροπών γύρω από το Δ (δεξί σημείο επαφής) :

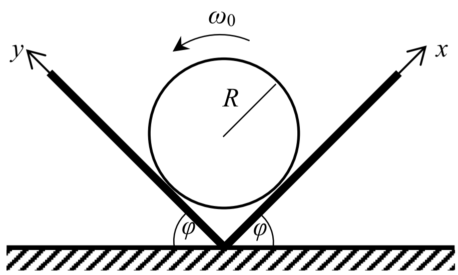
$$N_1 d = mg\left(\frac{d}{2} - x\right) \Rightarrow N_1 d = (N_1 + N_2)\frac{d}{2} - mgx \Rightarrow (N_1 - N_2)\frac{d}{2} = -mgx \Rightarrow N_1 - N_2 = -\frac{2mg}{d} x$$

3.2 [0,5] Λύνω την (7) ως προς μ_k : $\mu_k = \dfrac{2\pi^2 d}{gT^2} = \dfrac{2\pi^2 89\times 10^{-3}\ \cancel{\text{m}}}{(9,80067\ \cancel{\text{m}/\text{s}^2})(0,80\ \cancel{\text{s}})^2} = 0,28008 = 0,28$

ΘΕΜΑ 3 [3]

Λεπτός κυλινδρικός σωλήνας ακτίνας $R = 0,500\ \text{m}$, που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 20,0\ \text{rad/s}$, αφήνεται πάνω στην ορθή γωνία του σχήματος.

Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ του σωλήνα και της γωνίας είναι $\mu_k = 0,200$.



3.1 Σχεδιάστε όλες τις δυνάμεις που δρουν στο σωλήνα. [0,5]

3.2 Βρείτε τις εκφράσεις που δίνουν τα μέτρα των τριβών στα σημεία επαφής [1,5]

3.2 Σε πόσο χρόνο θα σταματήσει να περιστρέφεται ο σωλήνας και πόσες περιστροφές θα έχει κάνει μέχρι τότε [1].

ΛΥΣΗ

Αποτελέσματα για χρόνο και στροφές σε τρία σημαντικά ψηφία

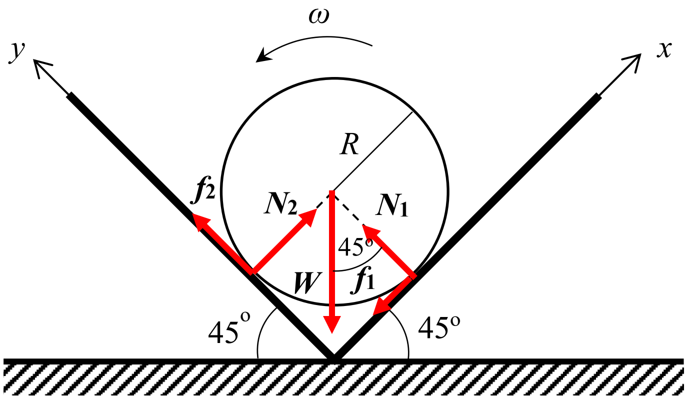
$$\varphi = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ, \quad \cos\varphi = \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

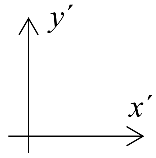
ροπή αδράνειας λεπτού κυλίνδρου=ροπή αδράνειας στεφάνης: $I = mR^2$

Επιλέγοντας τους προτεινόμενους άξονες x-y έχουμε μόνο μια δύναμη (W) που χρειάζεται να αναλυθεί σε συνιστώσες αντί να έχουμε τέσσερις (N_1, f_1, N_2, f_2)

$$W_x = W_y = \frac{W}{\sqrt{2}} = \frac{mg}{\sqrt{2}}$$

3.1 [0,5]





Δεν συνιστάται

Η κατάσταση δεν είναι συμμετρική. Οι δυνάμεις στα δύο σημεία επαφής θα είναι διαφορετικές.

3.2 [1,5]

Ισορροπία στον *x*: $N_2 = \frac{W}{\sqrt{2}} + f_1$ (1) [0,4]

Ισορροπία στον *y*: $N_1 = \frac{W}{\sqrt{2}} - f_2$ (2) [0,4]

Χρησιμοποιώ τον τύπο της κινητικής τριβής $f = \mu_k N$ (3) [0,1]
και λύνω το σύστημα των (1), (2)

x: (3)→(1): $\frac{f_2}{\mu_k} = \frac{W}{\sqrt{2}} + f_1 \Rightarrow \qquad \mu_k f_1 - f_2 = -\mu_k \frac{W}{\sqrt{2}}$ (4)

y: (3)→(2): $\frac{f_1}{\mu_k} = \frac{W}{\sqrt{2}} - f_2 \Rightarrow \qquad f_1 + \mu_k f_2 = \mu_k \frac{W}{\sqrt{2}}$ (5)

μ_k(5) –(4) : $\cancel{\mu_k f_1} + \mu_k^2 f_2 - \cancel{\mu_k f_1} + f_2 = \mu_k^2 \frac{W}{\sqrt{2}} + \mu_k \frac{W}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$$\boxed{f_2 = \frac{\mu_k(1+\mu_k)}{1+\mu_k^2}\frac{mg}{\sqrt{2}} \qquad (6) \qquad [0,3]}$$

(6)→(4) : $\cancel{\mu_k} f_1 - \frac{\cancel{\mu_k}(1+\mu_k)}{1+\mu_k^2}\frac{mg}{\sqrt{2}} = -\cancel{\mu_k}\frac{mg}{\sqrt{2}} \Rightarrow f_1 = \left(\frac{1+\mu_k}{1+\mu_k^2} - 1\right)\frac{mg}{\sqrt{2}}$

$$\boxed{f_1 = \frac{\mu_k(1-\mu_k)}{1+\mu_k^2}\frac{mg}{\sqrt{2}} \qquad (7) \qquad [0,3]}$$

[Παρατηρήσεις στο αποτέλεσμα.
i) Αν ήταν μ_k=1 τότε $N_1 = f_1 = 0$ και ο σωλήνας χάνει την επαφή δεξιά. Η f_2 και η N_2 που είναι ίσες $N_2 = f_2 = \frac{mg}{\sqrt{2}}$ σηκώνουν το βάρος του ενώ η ροπή της f_2 τον σταμάτα και μετά μηδενίζεται. Όταν ο σωλήνας σταματά ανακτά την επαφή στη δεξιά πλευρά ώστε τώρα οι $N_1 = N_2 = \frac{mg}{\sqrt{2}}$ να σηκώνουν το βάρος του.
ii) Αν μ_k>1 ο σωλήνας θα αρχίσει να κυλάει προς τα πάνω στην αριστερή πλευρά αφού $f_2 > N_2 = \frac{mg}{\sqrt{2}}$.
iii) Λόγος των τριβών : $\frac{f_2}{f_1} = \frac{1+\mu_k}{1-\mu_k} = \frac{1,2}{0,8} = 1,5$]
Αν τις υπολογίσατε έπρεπε να βρείτε (δεν είναι τελικά αποτελέσματα οπότε τα γράφω με όσα ψηφία θέλω)

$$f_1 = \frac{(0,20)(1-0,20)}{1+0,04}\frac{mg}{\sqrt{2}} = 0,109mg = 1,068m, \qquad f_2 = 1,5f_1 = (1,5)0,109mg = 0,163mg = 1,602m$$

$$N_1 = \frac{f_1}{\mu_k} = 0,545mg = 5,34m \qquad N_2 = \frac{f_2}{\mu_k} = 0,815mg = 7,99m$$

Οι δυνάμεις που προκαλούν γωνιακή επιτάχυνση f_1, f_2, είναι και οι δύο σταθερές, σε συγκεκριμένα σημεία εφαρμογής. Για αυτό θα προκαλέσουν σταθερή συνισταμένη ροπή και άρα θα οδηγήσουν σε ομαλά επιβραδυνόμενη περιστροφική κίνηση

Αν επιλέξατε οριζόντιο άξονα x' και κατακόρυφο άξονα y' και δεν μπλέξατε τα μπούτια σας στην πορεία, έπρεπε να βρείτε τα παρακάτω. Επειδή $\cos\varphi = \sin\varphi = 1/\sqrt{2}$ και οι x' και οι y' συνιστώσες οποιασδήποτε από τις δυνάμεις (F: N_1, f_1, N_2, f_2) θα είναι της μορφής $F/\sqrt{2}$. Αυτή τη φορά ας λύσουμε ως προς τις N_1, N_2 :

$$x' : \frac{N_2}{\sqrt{2}} - \frac{f_2}{\sqrt{2}} - \frac{N_1}{\sqrt{2}} - \frac{f_1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow N_2 - \mu_k N_2 - N_1 - \mu_k N_1 \Rightarrow \quad N_2 = \frac{1+\mu_k}{1-\mu_k}N_1 \quad \text{(A)}$$

$$y' : \frac{N_2}{\sqrt{2}} + \frac{f_2}{\sqrt{2}} + \frac{N_1}{\sqrt{2}} - \frac{f_1}{\sqrt{2}} = W \Rightarrow \qquad N_2(1+\mu_k) + N_1(1-\mu_k) = W\sqrt{2} \quad \text{(B)}$$

(A)→(B) :
$$N_1\frac{1+\mu_k}{1-\mu_k}(1+\mu_k) + N_1(1-\mu_k) = W\sqrt{2} \Rightarrow N_1\frac{(1+\mu_k)^2 + (1-\mu_k)^2}{1-\mu_k} = W\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$N_1\frac{1+\cancel{2\mu_k}+\mu_k^2+1-\cancel{2\mu_k}+\mu_k^2}{1-\mu_k} = W\sqrt{2} \Rightarrow \qquad N_1 = \frac{1-\mu_k}{1+\mu_k^2}\frac{W}{\sqrt{2}} \quad (\Gamma)$$

(Γ)→(A) : $N_2 = \dfrac{1+\mu_k}{1+\mu_k^2}\dfrac{W}{\sqrt{2}}$

3.3 [1]

Περιστροφική κίνηση γύρω από τον z :

$$I\alpha = \tau_{net} \Rightarrow mR^2\alpha = -f_1R - f_2R \Rightarrow \alpha = -\frac{f_1+f_2}{mR} \quad (8) \qquad [0,1]$$

(6)+(7) :
$$f_1 + f_2 = \frac{\mu_k(1-\cancel{\mu_k})}{1+\mu_k^2}\frac{mg}{\sqrt{2}} + \frac{\mu_k(1+\cancel{\mu_k})}{1+\mu_k^2}\frac{mg}{\sqrt{2}} = \frac{2\mu_k}{1+\mu_k^2}\frac{mg}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$f_1 + f_2 = \frac{\sqrt{2}\mu_k}{1+\mu_k^2}mg \quad (9)$$

Άρα από (8)
$$\alpha = -\frac{\sqrt{2}\mu_k}{1+\mu_k^2}\frac{g}{R} \quad (10)$$

$$\alpha = -\frac{\sqrt{2}\mu_k}{1+\mu_k^2}\frac{g}{R} = -\frac{\sqrt{2}(0,20)}{1+(0,20)^2}\frac{(9,80067)}{0,50} = -5,3308617 = -5,33 \text{ rad/s}^2 \quad [0,2]$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \alpha\int_0^t dt \Rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow 0 = \omega_0 + \alpha t_{stop} \Rightarrow t_{stop} = -\frac{\omega_0}{\alpha} \Rightarrow \ t_{stop} = \frac{1+\mu_k^2}{\sqrt{2}\mu_k}\frac{\omega_0 R}{g} \quad (7)\ [0,2]$$

$$\boxed{t_{stop} = -\frac{20}{-5,33086} = 3,75174 = 3,75 \text{ s} \quad [0,1]}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(t) \Rightarrow \int_0^{\theta} d\theta = \int_0^t (\omega_0 + \alpha t)dt \Rightarrow \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad [0,1]$$

$$\theta_{stop} = \omega_0 t_{stop} + \frac{1}{2}\alpha t_{stop}^2 = \omega_0 t_{stop} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{t_{stop}}\right)t_{stop}^2 = \frac{\omega_0 t_{stop}}{2} = \frac{(20)(3,75174)}{2} = 37,5174 = 37,5 \text{ rad} \quad [0,1]$$

$$\boxed{N = \frac{\theta_{stop}}{2\pi} = \frac{37,5174}{2\pi} = 5,9711 = 5,97 \quad \text{στροφές} \ [0,2]}$$

Σχεδόν 6 στροφές

ΑΛΛΙΩΣ

Από την αρχή της στροφορμής, επειδή η ροπή είναι σταθερή, μπορούμε να βρούμε κατευθείαν τη χρονική στιγμή t_{stop} :

$$\tau_{net} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{0 - I\omega_0}{t_{stop} - 0} \Rightarrow t_{stop} = \frac{-I\omega_0}{\tau_{net}} = \frac{-I\omega_0}{-(f_1+f_2)R} = \frac{mR^{\cancel{2}}\omega_0}{(f_1+f_2)\cancel{R}} = \frac{mR\omega_0}{f_1+f_2} = \frac{\cancel{m}R\omega_0}{\frac{\sqrt{2}\mu_k}{1+\mu_k^2}\cancel{m}g} \Rightarrow$$

$$t_{stop} = \frac{1+\mu_k^2}{\sqrt{2}\mu_k}\frac{\omega_0 R}{g} \quad \textbf{[0,5]}$$

Από την αρχή της ενέργειας, επειδή η ροπή είναι σταθερή, μπορούμε να βρούμε κατευθείαν, τη διαγραφείσα γωνία θ_{stop} :

$$\Delta E = \tau_{net}\,\Delta\theta \Rightarrow \quad 0 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = -(f_1+f_2)R\cdot\left(\theta_{stop} - 0\right) \Rightarrow \theta_{stop} = \frac{I\omega_0^2}{2(f_1+f_2)R} = \frac{mR^{\cancel{2}}\omega_0^2}{2(f_1+f_2)\cancel{R}} = \frac{mR\omega_0^2}{2(f_1+f_2)} \Rightarrow$$

$$\theta_{stop} = \frac{\cancel{m}R\omega_0^2}{2\frac{2\mu_k}{1+\mu_k^2}\frac{\cancel{m}g}{\sqrt{2}}} = \frac{1+\mu_k^2}{2\sqrt{2}\mu_k}\frac{R\omega_0^2}{g} = \frac{(1+0,040)}{2\sqrt{2}(0,20)}\frac{(0,50)(20)}{(9,80067)} = 37,5174 \text{ rad} \quad \textbf{[0,5]}$$

Όπως και να το κάνετε χρειάζεται να ξέρετε τις δυνάμεις $f_1 + f_2$

ΘΕΜΑ 4 [1,5]

Το ηλεκτρικό πεδίο επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος δίνεται από την παρακάτω έκφραση:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = 4,5\times10^3 \sin\left\lfloor\ 2\pi(18\times10^9 t + p\cdot\ y)\right\rfloor \hat{x} \qquad \text{(SI)}$$

Να δικαιολογείτε τις απαντήσεις σας στα παρακάτω ερωτήματα :

4.1 [0,1] Σε ποια κατεύθυνση διαδίδεται το κύμα ;

4.2 [0,4] Ποιες είναι οι μονάδες της σταθεράς 18×10^9 μέσα στη φάση και ποια είναι η τιμή και οι μονάδες της *θετικής* σταθεράς *p* ;

4.3 [0,2] Πόσο είναι το μήκος κύματος λ ;

4.4 [0,2] Πόση είναι η συχνότητα *f* του κύματος ;

4.5 [0,2] Πόσο είναι το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου του κύματος ;

4.6 [0,2] Σε ποια κατεύθυνση βρίσκεται το μαγνητικό πεδίο του κύματος ;

4.7 [0,2] Γράψτε την έκφραση που δίνει το μαγνητικό πεδίο του κύματος στο SI.

Δίνεται : $c = 3,00\times10^8$ m/s

ΛΥΣΗ

Αποτελέσματα σε δύο σημαντικά ψηφία (από 18, 4,5)

4.1 [0,4]

Η φάση είναι αδιάστατο μέγεθος (rad). Το rad το κουβαλάει το 2π έξω από την παρένθεση.

Αφού το *t* μετριέται σε δευτερόλεπτα (s) η αριθμητική σταθερά 18×10^9 θα έχει μονάδες 1/s για να είναι το γινόμενο $18\times10^9\ t$ αδιάστατο [0,1]

Αφού το *y* μετριέται σε μέτρα (m) το *p* έχει μονάδες 1/m για να είναι το γινόμενο *p y* αδιάστατο. [0,1]

Για να είναι το κύμα ηλεκτρομαγνητικό ο λόγος του συντελεστή του *t* ως προς τον συντελεστή του *y* , που είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος, πρέπει να είναι ίσος με την ταχύτητα του φωτός

$$\frac{18\times10^9}{p} = c \Rightarrow p = \frac{18\times10^9}{3,00\times10^8} = 60\,\text{m}^{-1} \ \ [0,2]$$

4.2 [0,1]

Το κύμα διαδίδεται στην διεύθυνση *y* που εμφανίζεται μέσα στη φάση. Η διεύθυνση διάδοσης είναι πράγματι κάθετη στο ηλεκτρικό πεδίο που είναι στην κατεύθυνση +*x* καθώς τα ηλεκτρομαγνητικά

κύματα είναι εγκάρσια.
Η κατεύθυνση διάδοσης είναι προς την $-y$ καθώς το σχετικό πρόσημο μεταξύ y και t είναι +.

4.3 [0,2] 4.4 [0,2]

Η φάση γράφεται $2\pi(18\times10^9)t + 2\pi py = \omega t + ky = 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{y}{\lambda}\right) = 2\pi\left(f\,t+\frac{y}{\lambda}\right)$

με $c=\frac{\omega}{k}$, $\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$, $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ από όπου διαβάζουμε :

$\frac{1}{\lambda}=p=60\ \text{m}^{-1} \Rightarrow \lambda=\frac{1}{60}\ \text{m}=0{,}016666\ \text{m}=17\ \text{mm}$

$f=18\times10^9\ \text{s}^{-1}=18\ \text{GHz}$

4.5 [0,2]

Σε ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου B συνδέεται με το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου E με τη σχέση

$c=\frac{E}{B} \Rightarrow B=\frac{E}{c}=\frac{4{,}5\times10^3}{3{,}00\times10^8}=1{,}5\times10^{-5}\ \text{T}=15\times10^{-6}\ \text{T}=15\ \mu\text{T}$

4.6 [0,2]

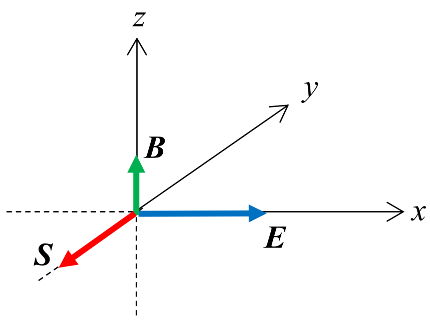
Η ροή ενέργειας ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος ($\text{J/(s m}^2))$ στο κενό, που γίνεται προς την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος, δίνεται από το διάνυσμα Poynting : $\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$

Άρα η κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου $\hat{E}$ (εδώ $\hat{x}$) , η κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου $\hat{B}$ (άγνωστη) και η κατεύθυνση διάδοσης του κύματος $\hat{S}$ (εδώ $-\hat{y}$) σχηματίζουν δεξιόστροφο ορθογώνιο σύστημα αξόνων

$$\hat{S}=\hat{E}\times\hat{B} \Rightarrow -\hat{y}=\hat{x}\times\hat{B} \Rightarrow \quad \hat{B}\times\hat{x}=\hat{y}$$

Επειδή $\hat{z}\times\hat{x}=\hat{y}$ για να ισχύει η παραπάνω ισότητα πρέπει $\hat{B}=\hat{z}$.
Το μαγνητικό πεδίο βρίσκεται στην κατεύθυνση $+z$

Δεξιόστροφο
$\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z}$



4.7 [0,2]

$\vec{B}(x,y,z,t)=1{,}5\times10^{-5}\sin\left\lfloor 2\pi(18\times10^9 t+60y)\right\rfloor \hat{z} \quad \Rightarrow$

$$\vec{B}(x,y,z,t)=1{,}5\times10^{-5}\sin\left\lfloor 120\pi(3\times10^8 t+y)\right\rfloor \hat{z} \qquad \text{(SI)}$$

Το να μαζέψετε τις αριθμητικές τιμές όλων των παραπάνω (B, ω, k, $\hat{B}$) και να τα βάλετε σωστά = 0,1
Το να γράψετε (SI) = 0,1