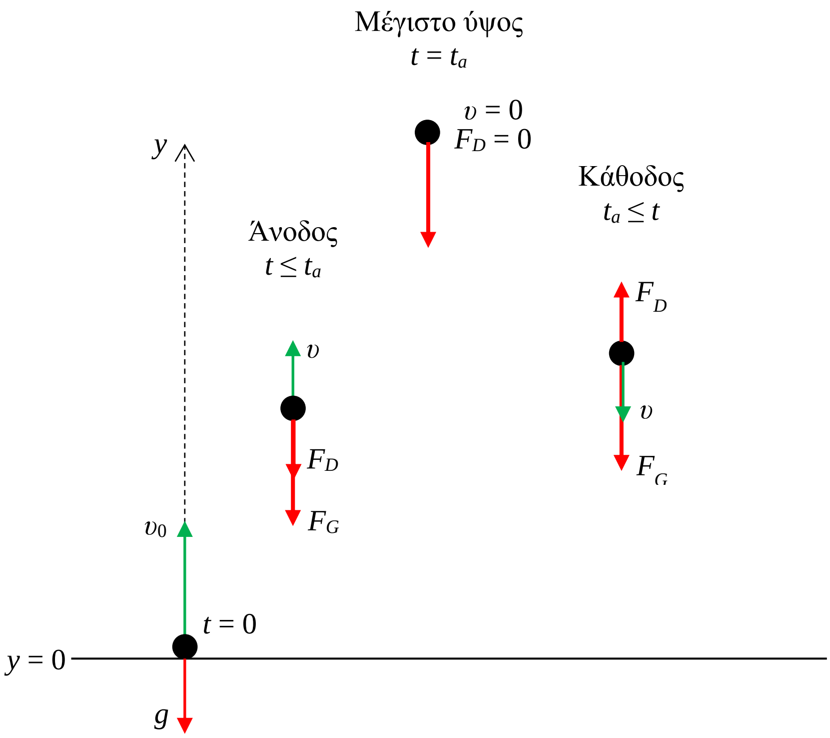
ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΒΟΛΗ ΜΕ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΉ ΑΝΤΊΣΤΑΣΗ ΑΕΡΑ (οπισθέλκουσα Newton)
Vertical Projectile motion with Quadratic Drag (Newton drag)



Επειδή η αρχική ταχύτητα είναι στον άξονα z και η αντίσταση του αέρα θα είναι στον άξονα z όπως είναι και το βάρος άρα η κίνηση θα είναι μονοδιάστατη στον κατακόρυφο άξονα

Αρχική ταχύτητα : $\vec{\upsilon}_0 = \upsilon_0 \hat{y}$

Βάρος: $\vec{F}_G = -mg\hat{y} = \sigma\tau\alpha\theta$

Ταχύτητα: άνοδος : $\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{y}$ κάθοδος : $\vec{\upsilon} = -\upsilon\hat{y}$

Οπισθέλκουσα (αντίσταση αέρα): άνοδος : $\vec{F}_D = -c\upsilon\vec{\upsilon} = -c\upsilon^2\hat{y}$, κάθοδος : $\vec{F}_D = -c\upsilon\vec{\upsilon} = c\upsilon^2\hat{y}$

Άσκηση

Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα που θα χρειαστούμε. Θεωρήστε γνωστό το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad \text{(εξ ορισμού)}$$

και ακολουθήστε τις αντίστοιχες υποδείξεις

1. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$ (αλλαγή μεταβλητής $x = \tan\theta \Rightarrow dx = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$)
2. $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$ ($\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, αλλαγή μεταβλητής $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$)
3. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C = \tanh^{-1} x + C$ για $|x| < 1$ ($\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1/2}{1+x} + \frac{1/2}{1-x}$)
4. $\int \tanh x dx = \ln(\cosh x) + C$ ($\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$, αλλαγή μεταβλητής $u = \cosh x \Rightarrow du = \sinh x dx$)

Άνοδος

Το βάρος και η οπισθέλκουσα έχουν την ίδια φορά προς τα κάτω και επιβραδύνουν το σώμα και οι δύο έως ότου να το σταματήσουν σε κάποιο μέγιστο ύψος.

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}_{net}}{m}\Rightarrow\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=-g\hat{y}-\frac{c}{m}\upsilon^2\hat{y}\Rightarrow\frac{d\upsilon}{dt}=-g-\frac{c}{m}\upsilon^2=-g\left(1+\frac{c}{mg}\upsilon^2\right)$$

Ορίζουμε την οριακή ταχύτητα $\upsilon_{term}=\sqrt{\frac{mg}{c}}$ ώστε να γράψουμε πιο κομψά την εξίσωση

$$\frac{d\upsilon}{dt}=-g\left(1+\frac{\upsilon^2}{\upsilon_{term}^2}\right)\quad \text{κατά την άνοδο}$$

Αριστερό μέλος έχει μονάδες επιτάχυνσης. Δεξιό μέλος έχει επίσης διαστάσεις επιτάχυνσης $[g]=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}=\mathrm{kg}\times\mathrm{m/s^2}$. Ο λόγος $\frac{\upsilon}{\upsilon_{term}}$ είναι αδιάστατος, δεν έχει μονάδες.

Σχέση ταχύτητας – ύψους

$$\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d\upsilon}{dy}\frac{dy}{dt}=\frac{d\upsilon}{dy}\upsilon$$

$$\upsilon\frac{d\upsilon}{dy}=-g\left(1+\frac{\upsilon^2}{\upsilon_{term}^2}\right)\Rightarrow dy=\frac{\upsilon d\upsilon}{-g\left(1+\frac{\upsilon^2}{\upsilon_{term}^2}\right)}$$

$$u=\frac{\upsilon}{\upsilon_{term}}\Rightarrow\upsilon=\upsilon_{term}u\Rightarrow d\upsilon=\upsilon_{term}du$$

$$dy=\frac{\upsilon d\upsilon}{-g\left(1+\frac{\upsilon^2}{\upsilon_{term}^2}\right)}=-\frac{\upsilon_{term}^2}{g}\frac{udu}{1+u^2}=-\frac{\upsilon_{term}^2}{2g}\frac{d(1+u^2)}{1+u^2}=-\frac{\upsilon_{term}^2}{2g}\frac{dx}{x}\Rightarrow\int_0^y dy=-\frac{\upsilon_{term}^2}{2g}\int_{1+\upsilon_0^2/\upsilon_{term}^2}^{1+\upsilon^2/\upsilon_{term}^2}\frac{dx}{x}\Rightarrow$$

$$y=-\frac{\upsilon_{term}^2}{2g}\ln\left(\frac{1+\upsilon^2/\upsilon_{term}^2}{1+\upsilon_0^2/\upsilon_{term}^2}\right)=\frac{\upsilon_{term}^2}{2g}\ln\left(\frac{1+\upsilon_0^2/\upsilon_{term}^2}{1+\upsilon^2/\upsilon_{term}^2}\right)\Rightarrow$$

$$y=\frac{\upsilon_{term}^2}{2g}\ln\left(\frac{\upsilon_{term}^2+\upsilon_0^2}{\upsilon_{term}^2+\upsilon^2}\right)\quad \text{ή}\quad y=\frac{m}{2c}\ln\left(\frac{mg+c\upsilon_0^2}{mg+c\upsilon^2}\right)\quad(1)$$

$$\frac{\upsilon_{term}^2}{2g}=\frac{mg/c}{2g}=\frac{m}{2c}$$

Όταν η ταχύτητα μηδενιστεί υ=0 φτάνω στο μέγιστο ύψος $y_{\max}$

$$y_{\max}=\frac{\upsilon_{term}^2}{2g}\ln\left(1+\frac{\upsilon_0^2}{\upsilon_{term}^2}\right)\quad \text{ή}\quad y_{\max}=\frac{m}{2c}\ln\left(1+\frac{c\upsilon_0^2}{mg}\right)$$

Παρατηρούμε ότι το κλάσμα $x=\frac{c\upsilon_0^2}{mg}$ είναι ο λόγος της αρχικής αντίστασης του αέρα προς το βάρος του σώματος. Για μικρή αντίσταση αέρα $x<<1$ ανακτούμε το αποτέλεσμα της κατακόρυφης βολής χωρίς οπισθέλκουσα: $y_{\max}=\frac{\upsilon_0^2}{2g}$, όταν $c\to 0$

Χρησιμοποιούμε την ανάπτυξη σε απειροσειρά Taylor

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots \qquad \text{για } |x|<1$$

ή το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ (L' Hospital ή L' Hôpital)

Οπότε

$$y_{\max}=\frac{m}{2c}\ln\left(1+\frac{c\upsilon_0^2}{mg}\right)=\frac{m}{2c}\left[\frac{c\upsilon_0^2}{mg}-\frac{1}{2}\left(\frac{c\upsilon_0^2}{mg}\right)^2+O(c^3)\right]=\frac{\upsilon_0^2}{2g}-\frac{1}{4}\frac{c\upsilon_0^4}{mg^2}+O(c^2)\xrightarrow{c\to 0}\frac{\upsilon_0^2}{2g}$$

$$y_{\max}=\frac{m}{2c}\ln\left(1+\frac{c\upsilon_0^2}{mg}\right)=\frac{\upsilon_0^2}{2g}\frac{1}{\frac{c\upsilon_0^2}{mg}}\ln\left(1+\frac{c\upsilon_0^2}{mg}\right)=\frac{\upsilon_0^2}{2g}\frac{\ln(1+x)}{x}\xrightarrow{x\to 0}\frac{\upsilon_0^2}{2g}$$

Σχέση ταχύτητας - χρόνου (χρονική εξάρτηση)

$$\frac{d\upsilon}{dt}=-g\left(1+\frac{\upsilon^2}{\upsilon_{term}^2}\right)\Rightarrow dt=\frac{d\upsilon}{-g\left(1+\frac{\upsilon^2}{\upsilon_{term}^2}\right)}$$

$$u=\frac{\upsilon}{\upsilon_{term}}\Rightarrow \upsilon=\upsilon_{term}u\Rightarrow d\upsilon=\upsilon_{term}du$$

$$dt=\frac{d\upsilon}{-g\left(1+\frac{\upsilon^2}{\upsilon_{term}^2}\right)}=-\frac{\upsilon_{term}}{g}\frac{du}{\left(1+u^2\right)}\Rightarrow\int_0^t dt=-\frac{\upsilon_{term}}{g}\int_{\upsilon_0/\upsilon_{term}}^{\upsilon/\upsilon_{term}}\frac{du}{1+u^2}\Rightarrow$$

$$t=-\frac{\upsilon_{term}}{g}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_{term}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right)\right]\Rightarrow$$

$$\boxed{t=\frac{\upsilon_{term}}{g}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_{term}}\right)\right] \quad \text{ή} \quad t=\sqrt{\frac{m}{gc}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\sqrt{mg/c}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon}{\sqrt{mg/c}}\right)\right]}$$

$$\frac{\upsilon_{term}}{g}=\frac{\sqrt{\frac{mg}{c}}}{g}=\sqrt{\frac{m}{gc}}$$

Λύνουμε ως προς την ταχύτητα

$$t=\frac{\upsilon_{term}}{g}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_{term}}\right)\right]\Rightarrow\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_{term}}\right)=\frac{gt}{\upsilon_{term}}\Rightarrow$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_{term}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right)-\frac{gt}{\upsilon_{term}}\Rightarrow$$

$$\frac{\upsilon}{\upsilon_{term}}=\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right)-\frac{gt}{\upsilon_{term}}\right]\Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon(t)=\upsilon_{term}\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right)-\frac{gt}{\upsilon_{term}}\right]\quad \text{ή}\quad \upsilon(t)=\sqrt{\frac{mg}{c}}\tan\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{c\upsilon_0^2}{mg}}\right)-\sqrt{\frac{gc}{m}}\cdot t\right]\quad (2)}$$

Για υ=0 παίρνουμε τον χρόνο ανόδου t_a

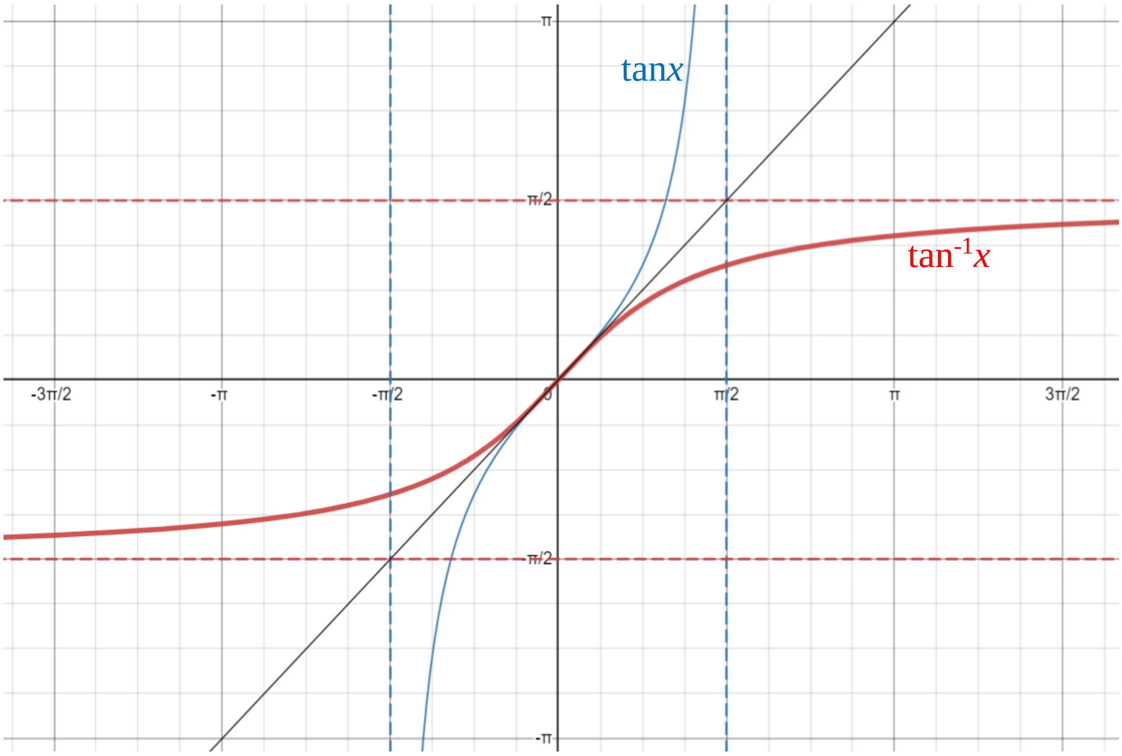
$$\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right)-\frac{gt_a}{\upsilon_{term}}\right]=0,\ \text{όμως}\ \tan x=0\Rightarrow x=0\ \text{άρα}\ \frac{gt_a}{\upsilon_{term}}=\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right)$$

$$\boxed{t_a=\frac{\upsilon_{term}}{g}\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right)\qquad \text{ή}\qquad t_a=\sqrt{\frac{m}{gc}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{c\upsilon_0^2}{mg}}\right)}$$

Μετά τη χρονική στιγμή $t = t_a$ η χρονική εξάρτηση της ταχύτητας θα αλλάξει επειδή το σώμα θα αρχίσει να κατέρχεται.

Η γραφική παράσταση της αντίστροφης εφαπτομένης ή τόξο εφαπτομένης ($\tan^{-1}x$ ή $\arctan x$) φαίνεται παρακάτω (κόκκινη). Είναι η συμμετρική συνάρτηση της εφαπτομένης (μπλε) ως προς την ευθεία των 45° $y = x$).

ΣΕ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΕΒΑΛΑ ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΥ ΕΜΦΑΝΙΖΟΝΤΑΙ



Για μικρά x ($|x|<1$) η συνάρτηση συμπεριφέρεται ως : $\tan^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$

Για μεγάλα x ($|x|>1$) η συνάρτηση συμπεριφέρεται ως :

$$\tan^{-1}x=\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{x^2}}{x}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{-2n-1}=\pm\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\ldots$$

από όπου βλέπουμε ότι τείνει στο ±π/2 : $\tan^{-1}(x \to \pm\infty) = \pm\dfrac{\pi}{2}$

Για μικρή αντίσταση αέρα $c\to 0$ το όρισμα της εφαπτομένης είναι πολύ μικρό $\sqrt{\dfrac{c\upsilon_0^2}{mg}} = x << 1$ και θα δώσει $\tan^{-1} x \simeq x$ οπότε ανακτούμε τον χρόνο ανόδου $t_a = \dfrac{\upsilon_0}{g}$ για κατακόρυφη βολή χωρίς οπισθέλκουσα (c= 0):

$$t_a = \sqrt{\frac{mg}{c}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{c\upsilon_0^2}{mg}}\right) \simeq \sqrt{\frac{m}{gc}}\sqrt{\frac{c\upsilon_0^2}{mg}} = \frac{\upsilon_0}{g}$$

Για μεγάλη αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 \to \infty$ δηλαδή για μεγάλα x παρατηρούμε ότι το σώμα πάλι θα σταματήσει σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα, επειδή για μεγάλα x η συνάρτηση $\tan^{-1}x$ τείνει στο π/2. Δηλαδή, ακόμα και να εκτοξεύαμε το σώμα με άπειρη αρχική ταχύτητα αυτό θα σταματούσε μετά από χρόνο

$$t_a = \frac{\upsilon_{term}}{g}\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right) \xrightarrow{\upsilon_0\to\infty} t_a = \frac{\pi\upsilon_{term}}{2g}$$

Εξίσωση κίνησης - *y*(*t*)

Για να βρούμε την εξίσωση κίνησης ολοκληρώνουμε την $\upsilon(t)$:

$$\upsilon(t) = \upsilon_{term}\tan\left[\alpha - \frac{gt}{\upsilon_{term}}\right]$$

Όπου γράψαμε τη σταθερά μέσα στην εφαπτομένη ως $\tan^{-1}\left(\dfrac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right) = \alpha$ για οικονομία χώρου.

$$\upsilon = \frac{dy}{dt} = \upsilon_{term}\tan\left[\alpha - \frac{gt}{\upsilon_{term}}\right] \Rightarrow \int_0^y dy = \upsilon_{term}\int_0^t \tan\left[\alpha - \frac{gt}{\upsilon_{term}}\right]dt$$

Αλλάζουμε μεταβλητή $u = \alpha - \dfrac{gt}{\upsilon_{term}} \Rightarrow du = -\dfrac{gdt}{\upsilon_{term}} \Rightarrow dt = -\dfrac{\upsilon_{term}}{g}du$ και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$y = -\frac{\upsilon_{term}^2}{g}\int_\alpha^{\alpha - gt/\upsilon_{term}} \tan u\, du = \frac{\upsilon_{term}^2}{g}\ln|\cos u|\Big|_\alpha^{\alpha - gt/\upsilon_{term}} = \frac{\upsilon_{term}^2}{g}\Big[\ln|\cos(\alpha - gt/\upsilon_{term}) - \ln|\cos\alpha||\Big]$$

$$\boxed{y(t) = \frac{\upsilon_{term}^2}{g}\ln\left[\frac{\cos\left(\tan^{-1}\left(\dfrac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right) - \dfrac{gt}{\upsilon_{term}}\right)}{\cos\left(\tan^{-1}\left(\dfrac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right)\right)}\right] \qquad \text{για} \quad t \le t_a \qquad (3)}$$

[Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να εισάγουμε τη χρονική εξάρτηση της ταχύτητας $\upsilon(t)$ από την εξίσωση (2) στην εξίσωση του ύψους ως προς την ταχύτητα στην εξίσωση (1) και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ να καταλήξουμε στον ίδιο τύπο

Ορίζουμε για οικονομία $\alpha(t) = \alpha - gt/\upsilon_{term}$ ενώ $\dfrac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}} = \tan\alpha$

$$y(\upsilon(t)) = \frac{\upsilon_{term}^2}{2g}\ln\left(\frac{\upsilon_{term}^2 + \upsilon_0^2}{\upsilon_{term}^2 + \upsilon^2(t)}\right) = \frac{\upsilon_{term}^2}{2g}\ln\left(\frac{\upsilon_{term}^2 + \upsilon_0^2}{\upsilon_{term}^2 + \upsilon_{term}^2\tan^2\alpha(t)}\right) = \frac{\upsilon_{term}^2}{2g}\ln\left(\frac{1 + \upsilon_0^2/\upsilon_{term}^2}{1 + \tan^2\alpha(t)}\right) =$$

$$\frac{\upsilon_{term}^2}{2g}\ln\left(\frac{1+\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha(t)}\right)=\frac{\upsilon_{term}^2}{2g}\ln\left(\frac{\cos^2\alpha(t)}{\cos^2\alpha}\right)=\frac{\upsilon_{term}^2}{g}\ln\left(\frac{\cos\alpha(t)}{\cos\alpha}\right)=y(t)\quad \text{συμφωνεί με την (3)}\quad]$$

Έλεγχος. Αν στην εξίσωση (3) βάλω στο χρόνο την τιμή $t=t_a=\frac{\upsilon_{term}}{g}\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right)$ θα βρω το μέγιστο ύψος

$y_{\max}=\frac{\upsilon_{term}^2}{2g}\ln\left(1+\frac{\upsilon_0^2}{\upsilon_{term}^2}\right)$ που βρήκα από την εξίσωση (1)?

$$\frac{gt_a}{\upsilon_{term}}=\frac{g}{\upsilon_{term}}\cdot\frac{\upsilon_{term}}{g}\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right)=\alpha$$

$$y(t_a)=\frac{\upsilon_{term}^2}{g}\ln\left[\frac{\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right)-\frac{gt_a}{\upsilon_{term}}\right)}{\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right)\right)}\right]=\frac{\upsilon_{term}^2}{g}\ln\left[\frac{\cos(\alpha-\alpha)}{\cos(\alpha)}\right]=\frac{\upsilon_{term}^2}{g}\ln\left[\frac{\cos(0)}{\cos(\alpha)}\right]\Rightarrow$$

$$y(t_a)=\frac{\upsilon_{term}^2}{g}\ln\left[\frac{1}{\cos(\alpha)}\right]=\frac{\upsilon_{term}^2}{2g}\ln\left[\frac{1}{\cos^2(\alpha)}\right]=\frac{\upsilon_{term}^2}{2g}\ln\left(1+\tan^2\alpha\right)=\frac{\upsilon_{term}^2}{2g}\ln\left(1+\frac{\upsilon_0^2}{\upsilon_{term}^2}\right)=y_{\max}\quad \surd\ \text{ΙΣΧΥΕΙ}$$

Κάθοδος

Οι δύο δυνάμεις έχουν αντίθετη φορά. Το σώμα ξεκινάει από την ηρεμία και η ταχύτητά του θα είναι πάντα αρνητική $\upsilon<0$.
Κατά την έναρξη της καθόδου το βάρος δρα στο σώμα που βρίσκεται στιγμιαία ακίνητο στο μέγιστο ύψος και το επιταχύνει προς τα κάτω με επιτάχυνση αρχικά ίση με g καθώς δεν υπάρχει εκείνη τη στιγμή αντίσταση αέρα αφού το σώμα έχει ταχύτητα μηδέν. Όσο η ταχύτητά του μεγαλώνει θα μεγαλώνει και η αντίσταση του αέρα και η επιτάχυνση θα γίνεται μικρότερη. Όταν η αντίσταση του αέρα γίνει ίση με το βάρος του τότε οι δύο δυνάμεις θα αλληλοεξουδετερώνονται και η επιτάχυνση θα σταματήσει. Στη συνέχεια το σώμα θα κατεβαίνει με σταθερή ταχύτητα (αν δεν έχει χτυπήσει στο έδαφος). Η ταχύτητα αυτή είναι η οριακή ή τερματική (terminal) ταχύτητα και βρίσκεται από την ισότητα των μέτρων των δύο δυνάμεων :

$$F_D=F_G\Rightarrow c\upsilon_{term}^2=mg\Rightarrow \upsilon_{term}=\sqrt{\frac{mg}{c}}\qquad \text{θετική σταθερά}$$

Άρα το σώμα θα έχει πάντα ταχύτητα με μέτρο μικρότερο από την οριακή ταχύτητα που είναι και η μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να πιάσει $|\upsilon|\le\upsilon_{term}$

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}_{net}}{m}\Rightarrow\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=-g\hat{y}+\frac{c}{m}\upsilon^2\hat{y}\Rightarrow\frac{d\upsilon}{dt}=-g+\frac{c}{m}\upsilon^2=-g\left(1-\frac{c}{mg}\upsilon^2\right)$$

$$\boxed{\frac{d\upsilon}{dt}=-g\left(1-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_{term}^2}\right)\qquad \text{κατά την κάθοδο}}$$

Σχέση ταχύτητας – ύψους

Όπως και πριν γράφουμε $\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d\upsilon}{dy}\frac{dy}{dt}=\frac{d\upsilon}{dy}\upsilon$

$$\upsilon\frac{d\upsilon}{dy}=-g\left(1-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_{term}^2}\right)\Rightarrow dy=\frac{\upsilon d\upsilon}{-g\left(1-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_{term}^2}\right)}\Rightarrow\int_{y_{\max}}^{y}dy=-\frac{1}{g}\int_0^{\upsilon}\frac{\upsilon d\upsilon}{1-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_{term}^2}}$$

Τώρα η ολοκλήρωση γίνεται από τα ύψη $y_{\max}$ έως y όπου η ταχύτητα θα έχει τιμές 0 στο μέγιστο ύψος και υ στο τυχαίο ύψος y:

Αλλάζουμε μεταβλητή $u=1-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_{term}^2}\Rightarrow du=-2\frac{\upsilon d\upsilon}{\upsilon_{term}^2}\Rightarrow \upsilon d\upsilon=-\frac{\upsilon_{term}^2}{2}du$

$$y-y_{\max}=\frac{\upsilon_{term}^2}{2g}\int_1^{1-\upsilon^2/\upsilon_{term}^2}\frac{du}{u}=\frac{\upsilon_{term}^2}{2g}\left[\ln(1-\upsilon^2/\upsilon_{term}^2)-\ln(1)\right]$$

$$\boxed{y-y_{\max}=\frac{\upsilon_{term}^2}{2g}\ln\left(1-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_{term}^2}\right)}$$

Το όρισμα του λογάριθμου είναι θετικό, αφού $\upsilon^2\le\upsilon_{term}^2$, αλλά μικρότερο από τη μονάδα οπότε ο λογάριθμος είναι αρνητικός και το ύψος y είναι μικρότερο από το $y_{\max}$.

Σχέση ταχύτητας - χρόνου (χρονική εξάρτηση)

$$\frac{d\upsilon}{dt}=-g\left(1-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_{term}^2}\right)\Rightarrow dt=\frac{d\upsilon}{-g\left(1-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_{term}^2}\right)}\Rightarrow\int_{t_a}^{t}dt=-\frac{1}{g}\int_0^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{1-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_{term}^2}}$$

Τώρα η ολοκλήρωση γίνεται από τη χρονική στιγμή t_a ως $t > t_a$ όπου η ταχύτητα θα έχει τιμές 0 τη στιγμή t_a και υ την τυχαία επόμενη στιγμή t:

Αλλάζουμε μεταβλητή $u=\frac{\upsilon}{\upsilon_{term}}\Rightarrow\upsilon=\upsilon_{term}u\Rightarrow d\upsilon=\upsilon_{term}du$

$$t-t_a=-\frac{\upsilon_{term}}{g}\int_0^{\upsilon/\upsilon_{term}}\frac{du}{1-u^2}=-\frac{\upsilon_{term}}{2g}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right)\Bigg|_0^{\upsilon/\upsilon_{term}}=-\frac{\upsilon_{term}}{2g}\left[\ln\left(\frac{1+\upsilon/\upsilon_{term}}{1-\upsilon/\upsilon_{term}}\right)-\ln(1)\right]$$

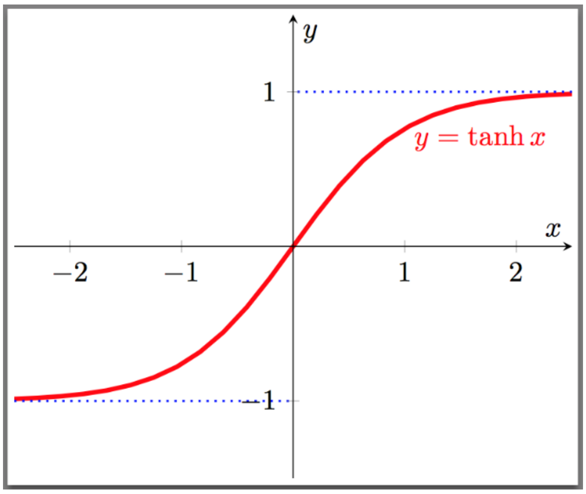
$$\boxed{t-t_a=\frac{\upsilon_{term}}{2g}\ln\left(\frac{1-\upsilon/\upsilon_{term}}{1+\upsilon/\upsilon_{term}}\right)}$$

Επειδή υ<0 ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή και ο λογάριθμος είναι θετικός.

Επίσης επειδή $\left|\frac{\upsilon}{\upsilon_{term}}\right|<1$ το αποτέλεσμα μπορεί να εκφραστεί μέσω της αντίστροφης μιας άλλης «γνωστής» συνάρτησης, της υπερβολικής εφαπτομένης που ορίζεται ως

$$\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

Η υπερβολική εφαπτομένη $\tanh x$ έχει παρόμοια γραφική παράσταση με της αντίστροφης εφαπτομένης $\tan^{-1}x$ αλλά τείνει στο 1 και -1 για μεγάλα x.



Για τις υπερβολικές συναρτήσεις

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right), \qquad \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right), \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x},$$

ισχύουν παρόμοιες ταυτότητες με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$:

$$\cosh(0) = 1, \qquad \sinh(0) = 0$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \qquad 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x},$$

$$(\cosh x)' \equiv \frac{d\cosh x}{dx} = \sinh x \qquad (\sinh x)' \equiv \frac{d\sinh x}{dx} = \cosh x$$

Αποδεικνύεται εύκολα από τους ορισμούς των συναρτήσεων ότι

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \qquad \text{για } |x| < 1$$

Άρα

$$\boxed{t - t_a = \frac{\upsilon_{term}}{g}\tanh^{-1}\left(-\frac{\upsilon}{\upsilon_{term}}\right)}$$

[Απόδειξη.

Έστω y η αντίστροφη συνάρτηση της υπερβολικής εφαπτομένης, $y = \tanh^{-1} x$.

Τότε $x = \tanh y$. Άρα έχουμε

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^y(e^y - e^{-y})}{e^y(e^y + e^{-y})} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \Rightarrow \quad x(e^{2y} + 1) = e^{2y} - 1$$

Μαζεύουμε μαζί τους όρους που έχουν y και λύνουμε ως προς y

$$1 + x = (1 - x)e^{2y} \Rightarrow \quad e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow \quad 2y = \ln\frac{1+x}{1-x} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Όμως $y = \tanh^{-1} x$

Οπότε $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$]

Άσκηση

Αφού οι υπερβολικές συναρτήσεις ορίζονται από την εκθετική συνάρτηση οι αντίστροφές τους συναρτήσεις θα σχετίζονται με την αντίστροφη της εκθετικής που είναι ο λογάριθμος.

Δείξτε ότι : **1.** $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad -\infty < x < \infty$

2. $\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad 1 \le x$

Υπόδειξη: κάντε ότι κάναμε παραπάνω για να βρούμε την $y = \tanh^{-1} x$

Τώρα μπορούμε εύκολα να αντιστρέψουμε την παραπάνω σχέση χρόνου-ταχύτητας και να βρούμε την ταχύτητα σαν συνάρτηση του χρόνου

$$t-t_a=\frac{\upsilon_{term}}{g}\tanh^{-1}\left(\frac{-\upsilon}{\upsilon_{term}}\right)\Rightarrow\quad \tanh^{-1}\left(\frac{-\upsilon}{\upsilon_{term}}\right)=\frac{g}{\upsilon_{term}}(t-t_a)\Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon(t)=-\upsilon_{term}\tanh\left(\frac{g}{\upsilon_{term}}(t-t_a)\right)}$$

Επειδή $\tanh(x\to\infty)=1$ βλέπουμε ότι πράγματι η ταχύτητα δεν θα ξεπεράσει ποτέ σε μέτρο την τερματική ταχύτητα.

Ισοδύναμα μπορούσαμε να αντιστρέψουμε τη σχέση χωρίς να αναφερθούμε στην tanh. Θα καταλήγαμε στην ίδια έκφραση όμως αντί για tanh θα είχαμε τις εκθετικές συναρτήσεις $\exp(x)=e^x$ από τις οποίες ορίζεται.

$$t-t_a=\frac{\upsilon_{term}}{2g}\ln\left(\frac{1-\upsilon/\upsilon_{term}}{1+\upsilon/\upsilon_{term}}\right)\Rightarrow\ \ln\left(\frac{1-\upsilon/\upsilon_{term}}{1+\upsilon/\upsilon_{term}}\right)=\frac{2g}{\upsilon_{term}}(t-t_a)\Rightarrow\frac{1-\upsilon/\upsilon_{term}}{1+\upsilon/\upsilon_{term}}=\exp\left(\frac{2g}{\upsilon_{term}}(t-t_a)\right)\Rightarrow$$

$$1-\upsilon/\upsilon_{term}=(1+\upsilon/\upsilon_{term})\exp\left(\frac{2g}{\upsilon_{term}}(t-t_a)\right)\Rightarrow\left(1+\exp\left(\frac{2g}{\upsilon_{term}}(t-t_a)\right)\right)\frac{\upsilon}{\upsilon_{term}}=1-\exp\left(\frac{2g}{\upsilon_{term}}(t-t_a)\right)\Rightarrow$$

$$\frac{\upsilon}{\upsilon_{term}}=\frac{1-\exp\left(\frac{2g}{\upsilon_{term}}(t-t_a)\right)}{1+\exp\left(\frac{2g}{\upsilon_{term}}(t-t_a)\right)}=\frac{\exp\left(-\frac{g}{\upsilon_{term}}(t-t_a)\right)-\exp\left(\frac{g}{\upsilon_{term}}(t-t_a)\right)}{\exp\left(-\frac{g}{\upsilon_{term}}(t-t_a)\right)+\exp\left(\frac{g}{\upsilon_{term}}(t-t_a)\right)}\Rightarrow$$

$$\upsilon(t)=-\upsilon_{term}\left[\frac{\exp\left(\frac{g}{\upsilon_{term}}(t-t_a)\right)-\exp\left(-\frac{g}{\upsilon_{term}}(t-t_a)\right)}{\exp\left(\frac{g}{\upsilon_{term}}(t-t_a)\right)+\exp\left(-\frac{g}{\upsilon_{term}}(t-t_a)\right)}\right]$$

Φαίνεται ότι η έκφραση στις αγκύλες είναι ίση με $\tanh\left(\frac{g}{\upsilon_{term}}(t-t_a)\right)$

Εξίσωση κίνησης - *y*(*t*)

Για να βρούμε την εξίσωση κίνησης ολοκληρώνουμε την $\upsilon(t)$:

$$\upsilon(t)\equiv\frac{dy}{dt}=-\upsilon_{term}\tanh\left(\frac{g}{\upsilon_{term}}(t-t_a)\right)\Rightarrow\int_{y_{\max}}^{y}dy=-\upsilon_{term}\int_{t_a}^{t}\tanh\left(\frac{g}{\upsilon_{term}}(t-t_a)\right)dt$$

Αλλαγή μεταβλητής : $u=\frac{g}{\upsilon_{term}}(t-t_a)\Rightarrow\ du=\frac{g}{\upsilon_{term}}dt\Rightarrow\ dt=\frac{\upsilon_{term}}{g}du$

$$y-y_{\max}=-\frac{\upsilon_{term}^2}{g}\int_0^{g(t-t_a)/g}\tanh u\,du=-\frac{\upsilon_{term}^2}{g}\ln(\cosh u)\Big|_0^{g(t-t_a)/g}=-\frac{\upsilon_{term}^2}{g}\left[\ln\left(\cosh\left(\frac{g(t-t_a)}{\upsilon_{term}}\right)\right)-\ln(\cosh 0)\right]\Rightarrow$$

$$\boxed{y = y_{\max} - \frac{\upsilon_{term}^2}{g} \ln\left(\cosh\left(\frac{g(t-t_a)}{\upsilon_{term}^2} \right)\right) \qquad \text{για } t \ge t_a}$$

Για $t = t_a$ παίρνουμε $y = y_{\max}$ όπως πρέπει να συμβαίνει. Η εξίσωση κίνησης είναι συνεχής την $t = t_a$. Για $t \ge t_a$ το ύψος ξεκινά από μια θετική τιμή και στη συνέχεια συνεχώς μειώνεται αφού του αφαιρείται μια όλο και μεγαλύτερη ποσότητα : $t \to \infty, \quad \cosh(\infty) = \infty, \quad \ln(\infty) = \infty$

Αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση τις εκφράσεις για $y_{\max} = \frac{\upsilon_{term}^2}{2g} \ln\left(1 + \frac{\upsilon_0^2}{\upsilon_{term}^2}\right)$ και $t_a = \frac{\upsilon_{term}}{g} \tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right)$

$$\frac{g(t-t_a)}{\upsilon_{term}} = \frac{gt}{\upsilon_{term}} - \frac{g}{\upsilon_{term}} \cdot \frac{\upsilon_{term}}{g} \tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right) = \frac{gt}{\upsilon_{term}} - \tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right) = \frac{gt}{\upsilon_{term}} - \alpha$$

$$y = \frac{\upsilon_{term}^2}{2g} \ln\left(1 + \frac{\upsilon_0^2}{\upsilon_{term}^2}\right) - \frac{\upsilon_{term}^2}{g} \ln\left(\cosh\left(\frac{gt}{\upsilon_{term}} - \alpha\right)\right) =$$

$$= \frac{\upsilon_{term}^2}{g} \ln\left(\sqrt{1 + \frac{\upsilon_0^2}{\upsilon_{term}^2}}\right) - \frac{\upsilon_{term}^2}{g} \ln\left(\cosh\left(\frac{gt}{\upsilon_{term}} - \alpha\right)\right) = \frac{\upsilon_{term}^2}{g} \ln\left[\frac{\sqrt{1 + \frac{\upsilon_0^2}{\upsilon_{term}^2}}}{\cosh\left(\frac{gt}{\upsilon_{term}} - \alpha\right)}\right]$$

$$\boxed{y = \frac{\upsilon_{term}^2}{g} \ln\left[\frac{\sqrt{1 + \frac{\upsilon_0^2}{\upsilon_{term}^2}}}{\cosh\left(\frac{gt}{\upsilon_{term}} - \tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right)\right)}\right]}$$

Από την παραπάνω σχέση μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το χρόνο πτήσης T θέτοντας $y = 0$

$$0 = \frac{\upsilon_{term}^2}{g} \ln\left[\frac{\sqrt{1 + \frac{\upsilon_0^2}{\upsilon_{term}^2}}}{\cosh\left(\frac{gT}{\upsilon_{term}} - \tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right)\right)}\right] \Rightarrow$$

Για να είναι ένας λογάριθμος ίσος με μηδέν πρέπει το όρισμά του να είναι ίσο με 1

$$\frac{\sqrt{1 + \frac{\upsilon_0^2}{\upsilon_{term}^2}}}{\cosh\left(\frac{gT}{\upsilon_{term}} - \tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right)\right)} = 1 \Rightarrow \cosh\left(\frac{gT}{\upsilon_{term}} - \tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right)\right) = \sqrt{1 + \frac{\upsilon_0^2}{\upsilon_{term}^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{gT}{\upsilon_{term}} - \tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right) = \cosh^{-1}\sqrt{1 + \frac{\upsilon_0^2}{\upsilon_{term}^2}} \Rightarrow$$

$$T = \frac{\upsilon_{term}}{g}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right) + \cosh^{-1}\sqrt{1+\frac{\upsilon_0^2}{\upsilon_{term}^2}}\right] = t_a + t_d$$

Το χρονικό διάστημα καθόδου από το μέγιστο ύψος είναι ο δεύτερος όρος

$$t_d = \frac{\upsilon_{term}}{g}\cosh^{-1}\sqrt{1+\frac{\upsilon_0^2}{\upsilon_{term}^2}}$$

Ταχύτητα πρόσκρουσης

$$\upsilon_{impact} = \upsilon(T) = -\upsilon_{term}\tanh\left(\frac{g}{\upsilon_{term}}(T-t_a)\right) = -\upsilon_{term}\tanh\left(\frac{g}{\upsilon_{term}}t_d\right) = -\upsilon_{term}\tanh\left(\frac{g}{\upsilon_{term}}\frac{\upsilon_{term}}{g}\cosh^{-1}\sqrt{1+\frac{\upsilon_0^2}{\upsilon_{term}^2}}\right) \Rightarrow$$

$$\upsilon_{impact} = -\upsilon_{term}\tanh\left(\cosh^{-1}\sqrt{1+\frac{\upsilon_0^2}{\upsilon_{term}^2}}\right) \quad (\alpha)$$

Αυτή η έκφραση μπορεί να απλοποιηθεί ακόμα παραπέρα και να καταλήξει σε μια πάρα πολύ απλή σχέση χωρίς «περίεργες» συναρτήσεις.

Επειδή

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \qquad 1 \le x$$

Ισχύει ότι

$$\cosh^{-1}\left(\sqrt{1+x^2}\right) = \sinh^{-1} x$$

Απόδειξη :

$$\cosh^{-1}(\sqrt{1+x^2}) = \ln\left[\sqrt{1+x^2}+\sqrt{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-1}\right] = \ln\left[\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2-1}\right] = \ln\left[\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2}\right] =$$

$$= \ln\left[\sqrt{1+x^2}+x\right] = \sinh^{-1} x$$

Άρα :

$$\upsilon_{impact} = -\upsilon_{term}\tanh\left[\sinh^{-1}\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}\right)\right]$$

Ισχύει επίσης ότι :

$$\tanh(\sinh^{-1} x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Απόδειξη :

$$\tanh(\sinh^{-1}x)) = \tanh\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) = \frac{e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} - e^{-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}}{e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} + e^{-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}} = \frac{x+\sqrt{x^2+1} - \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1} + \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}}$$

$$= \frac{x+\sqrt{x^2+1} - \dfrac{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}}{x+\sqrt{x^2+1} + \dfrac{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}} = \frac{x+\sqrt{x^2+1} - \dfrac{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\cancel{x^2}-(\cancel{x^2}+1)\right)}}{x+\sqrt{x^2+1} + \dfrac{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(\cancel{x^2}-(\cancel{x^2}+1)\right)}} =$$

$$= \frac{x+\sqrt{x^2+1} - \dfrac{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{(-1)}}{x+\sqrt{x^2+1} + \dfrac{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{(-1)}} = \frac{x+\cancel{\sqrt{x^2+1}}+x-\cancel{\sqrt{x^2+1}}}{\cancel{x}+\sqrt{x^2+1}-\cancel{x}+\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Οπότε τελικά $\upsilon_{impact} = -\upsilon_{term}\dfrac{\dfrac{\upsilon_0}{\upsilon_{term}}}{\sqrt{1+\dfrac{\upsilon_0^2}{\upsilon_{term}^2}}} \Rightarrow$

$$\boxed{\upsilon_{impact} = -\frac{\upsilon_0}{\sqrt{1+(\upsilon_0/\upsilon_{term})^2}}}$$

Ο λόγος $\dfrac{\upsilon_0^2}{\upsilon_{term}^2} = \dfrac{c\upsilon_0^2}{mg} = \dfrac{F_{D0}}{F_G}$ είναι ο λόγος της αρχικής αντίστασης του αέρα προς το βάρος του σώματος. Η ταχύτητα πρόσκρουσης με την οποία επιστρέφει το σώμα στο έδαφος είναι μικρότερη από την ταχύτητα εκτόξευσης υ_0. Άρα η ενέργεια δεν διατηρείται, μειώνεται λόγω της αντίστασης του αέρα.

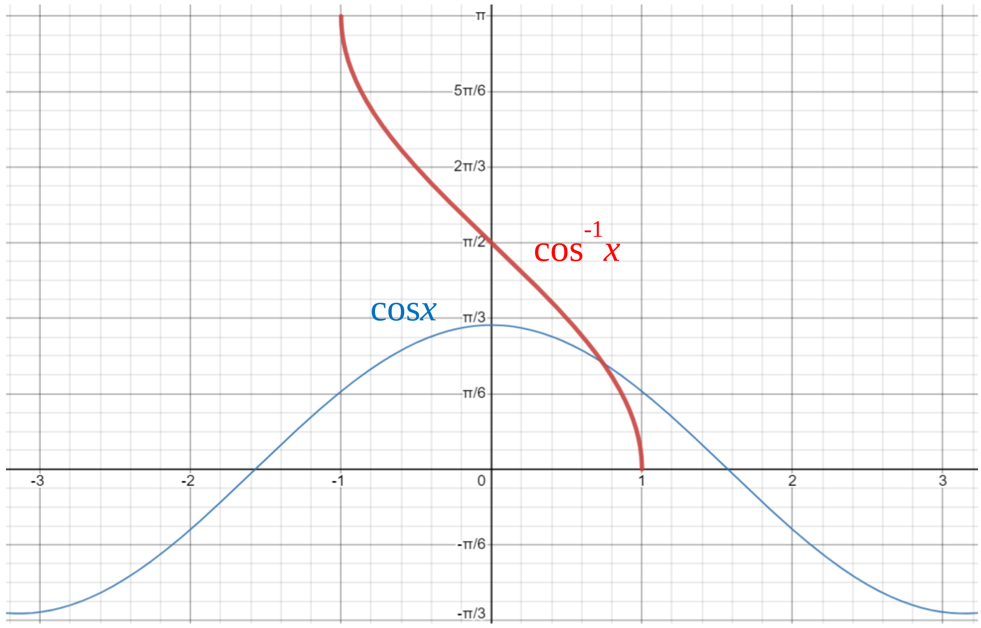
Εξετάζουμε όρια. Όταν $c \to 0$ (μηδενική αντίσταση αέρα) ανακτούμε το αποτέλεσμα της κατακόρυφης βολής χωρίς οπισθέλκουσα όπου το σώμα επιστρέφει με την ίδια ταχύτητα με την οποία εκτοξεύτηκε:

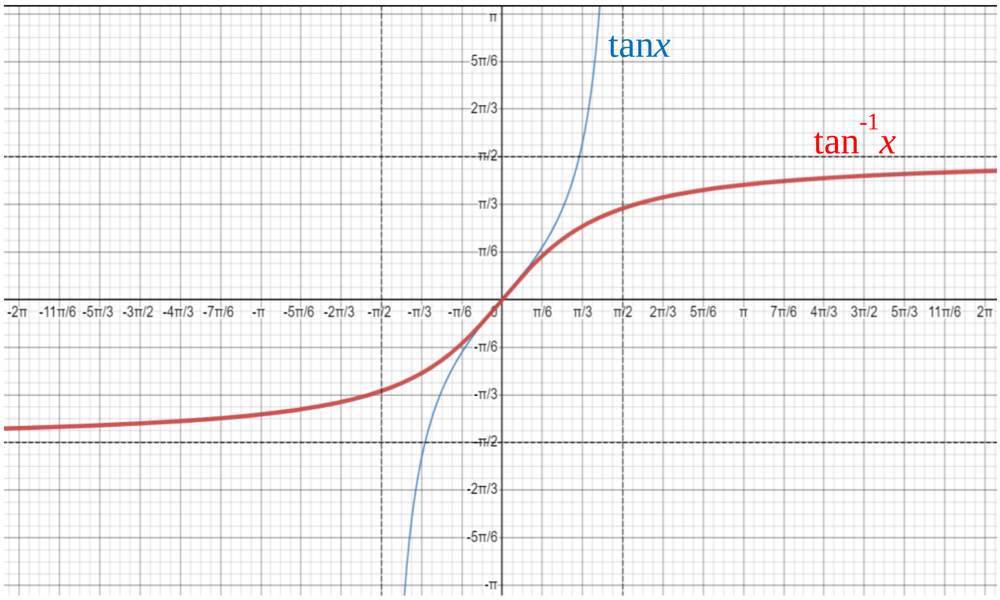
$$\upsilon_{impact} = -\frac{\upsilon_0}{\sqrt{1+\dfrac{c\upsilon_0^2}{mg}}} \xrightarrow{c\to 0} \upsilon_{impact} = -\upsilon_0$$

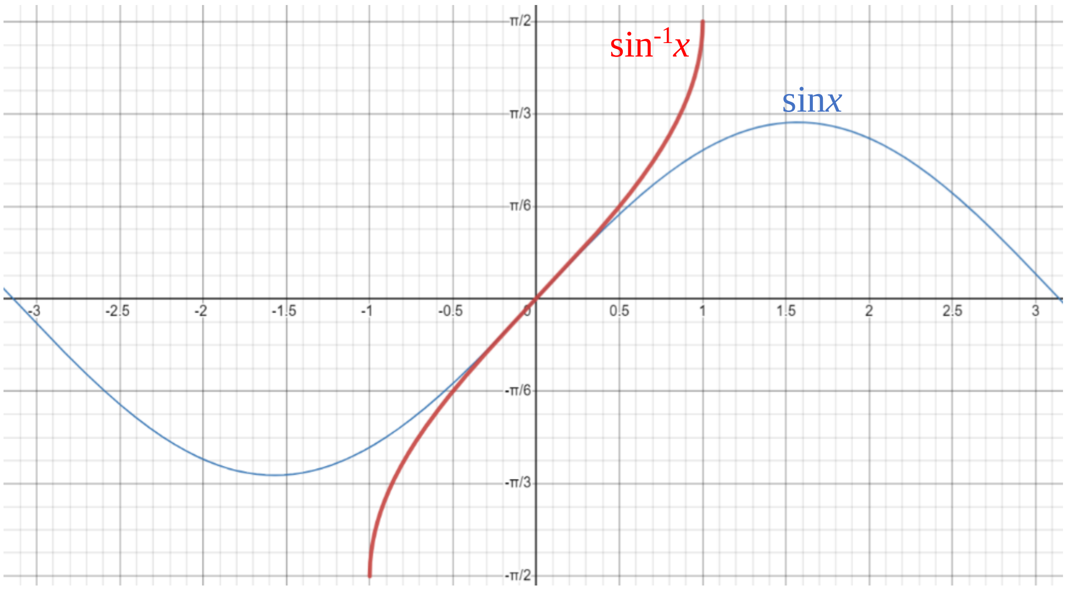
Όταν η αρχική ταχύτητα είναι πολύ μεγάλη $\upsilon_0 \to \infty$ τότε το σώμα επιστρέφει με την οριακή ταχύτητα:

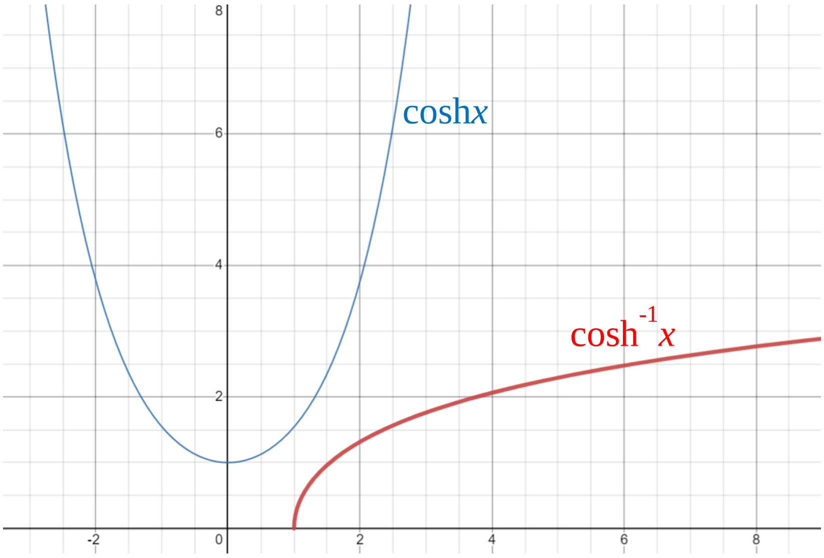
$$\upsilon_{impact} = -\frac{\upsilon_0}{\sqrt{1+(\upsilon_0/\upsilon_{term})^2}} \xrightarrow{\upsilon_0\to\infty} \upsilon_{impact} = -\frac{\upsilon_0}{\sqrt{(\upsilon_0/\upsilon_{term})^2}} = -\frac{\upsilon_0}{\upsilon_0/\upsilon_{term}} = -\upsilon_{term}$$

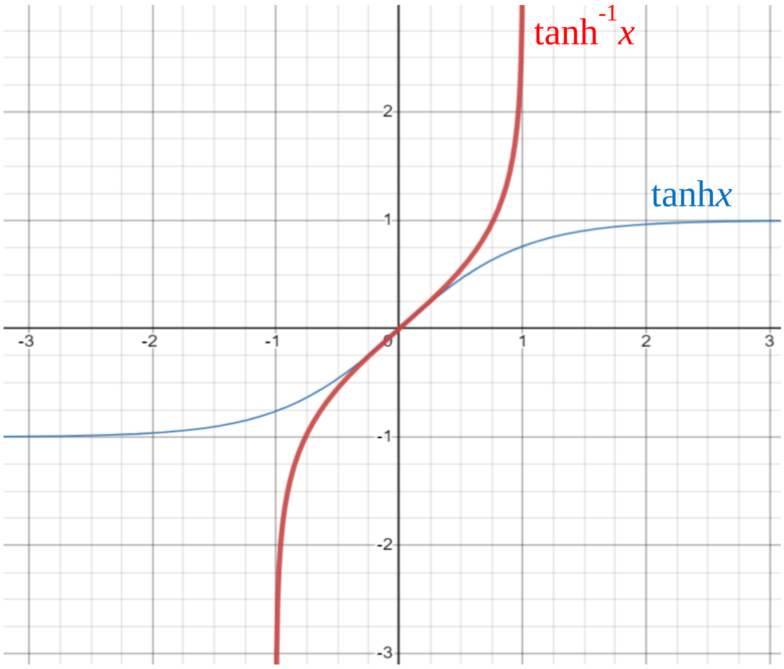
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΤΟΥΣ

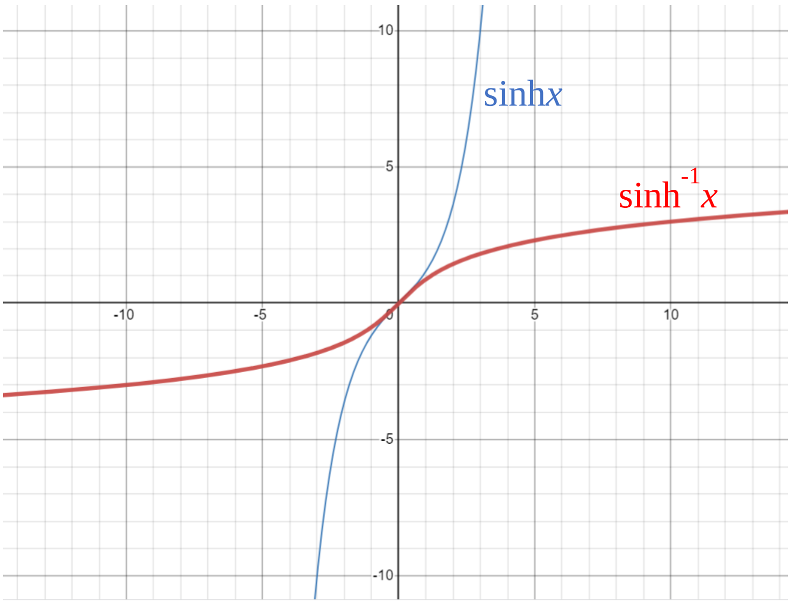







coshx
cosh-1x


tanh-1x
tanhx


sinhx
sinh-1x