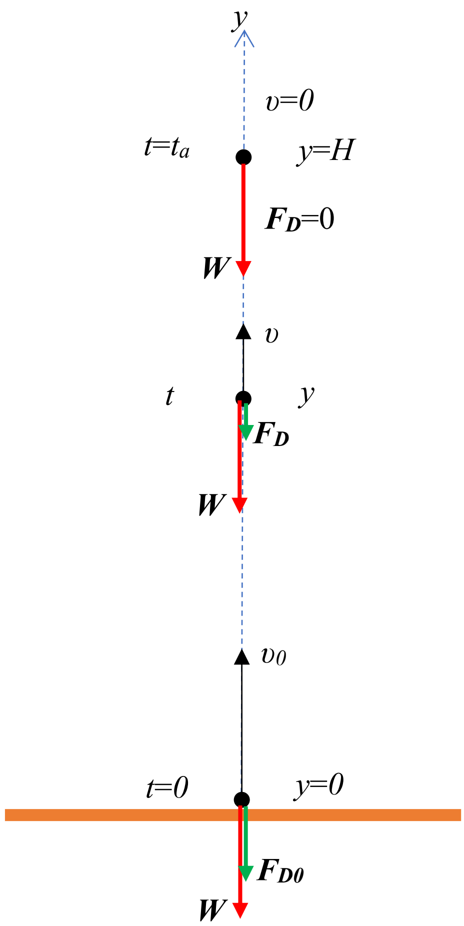
ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΒΟΛΗ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΟΠΙΣΘΕΛΚΟΥΣΑ
(από το σημείο εκτόξευσης μέχρι το μέγιστο ύψος)



Αρχή της ορμής:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}_{net}\Rightarrow m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=m\vec{g}-b\vec{\upsilon}\Rightarrow\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{g}-\frac{b}{m}\vec{\upsilon}$$

Ορίζουμε $\tau=\dfrac{m}{b}$ που έχει μονάδες χρόνου, σταθερά χρόνου

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{g}-\frac{\vec{\upsilon}}{\tau}\Rightarrow\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{1}{\tau}(\vec{g}\tau-\vec{\upsilon})$$

Ορίζουμε $\vec{\upsilon}_{o\rho}=\vec{g}\tau=-g\dfrac{m}{b}\hat{y}=-\upsilon_{o\rho}\hat{y}$ που έχει μονάδες ταχύτητας, οριακή ταχύτητα

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{1}{\tau}(\vec{\upsilon}_{o\rho}-\vec{\upsilon})$$

Επειδή η αρχική ταχύτητα είναι στον άξονα *y* ($\vec{\upsilon}_0=\upsilon_0\hat{y}$) η ταχύτητα την επόμενη χρονική στιγμή θα είναι επίσης στον άξονα *y*, επειδή και το βάρος ($\vec{W}=m\vec{g}=-mg\hat{y}$) και η αρχική οπισθέλκουσα ($\vec{F}_{D0}=-b\vec{\upsilon}_0=-b\upsilon_0\hat{y}$) είναι στον άξονα *y* και άρα η μεταβολή που θα προκαλέσουν στην ταχύτητα στο απειροστό χρονικό διάστημα *dt* θα είναι επίσης πάνω στον άξονα *y*. Το ίδιο θα επαναλαμβάνεται και όλες τις υπόλοιπες χρονικές στιγμές. Θα υπάρχει ταχύτητα πάνω στον άξονα *y* στην οποία θα προστίθεται μεταβολή πάνω στον άξονα *y* και άρα η ταχύτητα θα παραμένει πάνω στον άξονα *y* : $\vec{\upsilon}=\upsilon\hat{y}$. Το *υ* στην προηγούμενη εξίσωση είναι θετικό όσο το σώμα ανεβαίνει και αρνητικό όταν κατεβαίνει. Οπότε το πρόβλημα είναι μονοδιάστατο και η αρχή της ορμής θα είναι μια διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$\frac{d\upsilon}{dt}=-\frac{1}{\tau}(\upsilon_{o\rho}+\upsilon)\quad(1)$$

Αυτή γράφεται και : $a\tau+\upsilon+\upsilon_{o\rho}=0$ που μας δίνει τη σχέση μεταξύ ταχύτητας και επιτάχυνσης:

$$\boxed{\upsilon=-\upsilon_{o\rho}-a\tau \quad ή \quad a=-\frac{\upsilon+\upsilon_{o\rho}}{\tau} \qquad (1.1)}$$

Σχέση ταχύτητας – ύψους

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Κανόνας αλυσίδας} & \dfrac{d\upsilon}{dt}=\dfrac{d\upsilon}{dy}\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{d\upsilon}{dy}\upsilon \\ \text{Αρχή της ορμής} & \dfrac{d\upsilon}{dt}=-\dfrac{1}{\tau}(\upsilon_{o\rho}+\upsilon) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dy}\upsilon=-\frac{1}{\tau}(\upsilon_{o\rho}+\upsilon) \qquad (2)$$

Χωρίζουμε τις μεταβλητές στην (2)

$$dy=-\tau\frac{\upsilon}{\upsilon_{o\rho}+\upsilon}d\upsilon \qquad (3)$$

και ολοκληρώνουμε

$$dy=-\tau\frac{\upsilon+\upsilon_{o\rho}-\upsilon_{o\rho}}{\upsilon_{o\rho}+\upsilon}d\upsilon \Rightarrow \; dy=-\tau d\upsilon+\tau\frac{\upsilon_{o\rho}}{\upsilon_{o\rho}+\upsilon}d\upsilon \Rightarrow \int_0^y dy=-\tau\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}d\upsilon+\tau\upsilon_{o\rho}\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon_{o\rho}+\upsilon}\Rightarrow$$

$$\boxed{y=(\upsilon_0-\upsilon)\tau+\tau\upsilon_{o\rho}\ln\left(\frac{\upsilon_{o\rho}+\upsilon}{\upsilon_{o\rho}+\upsilon_0}\right) \qquad (4)}$$

Χρονικές εξισώσεις

Χωρίζω τις μεταβλητές στην (1) και ολοκληρώνω

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon_{o\rho}+\upsilon}=-\frac{dt}{\tau}\Rightarrow\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon_{o\rho}+\upsilon}=-\frac{1}{\tau}\int_0^t dt\Rightarrow\ln\left(\frac{\upsilon_{o\rho}+\upsilon}{\upsilon_{o\rho}+\upsilon_0}\right)=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow\;\frac{\upsilon_{o\rho}+\upsilon}{\upsilon_{o\rho}+\upsilon_0}=e^{-t/\tau}\Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon(t)=-\upsilon_{o\rho}+(\upsilon_0+\upsilon_{o\rho})e^{-t/\tau} \qquad (5)}$$

Όταν $t\to\infty$ η ταχύτητα τείνει στην $\upsilon(\infty)=-\upsilon_{o\rho}$ και άρα το σώμα θα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση προς τα κάτω. Αυτό θα συμβεί όταν η οπισθέλκουσα θα έχει ίσο μέτρο με το βάρος :

$$b\upsilon_{o\rho}=mg\Rightarrow\;\upsilon_{o\rho}=\frac{mg}{b}$$

Από την (1 ή 1.1)

$$\frac{d\upsilon}{dt}=-\frac{1}{\tau}(\upsilon_{o\rho}+\upsilon)=-\frac{1}{\tau}\left[\cancel{\upsilon}_{o\rho}-\cancel{\upsilon_{o\rho}}+(\upsilon_0+\upsilon_{o\rho})e^{-t/\tau}\right]\Rightarrow$$

$$\boxed{a(t)=-\frac{\upsilon_0+\upsilon_{o\rho}}{\tau}e^{-t/\tau} \qquad (6)}$$

Το σώμα κάνει επιταχυνόμενη κίνηση με εκθετικά μειούμενη επιτάχυνση.

Ολοκληρώνοντας την χρονική εξίσωση της ταχύτητας παίρνω τη χρονική εξάρτηση της θέσης

$$\frac{dy}{dt}=\upsilon(t)\Rightarrow dy=\upsilon(t)dt\Rightarrow\int_0^y dy=\int_0^t\upsilon(t)dt\Rightarrow y=-\upsilon_{o\rho}\int_0^t dt+(\upsilon_0+\upsilon_{o\rho})\int_0^t e^{-t/\tau}dt\Rightarrow$$

$$\boxed{y(t)=-\upsilon_{o\rho}t+(\upsilon_0+\upsilon_{o\rho})\tau\left(1-e^{-t/\tau}\right) \qquad (7)}$$

Χρόνος ανόδου t_a όταν $\upsilon(t_a)=0$

$$0=-\upsilon_{o\rho}+(\upsilon_0+\upsilon_{o\rho})e^{-t_a/\tau}\Rightarrow(\upsilon_0+\upsilon_{o\rho})e^{-t_a/\tau}=\upsilon_{o\rho}\Rightarrow\; e^{t_a/\tau}=\frac{\upsilon_0+\upsilon_{o\rho}}{\upsilon_{o\rho}}$$

$$\boxed{t_a = \tau \ln\left(1+\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{o\rho}}\right) = \frac{m}{b}\ln\left(1+\frac{b\upsilon_0}{mg}\right) \quad (8)}$$

Ορίζοντας την αδιάστατη μεταβλητή $\zeta = \dfrac{\upsilon_{o\rho}+\upsilon_0}{\upsilon_{o\rho}} = 1+\dfrac{\upsilon_0}{\upsilon_{o\rho}} = 1+\dfrac{b\upsilon_0}{mg}$ ο χρόνος ανόδου γράφεται και

$$\boxed{t_a = \tau \ln\zeta \quad (9)}$$

Χρησιμοποιώντας την $\ln(1+x) = x + O(x^2)$ επιβεβαιώνουμε ότι όταν η αντίσταση του αέρα τείνει στο μηδέν $b\to 0$, ανακτούμε τον χρόνο ανόδου για κατακόρυφη βολή χωρίς αντίσταση αέρα που είναι ίσος με $\dfrac{\upsilon_0}{g}$:

$$t_a = \frac{m}{b}\ln\left(1+\frac{b\upsilon_0}{mg}\right) = \frac{m}{b}\left(\frac{b\upsilon_0}{mg}+O(b^2)\right) = \frac{\cancel{m}}{\cancel{b}}\frac{\cancel{b}\upsilon_0}{\cancel{m}g} + \frac{m}{b}O(b^2) = \frac{\upsilon_0}{g}+O(b) \xrightarrow{b\to 0} \frac{\upsilon_0}{g}$$

Μέγιστο ύψος επιτυγχάνεται τη χρονική στιγμή t_a: $H = y(t_a)$

$$H = -\upsilon_{o\rho}\tau\ln\left(1+\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{o\rho}}\right) + (\upsilon_0+\upsilon_{o\rho})\tau\left(1-e^{-\tau\ln\left(\frac{\upsilon_{o\rho}+\upsilon_0}{\upsilon_{o\rho}}\right)/\tau}\right) =$$

$$= -\upsilon_{o\rho}\tau\ln\left(1+\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{o\rho}}\right) + (\upsilon_0+\upsilon_{o\rho})\tau\left(1-\frac{1}{\frac{\upsilon_{o\rho}+\upsilon_0}{\upsilon_{o\rho}}}\right) =$$

$$= -\upsilon_{o\rho}\tau\ln\left(1+\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{o\rho}}\right) + (\upsilon_0+\upsilon_{o\rho})\tau\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{o\rho}+\upsilon_0}\right)$$

$$\boxed{H = \upsilon_0\tau - \upsilon_{o\rho}\tau\ln\left(1+\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{o\rho}}\right) = \frac{m\upsilon_0}{b} - \frac{m^2 g}{b^2}\ln\left(1+\frac{b\upsilon_0}{mg}\right) \quad (10)}$$

Πιο εύκολα το μέγιστο ύψος υπολογίζεται από τη σχέση ύψους – ταχύτητας (4) θέτοντας $y = H$ όταν $\upsilon = 0$

$$H = (\upsilon_0 - 0)\tau + \tau\upsilon_{o\rho}\ln\left(\frac{\upsilon_{o\rho}+0}{\upsilon_{o\rho}+\upsilon_0}\right) = \upsilon_0\tau - \tau\upsilon_{o\rho}\ln\left(\frac{\upsilon_{o\rho}+\upsilon_0}{\upsilon_{o\rho}}\right) = \upsilon_0\tau - \upsilon_{o\rho}\tau\ln\left(1+\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{o\rho}}\right)$$

Χρησιμοποιώντας την $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + O(x^3)$ επιβεβαιώνουμε ότι όταν η αντίσταση του αέρα τείνει στο μηδέν $b\to 0$, ανακτούμε το μέγιστο ύψος για κατακόρυφη βολή χωρίς αντίσταση αέρα, που είναι ίσο με $\dfrac{\upsilon_0^2}{2g}$:

$$H = \frac{m\upsilon_0}{b} - \frac{m^2 g}{b^2}\left[\frac{b\upsilon_0}{mg} - \frac{1}{2}\left(\frac{b\upsilon_0}{mg}\right)^2 + O(b^3)\right] =$$

$$= \frac{m\upsilon_0}{b} - \frac{m^{\cancel{2}}\cancel{g}}{b^{\cancel{2}}}\frac{\cancel{b}\upsilon_0}{\cancel{m}\cancel{g}} + \frac{\cancel{m^2}\cancel{g}}{\cancel{b^2}}\frac{1}{2}\frac{\cancel{b^2}\upsilon_0^2}{\cancel{m^2}g^{\cancel{2}}} - \frac{m^2 g}{b^2}O(b^3) =$$

$$= \cancel{\frac{m\upsilon_0}{b}} - \cancel{\frac{m\upsilon_0}{b}} + \frac{\upsilon_0^2}{2g} + O(b) \xrightarrow{b\to 0} \frac{\upsilon_0^2}{2g}$$

Το **έργο της οπισθέλκουσας μέχρι το μέγιστο ύψος**, όπου το βλήμα σταματάει στιγμιαία, υπολογίζεται από τον ορισμό του έργου με ολοκλήρωση

$$W_D = \int_{έδαφος}^{κορυφή} \vec{F}_D \cdot \, d\vec{r} = \int_0^H (-b\upsilon\hat{y}) \cdot \, \hat{y}dy = -b\int_0^H \upsilon dy \quad \text{με } \upsilon>0$$

$1^{ος}$ τρόπος

Χρησιμοποιούμε τη σχέση (3) που συνδέει τις μεταβολές της ταχύτητας και του ύψους:

$$dy = -\tau \frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_{op}} d\upsilon$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$W_D = -b\int_0^H \upsilon dy = -b\int_{\upsilon_0}^0 \upsilon \left(-\tau \frac{\upsilon}{\upsilon+\upsilon_{op}} d\upsilon \right) = -b\tau \int_0^{\upsilon_0} \frac{\upsilon^2}{\upsilon+\upsilon_{op}} d\upsilon$$

Κάνουμε τη διαίρεση πολυωνύμων συμπληρώνοντας τον αριθμητή για να πάρουμε και να απλοποιήσουμε τον παρονομαστή

$$\frac{\upsilon^2}{\upsilon+\upsilon_{op}} = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_{op}^2 + \upsilon_{op}^2}{\upsilon+\upsilon_{op}} = \frac{(\upsilon+\upsilon_{op})(\upsilon-\upsilon_{op}) + \upsilon_{op}^2}{\upsilon+\upsilon_{op}} = \upsilon - \upsilon_{op} + \frac{\upsilon_{op}^2}{\upsilon+\upsilon_{op}}$$

Τώρα μπορούμε να κάνουμε τα ολοκληρώματα

$$W_D = -b\tau \int_0^{\upsilon_0} \left(\upsilon - \upsilon_{op} + \frac{\upsilon_{op}^2}{\upsilon+\upsilon_{op}} \right) d\upsilon = -b\tau \left[\int_0^{\upsilon_0} \upsilon d\upsilon - \upsilon_{op}\int_0^{\upsilon_0} d\upsilon + \upsilon_{op}^2 \int_0^{\upsilon_0} \frac{d\upsilon}{\upsilon+\upsilon_{op}} \right] =$$

$$= -b\tau \left[\frac{\upsilon_0^2}{2} - \upsilon_{op}\upsilon_0 + \upsilon_{op}^2 \ln\left(\frac{\upsilon_0+\upsilon_{op}}{\upsilon_0} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{W_D = -b\upsilon_{op}^2 \tau \left[\ln\left(1+\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{op}}\right) - \frac{\upsilon_0}{\upsilon_{op}} + \frac{\upsilon_0^2}{2\upsilon_{op}^2} \right]}$$

$2^{ος}$ τρόπος

Επειδή δεν έχουμε την ταχύτητα σαν συνάρτηση του ύψους αλλά σαν συνάρτηση του χρόνου, χρησιμοποιούμε τον ορισμό $dy = \upsilon dt$ ώστε να εκφράσουμε και τη μεταβολή του ύψους μέσω του χρόνου

$$W_D = -b\int_0^H \upsilon dy = -b\int_0^{t_a} \upsilon^2 dt = -b\int_0^{t_a} \left(-\upsilon_{op} + (\upsilon_0+\upsilon_{op})e^{-t/\tau}\right)^2 dt$$

Κάνοντας χρήση της συντομογραφίας $\zeta = 1 + \frac{\upsilon_0}{\upsilon_{op}} = \frac{\upsilon_{op}+\upsilon_0}{\upsilon_{op}} \Rightarrow \upsilon_{op}+\upsilon_0 = \zeta\upsilon_{op}$, το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται πιο οικονομικά

$$W_D = -b\int_0^{t_a} \left(-\upsilon_{op} + \upsilon_{op}\zeta e^{-t/\tau}\right)^2 dt = -b\upsilon_{op}^2 \int_0^{t_a} \left(-1+\zeta e^{-t/\tau}\right)^2 dt$$

Αναπτύσσουμε το τετράγωνο και κάνουμε τις ολοκληρώσεις

$$W_D = -b\upsilon_{op}^2 \int_0^{t_a} \left(1 - 2\zeta e^{-t/\tau} + \zeta^2 e^{-2t/\tau}\right) dt = -b\upsilon_{op}^2 \left[t_a - 2\zeta\tau\left(1-e^{-t_a/\tau}\right) + \zeta^2 \frac{\tau}{2}\left(1-e^{-2t_a/\tau}\right) \right]$$

Όμως $t_a = \tau \ln\zeta$ οπότε παίρνουμε

$$W_D = -b\upsilon_{o\rho}^2 \left[\tau\ln\zeta - 2\zeta\tau\left(1-e^{-\tau\ln\zeta/\tau}\right) + \zeta^2\frac{\tau}{2}\left(1-e^{-2\tau\ln\zeta/\tau}\right) \right] =$$

$$= -b\upsilon_{o\rho}^2\tau\left[\ln\zeta - 2\zeta\left(1-\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{\zeta^2}{2}\left(1-\frac{1}{\zeta^2}\right)\right] = -b\upsilon_{o\rho}^2\tau\left[\ln\zeta - 2\left(\zeta-1\right)+\frac{1}{2}\left(\zeta^2-1\right)\right]$$

$$= -b\upsilon_{o\rho}^2\left[\ln\zeta - 2(\zeta-1)+\frac{1}{2}\left(\zeta-1\right)(\zeta+1)\right] = -b\upsilon_{o\rho}^2\left[\ln\zeta - 2(\zeta-1)+\frac{1}{2}\left(\zeta-1\right)(\zeta-1+2)\right]$$

$$= -b\upsilon_{o\rho}^2\left[\ln\zeta - (\zeta-1)+\frac{1}{2}\left(\zeta-1\right)^2\right]$$

και αφού $\zeta - 1 = \dfrac{\upsilon_0}{\upsilon_{o\rho}}$, καταλήγουμε πάλι στην ίδια έκφραση που βρήκαμε πριν

$$W_D = -b\upsilon_{o\rho}^2\tau\left[\ln\left(1+\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{o\rho}}\right) - \frac{\upsilon_0}{\upsilon_{o\rho}} + \frac{\upsilon_0^2}{2\upsilon_{o\rho}^2}\right]$$

Το **έργο της οπισθέλκουσας** μπορεί να υπολογιστεί χωρίς ολοκληρώματα από την Αρχή της Ενέργειας (ή ΘΜΚΕ)

$$\Delta E = W_G + W_D \Rightarrow W_D = \Delta E - W_G$$

μεταξύ του σημείου εκτόξευσης, που y=0 και του μέγιστου ύψους που y=H, όπου W_G είναι το έργο του βάρους και W_D το έργο της οπισθέλκουσας.
Η σωματιδιακή ενέργεια μη σχετικιστικά είναι :

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

Το βάρος είναι συντηρητική δύναμη και το έργο του ισούται με τη διαφορά της δυναμικής ενέργειας μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης :

$$W_G(1\rightarrow 2) = -\Delta U = U(1) - U(2)$$

Η δυναμική ενέργεια του βάρους κοντά στην επιφάνεια της Γης εξαρτάται μόνο από την κατακόρυφη θέση y σύμφωνα με τον τύπο:

$$U(x,y,z) = mgy$$

Οπότε έχουμε :

$$W_D = \Delta E(0\rightarrow H) - W_G(0\rightarrow H) = \cancel{mc^2} + \frac{1}{2}m\upsilon^2(H) - \cancel{mc^2} - \frac{1}{2}m\upsilon^2(0) - U(0) + U(H)$$

Η ταχύτητα στο μέγιστο ύψος είναι μηδέν $\upsilon(H) = 0$, άρα παίρνουμε :

$$\boxed{W_D = -\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + mgH}$$

Αριθμητική εφαρμογή

$m = 1{,}00\ \text{kg}$, $\upsilon_0 = 200\ \text{m/s}$, $g = 9{,}80\ \text{N/kg}$, $b = 1{,}00\times 10^{-2}\ \text{kg/s}$

Όλα τα δεδομένα έχουν τρία σημαντικά ψηφία → όλα τα αποτελέσματα πρέπει να στρογγυλοποιηθούν σε τρία σημαντικά ψηφία

Σταθερά χρόνου: $\tau = \dfrac{m}{b} = \dfrac{1{,}00}{1{,}00\times 10^{-2}} = 100\ \text{s}$

Ορική ταχύτητα : $\upsilon_{o\rho} = \dfrac{mg}{b} = \dfrac{(1{,}00)(9{,}80)}{1{,}00\times 10^{-2}} = 980\ \text{m/s}$

Χρόνος ανόδου χωρίς αντίσταση αέρα

$t_a = \dfrac{\upsilon_0}{g} = \dfrac{200}{9{,}80} = 20{,}40816.. = 20{,}4\ \text{s}$

Χρόνος ανόδου με αντίσταση αέρα

$$t_a = \tau \ln\left(1+\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{o\rho}}\right) = (100)\ln\left(1+\frac{200}{980}\right) = (100)(0{,}1857171...) = 18{,}6 \text{ s}$$

Μέγιστο ύψος χωρίς αντίσταση αέρα

$$H = \frac{\upsilon_0^2}{2g} = \frac{200^2}{2\cdot\ 9{,}80} = 2.040{,}8163... = 204\times 10 = 2040 \text{ m}$$

Μέγιστο ύψος με αντίσταση αέρα

$$H = \upsilon_0\tau - \upsilon_{o\rho}\tau\ln\left(1+\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{o\rho}}\right) = \upsilon_0\tau - \upsilon_{o\rho}t_a = (200)(100)-(980)(18{,}57171..) =$$

$$= 20.000 - 18.200{,}2758... = 1.799{,}7242... = 180\times 10 = 1.800 \text{ m}$$

Έργο οπισθέλκουσας από ολοκλήρωμα :

$$W_D = \int \vec{F}_D\cdot\ d\vec{r} = ... = -b\upsilon_{o\rho}^2\tau\left[\ \ln\left(1+\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{o\rho}}\right) - \frac{\upsilon_0}{\upsilon_{o\rho}} + \frac{\upsilon_0^2}{2\upsilon_{o\rho}^2}\right] =$$

$$= -(0{,}01)(980^2)(100)\left[\ \ln\left(1+\frac{200}{980}\right) - \frac{200}{980} + \frac{1}{2}\left(\frac{200}{980}\right)^2\right] =$$

$$= -(960.400)\left[(0{,}1857171...) - (0{,}2040816...) + (0{,}5)(0{,}04164931...)\right] =$$

$$= -(960.400)(0{,}00246015639...) = -2.362{,}7342 = -2{,}36 \text{ kJ}$$

Έργο οπισθέλκουσας από Αρχή της Ενέργειας :

$$W_D = -\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + mgH = -\frac{1}{2}(1{,}00)(200^2) + (1{,}00)(9{,}80)(1.799{,}7242...) =$$

$$= -20.000 + 17.637{,}29716 = -2.362{,}70284 = -2{,}36 \text{ kJ}$$

Ενδιάμεσα αποτελέσματα που θα χρησιμοποιήσετε σε υπολογισμούς μπορείτε να τα εισάγεται με όσα ψηφία θέλετε, αλλά τα τελικά αποτελέσματα πρέπει να στρογγυλοποιούνται στα τρία σημαντικά ψηφία.