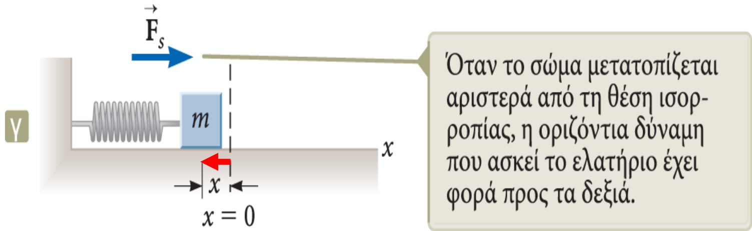
ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ
(ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ = ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ)

5) Απλή αρμονική ταλάντωση (αμείωτη περιοδική κίνηση) $F_{net} = -kx$

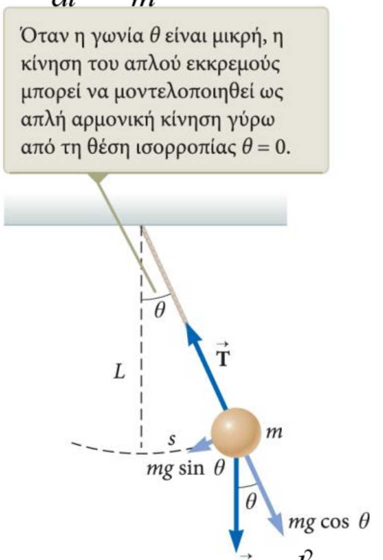
Όταν σε ένα σώμα μάζας m η ολική δύναμη είναι δύναμη επαναφοράς (π.χ. δύναμη από ιδανικό ελατήριο) $F_{ολ} = -kx$, γύρω από μια θέση ισορροπίας x=0, τότε η επιτάχυνση θα δίνεται από :

$$a = \frac{F_{net}}{m} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{k}{m}x \Rightarrow \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

όπου η $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ με διαστάσεις αντίστροφου χρόνου $[\omega] = \mathrm{s}^{-1}$ ονομάζεται κυκλική ιδιοσυχνότητα.



$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$



$$-mg\sin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

$s = L\theta, \quad \sin\theta \approx \theta$

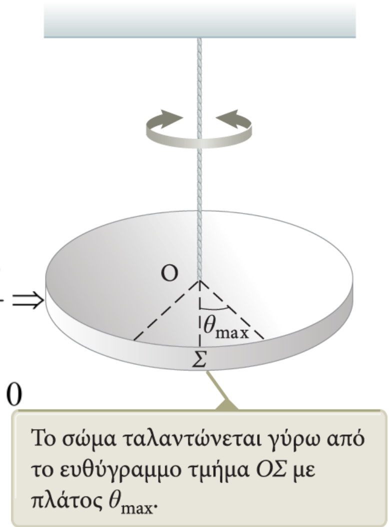
για $\theta \leq 15^o = 0{,}26$ rad

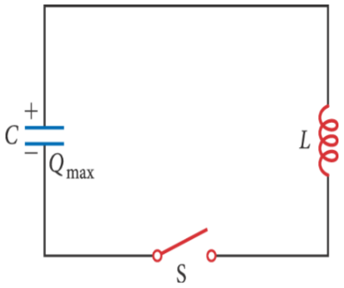
$\sin 15^o = 0{,}26$

$$\tau = I\alpha \Rightarrow$$

$$-\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0$$

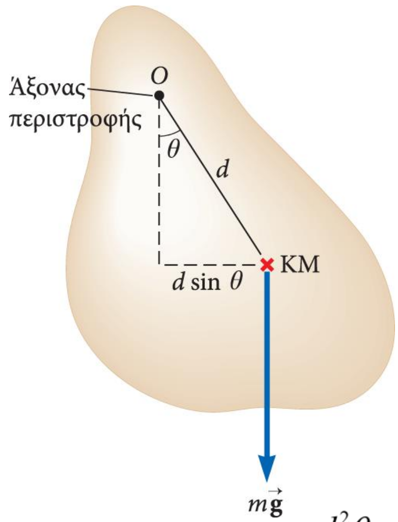




$$V_C + V_L = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$



$$\tau = I\alpha \Rightarrow -mgd\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\theta = 0$$

Η παραπάνω είναι μια διαφορική εξίσωση καθώς συνδέει μια συνάρτηση *x(t)* με τις παραγώγους της, στην περίπτωσή μας τη δεύτερη παράγωγο μόνο. Ονομάζεται εξίσωση του γραμμικού ταλαντωτή και είναι από τις πιο διάσημες διαφορικές εξισώσεις της φυσικής, λόγω της συχνής εμφάνισής της. Η λύση της συγκεκριμένης διαφορικής εξίσωσης είναι απλή καθώς θα είναι μια συνάρτηση της οποίας η δεύτερη παράγωγος είναι ανάλογη και με αντίθετο πρόσημο με την ίδια τη συνάρτηση. Όλοι ξέρουμε ότι οι συναρτήσεις με αυτή την ιδιότητα είναι οι λεγόμενες αρμονικές συναρτήσεις ημίτονο και συνημίτονο καθώς και η εκθετική συνάρτηση με μιγαδικό εκθέτη οι οποίες είναι όλες περιοδικές (με περίοδο 2π) και συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Έτσι η εξίσωση κίνησης του σώματος θα είναι περιοδική και στη γενικότερη μορφή της θα δίνεται από την παρακάτω σχέση :

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Ή ισοδύναμα από τις : $x(t) = ce^{i\omega t} + c^* e^{-i\omega t}$, $x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$,

Με απλή αντικατάσταση όλων των παραπάνω εκφράσεων στην διαφορική εξίσωση επιβεβαιώνουμε ότι αποτελούν λύση της.

Το όρισμα του ημιτόνου $\varphi = \omega t + \varphi_0$ ονομάζεται φάση και είναι αδιάστατο μέγεθος, μετριέται σε ακτίνια rad.

Με παραγώγιση από την παραπάνω σχέση παίρνουμε για την ταχύτητα και την επιτάχυνση:

$$\upsilon(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Η κίνηση αυτή ονομάζεται απλή αρμονική ταλάντωση. Είναι η κίνηση που θα ακολουθήσει κάθε σύστημα που βρίσκεται σε ισορροπία αν διαταραχθεί λίγο μακρύτερα από αυτήν.

Η περίοδός της που ορίζεται από $x(t+T) = x(t)$ είναι : $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ και άρα το *ω* είναι η κυκλική της συχνότητα $[\omega] = \mathrm{rad/s}$ (η γωνιακή ταχύτητα κινητού που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με περίοδο Τ).

Για κάθε περιοδική κίνηση ορίζονται οι :

περίοδος T = χρονικό διάστημα μίας επανάληψης (s) και

συχνότητα f = αριθμός επαναλήψεων στη μονάδα του χρόνου (s^{-1}≡Hz)

που συνδέονται μεταξύ τους και με την κυκλική συχνότητα *ω* με τις σχέσεις :

$$f = \frac{1}{T} \qquad , \qquad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Οι σταθερές *A* και φ_0 εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες (πως ξεκινήσαμε την κίνηση) και ονομάζονται αντίστοιχα πλάτος και αρχική φάση της ταλάντωσης. Το πλάτος είναι η μέγιστη δυνατή απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας $x_{\max} = A$ ενώ η μέγιστη ταχύτητα του σώματος θα είναι $\upsilon_{\max} = A\omega$.

Διάφορες περιπτώσεις αρχικών συνθηκών

1) Αν τραβήξουμε το ελατήριο κατά x_0 και τη χρονική στιγμή *t=0* το αφήσουμε ελεύθερο τότε $A = x_0$ και $\varphi_0 = \pi/2$, αφού πρέπει να έχουμε $x(0) = x_0$ και $\upsilon(0) = 0$:

$$\upsilon(0) = 0 \Rightarrow A\omega\cos(\varphi_0) = 0 \Rightarrow \cos(\varphi_0) = 0 \Rightarrow \varphi_0 = \pi/2$$

$$x(0) = x_0 \Rightarrow A\sin(\pi/2) = x_0 \Rightarrow A = x_0$$

2) Αν σπρώξουμε στιγμιαία το σώμα το οποίο βρίσκεται αρχικά στη θέση ισορροπίας $x=0$, ώστε τη χρονική στιγμή *t=0* να ξεκινήσει από εκεί με ταχύτητα υ_0 τότε $A = \upsilon_0/\omega$ και $\varphi_0 = 0$ αφού πρέπει να έχουμε $x(0) = 0$ και $\upsilon(0) = \upsilon_0$:

$$x(0) = 0 \Rightarrow A\sin(\varphi_0) = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$$

$$\upsilon(0) = \upsilon_0 \Rightarrow A\omega\cos(0) = \upsilon_0 \Rightarrow A = \upsilon_0/\omega$$

3) Γενικότερα αν τραβήξουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας κατά x_0 και επιπρόσθετα το σπρώξουμε στιγμιαία ώστε να ξεκινήσει από εκεί με αρχική ταχύτητα υ_0 τότε :

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \upsilon(0) &= \upsilon_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} A\sin(\varphi_0) &= x_0 \\ A\omega\cos(\varphi_0) &= \upsilon_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \tan\varphi_0 &= \frac{x_0\omega}{\upsilon_0} \\ A &= \sqrt{x_0^2 + \upsilon_0^2/\omega^2} \end{aligned}$$

Απαλοιφή του χρόνου

Απαλείφοντας το χρόνο βρίσκουμε τις σχέσεις που συνδέουν απευθείας τα x, υ και a:

$$\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$a = -\omega^2 x$$

$$a = \pm\omega^2\sqrt{A^2 - \upsilon^2/\omega^2}$$

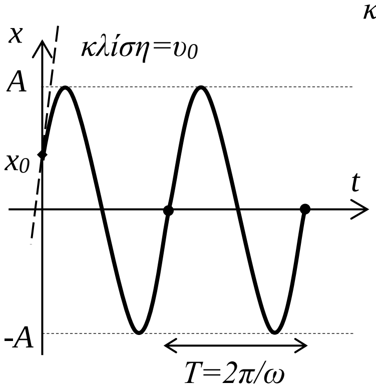
Αυτές οι σχέσεις αποδεικνύονται εύκολα από τις εξισώσεις κίνησης με χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (ή από διατήρηση της ενέργειας).

Έτσι για την απλή αρμονική ταλάντωση έχουμε τις εξισώσεις :

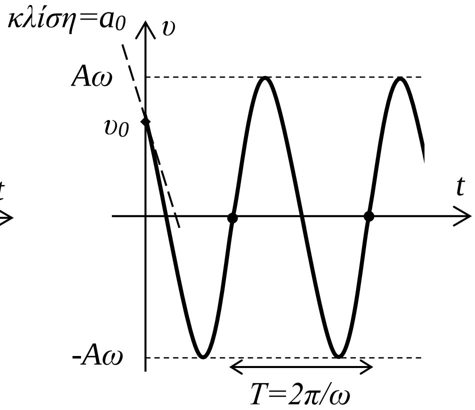
Θέση (τροχιά):	$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$		
Ταχύτητα :	$\upsilon = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$,	$\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$	
Επιτάχυνση :	$a = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0)$,	$a = -\omega^2 x$	$a = \pm\omega^2\sqrt{A^2 - \upsilon^2/\omega^2}$

Για αρχικές συνθήκες $0 < \varphi_0 < \pi/2$, $x_0 = A\sin(\varphi_0) > 0$, $\upsilon_0 = A\omega\cos(\varphi_0) > 0$, $a_0 = -A\omega^2\sin(\varphi_0) < 0$ οι γραφικές παραστάσεις είναι :

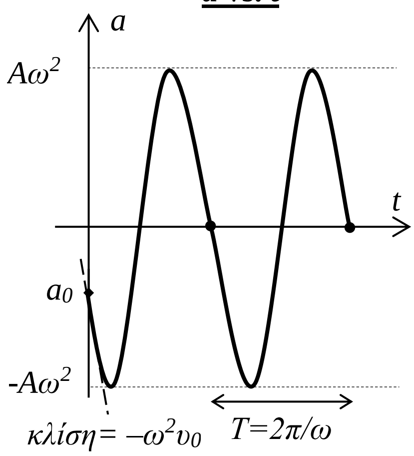
x vs. t



υ vs. t

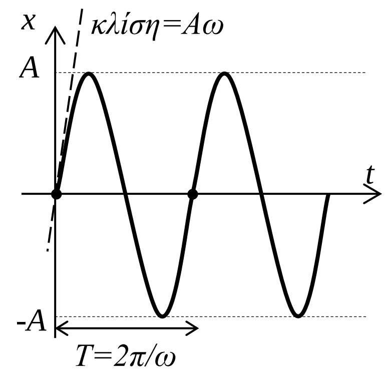


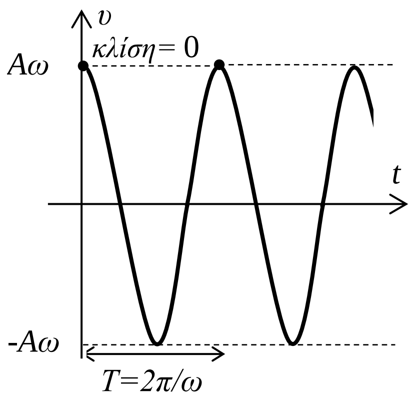
a vs. t

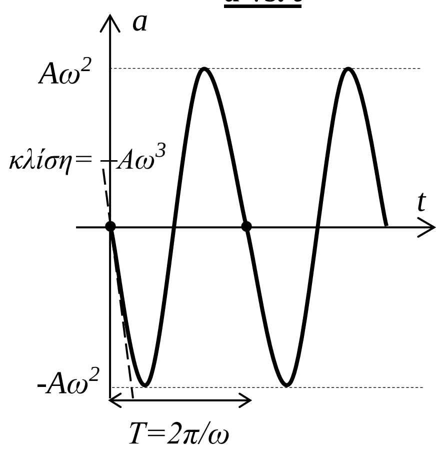


Για αρχικές συνθήκες $\varphi_0 = 0$, $x_0 = 0$, $\upsilon_0 = A\omega$, $a_0 = 0$ οι γραφικές παραστάσεις είναι:

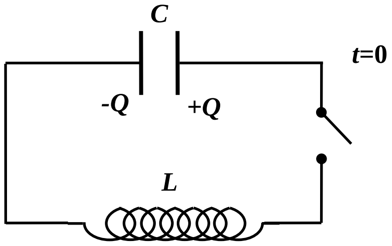
x vs. t **υ vs. t** **a vs. t**

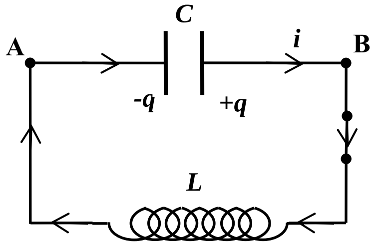






Ηλεκτρικό ανάλογο





Η εξίσωση που διέπει την κίνηση του ηλεκτρικού φορτίου στο παραπάνω κύκλωμα λαμβάνεται από τη διατήρηση της ενέργειας στη μορφή του κανόνα τάσεων του Kirchoff : το άθροισμα των διαφορών δυναμικού (ή πτώσεων τάσης) σε μια κλειστή διαδρομή είναι μηδέν:

$$\sum_i \upsilon_i = 0 \Rightarrow \upsilon_{\mathrm{BA}} + \upsilon_{\mathrm{AB}} = 0$$

Αν θυμηθούμε ότι η πτώση τάσης μεταξύ των άκρων ενός πηνίου, ενός πυκνωτή και μιας αντίστασης δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους :

$$\upsilon_L = L\frac{di}{dt}, \qquad \upsilon_C = \frac{q}{C}, \qquad \upsilon_R = iR$$

όπου L (H) ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου, C (F) η χωρητικότητα του πυκνωτή και R (Ω) η ηλεκτρική αντίσταση των αγωγών (εδώ αμελητέα και αγνοείται) τότε, αφού κλείσει ο διακόπτης τη χρονική στιγμή t=0, για κάθε επόμενη χρονική στιγμή θα ισχύει :

$$\upsilon_L + \upsilon_C = 0 \Rightarrow L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Αυτή δεν είναι παρά η διαφορική εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή : $\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$ για το ηλεκτρικό φορτίο q του πυκνωτή με $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Οι αντιστοιχίες με το μηχανικό ανάλογο είναι:

$$\begin{array}{ll} x \to q & \upsilon \to i \\ x_{\max} = A \to Q & \upsilon_{\max} = A\omega_0 \to I = Q\omega_0 \\ x_0 \to q_0 & \upsilon_0 \to i_0 \\ k \to 1/C & m \to L \end{array}$$

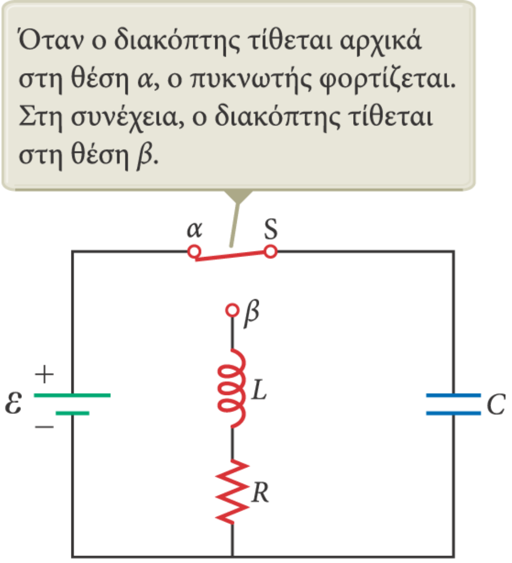
άρα $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

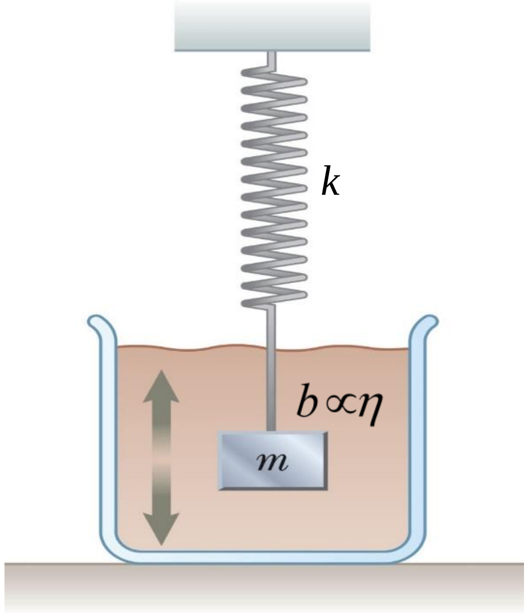
Παραγωγίζοντας ξανά ως προς χρόνο παίρνουμε πάλι την ίδια διαφορική εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή, αυτή τη φορά για το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα : $\frac{d^2i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 0$

Οι λύσεις για αρχικές συνθήκες $q(0)=Q,\ i(0)=0$ είναι : $q(t)=Q\sin(\omega_0 t+\pi/2)$

$i(t)=I\cos(\omega_0 t+\pi/2)$

6) Ταλάντωση με απόσβεση $F_{net}=-kx-b\upsilon$





Εκτός της δύναμης επαναφοράς έστω ότι ασκείται στο σώμα και οπισθέλκουσα (αντίσταση ανάλογη με την ταχύτητά του) με :

k: σταθερά ελαστικότητας ή σταθερά επαναφοράς ή συντελεστής στιβαρότητας με μονάδες [k]=N/m

b: συντελεστής απόσβεσης με μονάδες [b]=kg/s (εξαρτάται από το σχήμα του σώματος, τη μετωπική του επιφάνεια, την πυκνότητα του υγρού και το ιξώδες του υγρού η)

Τότε από το νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε για την επιτάχυνση τη διαφορική εξίσωση :

$$a=\frac{F_{net}}{m}\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x-\frac{b}{m}\upsilon\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{b}{2m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0$$

που είναι ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές της μορφής :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0}$$

όπου $\beta=b/2m$ που ονομάζεται **εκθέτης απόσβεσης** και $\omega_0=\sqrt{k/m}$ που ονομάζεται κυκλική **ιδιοσυχνότητα** είναι σταθερές με διαστάσεις αντίστροφου χρόνου (s^{-1}) που εξαρτώνται μόνο από τα τεχνικά χαρακτηριστικά του συστήματος m, k και b και όχι από τις αρχικές συνθήκες x_0, υ_0 . Για οικονομία χώρου οι χρονικές παράγωγοι συμβολίζονται συνήθως με τελίτσες :

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x}\quad\text{και}\quad\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}$$

Οπότε η διαφορική εξίσωση γράφεται :

$$\boxed{\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0}$$

Αναζητούμε μια συνάρτηση $x(t)$ της οποίας όλες οι παραγωγοί να είναι ανάλογες με την ίδια τη συνάρτηση. Αυτή είναι η εκθετική συνάρτηση. Με την αντικατάσταση $x(t)=e^{zt}$, $\dot{x}(t)=ze^{zt}$, $\ddot{x}(t)=z^2e^{zt}$, όλοι οι όροι στην παραπάνω εξίσωση παρουσιάζουν την ίδια συναρτησιακή (εκθετική) εξάρτηση από το χρόνο e^{zt} την οποία μπορούμε να βγάλουμε κοινό παράγοντα.

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(e^{zt}\right)+2\beta\frac{d}{dt}\left(e^{zt}\right)+\omega_0^2 e^{zt}=0 \Rightarrow z^2e^{zt}+2\beta z e^{zt}+\omega_0^2 e^{zt}=0 \Rightarrow (z^2+2\beta z+\omega_0^2)e^{zt}=0$$

Για να ισχύει το παραπάνω για κάθε τιμή του χρόνου t πρέπει η παράσταση στην παρένθεση να είναι μηδέν. Έτσι η παραπάνω διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε αλγεβρική εξίσωση δευτέρου βαθμού για την αυθαίρετη σταθερά z : $z^2+2\beta z+\omega_0^2=0$

η οποία ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση**. Εδώ η χαρακτηριστική εξίσωση είναι δευτεροβάθμια, αφού η αντίστοιχη διαφορική είναι δεύτερης τάξης. Η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας είναι :

$$\Delta = 4\beta^2-4\omega_0^2=4(\beta^2-\omega_0^2)=4\omega_0^2(\beta^2/\omega_0^2-1)$$

Ένας άλλος τρόπος να γράψουμε την διαφορική εξίσωση είναι να ορίσουμε την αδιάστατη σταθερά :

$$\zeta=\frac{\beta}{\omega_0}=\frac{b}{2m}\sqrt{\frac{m}{k}}=\frac{b}{2\sqrt{mk}}$$

που ονομάζεται **μέτρο απόσβεσης**. Τότε η διαφορική εξίσωση γράφεται :

$$\boxed{\ddot{x}+2\zeta\omega_0\dot{x}+\omega_0^2x=0}$$

και η χαρακτηριστική εξίσωση γίνεται :

$$z^2+2\zeta\omega_0 z+\omega_0^2=0$$

με διακρίνουσα :

$$\Delta=(2\zeta\omega_0)^2-4\omega_0^2 \Rightarrow \Delta=4\omega_0^2(\zeta^2-1)$$

Άρα η συνάρτηση $x(t)=e^{zt}$ θα είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης αν ο z είναι λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Επειδή αυτή είναι δευτεροβάθμια, όταν $\Delta\neq 0$ θα υπάρχουν γενικά δύο λύσεις z_1 και z_2. Επειδή η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική η γενικότερη λύση της θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των δύο λύσεων

$$x(t)=c_1e^{z_1t}+c_2e^{z_2t}$$

όπου οι σταθερές c_1 και c_2 θα προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες x_0 και υ_0. Αν η δευτεροβάθμια έχει διπλή λύση ($\Delta=0$) δείχνεται εύκολα ότι σε αυτήν την περίπτωση αν η e^{zt} αποτελεί λύση τότε και η συνάρτηση te^{zt} είναι λύση της διαφορικής και άρα η γενική λύση θα είναι της μορφής

$$x(t)=(a_1+a_2t)e^{z_2t}$$

Οι λύσεις της δευτεροβάθμιας $az^2+bz+c=0$ για το z δίνονται από τον γνωστό τύπο της άλγεβρας:

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

με $\Delta=b^2-4ac$. Άρα στην περίπτωσή μας οι λύσεις είναι :

$$z_{1,2}=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}=-\beta\pm\omega_0\sqrt{\beta^2/\omega_0^2-1}=-\beta\pm\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις :

<u>**Ασθενής απόσβεση** (φθίνουσα ταλάντωση, υποαπόσβεση, υποκρίσιμη απόσβεση, under damping)</u> :

$$\omega_0>\beta\Rightarrow\zeta<1\Rightarrow\Delta<0$$

Οπότε έχουμε δύο μιγαδικές λύσεις

$$z_{1,2}=-\beta\pm\omega_0\sqrt{-(1-\beta^2/\omega_0^2)}=-\beta\pm i\omega_0\sqrt{1-\beta^2/\omega_0^2}=-\beta\pm i\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\Rightarrow$$

$$\boxed{z_{1,2}=-\beta\pm i\omega_d}$$

όπου ορίσαμε την **κυκλική συχνότητα με απόσβεση** (damping)

$$\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}=\omega_0\sqrt{\left|1-\beta^2/\omega_0^2\right|}=\omega_0\sqrt{\left|1-\zeta^2\right|}=\omega_0\sqrt{\left|1-\frac{b^2}{4mk}\right|}<\omega_0$$

Η γενική λύση για την εξίσωση κίνησης είναι της μορφής: $\boxed{x(t)=e^{-\beta t}\left(ce^{i\omega_d t}+c^* e^{-i\omega_d t}\right)}$

όπου για να είναι η λύση πραγματική πρέπει οι δύο σταθερές c, c^* να είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.
Η λύση μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί στις πιο συνηθισμένες μορφές :

$$\boxed{x(t)=e^{-\beta t}\left(A\sin\omega_d t+B\cos\omega_d t\right)} \quad \text{ή} \quad \boxed{x(t)=A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega_d t+\varphi_0)}$$

χρησιμοποιώντας την εξίσωση Euler και τριγωνομετρικές ταυτότητες.
Η ω_d ονομάστηκε «συχνότητα» επειδή οι μονάδες της είναι rad/s αλλά μην μπερδευτείτε, η λύση δεν είναι περιοδική παρόλο που ταλαντώνεται.

Κρίσιμη απόσβεση (critical damping) : $\beta=\omega_0 \Rightarrow \zeta=1 \Rightarrow \Delta=0$ και άρα $\omega_d=0$
οπότε έχουμε τη διπλή λύση $\boxed{z_{1,2}=-\beta=-\omega_0}$
και η γενική λύση για την εξίσωση κίνησης είναι της μορφής : $\boxed{x(t)=e^{-\omega_0 t}\left(a_1+a_2 t\right)}$

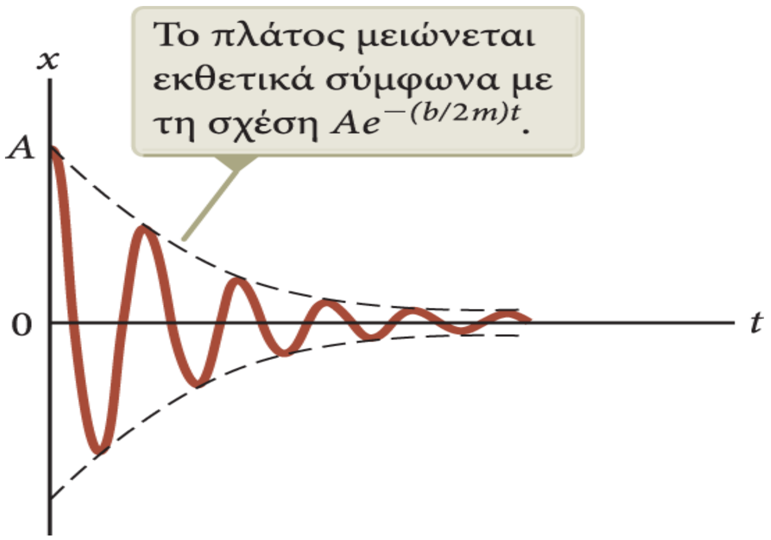
Ισχυρή απόσβεση (υπεραπόσβεση, υπερκρίσιμη απόσβεση , overdamping): $\beta>\omega_0 \Rightarrow \zeta>1 \Rightarrow \Delta>0$
οπότε έχουμε δύο πραγματικές και αρνητικές λύσεις: $\boxed{z_{1,2}=-\beta\pm\omega_d<0}$
Η γενική λύση για την εξίσωσης κίνησης είναι της μορφής: $\boxed{x(t)=a_+ e^{-(\beta-\omega_d)t}+a_- e^{-(\beta+\omega_d)t}}$
Επισημαίνουμε ότι επειδή $\beta>\omega_0>\omega_d \Rightarrow \beta+\omega_d>\beta-\omega_d>0$ και οι δύο εκθέτες είναι αρνητικοί και άρα το x πέφτει ασυμπτωτικά στο μηδέν.

Όλες οι παραπάνω λύσεις λέγονται λύσεις της μεταβατικής περιόδου γιατί παρατηρούμε ότι όλες τείνουν στο μηδέν καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο. Το σύστημα εξαιτίας της αντίστασης (απόσβεσης) επιστρέφει τελικά στη θέση ισορροπίας του : $x(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}0$, $\upsilon(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}0$,
Οι σταθερές που εμφανίζονται σε κάθε λύση προσδιορίζονται ως συνήθως από τις αρχικές συνθήκες x_0, υ_0

Ασθενής απόσβεση (φθίνουσες ταλαντώσεις)
Στην ασθενή απόσβεση με τη γενική λύση στη μορφή:

$$x(t)=A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega_d t+\varphi_0)$$

παρατηρούμε ότι :

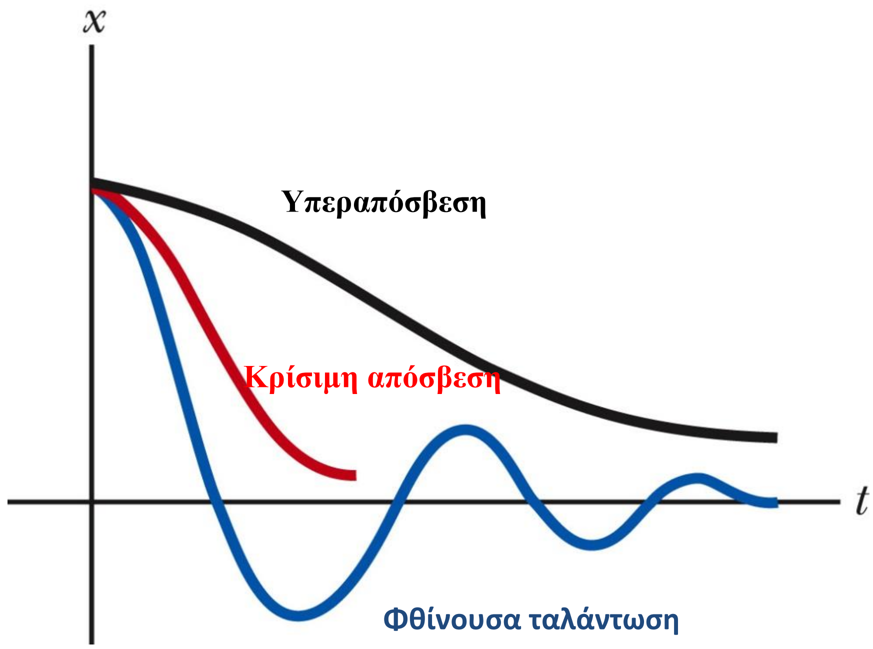


- Το σύστημα εκτελεί ταλάντωση με γωνιακή ταχύτητα ω_d αλλά με πλάτος $A(t)$ που φθίνει χρονικά με ένα εκθετικό παράγοντα $A(t)=A_0 e^{-\beta t}$. Γι αυτό η κίνηση περιγράφεται ως φθίνουσα ταλάντωση

- Η κυκλική συχνότητα ω_d της φθίνουσας ταλάντωσης είναι λίγο μικρότερη της φυσικής συχνότητας ή κυκλικής ιδιοσυχνότητας της αμείωτης ταλάντωσης ω_0 : $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} < \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$
- Η σταθερά $\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2m}{b}$ έχει διαστάσεις χρόνου και ονομάζεται **σταθερά χρόνου** της φθίνουσας ταλάντωσης. Καθορίζει το πόσο γρήγορα η ταλάντωση θα σβήσει. Πρακτικά μετά από $t = 6\tau$ η ταλάντωση έχει σβήσει καθώς το πλάτος
$$A(6\tau) = A_0 e^{-\beta \cdot 6\tau} = A_0 e^{-6\tau/\tau} = A_0 e^{-6} = A_0 \cdot 0,00248752 \simeq 0,0025 A_0 = 0,25\% A_0$$
έχει φτάσει στο 0,25%=1/400 της αρχικής του τιμής.
- Το χρονικό διάστημα $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$ λέγεται **περίοδος με απόσβεση** της ταλάντωσης και αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μεγίστων ή ελαχίστων του πλάτους, όταν $\sin(\omega_d t + \varphi) = +1$ ή -1. Αν οι τιμές αυτές είναι A_n και A_{n+1} και αντιστοιχούν στις δύο χρονικές στιγμές t_n και $t_{n+1}=t_n+T_d$ τότε :
$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{e^{-\beta t_n}}{e^{-\beta(t_n+T_d)}} = e^{\beta T_d} \Rightarrow A_{n+1} = A_n e^{-\beta T_d} \Rightarrow A_{n+1} = A_n e^{-\Lambda}$$
Η ποσότητα $\Lambda \equiv \ln \frac{x(t)}{x(t+T_d)} = \beta T_d = T_d / \tau$ που είναι μια αδιάστατη σταθερά, ονομάζεται **λογαριθμική μείωση**.
- Ο χρόνος που απαιτείται για να μειωθεί το πλάτος στο μισό ονομάζεται **χρόνος υποδιπλασιασμού** $t_{1/2}$ και προσδιορίζεται από :
$$\frac{1}{2} = \frac{A_0 e^{-\beta(t+t_{1/2})}}{A_0 e^{-\beta t}} \Rightarrow 2 = e^{\beta t_{1/2}} \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\beta} = \tau \ln 2$$
- Για κάθε πρακτικό σκοπό η ταλάντωση έχει σταματήσει μετά από 10 χρόνους ημιζωής καθώς το πλάτος έχει μειωθεί στο 2^{-10}=0,000976563≈0,1% της αρχικής του τιμής.
- Η περίοδος με απόσβεση, η λογαριθμική μείωση και ο χρόνος υποδιπλασιασμού συνδέονται με τη σχέση $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\Lambda} T_d$

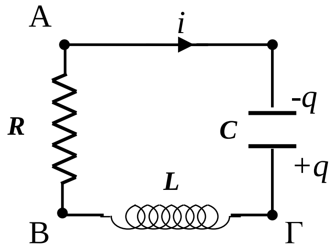
Κρίσιμη και Ισχυρή απόσβεση

Σημειώνουμε μόνο τα εξής :
- Δεν παρατηρείται ταλάντωση και το σύστημα αν απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας του επιστρέφει σε αυτήν χωρίς παλινδρομήσεις
- Η επιστροφή του συστήματος στην ισορροπία γίνεται πιο γρήγορα στην κρίσιμη απόσβεση απ ότι στην ισχυρή απόσβεση (παρόλο που ο συντελεστής απόσβεσης b είναι μικρότερος) .



Ηλεκτρικό ανάλογο

Πυκνωτής, πηνίο και ωμικός αντιστάτης σε σειρά.



$$\upsilon_L + \upsilon_R + \upsilon_C = 0 \Rightarrow L\frac{di}{dt} + iR + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + 2\frac{R}{2L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0}$$

$$\beta = R/2L \ , \ \omega_d = \sqrt{\left|\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}\right|}$$

$$q(t) = Qe^{-Rt/2L}\sin(\omega_d t + \varphi_0)$$

Άσκηση: Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των σταθερών c, A, B, A_0, φ_0 για τις ισοδύναμες μορφές της φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(ce^{i\omega_d t} + \bar{c}e^{-i\omega_d t}\right), \qquad x(t) = e^{-\beta t}\left(A\sin\omega_d t + B\cos\omega_d t\right), \qquad x(t) = A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega_d t + \varphi_0)$$

Λύση

Από: $$\left.\begin{matrix} c = a + ib \\ c^* = a - ib \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} a = \dfrac{c + c^*}{2} \\ b = \dfrac{c - c^*}{2i} \end{matrix} \ , \quad |c|^2 = cc^* = a^2 + b^2$$

και την ταυτότητα του Euler: $\left.\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \cos\theta &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$

έχουμε

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(ce^{i\omega_d t} + c^* e^{-i\omega_d t}\right) = e^{-\beta t}\left((a+ib)e^{i\omega_d t} + (a-ib)e^{-i\omega_d t}\right) = e^{-\beta t}\left(a(e^{i\omega_d t} + e^{-i\omega_d t}) + ib(e^{i\omega_d t} - e^{-i\omega_d t}\right)$$

$$= e^{-\beta t}\left(2a\cos\omega_d t - 2b\sin\omega_d t\right) = e^{-\beta t}\left(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t\right)$$

με

$$A = 2a = a + ib + a - ib = c + \overline{c}$$

$$B = -2b = i(a+ib-a+ib) = i(c-\overline{c})$$

$$A^2 = 4a^2 = (c+\overline{c})^2$$

$$B^2 = 4b^2 = -(c-\overline{c})^2$$

$$\sqrt{A^2+B^2} = 2\sqrt{a^2+b^2} = 2|c|^2$$

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(A\sin(\omega_d t) + B\cos(\omega_d t)\right) = e^{-\beta t}\sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega_d t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega_d t\right) =$$

$$= e^{-\beta t}\sqrt{A^2+B^2}\left(\cos\varphi_0 \sin\omega_d t + \sin\varphi_0\cos\omega_d t\right) = A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega_d t + \varphi_0)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$A_0 = \sqrt{A^2+B^2} = 2|c|^2, \quad \cos\varphi_0 = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{2}\frac{c+\overline{c}}{|c|^2}, \quad \sin\varphi_0 = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{i}{2}\frac{c-\overline{c}}{|c|^2}$$

Άσκηση: Να προσδιορίσετε τις σταθερές c, A, B, A_0, φ_0 για τις ισοδύναμες μορφές της απλής αρμονικής ταλάντωσης από τις αρχικές συνθήκες x_0, υ_0. Αριθμητική εφαρμογή : $k = 400\ \mathrm{N/m}$, $m = 1\,\mathrm{kg}$, $x_0 = -0,4\ \mathrm{m}$, $\upsilon_0 = 6\,\mathrm{m/s}$.

Λύση

Μορφή: $x(t) = A_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$, $\upsilon(t) = A_0\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

$$x_0 = x(0) = A_0\sin(\varphi_0) \Rightarrow \frac{x_0}{A_0} = \sin(\varphi_0) \qquad (1)$$

$$\upsilon_0 = \upsilon(0) = A_0\omega_0\cos(\varphi_0) \Rightarrow \frac{\upsilon_0}{A_0\omega_0} = \cos(\varphi_0) \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε $\dfrac{x_0\omega_0}{\upsilon_0} = \tan\varphi_0 \Rightarrow \boxed{\varphi_0 = \tan^{-1}\left(\dfrac{x_0\omega_0}{\upsilon_0}\right)}$ με τον περιορισμό $0 \le \varphi_0 < 2\pi$

Τετραγωνίζοντας και προσθέτοντας παίρνουμε $\left(\dfrac{x_0}{A_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\upsilon_0}{A_0\omega_0}\right)^2 = \sin^2\varphi_0 + \cos^2\varphi_0 \Rightarrow \boxed{A_0 = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{\upsilon_0^2}{\omega_0^2}}}$

Οπότε : $\boxed{x(t) = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{\upsilon_0^2}{\omega_0^2}}\sin\left[\omega_0 t + \tan^{-1}\left(\dfrac{x_0\omega_0}{\upsilon_0}\right)\right]}$, $\boxed{\upsilon(t) = \omega_0\sqrt{x_0^2 + \dfrac{\upsilon_0^2}{\omega_0^2}}\cos\left[\omega_0 t + \tan^{-1}\left(\dfrac{x_0\omega_0}{\upsilon_0}\right)\right]}$

Μορφή : $x(t) = A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t$, $\upsilon(t) = A\omega_0\cos\omega_0 t - B\omega_0\sin\omega_0 t$

$$x_0 = x(0) = B \Rightarrow \qquad \boxed{B = x_0} \qquad (3)$$

$$\upsilon_0 = \upsilon(0) = A\omega_0 \Rightarrow \boxed{A = \upsilon_0/\omega_0} \qquad (4)$$

Οπότε $\boxed{x(t) = \dfrac{\upsilon_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + x_0\cos\omega_0 t}$, $\boxed{\upsilon(t) = \upsilon_0\cos\omega_0 t - \omega_0 x_0\sin\omega_0 t}$

Μορφή : $x(t) = ce^{i\omega_0 t} + c^* e^{-i\omega_0 t}$, $\upsilon(t) = i\omega_0 (ce^{i\omega_0 t} - c^* e^{-i\omega_0 t})$

$x_0 = x(0) = c + c^* = 2\operatorname{Re} c \Rightarrow \boxed{\operatorname{Re} c = \frac{x_0}{2}}$

$\upsilon_0 = \upsilon(0) = i\omega_0 (c - c^*) = -2\omega_0 \operatorname{Im} c \Rightarrow \boxed{\operatorname{Im} c = -\frac{\upsilon_0}{2\omega_0}}$

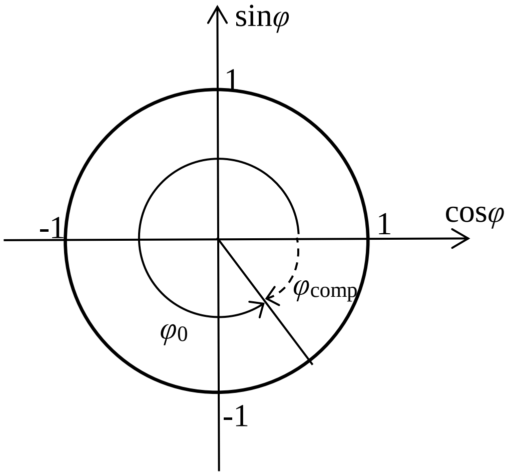
$\boxed{c = \frac{x_0}{2} - i\frac{\upsilon_0}{2\omega_0}}$

Αριθμητική εφαρμογή : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400}{1}} = 20$ rad/s

$A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{\omega_0^2}} = \sqrt{(-0,4)^2 + (6/20)^2} = \sqrt{0,16 + 0,09} = 0,5$ m

$\varphi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{x_0\omega_0}{\upsilon_0}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-0,4\cdot 20}{6}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{8}{6}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right)$

Προσοχή! Το κομπιουτεράκι θα σας δώσει την απάντηση $\varphi_{\text{comp}} = -53{,}13^\circ$ ή $-0{,}9273$ rad επειδή δίνουν τις απαντήσεις τους στο διάστημα [– π/2 , π/2]. Όμως εμείς ψάχνουμε γωνία στο [0 , 2π) με αρνητικό ημίτονο και θετικό συνημίτονο. Άρα θα βρίσκεται στο 4$^\text{ο}$ τεταρτημόριο και πρέπει να την γράψουμε ως $\varphi_0 = 2\pi + \varphi_{\text{comp}} = 2\pi - |\varphi_{\text{comp}}|$ που βρίσκεται στο ίδιο σημείο του τριγωνομετρικού κύκλου το οποίο όμως προσεγγίζεται από την θετική φορά.



Οπότε $\varphi_0 = 2\pi - 0,9273 = 5,356$ rad ή $\varphi_0 = 360^\circ - 53,13^\circ = 306,87^\circ$

Άρα γενικά πρέπει να βρίσκουμε την γωνία φ_0 τοποθετώντας την στο σωστό τεταρτημόριο :

$\varphi_{\text{comp}} > 0$ με συνφ$_0$>0 και ημφ$_0$>0 σημαίνει φ_0 στο 1$^\text{ο}$ τεταρτημόριο $\varphi_0 = \varphi_{\text{comp}}$

$\varphi_{\text{comp}} < 0$ με συνφ$_0$<0 και ημφ$_0$>0 σημαίνει φ_0 στο 2$^\text{ο}$ τεταρτημόριο $\varphi_0 = \varphi_{\text{comp}} + \pi$

$\varphi_{\text{comp}} > 0$ με συνφ$_0$<0 και ημφ$_0$<0 σημαίνει φ_0 στο 3$^\text{ο}$ τεταρτημόριο $\varphi_0 = \varphi_{\text{comp}} + \pi$

$\varphi_{\text{comp}} < 0$ με συνφ$_0$>0 και ημφ$_0$<0 σημαίνει φ_0 στο 4$^\text{ο}$ τεταρτημόριο $\varphi_0 = \varphi_{\text{comp}} + 2\pi$

Υπενθυμίζουμε ότι οι γωνίες 36,87$^\text{o}$ και 53,13$^\text{o}$ είναι οι γωνίες του ορθογώνιου τριγώνου με μήκη πλευρών την πρώτη Πυθαγόρεια τριάδα (3,4,5) και όλα τα πολλαπλάσια της. Είναι οι μόνες δύο γωνίες μικρότερες των 90$^\text{o}$ που και το ημίτονό τους αλλά και το συνημίτονό τους εκφράζεται σε κλειστή δεκαδική μορφή $\sin 36,87^\circ = \cos 53,13^\circ = 0,6$, $\cos 36,87^\circ = \sin 53,13^\circ = 0,8$, $\tan 36,87^\circ = \cot 53,13^\circ = 3/4 = 0,75$

Άρα: $\boxed{x(t) = 0,5\sin(20t + 5,356)}$ (SI)

$B = x_0 = -0,4$ m

$A = 6/20 = 0,3$ m

$$\boxed{x(t) = -0,4\sin 20t + 0,3\cos 20t} \quad \text{(SI)}$$

$$c = \frac{x_0}{2} - i\frac{\upsilon_0}{2\omega_0} = 0,2 - i\frac{6}{2\cdot 20} = 0,2 - 0,15i$$

$$\boxed{x(t) = (0,2 - 0,15i)e^{i20t} + (0,2 + 0,15i)e^{-i20t}} \quad \text{(SI)}$$

Όλες οι μορφές είναι ισοδύναμες :

$$x(t) = 0,5\sin(20t + 5,356) = -0,4\sin 20t + 0,3\cos 20t = (0,2 - 0,15i)e^{i20t} + (0,2 + 0,15i)e^{-i20t}$$

Άσκηση: Να προσδιορίσετε τις σταθερές c, A, B, A_0, φ_0 για τις ισοδύναμες μορφές της φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης από τις αρχικές συνθήκες x_0, υ_0. Αριθμητική εφαρμογή : $k = 400\,\text{N/m}$, $m = 1,00$ kg, $b = 2,40$ kg/s, $x_0 = 0,400$ m, $\upsilon_0 = 6,00$ m/s.

Λύση

Μορφή : $x(t) = A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega_d t + \varphi_0)$, $\upsilon(t) = A_0 e^{-\beta t}\left[\omega_d\cos(\omega_d t + \varphi_0) - \beta\sin(\omega_d t + \varphi_0)\right]$

$$x_0 = x(0) = A_0\sin\varphi_0 \Rightarrow \frac{x_0}{A_0} = \sin\varphi_0 \quad (1)$$

$$\upsilon_0 = \upsilon(0) = A_0\omega_d\cos\varphi_0 - A_0\beta\sin\varphi_0 = A_0\omega_d\cos\varphi_0 - \beta x_0 \Rightarrow \frac{\upsilon_0 + \beta x_0}{A_0\omega_d} = \cos\varphi_0 \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε $\dfrac{x_0\omega_d}{\upsilon_0 + \beta x_0} = \tan\varphi_0 \Rightarrow \boxed{\varphi_0 = \tan^{-1}\left(\dfrac{x_0\omega_d}{\upsilon_0 + \beta x_0}\right)}$

Τετραγωνίζοντας και προσθέτοντας παίρνουμε $\left(\dfrac{x_0}{A_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\upsilon_0 + \beta x_0}{A_0\omega_d}\right)^2 = \sin^2\varphi_0 + \cos^2\varphi_0 \Rightarrow$

$$\boxed{A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\upsilon_0 + \beta x_0)^2}{\omega_d^2}}}$$

Μορφή: $x(t) = e^{-\beta t}\left(A\sin\omega_d t + B\cos\omega_d t\right)$,

$$\upsilon(t) = -\beta e^{-\beta t}\left(A\sin\omega_d t + B\cos\omega_d t\right) + e^{-\beta t}\left(A\omega_d\cos\omega_d t - B\omega_d\sin\omega_d t\right) =$$

$$= e^{-\beta t}\left[-\left(A\beta + B\omega_d\right)\sin\omega_d t + \left(A\omega_d - \beta B\right)\cos(\omega_d t)\right]$$

$x_0 = x(0) = B \Rightarrow \boxed{B = x_0}$,

$$\upsilon_0 = \upsilon(0) = A\omega_d - \beta B = A\omega_d - \beta x_0 \Rightarrow \boxed{A = \frac{\upsilon_0 + \beta x_0}{\omega_d}}$$

Μορφή : $x(t) = e^{-\beta t}\left(ce^{i\omega_d t} + c^* e^{-i\omega_d t}\right) = ce^{(i\omega_d - \beta)t} + c^* e^{-(i\omega_d + \beta)t}$,

$$\upsilon(t) = c(i\omega_d - \beta)e^{(i\omega_d - \beta)t} - c^*(i\omega_d + \beta)e^{-(i\omega_d + \beta)t}$$

$x_0 = x(0) = c + c^* = 2\,\mathrm{Re}\,c \Rightarrow \boxed{\mathrm{Re}\,c = \dfrac{x_0}{2}}$,

$$\upsilon_0 = \upsilon(0) = c(i\omega_d - \beta) - c^*(i\omega_d + \beta) = i\omega_d(c - c^*) - \beta(c + c^*) = -2\omega_d\,\mathrm{Im}\,c - \beta x_0 \Rightarrow \boxed{\mathrm{Im}\,c = -\frac{\upsilon_0 + \beta x_0}{2\omega_d}}$$

$$\boxed{c=\frac{x_0}{2}-i\frac{\upsilon_0+\beta x_0}{2\omega_d}}$$

Αριθμητική εφαρμογή

Όλα τα δεδομένα δίνονται με ακρίβεια τριών σημαντικών ψηφίων και άρα όλα τα αποτελέσματα πρέπει επίσης να στρογγυλοποιηθούν στα τρία σημαντικά ψηφία.

Υπολογίζουμε αρχικά όλες τις σταθερές που εξαρτώνται μόνο από τα τεχνικά χαρακτηριστικά του συστήματος και όχι από τις αρχικές συνθήκες.

Κυκλική ιδιοσυχνότητα : $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{400}{1}}=20,0\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Εκθέτης απόσβεσης : $\beta=\frac{b}{2m}=\frac{2,4}{2\cdot 1}=1,20\ \text{s}^{-1}$

Μέτρο απόσβεσης : $\zeta=\frac{\beta}{\omega_0}=\frac{1,2}{20}=0,0600$

Κυκλική συχνότητα απόσβεσης : $\omega_d=\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}=20\sqrt{1-0,6^2}=20\sqrt{0,64}=16,0\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Για μορφή $x(t)=A_0e^{-\beta t}\sin(\omega_d t+\varphi_0)$

$$A_0=\sqrt{x_0^2+\frac{(\upsilon_0+\beta x_0)^2}{\omega_d^2}}=\sqrt{0,4^2+\left(\frac{6+1,2\cdot 0,4}{16}\right)^2}=\sqrt{0,16+\left(\frac{6+0,48}{16}\right)^2}=\sqrt{0,16+\left(0,405\right)^2}=0,569\ \text{m}$$

$$\varphi_0=\tan^{-1}\left(\frac{x_0\omega_d}{\upsilon_0+\beta x_0}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{0,4\cdot 16}{6+1,2\cdot 0,4}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{6,4}{6,48}\right)=\tan^{-1}\left(0,\overline{987654320}\right)=0,779\ \text{rad}\quad (44,64^{\text{o}})$$

$$\boxed{x(t)=0,569\cdot e^{-1,20t}\sin(16,0t+0,779)}\quad \text{(SI)}$$

Για μορφή $x(t)=e^{-\beta t}\left(A\sin\omega_d t+B\cos\omega_d t\right)$

$$B=x_0=0,400\ \text{m}\ ,\qquad A=\frac{\upsilon_0+\beta x_0}{\omega_d}=\frac{6+1,2\cdot 0,4}{16}=\frac{6,48}{16}=0,405\ \text{m}$$

$$\boxed{x(t)=e^{-1,2t}\left(0,405\sin 16,0t+0,400\cos 16,0t\right)}\quad \text{(SI)}$$

Μορφή : $x(t)=e^{-\beta t}\left(ce^{i\omega_d t}+c^*e^{-i\omega_d t}\right)=ce^{(i\omega_d-\beta)t}+c^*e^{-(i\omega_d+\beta)t}$,

$$c=\frac{x_0}{2}-i\frac{\upsilon_0+\beta x_0}{2\omega_d}=0,2-i\frac{6+1,2\cdot 0,4}{2\cdot 16}=0,2-i\frac{6,48}{32}=0,200-i0,2025$$

$$\boxed{x(t)=(0,200-i0,2025)e^{-(1,2-16i)t}+(0,200+i0,2025)e^{-(1,2+16i)t}}\quad \text{(SI)}$$

Άσκηση: Να προσδιορίσετε τις σταθερές a_1, a_2 της λύσης της κρίσιμης και a_+, a_- της ισχυρής απόσβεσης, από τις αρχικές συνθήκες x_0, υ_0. Αριθμητική εφαρμογή : $k=400$ N/m , $m=1$ kg , $x_0=0,4$ m, $\upsilon_0=6$ m/s και $b=40$ kg/s ή $b=80$ kg/s

Λύση

Κρίσιμη απόσβεση : $x(t)=(a_1+a_2t)e^{-\omega_0 t}$, $\upsilon(t)=a_2e^{-\omega_0 t}-\omega_0(a_1+a_2t)e^{-\omega_0 t}=[(a_2-\omega_0a_1)-\omega_0a_2t]e^{-\omega_0 t}$

$\beta=\omega_0$

$x_0=x(0)=a_1\Rightarrow\boxed{a_1=x_0}$

$\upsilon_0=\upsilon(0)=a_2-\omega_0a_1=a_2-\omega_0x_0\Rightarrow\boxed{a_2=\upsilon_0+\omega_0x_0}$

$$\boxed{x(t)=[x_0+(\upsilon_0+\omega_0x_0)t]e^{-\omega_0 t}}$$

Κυκλική ιδιοσυχνότητα : $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{400}{1}}=20,0\ \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$

Εκθέτης απόσβεσης : $\beta=\dfrac{b}{2m}=\dfrac{40}{2\cdot 1}=20\ \text{s}^{-1}=\omega_0$

$a_1=x_0=0,4\ \text{m}$

$a_2=\upsilon_0+\omega_0 x_0=6+20\cdot 0,4=14\ \text{m/s}$

$$\boxed{x(t)=(0,4+14t)e^{-20t}}\quad \text{(SI)}$$

Ισχυρή απόσβεση : $x(t)=a_+e^{-(\beta-\omega_d)t}+a_-e^{-(\beta+\omega_\delta)t}$, $\upsilon(t)=-(\beta-\omega_d)a_+e^{-(\beta-\omega_d)t}-(\beta+\omega_d)a_-e^{-(\beta+\omega_d)t}$

$x_0=x(0)=a_++a_-\Rightarrow a_++a_-=x_0$ (1)

$\upsilon_0=\upsilon(0)=-(\beta-\omega_d)a_+-(\beta+\omega_d)a_-=-\beta(a_++a_-)+\omega_d(a_+-a_-)\Rightarrow a_+-a_-=\dfrac{\upsilon_0+\beta x_0}{\omega_d}$ (2)

(1) + (2) → $2a_+=x_0+\dfrac{\upsilon_0+\beta x_0}{\omega_d}\Rightarrow \boxed{a_+=\dfrac{x_0}{2}+\dfrac{\upsilon_0+\beta x_0}{2\omega_d}}$

(1) – (2) → $2a_-=x_0-\dfrac{\upsilon_0+\beta x_0}{\omega_d}\Rightarrow \boxed{a_-=\dfrac{x_0}{2}-\dfrac{\upsilon_0+\beta x_0}{2\omega_d}}$

$\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{400}{1}}=20,0\ \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$

Εκθέτης απόσβεσης : $\beta=\dfrac{b}{2m}=\dfrac{80}{2\cdot 1}=40\ \text{s}^{-1}$

Μέτρο απόσβεσης : $\zeta=\dfrac{\beta}{\omega_0}=\dfrac{40}{20}=2$

Κυκλική συχνότητα απόσβεσης : $\omega_d=\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}=20\sqrt{2^2-1}=20\sqrt{3}=34,64\ \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}<\beta$

Εκθέτες : $\beta-\omega_0=40-34,64=5,36\ \text{s}^{-1}$

$\beta+\omega_0=40+34,64=74,64\ \text{s}^{-1}$

$a_+=\dfrac{x_0}{2}+\dfrac{\upsilon_0+\beta x_0}{2\omega_d}=0,2+\dfrac{6+40\cdot 0,4}{2\cdot 34,64}=0,2+0,318=0,518\ \text{m}$

$a_-=\dfrac{x_0}{2}-\dfrac{\upsilon_0+\beta x_0}{2\omega_d}=0,2-\dfrac{6+40\cdot 0,4}{2\cdot 34,64}=0,2-0,318=-0,118\ \text{m}$

$$\boxed{x(t)=0,518e^{-5,36t}-0,118e^{-74.64t}}\quad \text{(SI)}$$

Άσκηση

Δείξτε ότι στην κρίσιμη απόσβεση το σύστημα επιστρέφει πιο γρήγορα στη θέση ισορροπίας x=0 απ' ότι στην ισχυρή απόσβεση παρόλο που ο συντελεστής απόσβεσης b είναι μικρότερος.

Λύση

Το πόσο γρήγορα τείνουν οι $x(t)=e^{-\omega_0 t}\left(a_1+a_2 t\right)$ και $x(t)=a_+e^{-(\beta-\omega_d)t}+a_-e^{-(\beta+\omega_d)t}$ στο μηδέν καθορίζεται από τον αργότερο όρο τους, αυτόν που επιβιώνει έναντι του άλλου για μεγάλα t.

Στην κρίσιμη απόσβεση ο αργός όρος είναι ο $te^{-\omega_0 t}$ ο οποίος για κάθε t>1 είναι μεγαλύτερος από τον $e^{-\omega_0 t}$, ενώ στην ισχυρή είναι ο όρος με το μικρότερο εκθέτη $e^{-(\beta-\omega_d)t}$. Από δύο εκθετικά $e^{-\varepsilon_1 t}$ και $e^{-\varepsilon_2 t}$ αυτό που πάει πιο γρήγορα στο μηδέν είναι αυτό με τον μεγαλύτερο (αρνητικό) εκθέτη έστω το πρώτο $\varepsilon_1>\varepsilon_2$. Αυτό ισχύει ακόμα και αν αυτό το εκθετικό το πολλαπλασιάσουμε με μια δύναμη του t. Το εκθετικό του t υπερνικά τελικά κάθε δύναμη του t όσο μεγάλη και να είναι αυτή:

$$\forall\ \varepsilon_1,\varepsilon_2\in R\ \text{ με } \varepsilon_1>\varepsilon_2 \text{ και } n\in N,\ \exists\ T>0 \text{ ώστε } t^n e^{-\varepsilon_1 t}<e^{-\varepsilon_2 t}\quad \forall\ t>T$$

Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι ο εκθέτης μείωσης στην υπεραπόσβεση είναι μικρότερος από τον εκθέτη μείωσης στην κρίσιμη απόσβεση που είναι η κυκλική ιδιοσυχνότητα :

$$\beta-\omega_d<\omega_0$$

Πράγματι :

$$\beta-\omega_d=\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}=\beta-\beta\left(1-\frac{\omega_0^2}{\beta^2}\right)^{1/2}\simeq\beta-\beta\left(1-\frac{1}{2}\frac{\omega_0^2}{\beta^2}\right)=\frac{\omega_0^2}{2\beta}=\omega_0\left(\frac{\omega_0}{2\beta}\right)<\omega_0$$

το οποίο είναι σαφώς μικρότερο από τον εκθέτη ω_0 αφού $\beta>\omega_0$.

Άσκηση

Δείξτε ότι το σύστημα $\ddot{x}+\dot{x}+3x=0$ εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση. Βρείτε την κυκλική συχνότητα απόσβεσης και γράψτε τη λύση για αρχικές συνθήκες $x(0)=1,\ \dot{x}(0)=0$

Λύση

Χαρακτηριστική εξίσωση**:** $z^2+z+3=0$

Διακρίνουσα : $\Delta=1^2-4\cdot1\cdot3=-11$

Ρίζες : $z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{11}}{2}$, $z_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{11}}{2}$

Βασικές λύσεις : $e^{-t/2}\cos(\sqrt{11}\ t/2)$, $e^{-t/2}\sin(\sqrt{11}\ t/2)$

Κυκλική συχνότητα απόσβεσης: $\omega_d=\frac{\sqrt{11}}{2}$

Γενική λύση : $x(t)=Ae^{-t/2}\sin(\sqrt{11}\ t/2)+Be^{-t/2}\cos(\sqrt{11}\ t/2)$

ή $x(t)=A_0e^{-t/2}\sin(\sqrt{11}\ t/2+\varphi_0)$

$x(0)=1\Rightarrow B=1$,

$$\dot{x}(t)=A\frac{\sqrt{11}}{2}e^{-t/2}\cos(\sqrt{11}\ t/2)-\frac{A}{2}e^{-t/2}\sin(\sqrt{11}\ t/2)-B\frac{\sqrt{11}}{2}e^{-t/2}\sin(\sqrt{11}\ t/2)-\frac{B}{2}e^{-t/2}\cos(\sqrt{11}\ t/2)$$

$$\dot{x}(0)=0\Rightarrow A\frac{\sqrt{11}}{2}-\frac{B}{2}=0\Rightarrow A=\frac{1}{\sqrt{11}}$$

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{\sqrt{11}}e^{-t/2}\sin(\sqrt{11}\ t/2)+e^{-t/2}\cos(\sqrt{11}\ t/2)}$$

$$x(0)=1\Rightarrow A_0\sin\varphi_0=1$$

$$\dot{x}(t)=-\frac{A_0}{2}e^{-t/2}\sin(\sqrt{11}\ t/2+\varphi_0)+A_0\frac{\sqrt{11}}{2}e^{-t/2}\cos(\sqrt{11}\ t/2+\varphi_0)$$

$$\dot{x}(0)=0\Rightarrow-\frac{A_0}{2}\sin\varphi_0+A_0\frac{\sqrt{11}}{2}\cos\varphi_0=0\Rightarrow$$

$$A_0\cos\varphi_0=\frac{A_0}{\sqrt{11}}\sin\varphi_0=\frac{1}{\sqrt{11}}\Rightarrow\tan\varphi_0=\sqrt{11}\Rightarrow\varphi_0=\tan^{-1}\sqrt{11}=1,28\text{ rad }(81,36^{\text{o}})$$

$$A_0^2=\left(A_0\cos\varphi_0\right)^2+\left(A_0\sin\varphi_0\right)^2\Rightarrow A_0^2=\frac{1}{11}+1=\frac{12}{11}\Rightarrow A_0=\sqrt{\frac{12}{11}}$$

$$\boxed{x(t)=\sqrt{\frac{12}{11}}e^{-t/2}\sin(\sqrt{11}\ t/2+1,28)}$$

Άσκηση

Δείξτε ότι το σύστημα $\ddot{x}+4\dot{x}+3x=0$ θα εκτελέσει ισχυρή απόσβεση και γράψτε τη λύση για αρχικές συνθήκες $x(0)=1,\ \dot{x}(0)=0$. Ποια από τις δύο λύσεις καθορίζει το πόσο γρήγορα θα γυρίσει το σύστημα στη θέση ισορροπίας;

Λύση

Χαρακτηριστική εξίσωση**:** $z^2+4z+3=0$

Διακρίνουσα : $\Delta=4^2-4\cdot1\cdot3=4$

Ρίζες : $z_1=\dfrac{-4+\sqrt{4}}{2}=-1$, $z_2=\dfrac{-4-\sqrt{4}}{2}=-3$

Βασικές λύσεις : e^{-t} , e^{-3t}

Γενική λύση : $x(t)=a_+e^{-t}+a_-e^{-3t}$

$x(0)=1\Rightarrow a_+ + a_- =1$

$\dot{x}(t)=0\Rightarrow -a_+ -3a_- =0\Rightarrow -1-2a_- =0\Rightarrow a_- =-\dfrac{1}{2}$ (2), όπου χρησιμοποιήσαμε την (1).

Βάζοντας την (2) στην (1) παίρνουμε $a_+ -\dfrac{1}{2}=1\Rightarrow a_+ =\dfrac{3}{2}$

$$\boxed{x(t)=\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}}$$

Ο όρος e^{-t} που τείνει στο μηδέν **πιο αργά** από τον e^{-3t} θα καθορίσει το πόσο γρήγορα θα γυρίσει το σύστημα στη θέση ισορροπίας x=0.

Άσκηση

Δείξτε ότι το σύστημα $\ddot{x}+4\dot{x}+4x=0$ θα εκτελέσει κρίσιμη απόσβεση και γράψτε τη λύση για αρχικές συνθήκες $x(0)=1,\ \dot{x}(0)=0$.

Λύση

Χαρακτηριστική εξίσωση**:** $z^2+4z+4=0$

Διακρίνουσα : $\Delta=4^2-4\cdot1\cdot4=0$

Ρίζα : $z=\dfrac{-4\pm\sqrt{0}}{2}=-2$

Βασική λύση : e^{-2t}

Μια ρίζα, μία λύση άρα : κρίσιμη απόσβεση.

Γενική λύση : $x(t)=\left(a_1+a_2t\right)e^{-2t}$

$x(0)=1\Rightarrow a_1=1$

$\dot{x}(0)=0\Rightarrow\left[-2a_1e^{-2t}+a_2e^{-2t}-2a_2te^{-2t}\right]_{t=0}=0\Rightarrow -2a_1+a_2=0\Rightarrow a_2=2$

$$\boxed{x(t)=\left(1+2t\right)e^{-2t}}$$

Άσκηση

Δείξτε ότι η ταλάντωση με απόσβεση που διέπεται από την εξίσωση $\ddot{x}+b\dot{x}+x=0$ θα εμφανίσει φθίνουσα ταλάντωση για b=1, κρίσιμη απόσβεση για b=2 και ισχυρή απόσβεση για b=3. Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης σε κάθε περίπτωση για αρχικές συνθήκες $x(0)=1,\ \dot{x}(0)=0$.

7) Εξαναγκασμένη ταλάντωση $F_{net}=-kx-b\upsilon+F\sin\omega t$

Για να διατηρήσουμε σε κίνηση ένα σύστημα που παρουσιάζει απόσβεση, μπορούμε να εφαρμόσουμε μια πρόσθετη εξωτερική δύναμη, την οποία ονομάζουμε διεγείρουσα, που θα παρέχει την απαραίτητη ενέργεια για να ισοσταθμίσει τις απώλειες λόγω αντιστάσεων. Η δύναμη εφαρμόζεται περιοδικά και αρμονικά με κυκλική συχνότητα ω δηλ. :

$$F(t) = F\sin(\omega t) \text{ ή } F(t) = F\cos(\omega t)$$

Η διαφορική εξίσωση $a = F_{net}/m$ γίνεται τώρα :

$$a = \frac{F_s + F_d + F\sin(\omega t)}{m} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}\upsilon + \frac{F}{m}\sin(\omega t) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m}\sin(\omega t) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \gamma\sin(\omega t)} \quad \text{ή} \quad \boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \gamma\sin(\omega t)}$$

με $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ (rad/s), $\beta = b/2m$ (s^{-1}), όπως και πριν και με $\gamma = F/m$ το οποίο έχει διαστάσεις επιτάχυνσης (m/s^2).

Η παραπάνω είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση $2^{ης}$ τάξης, με σταθερούς συντελεστές **αλλά μη ομογενής, καθώς το δεξιό σκέλος,** όπου δεν εμφανίζεται το x, **δεν είναι ίσο με το μηδέν**.

Η γενική λύση μίας μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι :

Γενική λύση μη ομογενούς = Γενική λύση ομογενούς + Μερική λύση μη ομογενούς

$$x(t) = x_{o\mu}(t) + x_{\mu\varepsilon\rho}(t)$$

Οι λύσεις της ομογενούς είναι αυτές που βρήκαμε στην προηγούμενη ενότητα και οι οποίες όπως είδαμε φθίνουν με το χρόνο. Επειδή επιβιώνουν μόνο για μια μεταβατική περίοδο μέχρι να επιτευχθεί η μόνιμη κατάσταση ονομάζονται και μεταβατική λύση.

Η μερική λύση είναι μια και μοναδική, συγκεκριμένη συνάρτηση που ικανοποιεί την μη ομογενή διαφορική εξίσωση και την οποία βρίσκουμε με κάθε πρόσφορο τρόπο. Επειδή είναι αυτή που θα επιβιώσει τελικά, λέγεται και λύση της μόνιμης κατάστασης, $x_{\mu o\nu}(t) = x_{\mu\varepsilon\rho}(t)$, οπότε η γενική λύση γράφεται ως:

$$x(t) = x_{\mu\varepsilon\tau\alpha\beta}(t) + x_{\mu o\nu}(t)$$

με $x(t) = x_{\mu o\nu}(t)$ για $t \to \infty$ (ή πρακτικά για επτά χρόνους ημιζωής)

Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι η μόνιμη λύση θα έχει την ίδια χρονική εξάρτηση με τη διεγείρουσα αιτία αφού η μεταβατική λύση θα σβήσει και το σύστημα αναγκαστικά θα ακολουθεί την αιτία που το διεγείρει και του παρέχει την ενέργεια για να κινείται.

Έτσι, σε αναζήτηση της μερικής λύσης δοκιμάζουμε ημιτονοειδή συνάρτηση με συχνότητα ίση με της διεγείρουσας αιτίας αλλά πιθανώς με κάποια διαφορά φάσης:

$$x_{\mu o\nu}(t) = A\sin(\omega t - \delta)$$

Αντικαθιστούμε την παραπάνω μορφή στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση και αναζητούμε τις συνθήκες για το συγκεκριμένο πλάτος A>0 και τη συγκεκριμένη διαφορά φάσης δ ώστε η εξίσωση να ικανοποιείται. Βρίσκουμε πράγματι ότι κάτι τέτοιο είναι δυνατό εφόσον αυτά εξαρτώνται από τη συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης όπως παρακάτω:

$$A(\omega) = \frac{\gamma}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \qquad \delta(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Η συνάρτηση τόξου εφαπτομένης (τοξεφ, arctan ή $\tan^{-1}$) παίρνει τιμές στο διάστημα $-\pi/2 \le \delta \le \pi/2$ και άρα σε αυτό το διάστημα περιορίζεται και η διαφορά φάσης δ. Για $0 < \omega < \omega_0$ η δ είναι θετική και άρα η απομάκρυνση έπεται της διεγείρουσας δύναμης. Για $\omega=\omega_0$ => $\tan\delta=\infty$ => $\delta=\pi/2$ η απομάκρυνση και η διεγείρουσα δύναμη είναι εκτός φάσης δηλαδή η δύναμη μεγιστοποιείται όταν η απομάκρυνση είναι μηδέν (άρα όταν η ταχύτητα είναι μέγιστη). Για $\omega_0 < \omega$ η δ είναι αρνητική και η απομάκρυνση προηγείται από την διεγείρουσα δύναμη.

Τελικά η μόνιμη λύση είναι

$$\boxed{x_{\mu o \nu}(t) = \frac{\gamma}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\sin(\omega t - \delta)}$$

Αυτή είναι μια συγκεκριμένη συνάρτηση χωρίς ελευθερία πολλαπλασιασμού με μια σταθερά ή πρόσθεσης μιας σταθεράς.

Η γενική λύση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης για την περίπτωση π.χ. της ασθενούς $\omega_0 > \beta$ απόσβεσης θα είναι

$$\boxed{x(t) = A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega_A t + \varphi_0) + \frac{\gamma}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\sin(\omega t - \delta)}$$

Πράξεις πράξεις πράξεις …

Παρουσιάζουμε τις πράξεις που οδηγούν στη μερική λύση.

Υπολογίζουμε τις παραγώγους της δοκιμαστικής λύσης:

$$x(t) = A\sin(\omega t - \delta)$$

$$\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t - \delta)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t - \delta)$$

Τις αντικαθιστούμε στη διαφορική εξίσωση :

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \gamma\sin(\omega t) \Rightarrow -A\omega^2\sin(\omega t - \delta) + 2\beta A\omega\cos(\omega t - \delta) + A\omega_0^2\sin(\omega t - \delta) = \gamma\sin(\omega t) \Rightarrow$$

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)\sin(\omega t - \delta) + 2\beta A\omega\cos(\omega t - \delta) = \gamma\sin(\omega t)$$

Αναπτύσσουμε το ημίτονο και το συνημίτονο της διαφοράς σύμφωνα με τις ταυτότητες :

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ και $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)[\sin\omega t\cos\delta - \cos\omega t\sin\delta] + 2\beta A\omega[\cos\omega t\cos\delta + \sin\omega t\sin\delta] = \gamma\sin(\omega t)$$

Αναδιατάσσουμε τους όρους.

$$[A(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\delta + 2\beta A\omega\sin\delta]\sin\omega t + [2\beta A\omega\cos\delta - A(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\delta]\cos\omega t = \gamma\sin(\omega t)$$

Η εξίσωση αυτή πρέπει να ισχύει για κάθε χρονική στιγμή *t*. Αυτό είναι δυνατόν μόνο αν οι συντελεστές των ανεξάρτητων συναρτήσεων $\cos\omega t$ και $\sin\omega t$ είναι ίσοι στο πρώτο και στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης. Έτσι παίρνουμε δυο εξισώσεις για να προσδιορίσουμε τα A και δ.

Έχουμε :

$$2\beta A\omega\cos\delta - A(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\delta = 0 \Rightarrow \boxed{\tan\delta(\omega) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}} \quad (1)$$

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\delta + 2\beta A\omega\sin\delta = \gamma \quad (2)$$

Υπολογίζουμε τα $\cos\delta$ και $\sin\delta$ από την (1) και τα αντικαθιστούμε στην (2) για να βρούμε το A.

$$\cos^2\delta + \sin^2\delta = 1 \Rightarrow 1 + \tan^2\delta = \frac{1}{\cos^2\delta} \Rightarrow 1 + \frac{4\beta^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} = \frac{1}{\cos^2\delta} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\delta} = \frac{(\omega_0 - \omega)^2 + 4\beta^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\cos\delta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}}$$

και

$$\sin\delta = \tan\delta\cos\delta = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \Rightarrow \sin\delta = \frac{2\beta\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

Οπότε η (2) γίνεται

$$A(\omega_0^2-\omega^2)\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}+2\beta A\omega\frac{2\beta\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}=\gamma\Rightarrow A\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}=\gamma\Rightarrow$$

$$\boxed{A(\omega)=\frac{\gamma}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}}$$

Η παραπάνω έκφραση γράφεται και ως : $\boxed{A(\omega)=\frac{\gamma}{\sqrt{(\omega^2-\omega_r^2)^2+4\beta^2\omega_d^2}}}$

με $\omega_r^2=\omega_0^2-2\beta^2$, την οποία ονομάζουμε **κυκλική συχνότητα συντονισμού** (resonance) και $\omega_d^2=\omega_0^2-\beta^2$ την γνωστή από πριν κυκλική συχνότητα με απόσβεση.

Πράγματι αναπτύσσοντας το τετράγωνο και μετά συμπληρώνοντας ένα νέο τετράγωνο παίρνουμε

$$(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2=\omega_0^4-2\omega_0^2\omega^2+\omega^4+4\beta^2\omega^2=\omega^4-2(\omega_0^2-2\beta^2)\omega^2+\omega_0^4=$$

$$=\omega^4-2(\omega_0^2-2\beta^2)\omega^2+(\omega_0^2-2\beta^2)^2-(\omega_0^2-2\beta^2)^2+\omega_0^4=[\omega^2-(\omega_0^2-2\beta^2)]^2+\omega_0^4-(\omega_0^2-2\beta^2)^2=$$

$$=(\omega^2-\omega_r^2)^2+[\omega_0^2-(\omega_0^2-2\beta^2)][\omega_0^2+(\omega_0^2-2\beta^2)]=(\omega^2-\omega_r^2)^2+2\beta^2(2\omega_0^2-2\beta^2)=$$

$$=(\omega^2-\omega_r^2)^2+4\beta^2\omega_d^2$$

Άσκηση

Λύστε το πρόβλημα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης από αρμονική διεγείρουσα δύναμη με μιγαδικούς αριθμούς.

Λύση

Το πρόβλημα με την μη ομογένεια της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\gamma\sin(\omega t)\quad(1)$$

είναι ότι δεν μπορούμε να δοκιμάσουμε λύση εκθετικής μορφής $e^{\lambda t}$ όπως κάναμε με την ομογενή

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$

και να την μετατρέψουμε από διαφορική σε αλγεβρική εξίσωση. Οι παράγωγοι της εκθετικής είναι ανάλογες με την ίδια την εκθετική συνάρτηση και όλες οι εκφράσεις στο πρώτο μέλος γίνονται ανάλογες του $e^{\lambda t}$, όμως στο δεύτερο μέλος δεν έχουμε εκθετικό αλλά ημίτονο.

Εκμεταλλευόμαστε την γραμμικότητα της διαφορικής εξίσωσης ώστε να κατασκευάσουμε μια διαφορική εξίσωση που να έχει εκθετικό στο δεύτερο μέλος.

Έστω $x_1(t)$ η λύση της εξίσωσης : $\frac{d^2x_1}{dt^2}+2\beta\frac{dx_1}{dt}+\omega_0^2x_1=\gamma\cos(\omega t)\quad(3)$

και $x_2(t)$ η λύση της εξίσωσης : $\frac{d^2x_2}{dt^2}+2\beta\frac{dx_2}{dt}+\omega_0^2x_2=\gamma\sin(\omega t)$

Πολλαπλασιάζω τη δεύτερη με i και τις προσθέτω. Επειδή η παράγωγος του αθροίσματος δύο συναρτήσεων είναι το άθροισμα των παραγώγων των δύο συναρτήσεων παίρνω :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+i\frac{d^2x_2}{dt^2}+2\beta\frac{dx_1}{dt}+2\beta i\frac{dx_2}{dt}+\omega_0^2x_1+i\omega_0^2x_2=\gamma\cos(\omega t)+i\gamma\sin(\omega t)\Rightarrow$$

$$\frac{d^2[x_1+ix_2]}{dt^2}+2\beta\frac{d[x_1+ix_2]}{dt}+\omega_0^2[x_1+ix_2]=\gamma e^{i\omega t}\Rightarrow$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}+2\beta\frac{dz}{dt}+\omega_0^2z=\gamma e^{i\omega t}\Rightarrow\quad\ddot z+2\beta\dot z+\omega_0^2z=\gamma e^{i\omega t}\quad(3)$$

όπου $z(t) = x_1(t) + ix_2(t)$

Άρα αρκεί να βρω τη λύση z της τελευταίας διαφορικής εξίσωσης (3) και μετά να πάρω το φανταστικό της μέρος καθώς η λύση της (1) είναι $x(t) = x_2(t) = \operatorname{Im} z(t)$.

Επειδή το δεύτερο μέλος είναι εκθετικό, δοκιμάζω εκθετική λύση της μορφής : $z(t) = z_0 e^{i\omega t}$.

Υπολογίζοντας τις παραγώγους και αντικαθιστώντας στην (3) η διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε αλγεβρική. Κάθε παραγώγιση κατεβάζει απλά έναν παράγοντα $i\omega$:

$$\dot{z}(t) = i\omega z_0 e^{i\omega t} \ , \qquad \ddot{z}(t) = (i\omega)^2 z_0 e^{i\omega t} = -\omega^2 z_0 e^{i\omega t}$$

Η (3) γίνεται :

$$[-\omega^2 + i2\beta\omega + \omega_0^2] z_0 e^{i\omega t} = \gamma e^{i\omega t} \Rightarrow [\omega_0^2 - \omega^2 + i2\beta\omega] z_0 = \gamma \Rightarrow z_0 = \frac{\gamma}{[\omega_0^2 - \omega^2 + i2\beta\omega]}$$

Άρα $z(t) = z_0 e^{i\omega t} = \dfrac{\gamma e^{i\omega t}}{[\omega_0^2 - \omega^2 + i2\beta\omega]} = \gamma \cdot \zeta^{-1} e^{i\omega t}$.

Οπότε για να βρω τη λύση της (3) αρκεί να βρω τον αντίστροφο του μιγαδικού αριθμού $\zeta = (\omega_0^2 - \omega^2) + i \cdot 2\beta\omega$. Επίσης, επειδή θα τον πολλαπλασιάσουμε με το εκθετικό θέλουμε να έχουμε τον ζ σε πολική μορφή. Θυμίζουμε ότι αν η καρτεσιανή μορφή ενός μιγαδικού αριθμού είναι $z = a + ib$ τότε η πολική του μορφή είναι $z = |z| e^{i\theta}$ με $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ και $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$.

Άρα $\zeta = |\zeta| e^{i\delta} = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} \cdot e^{i\delta}$ με $\delta = \tan^{-1}\left(\dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$

και $\zeta^{-1} = \dfrac{e^{-i\delta}}{|\zeta|} = \dfrac{e^{-i\delta}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$

Έτσι η λύση της διαφορικής εξίσωσης (3) είναι

$$z(t) = x_1(t) + ix_2(t) = z_0 e^{i\omega t} = \gamma \frac{e^{-i\delta}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} e^{i\omega t} \Rightarrow$$

$$\boxed{z(t) = \frac{\gamma}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} e^{i(\omega t - \delta)} = \frac{\gamma}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \left[\cos(\omega t - \delta) + i\sin(\omega t - \delta)\right]}$$

και η λύση της (2) είναι

$$x(t) = x_2(t) = \operatorname{Im} z(t) \Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{\gamma}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \sin(\omega t - \delta)}$$

όπως και πριν.

Συντονισμός (Resonance)

Συντονισμός απομάκρυνσης

Γράφοντας τη λύση της μόνιμης κατάστασης στη μορφή

$$x_{\mu o \nu}(t) = \frac{\gamma}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_r^2)^2 + 4\beta^2\omega_d^2}} \sin(\omega t - \delta)$$

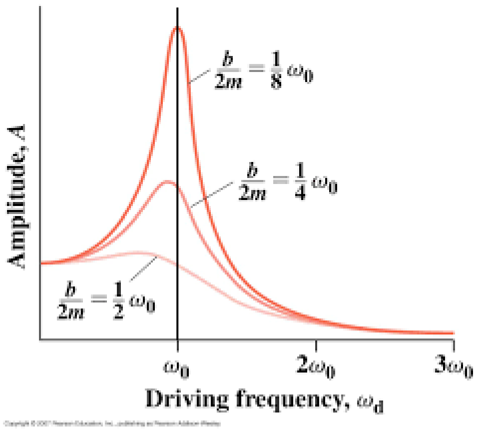
γίνεται φανερό ότι ο παρανομαστής ελαχιστοποιείται και άρα το πλάτος απομάκρυνσης $A(\omega)$ της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο όταν η συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης γίνει ίση με $\omega^2 = \omega_r^2$. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται συντονισμός και η συχνότητα ω_r συχνότητα συντονισμού.

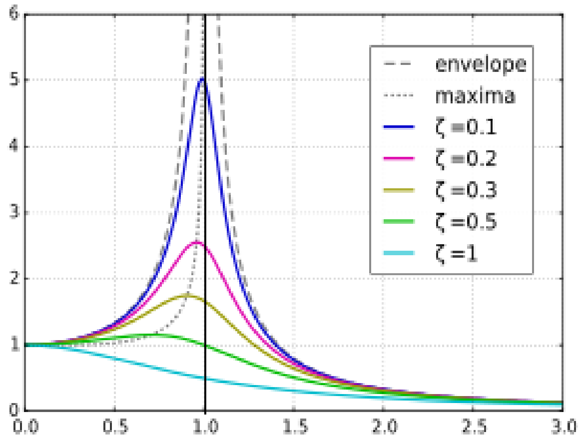
Το μέγιστο πλάτος είναι $A^{\max} = A(\omega_r) = \dfrac{\gamma}{2\beta\omega_d} = \dfrac{\gamma}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$

Παρατηρούμε ότι για τη συχνότητα συντονισμού $\omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$, τη φυσική συχνότητα ω_0 και τη συχνότητα απόσβεσης $\omega_d^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ ισχύει :

$$\omega_0^2 - 2\beta^2 < \omega_0^2 - \beta^2 < \omega_0^2 \Rightarrow \quad \omega_r^2 < \omega_d^2 < \omega_0^2$$

Εφόσον για να οριστεί η συχνότητα συντονισμού $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ θα πρέπει $\beta^2 < \dfrac{\omega_0^2}{2}$, συντονισμός θα παρατηρηθεί μόνο για κάποιες από τις ασθενείς αποσβέσεις ανεξάρτητα από το μέτρο F και την κυκλική συχνότητα ω της διεγείρουσας δύναμης (για τις ασθενείς ισχύει ήδη $\beta^2 < \omega_0^2$).





A/A_0 vs. ω/ω_0

$$\zeta = \frac{\beta}{\omega_0} = \frac{b}{2m}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{b}{2\sqrt{mk}}$$

Συντονισμός ταχύτητας

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η ταχύτητα: $\upsilon_{\mu o \nu}(t) \equiv \dfrac{dx_{\mu o \nu}(t)}{dt}$. Παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$\upsilon_{\mu o \nu}(t) = \frac{\omega\gamma}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\cos(\omega t - \delta) = B(\omega)\cos(\omega t - \delta)$$

όπου ορίσαμε το πλάτος της ταχύτητας (μέγιστη ταχύτητα) $B(\omega) = \omega A(\omega)$ (όπως και πριν $\upsilon_{\max} = \omega A$)

Η παραπάνω σχέση γράφεται και

$$\upsilon_{\mu\varepsilon\rho}(t) = \frac{\gamma}{\sqrt{\dfrac{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2}{\omega^2} + 4\beta^2}}\cos(\omega t - \delta) = \frac{\gamma}{\sqrt{\left(\omega - \omega_0^2/\omega\right)^2 + 4\beta^2}}\sin(\omega t - \delta + \pi/2)$$

Σημειώνουμε πάλι ότι η ταχύτητα προηγείται της απομάκρυνσης κατά μια φάση $\pi/2$ και άρα είτε έπεται της διεγείρουσας δύναμης κατά δ–$\pi/2$ (όταν $\delta>\pi/2$) είτε προηγείται από αυτήν κατά $\pi/2$–δ (όταν $\delta<\pi/2$)

Παρατηρούμε επίσης ότι το πλάτος $B(\omega)$ της ταχύτητας γίνεται μέγιστο όταν $\omega = \omega_0$ και είναι ίσο με

$$B^{\max} = B(\omega_0) = \frac{\gamma}{2\beta}$$

Δηλαδή η συχνότητα ω του συντονισμού για την ταχύτητα <u>είναι η ίδια συχνότητα με τη φυσική συχνότητα ω_0 του ταλαντωτή και είναι διαφορετική από αυτήν του συντονισμού απομάκρυνσης</u> δηλ. την $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$.

Συντονισμός χωρίς απόσβεση (β=0)

Θα πρέπει επίσης να εξετάσουμε την περίπτωση $\beta=0$ ταυτόχρονα με $\omega=\omega_0$, ξεχωριστά γιατί τότε όλοι οι παρανομαστές των πλατών $A(\omega)$ και $B(\omega)$ παραπάνω μηδενίζονται και τα πλάτη απειρίζονται. Στην περίπτωση αυτή λείπει ο δεύτερος όρος της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης και η συχνότητα της διεγείρουσας αιτίας είναι ίση με τη φυσική συχνότητα του ταλαντωτή

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x=\gamma\sin(\omega_0 t)$$

Η μερική λύση που θα δοκιμάσουμε δεν μπορεί να είναι της μορφής $x_{\mu\varepsilon\rho}(t)=A\sin(\omega t-\delta)$ γιατί αυτή είναι ίδιας μορφής με τη λύση της ομογενούς και αν την αντικαταστήσουμε στη διαφορική εξίσωση της μη ομογενούς θα πάρουμε μηδέν στο αριστερό σκέλος. Έτσι δοκιμάζουμε λύση της μορφής

$$x_{\mu\varepsilon\rho}(t)=A\cdot t\sin(\omega_0 t-\delta)$$

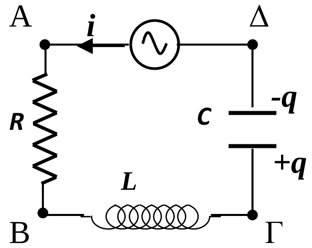
και βρίσκουμε $\delta=0$ και $A=\dfrac{\gamma}{2\omega_0}$

Έτσι η γενική λύση είναι $x(t)=A_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0)+\dfrac{\gamma}{2\omega_0}t\sin\omega_0 t$

Απ΄ όπου είναι φανερό ότι η απομάκρυνση της ταλάντωσης αυξάνεται απεριόριστα με το χρόνο ώσπου είτε να σπάσει το ελατήριο είτε να καταστραφεί ο πυκνωτής με ηλεκτρική εκκένωση.

Ηλεκτρικό ανάλογο

Πηγή εναλλασσόμενης τάσης με πυκνωτή, πηνίο και ωμικό αντιστάτη σε σειρά.



$$\upsilon_L+\upsilon_R+\upsilon_C=V\sin(\omega t)\Rightarrow L\frac{di}{dt}+iR+\frac{q}{C}=V\sin(\omega t)\Rightarrow\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{q}{LC}=\frac{V}{L}\sin(\omega t)\Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{q}+2\beta\dot{q}+\omega_0^2 q=\gamma\sin(\omega t)}$$

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}},\ \beta=R/2L,\ \gamma=V/L,\ \omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}=\sqrt{\left|\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}\right|},\ \omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{2L^2}}$$

Η μόνιμη λύση είναι :

$$\boxed{q(t)=Q(\omega)\sin(\omega t-\delta)}\ \text{με}\ Q(\omega)=\frac{\gamma}{\sqrt{(\omega^2-\omega_r^2)^2+4\beta^2\omega_d^2}}\ \text{και}\ \delta=\tan^{-1}\left(\frac{R}{1/C\omega-L\omega}\right)\ 0<\delta\le\pi$$

$$\boxed{i(t)=I(\omega)\cos(\omega t-\delta)=I(\omega)\sin(\omega t-\delta+\pi/2)}\qquad I(\omega)=\frac{\gamma}{\sqrt{\left(\omega-\omega_0^2/\omega\right)^2+4\beta^2}}=\omega Q(\omega)$$

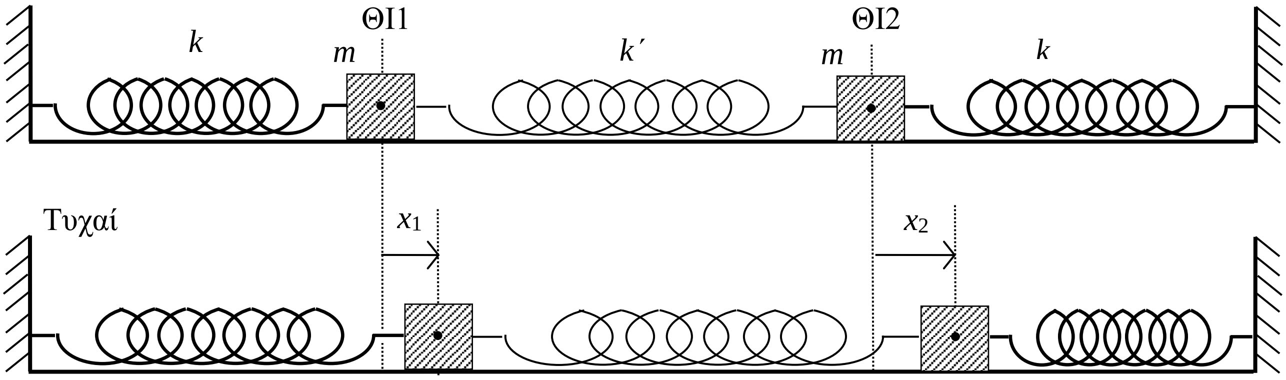
Το κύκλωμα τελικά διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα με συχνότητα ιση με την κυκλική συχνότητα ω της πηγής εναλλασσόμενης τάσης. Το πλάτος ταλάντωσης του ηλεκτρικού φορτίου στον πυκνωτή γίνεται μέγιστο όταν η κυκλική συχνότητα ω της πηγής γίνει ίση με ω_r, ενώ το πλάτος του ρεύματος στο κύκλωμα γίνεται μέγιστο όταν η κυκλική συχνότητα ω της πηγής γίνει ίση με τη φυσική συχνότητα (ιδιοσυχνότητα) του κυκλώματος ω_0.

7) Σύνθετη ταλάντωση $\quad F_{net1}=-kx_1+k'(x_2-x_1)$

Σύνθετη ταλάντωση εμφανίζεται σε κάθε σώμα ενός συστήματος **δύο** σωμάτων όταν αυτά εκτός της εξωτερικής δύναμης επαναφοράς που δέχονται το καθένα, αλληλεπιδρούν και μεταξύ τους με μια δύναμη επαναφοράς. Ένα απλό παράδειγμα είναι δύο ίσες μάζες με τρία ελατήρια (τα ακριανά ίδια) όπως στο παρακάτω σχήμα. Στη θέση ισορροπίας τα ελατήρια βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος.

Αν η μια μάζα διατηρείται καρφωμένη στη θέση της τότε δείχνεται εύκολα ότι η άλλη κάνει απλή αρμονική ταλάντωση (α.α.τ.): δηλαδή **μια** ημιτονοειδή συνάρτηση του χρόνου με γωνιακή συχνότητα $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k+k'}{m}}$.

Αν όμως και οι δύο μάζες είναι ελεύθερες να κινηθούν τότε η απομάκρυνση του κάθε σώματος θα είναι το άθροισμα **δύο** συναρτήσεων ημιτόνου με διαφορετικές γωνιακές συχνότητες, άρα σύνθετη ταλάντωση.



Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα σε καθένα από τα δύο σώματα ξεχωριστά. Η δύναμη κάθε ελατηρίου δίνεται από το νόμο του Hooke : $F_{\varepsilon\lambda} = -k\Delta\ell$

$$-kx_1 + k'(x_2 - x_1) = ma_1 \qquad (1) \qquad\qquad -kx_2 - k'(x_2 - x_1) = ma_2 \qquad (2)$$

Προσθέτοντας παίρνουμε (1)+(2):

$$m(a_1 + a_2) + k(x_1 + x_2) = 0 \Rightarrow (a_1 + a_2) + \omega_1^2 (x_1 + x_2) = 0 \qquad (1+2) \qquad \text{όπου } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Αφαιρώντας παίρνουμε (1)-(2):

$$m(a_1 - a_2) + (k + 2k')(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow (a_1 - a_2) + \omega_2^2 (x_1 - x_2) = 0 \quad (1\text{-}2) \quad \text{όπου } \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$$

Ορίζουμε τις νέες μεταβλητές θέσης: $\left.\begin{aligned} X_1 &= x_1 + x_2 \\ X_2 &= x_1 - x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{X_1 + X_2}{2} \\ x_2 &= \frac{X_1 - X_2}{2} \end{aligned}$ (3)

για τις οποίες οι αντίστοιχες επιταχύνσεις είναι $\begin{aligned} A_1 &= a_1 + a_2 \\ A_2 &= a_1 - a_2 \end{aligned}$ (4)

Αντικαθιστώντας στις (1+2) και (1-2) βλέπουμε ότι οι εξισώσεις παίρνουν τη γνωστή μορφή της εξίσωσης της α.α.τ. για τις νέες μεταβλητές X_1 και X_2 :

$$A_1 + \omega_1^2 X_1 = 0 \quad (5) \qquad\qquad A_2 + \omega_2^2 X_2 = 0 \quad (6)$$

Άρα οι λύσεις των X_1 και X_2 είναι :

$$X_1(t) = C_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (7) \qquad \text{και} \qquad X_2(t) = C_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad (8)$$

και από αυτές βρίσκουμε τη λύση για τις φυσικές θέσεις x_1 και x_2 χρησιμοποιώντας την (3):

$$x_1(t) = \frac{C_1}{2}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{C_2}{2}\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad (9)$$

$$x_2(t) = \frac{C_1}{2}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{C_2}{2}\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad (10)$$

Οι σταθερές C_1, C_2, φ_1 και φ_2 προσδιορίζονται ως συνήθως από τις αρχικές συνθήκες θέσης (x_{01}, x_{02}) και ταχύτητας (υ_{01}, υ_{02}) που δώσαμε στην καθεμιά από τις δύο μάζες.

Βλέπουμε ότι καθεμιά από τις δύο μάζες εκτελεί, στη γενική περίπτωση, μια σύνθετη κίνηση που είναι το άθροισμα δύο ταλαντώσεων με διαφορετικά πλάτη και διαφορετικές γωνιακές συχνότητες ω_1 και ω_2. Άρα εκτελεί σύνθετη ταλάντωση.

Η μια γωνιακή συχνότητα είναι μικρότερη και η άλλη μεγαλύτερη από την γωνιακή συχνότητα ω_0 της απλής αρμονικής ταλάντωσης που θα έκανε η κάθε μάζα μόνη της αν το σημείο στήριξης του μεσαίου ελατηρίου στην άλλη μάζα ήταν σταθερό δηλαδή ή άλλη μάζα ήταν στερεωμένη ακλόνητα.

$$\sqrt{\frac{k}{m}} < \sqrt{\frac{k+k'}{m}} < \sqrt{\frac{k+2k'}{m}} \Rightarrow \omega_1 < \omega_0 < \omega_2$$

Η γενική περίπτωση είναι συνδυασμός των δύο παρακάτω απλών τρόπων ταλάντωσης.

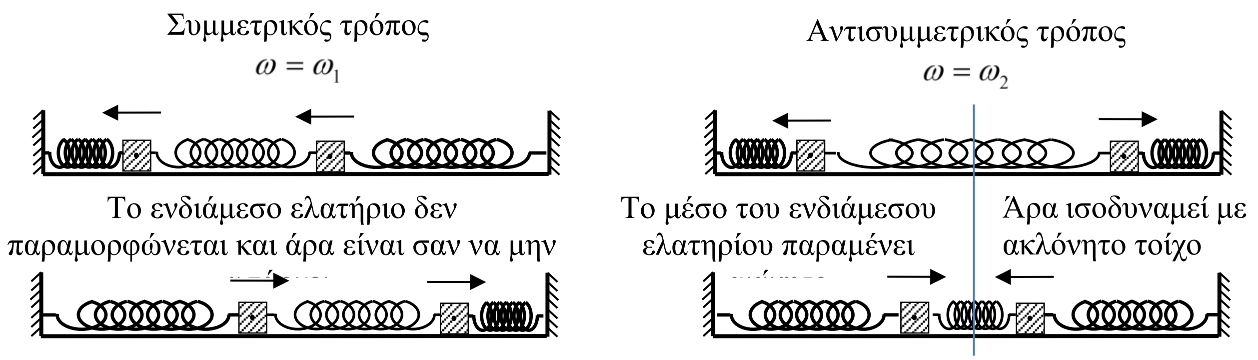
1) $C_2 = 0$: $\quad x_1 = x_2 = A\sin(\omega_1 t + \varphi_0)$

Τα δύο σώματα ταλαντώνονται σε φάση. Κινούνται συμμετρικά και τα δύο ταυτόχρονα δεξιά και μετά αριστερά με την ίδια συχνότητα ω_1. Άρα το μεσαίο ελατήριο παραμένει αμετάβλητο, πάντα στο φυσικό του μήκος, δεν ασκεί δυνάμεις και δεν επηρεάζει τη συχνότητα ταλάντωσης που εξαρτάται μόνο από τη σταθερά των εξωτερικών ελατηρίων $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

1) $C_1 = 0$: $\quad x_1 = -x_2 = A\sin(\omega_2 t + \varphi_0)$

Τα σώματα κινούνται ταυτόχρονα αντίθετα (διαφορά φάσης = π). Μαζί φτάνουν στη ΘΙ αλλά από αντίθετες κατευθύνσεις και μαζί φτάνουν σε αντίθετα ακραία σημεία Το μεσαίο ελατήριο υφίσταται τη μέγιστη συσπείρωση όταν τα ακριανά βρίσκονται σε μέγιστη επιμήκυνση και αντίστροφα. Η γωνιακή συχνότητα εξαρτάται και από τα δύο ελατήρια $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$. Το φυσικό νόημα αυτής της συχνότητας είναι το εξής.

Επειδή το μέσο του ενδιάμεσου ελατηρίου παραμένει ακίνητο, ισοδυναμεί με ακλόνητο τοίχο. Άρα η κάθε μάζα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση υπό την επίδραση δύο παράλληλων ελατηρίων, το ένα από τα οποία είναι το μισό του ενδιάμεσου. Μισό μήκος σημαίνει διπλάσια σταθερά. Άρα η ισοδύναμη σταθερά θα είναι $k+2k'$.



Οι δύο συχνότητες $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k+2k'}{m}}$ ονομάζονται **ιδιοσυχνότητες** του συστήματος. Οι δύο τρόποι ταλάντωσης $X_1(t)$ και $X_2(t)$ ονομάζονται **κανονικοί τρόποι ταλάντωσης** (normal modes), **ιδιοανύσματα** (eigenvectors) ή **ιδιομορφές** του συστήματος.
Το παραπάνω παράδειγμα που λύθηκε απευθείας με σχετικά απλούς αλγεβρικούς χειρισμούς γίνεται αμέσως περίπλοκο αν οι δυο μάζες έχουν διαφορετική τιμή ή αν προσθέσουμε άλλη μια μάζα στο σύστημα. Ένα τέτοιο πρόβλημα είναι χαρακτηριστικό πρόβλημα γραμμικής άλγεβρας. Για τη λύση του χρησιμοποιούνται πίνακες και ονομάζεται πρόβλημα εύρεσης ιδιοτιμών και ιδιοανυσμάτων.
Η εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων διαφόρων συστημάτων (κατασκευών, μηχανών, εξαρτημάτων, κτιρίων, κυκλωμάτων κλπ.) αποτελεί μεγάλο κεφάλαιο της μηχανικής. Δεν θέλουμε οι ιδιοσυχνότητες ενός συστήματος να είναι κοντά στις συχνότητες που προέρχονται από εξωτερικά αίτια (άνεμοι, σεισμοί, δονήσεις, κλπ.) του περιβάλλοντος στο οποίο βρίσκεται για να αποφεύγεται το φαινόμενο του συντονισμού το οποίο μπορεί να οδηγήσει σε καταστροφή του συστήματος.

Άσκηση
Να λυθεί το προηγούμενο πρόβλημα με πίνακες
Λύση
Γράφουμε τις προηγούμενες εξισώσεις, τους νόμους του Νεύτωνα, σε μορφή πίνακα 2x2:

$$\left.\begin{aligned} -kx_1 + k'(x_2 - x_1) &= ma_1 \\ -kx_2 - k'(x_2 - x_1) &= ma_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + (k+k')x_1 - k'x_2 &= 0 \\ m\ddot{x}_2 - k'x_1 + (k+k')x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow M\ddot{X} + KX = 0$$

Πίνακας αδράνειας : $M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, διαγώνιος

Πίνακας Στιβαρότητας : $K = \begin{pmatrix} k+k' & -k' \\ -k' & k+k' \end{pmatrix}$, συμμετρικός

Άγνωστο διάνυσμα (εξίσωση κίνησης): $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

Δοκιμαστική λύση : $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i(\omega t+\varphi)} = e^{i(\omega t+\varphi)} A$,

Παράγωγοι : $\ddot{X}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \dfrac{d^2}{dt^2}(e^{i(\omega t+\varphi)}) = -\omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i(\omega t+\varphi)} = -\omega^2 X(t)$

Η εξίσωση γίνεται
$M\ddot{X}(t) + KX(t) = 0 \Rightarrow e^{i(\omega t+\varphi)} KA = m\omega^2 e^{i(\omega t+\varphi)} A \Rightarrow KA = m\omega^2 A \quad (1)$
Το να βρεις διανύσματα στα οποία η δράση του πίνακα K έχει ως μόνο αποτέλεσμα να τα πολλαπλασιάζει με έναν αριθμό $m\omega^2$ λέγεται πρόβλημα **ιδιοτιμών** και **ιδιοανυσμάτων**

$$\left(K-\omega^2 M\right)A=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} k+k' - m\omega^2 & -k' \\ -k' & k+k' - m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (k+k' - m\omega^2)A_1 - k' A_2 \\ -k' A_1 + (k+k' - m\omega^2)A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1')$$

Το παραπάνω είναι ένα ομογενές 2x2 γραμμικό σύστημα εξισώσεων το οποίο είτε δεν έχει καμία λύση (οι δυο εξισώσεις είναι ανεξάρτητες και άρα δεν μπορούν να ικανοποιούνται ταυτόχρονα) είτε έχει άπειρες λύσεις (οι δύο εξισώσεις είναι ουσιαστικά ίδιες, η μια πολλαπλάσιο της άλλης, αρα για κάθε x_1 υπάρχει πάντα ένα κατάλληλο x_2 ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση). Η συνθήκη για να ισχύει το δεύτερο, να υπάρχουν λύσεις, είναι η ορίζουσα του συστήματος να είναι μηδέν.

$$\det(K-\omega^2 M)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} k+k'-m\omega^2 & -k' \\ -k' & k+k'-m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (k+k'-m\omega^2)^2 - k'^2 = 0$$

Αυτή είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση η λύση της οποίας μας δίνει τις ιδιοτιμές του συστήματος. Στην περίπτωση μας η λύση βρίσκεται πολύ εύκολα καθώς η δευτεροβάθμια είναι ήδη διαφορά τετραγώνων.

$$(k+k' - m\omega^2)^2 - k'^2 = 0 \Rightarrow \left\lfloor k+k' - m\omega^2 - k' \right\rfloor \left\lfloor k+k' - m\omega^2 + k' \right\rfloor = 0 \Rightarrow \left[k - m\omega^2 \right] \left\lfloor k+2k' - m\omega^2 \right\rfloor = 0$$

$$\begin{matrix} \omega_1^2 = \dfrac{k}{m} \\ \omega_2^2 = \dfrac{k+2k'}{m} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{k+2k'}{m}} \end{matrix}$$

Αυτές είναι οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος (ίδιες με πριν). Δηλαδή αν το ω της δοκιμαστικής λύσης έχει αυτές τις τιμές τότε η εξίσωση (1΄) και άρα και η (1) μπορεί να ικανοποιηθεί.

Αντικαθιστώντας στην (1) την κάθε ιδιοτιμή βρίσκουμε τα ιδιοανύσματα του συστήματος δηλαδή τις εξισώσεις κίνησης .

$$\begin{pmatrix} k+k' - m\dfrac{k}{m} & -k' \\ -k' & k+k' - m\dfrac{k}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i(\omega t+\varphi)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} k' & -k' \\ -k' & k' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k' A_1 - k' A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = A_2$$

Άρα ένα διάνυσμα που έχει ίσες συνιστώσες. Παίρνουμε αυτό που έχει μέτρο 1:

Πρώτο ιδιοάνυσμα : $X_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} k+k' - m\dfrac{k+2k'}{m} & -k' \\ -k' & k+k' - m\dfrac{k+2k'}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i(\omega t+\varphi)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -k' & -k' \\ -k' & -k' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k' A_1 + k' A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = -A_2$$

Άρα ένα διάνυσμα που έχει αντίθετες συνιστώσες. Παίρνουμε αυτό που έχει μέτρο 1:

Δεύτερο ιδιοάνυσμα : $X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

Παρατηρούμε ότι τα δύο διανύσματα $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$:

1) Είναι γραμμικώς ανεξάρτητα : $\forall\lambda \in R \Rightarrow X_1 \neq \lambda X_2$

2) Είναι κάθετα μεταξύ τους: $X_1 \cdot X_2 \equiv X_1^{\mathrm{T}} X_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[1\cdot 1 + 1\cdot(-1)\right] = 0$

Αυτό είναι ένα γενικό συμπέρασμα. Τα ιδιοανύσματα ενός πραγματικού συμμετρικού πίνακα αποτελούν μια ορθοκανονική βάση στο διανυσματικό χώρο των λύσεων του συστήματος. Κάθε λύση του συστήματος είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των ιδιοανυσμάτων του συστήματος.

Οπότε η γενική λύση είναι : $X(t) = aX_1 e^{i(\omega_1 t+\varphi_1)} + bX_2 e^{i(\omega_2 t+\varphi_2)} = \frac{a}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{i(\omega_1 t+\varphi_1)} + \frac{b}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{i(\omega_2 t+\varphi_2)}$

Επειδή ενδιαφερόμαστε για πραγματικές λύσεις μπορούμε να επιλέξουμε είτε το πραγματικό (Re) είτε το φανταστικό μέρος (Im) της παραπάνω έκφρασης. Επίσης καταλαβαίνουμε ότι η πάνω (1^{η}) συνιστώσα του διανύσματος είναι η εξίσωση κίνησης του σώματος 1 και η κάτω (2^{η}) του σώματος 2.

Έτσι έχουμε

$$x_1(t) = \mathrm{Im}\left[X(t)\right]_{\pi\acute{\alpha}\nu\omega} = \mathrm{Im}\left[aX_1 e^{i(\omega_1 t+\varphi_1)} + bX_2 e^{i(\omega_2 t+\varphi_2)}\right]_{\pi\acute{\alpha}\nu\omega} =$$

$$= \mathrm{Im}\left[\frac{a}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+i\sin(\omega_1 t+\varphi_1)\\ \cos(\omega_1 t+\varphi_1)+i\sin(\omega_1 t+\varphi_1)\end{pmatrix} + \frac{b}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos(\omega_2 t+\varphi_2)+i\sin(\omega_2 t+\varphi_2)\\ -\cos(\omega_2 t+\varphi_2)-i\sin(\omega_2 t+\varphi_2)\end{pmatrix}\right]_{\pi\acute{\alpha}\nu\omega} =$$

$$= \mathrm{Im}\left[\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+i\sin(\omega_1 t+\varphi_1)\right) + \frac{b}{\sqrt{2}}\left(\cos(\omega_2 t+\varphi_2)+i\sin(\omega_2 t+\varphi_2)\right)\right] =$$

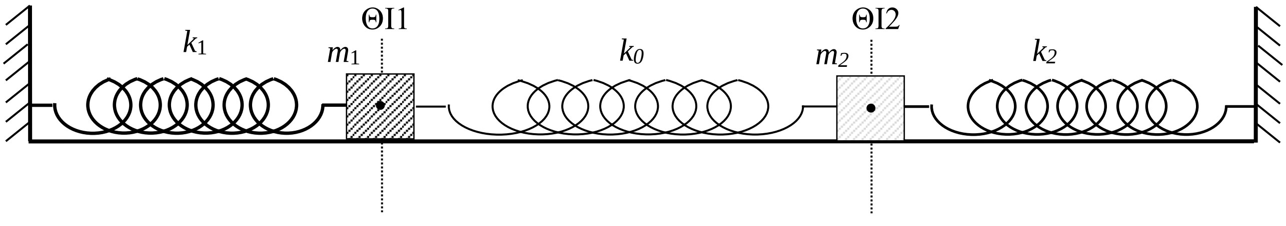
$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\sin(\omega_1 t+\varphi_1) + \frac{b}{\sqrt{2}}\sin(\omega_2 t+\varphi_2)$$

$$x_2(t) = \mathrm{Im}\left[X(t)\right]_2 = \mathrm{Im}\left[aX_1 e^{i(\omega_1 t+\varphi_1)} + bX_2 e^{i(\omega_2 t+\varphi_2)}\right]_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin(\omega_1 t+\varphi_1) - \frac{b}{\sqrt{2}}\sin(\omega_2 t+\varphi_2)$$

Παίρνουμε πάλι τις ίδιες εκφράσεις με πριν.

Άσκηση

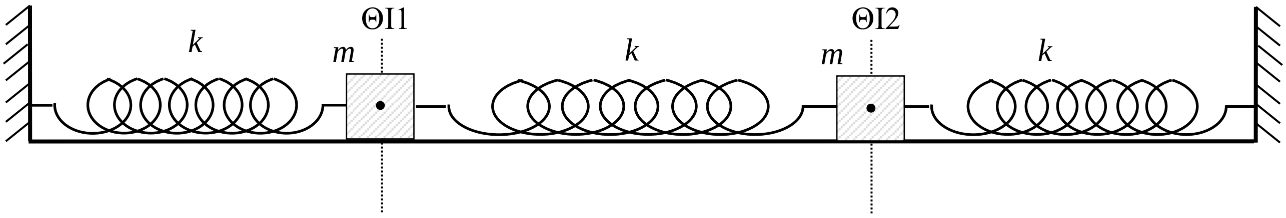
Βρείτε τις ιδιοτιμές του παρακάτω συστήματος. Ελέγξτε ότι παίρνετε την απάντηση του λυμένου παραδείγματος της θεωρίας για $m_1 = m_2$ και $k_1 = k_2$.



Απάντηση $\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{k_1+k_0}{m_1}+\frac{k_2+k_0}{m_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1+k_0}{m_1}-\frac{k_2+k_0}{m_2}\right)^2+\frac{4k_0^2}{m_1 m_2}}\right]$

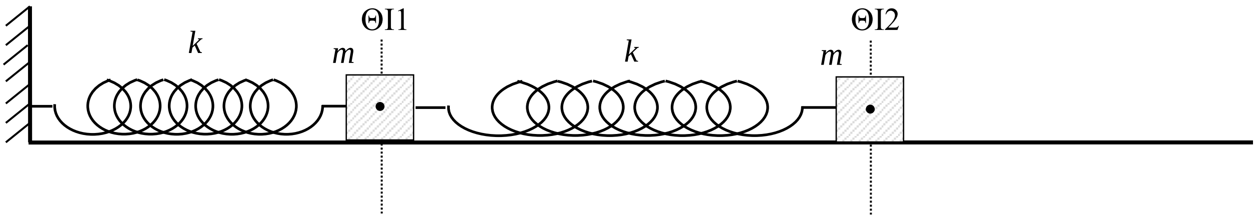
Άσκηση

Βρείτε τις ιδιοτιμές του παρακάτω συστήματος.



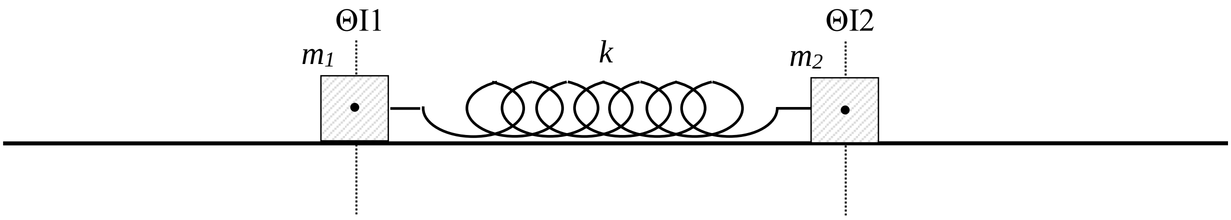
Άσκηση

Βρείτε τις ιδιοτιμές του παρακάτω συστήματος.



Άσκηση

Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα του παρακάτω συστήματος.



Απάντηση $\omega_1 = 0,\quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{\mu}},$ όπου $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$, $\quad X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\begin{pmatrix}1\\-r\end{pmatrix}$ όπου $r = \frac{m_1}{m_2}$