ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ
(ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ = ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ)

Για την περιγραφή της κίνησης ενός σώματος μας ενδιαφέρει να ξέρουμε **πού** είναι το κινητό **πότε**. Δηλαδή να ξέρουμε τη θέση του x, κάθε χρονική στιγμή t. Η συνάρτηση $x(t)$ της χρονικής εξάρτησης της θέσης ονομάζεται εξίσωση κίνησης:

Εξίσωση κίνησης : $x(t)$

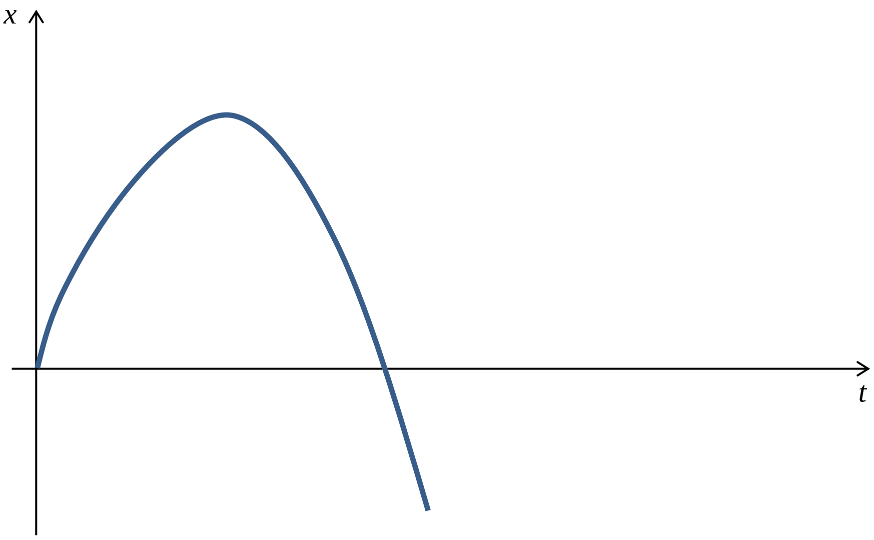
Για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε:
1) σημείο αναφοράς **O** (origin) στο χώρο (η κίνηση είναι σχετική),
2) έναν βαθμονομημένο άξονα (μετροταινία) για μονοδιάστατη κίνηση ή ένα σύστημα αξόνων για κίνηση σε περισσότερες διαστάσεις (2 ή 3),
3) χρονόμετρο (για την ακρίβεια, όταν εμπλέκονται ταχύτητες συγκρίσιμες με την ταχύτητα του φωτός χρειαζόμαστε ένα χρονόμετρο σε κάθε σημείο του χώρου).

Την εξίσωση κίνησης :
την βρίσκουμε με παρατήρηση αφού έχει πραγματοποιηθεί η κίνηση (Γαλιλαίος: πλάγια βολή, Kepler: κίνηση πλανητών)
την προβλέπουμε με τους νόμους κίνησης του Νεύτωνα, εφόσον ξέρουμε πως αλληλεπιδρά το σώμα με το περιβάλλον του (δυνάμεις)

Πίνακας τιμών

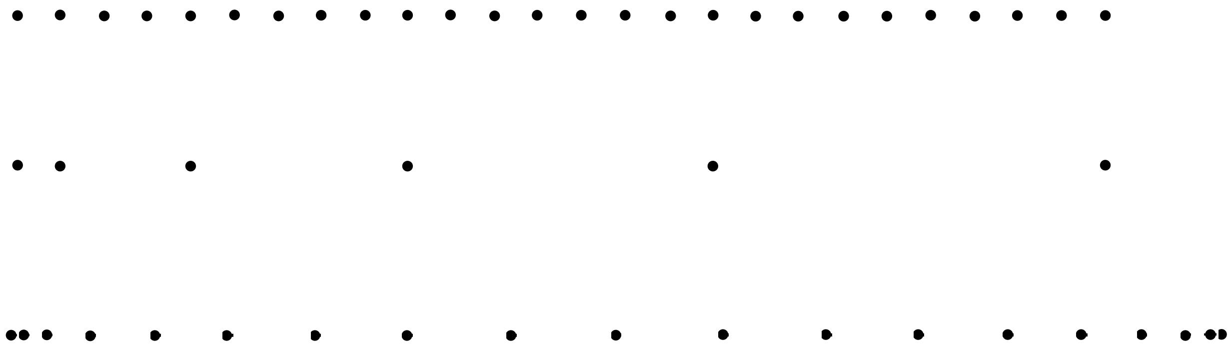
t [s]	x [m]
0	2,0
1	77,1
2	142,4
3	197,9
4	243,6
5	279,5
6	305,6
7	321,9
8	328,4
9	325,1
10	312,0
11	289,1
12	256,4
13	213,9
14	161,6
15	99,5
16	27,6
17	-54,1
18	-145,6
19	-246,9
20	-358,0

Γραφικές Παραστάσεις

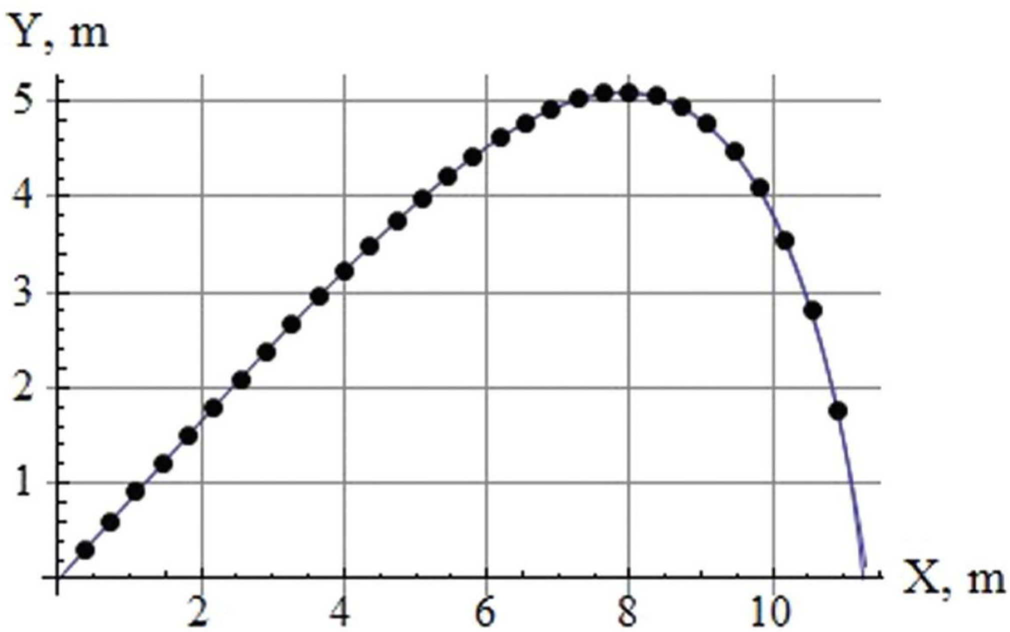


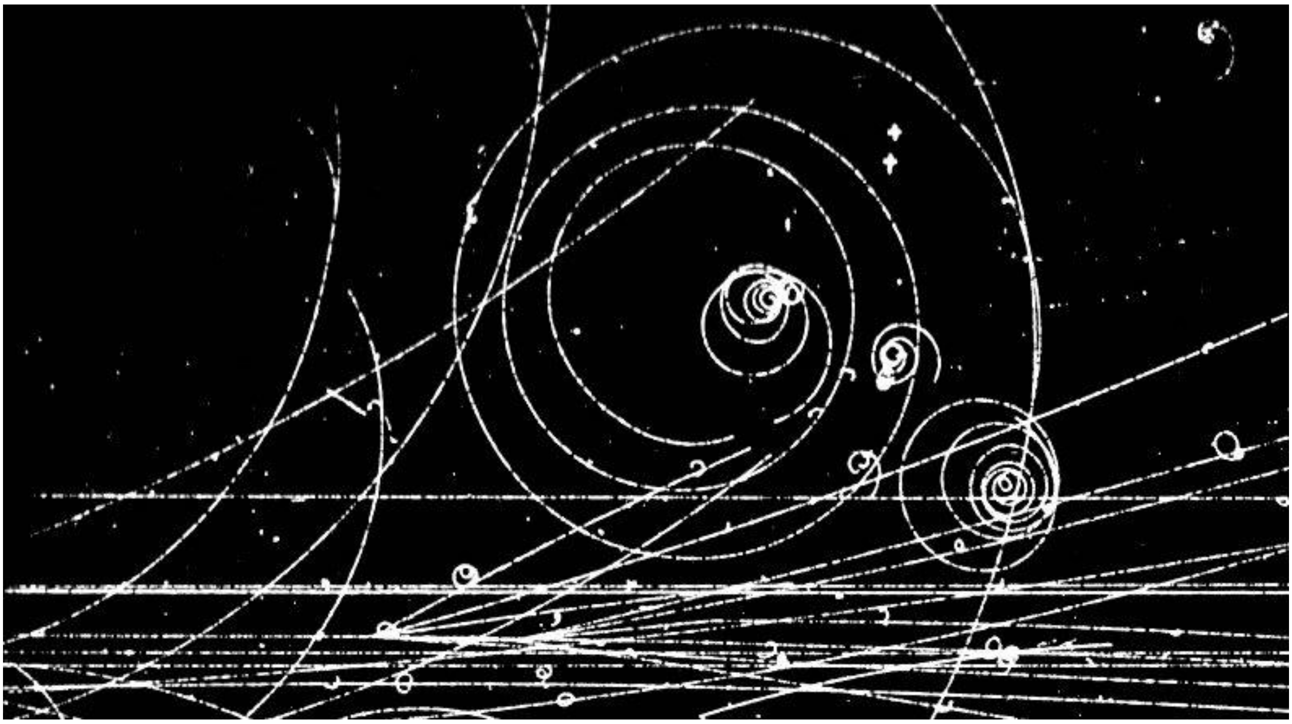
Στιγμιότυπα

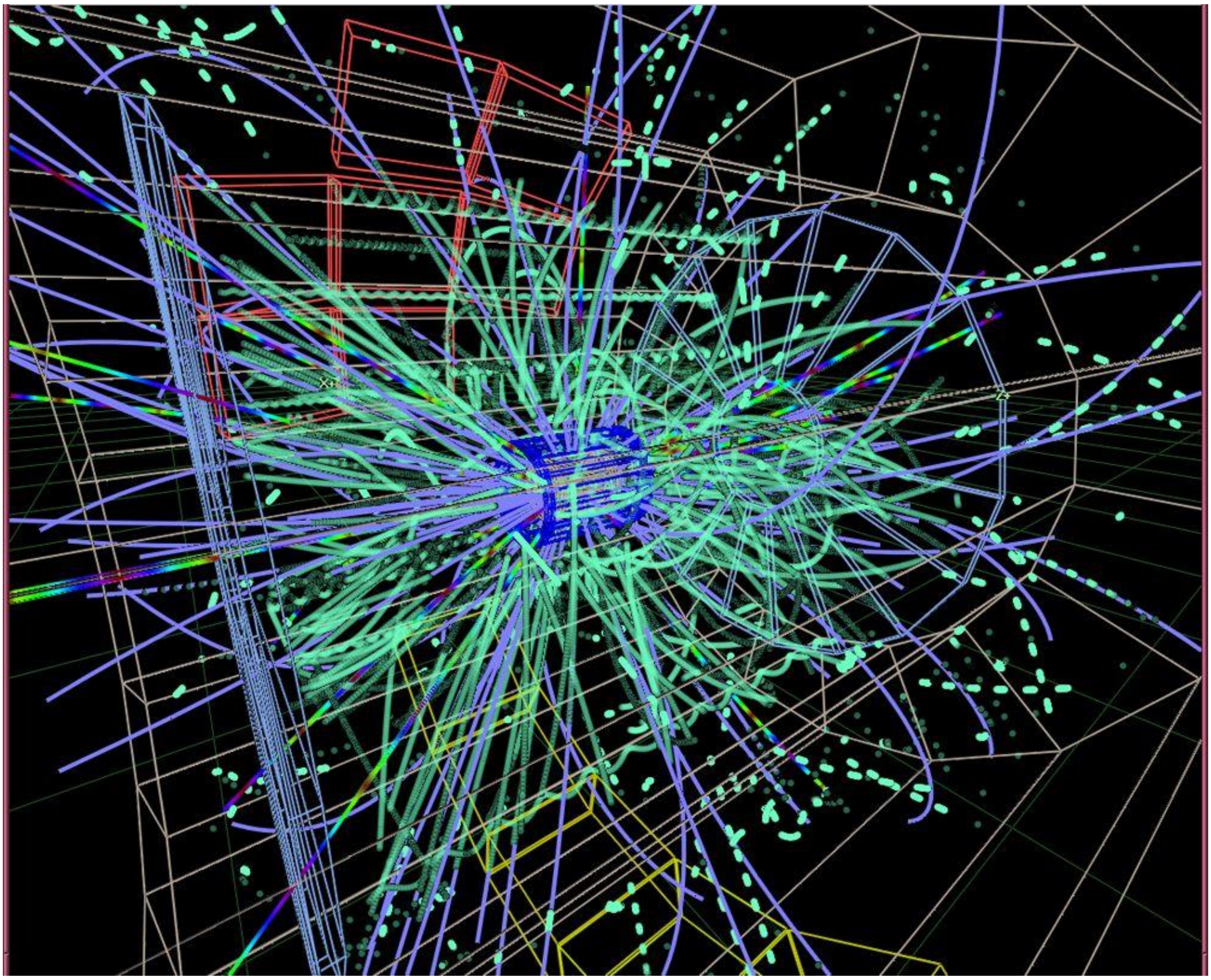
1-D



2-D







Ορισμοί κινηματικών μεγεθών

Χρονική στιγμή, *t*, [*t*]=s : η ένδειξη του χρονόμετρου

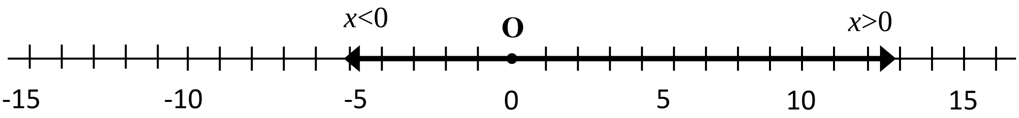
Χρονική διάρκεια ή χρονικό διάστημα *Δt* : η διαφορά δύο χρονικών στιγμών 1 και 2 (ή αρχικής *i*: initial και τελικής *f*:final), $\Delta t = t_2 - t_1$ ή $\Delta t = t_f - t_i$

Τροχιά : Το σύνολο των σημείων που διατρέχει ένα σώμα κατά την κίνησή του

Θέση, *x*, [*x*]=m: Η ένδειξη της μετροταινίας στο σημείο που βρίσκεται το κινητό.
Η θέση έχει και μέτρο και κατεύθυνση, ως προς το σημείο αναφοράς, γι' αυτό είναι διάνυσμα. Η κίνηση είναι πάντα σχετική, εξαρτάται δηλαδή από το σημείο αναφοράς. Το διάνυσμα θέσης ενός υλικού σημείου 1 είναι ουσιαστικά :

$$x_1 \equiv x_{1/\mathrm{O}}$$

που σημαίνει η σχετική θέση του σημείου 1 ως προς το σημείο O που θεωρούμε σημείο αναφοράς (βελάκι με αρχή το σημείο O και τέλος το σημείο1).
Σε μονοδιάστατα προβλήματα η θέση θα συμβολίζεται απλώς ως *x* το οποίο μπορεί να είναι θετικό (δεξιά) ή αρνητικό (αριστερά).



Η σχετική θέση του κινητού ως προς ένα άλλο σημείο A διάφορο του σημείου αναφοράς O θα δίνεται από τον τύπο

$$x_{1/\mathrm{A}} = x_{\mathrm{O/A}} + x_{1/\mathrm{O}} \Rightarrow x_{1/\mathrm{A}} = x_{1/\mathrm{O}} - x_{\mathrm{A/O}}$$

Υπενθυμίζουμε : $x_{P/Q} = \overrightarrow{QP}$ = το διάνυσμα (βελάκι) με αρχή το σημείο Q και πέρας το σημείο P. Προφανώς : $x_{P/Q} = -x_{Q/P}$

Μετατόπιση, *Δx* : η διαφορά δύο θέσεων 1 και 2 (ή αρχικής *i*: initial και τελικής *f*:final), διάνυσμα, $\Delta x = x_2 - x_1$ ή $\Delta x = x_f - x_i$
Η μετατόπιση, ως διαφορά διανυσμάτων, είναι επίσης διάνυσμα και μπορεί να είναι αρνητική, θετική ή μηδέν.

Διάστημα *Δs* : το μήκος της διαδρομής ή η απόσταση που διανύει το κινητό μεταξύ δύο χρονικών στιγμών. Είναι μονόμετρο ή βαθμωτό μέγεθος. Το διάστημα είναι πάντα θετικό όταν πραγματοποιείται κίνηση ή και μηδέν για ακινησία: $\Delta s \geq 0$
Χρησιμοποιούμε το σύμβολο της διαφοράς *Δs* και όχι σκέτο *s* για λόγους ομοιογένειας του συμβολισμού με τον ορισμό της μετατόπισης. Δηλώνουμε έτσι ότι θεωρούμε το καλυπτόμενο διάστημα μεταξύ δύο χρονικών στιγμών ως μέρος του συνολικού διαστήματος που έχει καλύψει το κινητό από την έναρξη της ύπαρξής του. Ισοδύναμα μπορούμε να φανταστούμε ότι το κινητό διαθέτει έναν μετρητή συνολικής διανυθείσης απόστασης (όπως τα αυτοκίνητα έχουν χιλιομετρικό μετρητή των συνολικών χιλιομέτρων που διένυσαν από την πρώτη μέρα της κυκλοφορίας τους) και το διάστημα είναι η διαφορά των δύο ενδείξεων αυτού του μετρητή $\Delta s = s_2 - s_1$.

Μόνο σε ευθύγραμμες κινήσεις όπου δεν αναστρέφεται η κατεύθυνση κίνησης το διάστημα είναι ίσο με την μετατόπιση. Σε καμπυλόγραμμες κινήσεις ή ευθύγραμμες με αναστροφή κατεύθυνσης το διάστημα είναι πάντα μεγαλύτερο από τη μετατόπιση. Η μετατόπιση μπορεί να είναι μηδέν χωρίς το διάστημα να είναι μηδέν (κλειστή διαδρομή). Το μέτρο της μετατόπισης τείνει να εξισωθεί με το διάστημα όταν η χρονική διάρκεια τείνει στο μηδέν, δηλαδή για πολύ μικρά χρονικά διαστήματα, για πολύ κοντινές διαδοχικές στιγμές.

$\Delta s = |\Delta x|$ ευθύγραμμη κίνηση χωρίς αναστροφή κατεύθυνσης

$\Delta s > |\Delta x|$ καμπυλόγραμμη κίνηση ή ευθύγραμμη με αναστροφή κατεύθυνσης

$$\lim_{\Delta t \to 0} |\Delta x| = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta s \text{ ή } |dx| = ds$$

Με το χρονικό ρυθμό μεταβολής της μετατόπισης ή και του διαστήματος ποσοτικοποιούμε την έννοια της γρηγοράδας με την οποία εκτελείται μια κίνηση

Μέση ταχύτητα (average velocity), $\bar{\upsilon}_x$, $[\bar{\upsilon}_x] = \text{m/s}$: $\bar{\upsilon}_x = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

Μέση αριθμητική ταχύτητα (average speed) $\bar{v}$, $[\bar{v}] = \text{m/s}$: $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

Τα όρια στα οποία τείνουν οι παραπάνω εκφράσεις όταν οι διαδοχικές χρονικές στιγμές είναι πολύ κοντινές, δηλαδή σχεδόν συμπίπτουν, αποτελούν τις στιγμιαίες τιμές των αντίστοιχων ταχυτήτων. Όταν στο εξής θα λέμε ταχύτητα θα εννοούμε στιγμιαία ταχύτητα.

Ταχύτητα (velocity), υ_x = μετατόπιση προς χρονικό διάστημα όταν $\Delta t \to 0$

= ρυθμός μεταβολής της θέσης x ως προς το χρόνο

$$\upsilon_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \equiv \frac{dx}{dt}$$

Μαθηματικώς αυτό ισοδυναμεί με το να βρούμε την χρονική παράγωγο της $x(t)$. Γεωμετρικά η παράγωγος (ταχύτητα) κάποια συγκεκριμένη στιγμή είναι η κλίση της καμπύλης $x(t)$ στη γραφική αναπαράσταση x vs. t στο σημείο που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη στιγμή t.

Η παραπάνω ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος. Η αντίστοιχη στιγμιαία αριθμητική ταχύτητα, που είναι μονόμετρο μέγεθος, ορίζεται ως

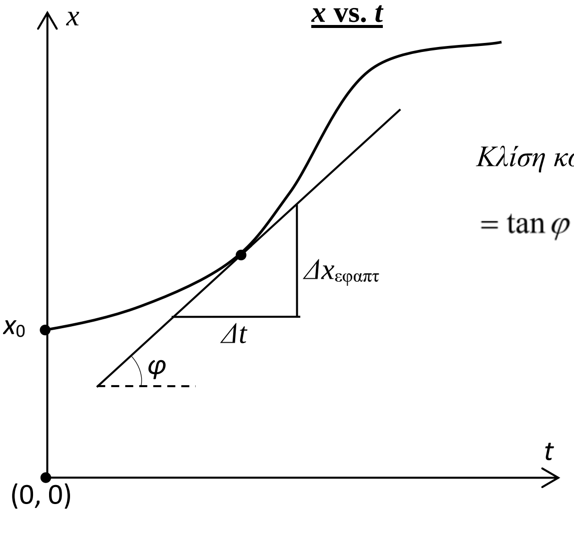
Αριθμητική ταχύτητα (speed) : $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{ds}{dt}$

και είναι η έννοια της ταχύτητας που χρησιμοποιούμε στην καθημερινότητα, είναι η ταχύτητα που δείχνει το ταχύμετρο (κοντέρ) του αυτοκίνητου.

Επειδή $\Delta s \to |\Delta x|$ όταν $\Delta t \to 0$ ή $|dx| = ds$

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| = \frac{ds}{dt} \Rightarrow |\upsilon| = v$$

το μέτρο της ταχύτητας (velocity magnitude) είναι ίσο με την αριθμητική ταχύτητα (speed).



Κλίση καμπύλης =κλίση εφαπτόμενης στην καμπύλη=

$$= \tan\varphi = \frac{\Delta x_{\varepsilon\varphi\alpha\pi\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \equiv \upsilon_x$$

Στα ελληνικά, στη φυσική, δεν χρησιμοποιείται μονολεκτικός όρος που να αντιστοιχεί στη λέξη speed, π.χ. κάποιο συνώνυμο της ταχύτητας όπως γοργότητα, γρηγοράδα, γρηγοροσύνη, σβελτάδα, βιασύνη, ευκινησία, σπουδή, ρυθμός. Έτσι χρειάζεται προσοχή στη χρήση της λέξης ταχύτητα καθώς τις περισσότερες φορές τη χρησιμοποιούμε ενώ εννοούμε speed. Σε αυτές τις περιπτώσεις πρέπει να χρησιμοποιούμε τους όρους μέτρο της ταχύτητας ή αριθμητική ταχύτητα για να μην καταλήγουμε σε λανθασμένες από φυσική άποψη προτάσεις. Αυτό συμβαίνει επειδή ο επιθετικός προσδιορισμός «αριθμητική» ή η διευκρίνηση «μέτρο» εύκολα παραλείπονται. Π.χ. η συνήθης διατύπωση του θεμελιώδους αξιώματος της σχετικότητας «η ταχύτητα του φωτός είναι ανεξάρτητη της κίνησης της πηγής» είναι λάθος. Η σωστή διατύπωση είναι «το μέτρο της ταχύτητας του φωτός είναι ανεξάρτητο της κίνησης της πηγής». Η ταχύτητα του φωτός ως διάνυσμα εξαρτάται από την κίνηση της πηγής. Στα αγγλικά υπάρχει σε χρήση και τρίτη λατινογενής λέξη για την ταχύτητα, η celerity από όπου προέρχεται το σύμβολο της ταχύτητας του φωτός *c*.

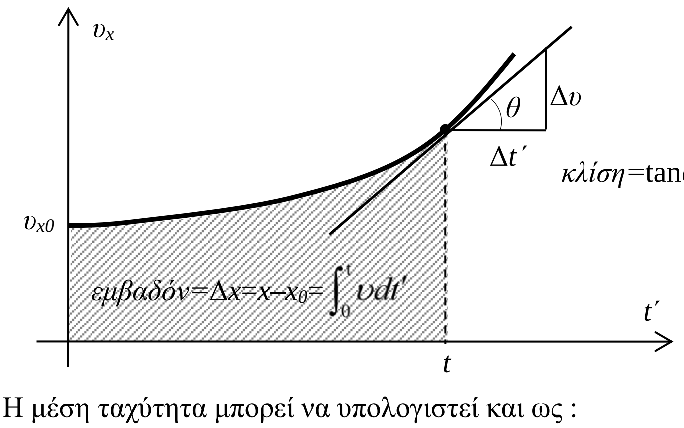
Η αντίστροφη μαθηματική διαδικασία της παραγώγισης είναι η ολοκλήρωση. Με την ολοκλήρωση βρίσκουμε μια συνάρτηση $x(t)$ που έχει παράγωγο τη γνωστή συνάρτηση $\upsilon_x(t)$. Έτσι αν γνωρίζουμε την ταχύτητα μπορούμε να βρούμε τη μετατόπιση και άρα τη θέση ολοκληρώνοντας:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \upsilon_x dt \Rightarrow \int dx = \int \upsilon_x dt \Rightarrow \Delta x = \int \upsilon_x dt$$

Αρχικές συνθήκες : Η θέση x_0 και η ταχύτητα υ_0 του κινητού την αρχική χρονική στιγμή t_0 που ξεκινήσαμε να το παρατηρούμε και να καταγράφουμε την κίνησή του.
Συνήθως μπορούμε να θέσουμε $t_0=0$ (εκτός αν έχουμε δύο κινητά που ξεκινούν την κίνησή τους σε διαφορετικές στιγμές) που σημαίνει ότι η ξεκινάμε το χρονόμετρο με την έναρξη της παρατήρησης.
Κάθε ολοκλήρωση περιλαμβάνει μια αυθαίρετη σταθερά C επειδή αν η συνάρτηση $x(t)$ έχει παράγωγο $\upsilon_x(t)$ τότε και η συνάρτηση $x(t)+C$ έχει επίσης παράγωγο $\upsilon_x(t)$. Έτσι για να βρούμε την ακριβή θέση σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή χρειάζεται να γνωρίζουμε τις αρχικές συνθήκες που δείχνουν που βρισκόταν, πόσο γρήγορα και πως τα που πήγαινε το σώμα όταν αρχίσαμε να το παρατηρούμε τη χρονική στιγμή $t= t_0 =0$.
Το ολοκλήρωμα γίνεται ορισμένο και παίρνουμε

$$\int_{x_0}^{x} dx' = \int_0^t \upsilon_x dt' \Rightarrow \Delta x = x - x_0 = \int_0^t \upsilon_x dt'$$

Γεωμετρικά το ορισμένο ολοκλήρωμα της υ_x είναι το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $\upsilon_x(t)$. Δηλαδή στο διάγραμμα υ_x vs. t' το εμβαδό κάτω από την καμπύλη $\upsilon_x(t')$ από 0 ως την τιμή t είναι η αντίστοιχη μετατόπιση του κινητού.



κλίση$=\tan\theta = \dfrac{\Delta\upsilon_{\varepsilon\varphi\alpha\pi\tau}}{\Delta t'} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\upsilon_x}{\Delta t} = \left.\dfrac{d\upsilon_x}{dt'}\right|_{t'=t} = a_x$

Η μέση ταχύτητα μπορεί να υπολογιστεί και ως :

$$\bar{\upsilon} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} \upsilon dt \qquad \text{για τυχαίο χρονικό διάστημα}$$

ή $$\bar{\upsilon}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \upsilon dt' \qquad \text{για το διάστημα από 0 ως } t$$

που συμφωνεί με τον κλασσικό ορισμό της μέσης τιμής ενός μεγέθους από τη στατιστική. Δηλαδή «αθροίζουμε» όλες τις στιγμιαίες ταχύτητες, μια για κάθε ένα από τα στοιχειώδη ίσα χρονικά διαστήματα Δt και διαιρούμε με το «πλήθος» τους $N = t/\Delta t$

$$\bar{\upsilon} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N} \upsilon_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \upsilon_i}{t/\Delta t} = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{N} \upsilon_i \Delta t \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \upsilon dt'$$

Το επόμενο κινηματικό μέγεθος που χρησιμοποιείται είναι η επιτάχυνση (acceleration). Ως επιτάχυνση ορίζεται ο χρονικός ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας (παράγωγος ως προς το χρόνο) :

Επιτάχυνση , a = μεταβολή ταχύτητας προς χρονικό διάστημα όταν $\Delta t \to 0$
= ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ως προς το χρόνο

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon_x}{\Delta t} \equiv \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) \equiv \frac{d^2 x}{dt^2}$$

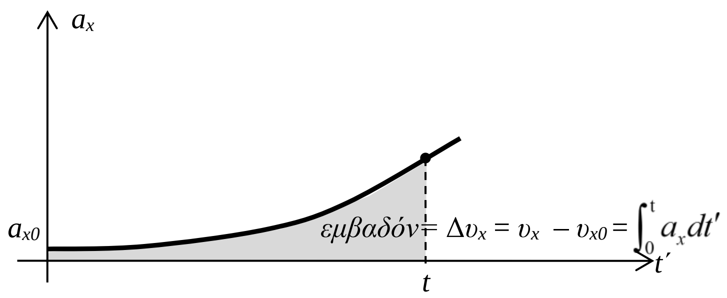
Την ταχύτητα δεν την «καταλαβαίνουμε». Δηλαδή αν καθόμαστε σε ένα πολύ ήσυχο βαγόνι τρένου που κυλά ευθύγραμμα, πάνω σε πολύ ομαλές σιδηροτροχιές και με σταθερή ταχύτητα, όσο μεγάλη και να είναι αυτή, δεν υπάρχει περίπτωση να καταλάβουμε ότι κινούμαστε παρά μόνο αν κοιτάξουμε έξω από το παράθυρο.
Αυτό που καταλαβαίνουμε είναι μόνο την μεταβολή της ταχύτητας δηλαδή είτε :

i) την αύξησή της (γκάζωμα), είτε
ii) την μείωσή της (φρενάρισμα), είτε
iii) την αλλαγή της διεύθυνσής της (στροφή σε καμπυλόγραμμες κινήσεις).

Σε αυτές τις περιπτώσεις θα αισθανθούμε ζάλισμα, ανακάτεμα στο στομάχι και το κυριότερο θα πρέπει να καταβάλουμε προσπάθεια για να παραμείνουμε στο κάθισμά μας σε ίσια στάση. Είτε θα γείρουμε προς τα πίσω και θα νιώσουμε την πλάτη του καθίσματος να μας σπρώχνει είτε θα πέσουμε μπροστά είτε θα κρατηθούμε από τα χερούλια για να μη φύγουμε δεξιά ή αριστερά.

Γεωμετρικά η επιτάχυνση είναι η κλίση της καμπύλης της ταχύτητας $\upsilon_x(t)$ ως προς το χρόνο στο διάγραμμα υ_x vs. t (παράγωγος). Άρα η ταχύτητα θα είναι το εμβαδόν της καμπύλης της επιτάχυνσης $a(t)$, ως προς το χρόνο στο διάγραμμα a_x vs. t (ολοκλήρωμα).

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} \Rightarrow d\upsilon_x = a_x dt \Rightarrow \int_{\upsilon_{x0}}^{\upsilon_x} d\upsilon_x' = \int_0^t a_x dt' \Rightarrow \Delta\upsilon_x = \upsilon_x - \upsilon_{x0} = \int_0^t a_x dt'$$



Ρυθμός μεταβολής της επιτάχυνσης (jerk, τίναγμα)

Jerk: $j_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta a_x}{\Delta t} \equiv \frac{da_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right) \equiv \frac{d^3 x}{dt^3}$

Τις αλλαγές της επιτάχυνσης τις νιώθουμε πολύ έντονα. Θυμηθείτε πως αισθάνεστε όταν μπαίνετε απότομα από ευθεία κίνηση σε κυκλική στροφή στα τρενάκια του λουνα παρκ.

Μπορούμε να συνεχίσουμε να ορίζουμε και ανώτερες παραγώγους της θέσης

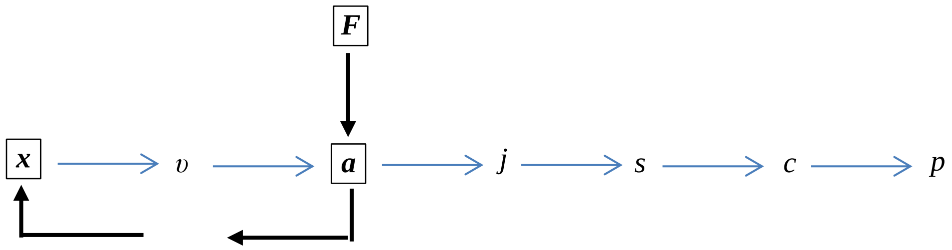
Snap: $s_x = \frac{d^4 x}{dt^4}$

Crackle: $c_x = \frac{d^5 x}{dt^5}$

Pop: $p_x = \frac{d^6 x}{dt^6}$

Προσδιορισμός της εξίσωσης κίνησης από τον νόμο κίνησης του Νεύτωνα

Αν μας ενδιαφέρει η εύρεση της εξίσωσης κίνησης, δεν χρειάζεται να ορίσουμε περαιτέρω κινηματικά μεγέθη πέραν της επιτάχυνσης επειδή από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής του Νεύτωνα, είναι η επιτάχυνση αυτή που προσδιορίζεται από τις αλληλεπιδράσεις του σώματος (δυνάμεις) με το περιβάλλον του.



Η επιτάχυνση είναι ανάλογη της συνολικής δύναμης που δέχεται το σώμα και άρα είναι και στην κατεύθυνση της συνολικής ή συνισταμένης δύναμης:

$$a \propto F_{net}$$

για την ακρίβεια :

$$a = \frac{F_{net}}{m}$$

όπου *m* στην παραπάνω εξίσωση είναι η μάζα του κινητού, το μέγεθος που δηλώνει το βαθμό απόκρισης του κινητού σε αλλαγές στην κίνησή του, την αδράνεια του, και γι' αυτό λέγεται αδρανειακή μάζα.
Άρα, εφόσον προσδιορίσουμε τη συνισταμένη δύναμη που δρα στο σώμα, υπολογίζουμε από αυτήν την επιτάχυνσή του. Στη συνέχεια με δύο ολοκληρώσεις ως προς τον χρόνο προσδιορίζουμε την ταχύτητα και την εξίσωση της κίνησης (θέση). Οι σταθερές των ολοκληρώσεων ρυθμίζονται από τις αρχικές συνθήκες

$$\boxed{a_x = \frac{F_{net\ x}}{m}}$$

$$a_x(t) = \frac{d\upsilon_x(t)}{dt} \Rightarrow d\upsilon_x(t) = a_x(t)dt \Rightarrow \int_{\upsilon_{x0}}^{\upsilon(t)} d\upsilon'_x = \int_0^t a_x(t')dt' \Rightarrow \Delta\upsilon(t) = \int_0^t a_x(t')dt' \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon_x(t) = \upsilon_{x0} + \int_0^t a_x(t')dt'}$$

$$\upsilon_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow dx(t) = \upsilon_x(t)dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx' = \int_0^t \upsilon_x(t')dt' \Rightarrow \Delta x(t) = \int_0^t \upsilon_x(t')dt' \Rightarrow$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \upsilon_x(t')dt' == x_0 + \int_0^t \upsilon_{0x}dt' + \int_0^t\left(\int_0^{t'} a_x dt''\right)dt' = x_0 + \upsilon_{0x}\int_0^t dt' + \int_0^t\left(\int_0^{t'} a_x dt''\right)dt' \Rightarrow$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + \upsilon_{0x}t + \int_0^t\left(\int_0^{t'} a_x dt''\right)dt'}$$

Παραδείγματα ευθύγραμμων κινήσεων

(παραλείπουμε προσωρινά τον δείκτη *x* για απλότητα στις εκφράσεις)

1. Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση $F_{net} = 0$

Επιτάχυνση : $a(t) = \dfrac{F_{net}}{m} \Rightarrow \boxed{a(t) = 0}$

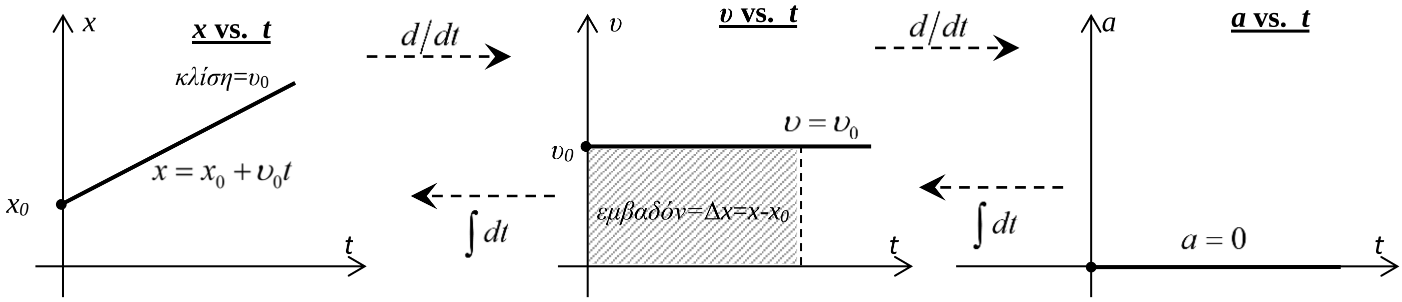
Ταχύτητα : $\upsilon(t) = \upsilon_0 + \int_0^t 0 \cdot dt' \Rightarrow \boxed{\upsilon(t) = \upsilon_0 = \text{σταθερά}}$

Θέση (τροχιά): $\upsilon(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \Rightarrow dx(t) = \upsilon_0 dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx' = \upsilon_0 \int_{t_0}^{t} dt' \Rightarrow$

$$\boxed{\Delta x(t) = \upsilon_0 \Delta t} \Rightarrow$$

$$x(t) = x_0 + \upsilon_{0x}\Delta t \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 + \upsilon_0 t}$$

Για αρχικές συνθήκες $x_0 > 0, \quad \upsilon_0 > 0$ οι γραφικές παραστάσεις είναι :



Κάθε διάγραμμα είναι η κλίση (παράγωγος) του διαγράμματος αριστερά του και το εμβαδό (ολοκλήρωμα) του διαγράμματος δεξιά του.

2. Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση $F_{net} = \text{σταθερά}$

Επιτάχυνση : $a(t) = \dfrac{F_{net}}{m} \Rightarrow \boxed{a(t) = a = \text{σταθερά}}$

(1) Ταχύτητα : $\upsilon(t) = \upsilon_0 + \int_0^t a dt' \Rightarrow \boxed{\upsilon(t) = \upsilon_0 + at}$

(2) Θέση (τροχιά): $x(t) = x_0 + \int_0^t \upsilon(t')dt' == x_0 + \int_0^t \upsilon_0 dt' + \int_0^t at'dt' \Rightarrow$

$$\boxed{x(t) = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$

(3) Σχέση ταχύτητας-θέσης: $\boxed{\upsilon^2 - \upsilon_0^2 = 2a(x - x_0)}$

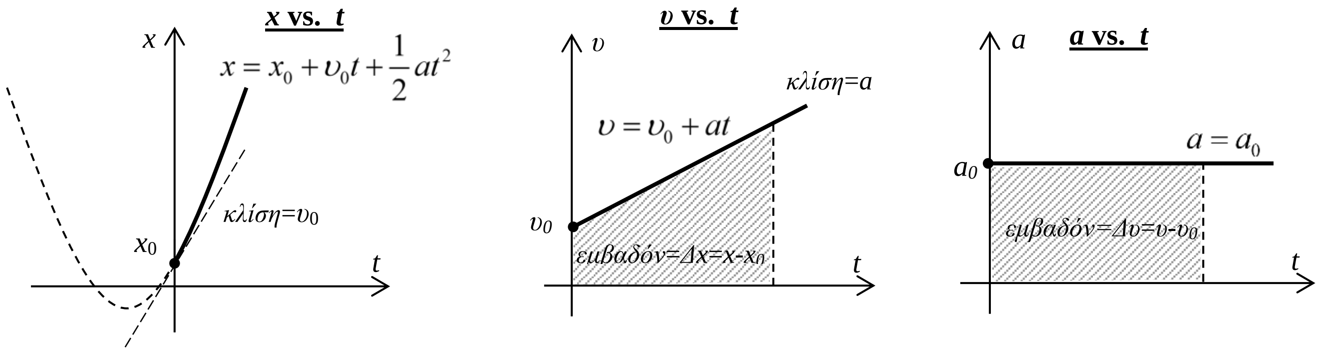
(4) Μέση ταχύτητα: $\bar{\upsilon} = \upsilon_{MO} \Rightarrow \boxed{\dfrac{x - x_0}{t} = \dfrac{\upsilon_0 + \upsilon}{2}}$

Η τελευταία σχέση ισχύει επειδή η ταχύτητα είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου. Η μέση ταχύτητα είναι ίση με το μέσο όρο των ταχυτήτων.

Επίσης ισχύει : (5) $\boxed{\bar{\upsilon} = \upsilon_0 + \dfrac{1}{2}at}$

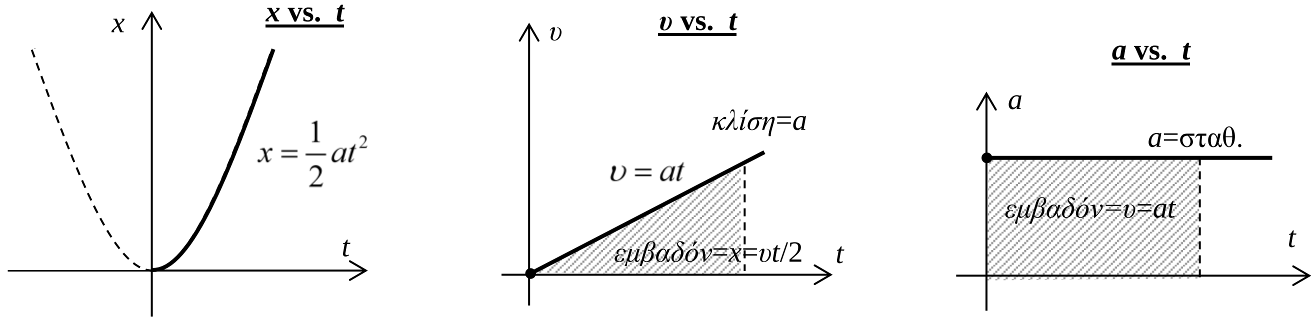
Άσκηση : Αποδείξτε τις σχέσεις (3), (4), και (5) χρησιμοποιώντας τις (1) και (2)

Για αρχικές συνθήκες $x_0 > 0,\quad \upsilon_0 > 0$ και *a*>0 οι γραφικές παραστάσεις είναι :



Η διακεκομμένη συνέχεια της καμπύλης *x*(*t*) δείχνει τις θέσεις του κινητού για *t*<0 πριν αρχίσουμε να το παρατηρούμε. Επειδή τέμνει τον άξονα του χρόνου, δηλαδή η εξίσωση *x*(*t*)=0 έχει δύο πραγματικές λύσεις, για τη συγκεκριμένη καμπύλη ισχύει επίσης $\upsilon_0^2 > 2ax_0$.

Για αρχικές συνθήκες $x_0 = 0,\quad \upsilon_0 = 0$ και *a*>0 οι γραφικές παραστάσεις είναι :



Φρενάρισμα: Στην περίπτωση επιβράδυνσης θέτουμε $a = -|a|$ και παρατηρούμε ότι το σώμα σταματάει έπειτα από χρόνο

$$t_{stop} = \frac{\upsilon_0}{|a|} \qquad \text{(από τη συνθήκη } \upsilon = 0\text{)}$$

αφού έχει διανύσει διάστημα

$$s_{stop} = \frac{\upsilon_0^2}{2|a|} \qquad \text{(από τη συνθήκη } \upsilon = 0 \text{ ή } s_{stop} \equiv x(t = t_{stop}) - x_0\text{)}$$

Άσκηση

Για να σταματήσετε με φρενάρισμα όταν το όχημά σας κινείται με ταχύτητα 20 km/h χρειάζεστε απόσταση 8 m. Αν η ταχύτητά σας ήταν 80 km/h θα χρειαζόσασταν

Α) 16 m Β) 32 m Γ) 64 m Δ) 128 m

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{\upsilon_{02}^2 / 2|a|}{\upsilon_{01}^2 / 2|a|} = \frac{80^2}{20^2} = 4^2 \Rightarrow s_2 = 16 s_1 = 16 \cdot 8 = 128 \text{ m}$$

Ελεύθερη πτώση

Ο Γαλιλαίος ανακάλυψε ότι η ελεύθερη πτώση, αγνοώντας την αντίσταση του αέρα, είναι ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση. Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι ίσο με *g*=9,80 m/s². Για πτώση από ηρεμία ισχύουν οι εξισώσεις:

$$a(t) = g = \text{σταθερά}, \quad \upsilon(t) = gt, \qquad y(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

Η ταχύτητα του κινητού που έχει πέσει ύψος h είναι : $\upsilon = \sqrt{2gh}$

Ο χρόνος πτώσης από ύψος h είναι : $t_{\pi\tau} = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

Άσκηση

Σώμα που εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος h από το έδαφος διανύει στο τελευταίο δευτερόλεπτο της κίνησής του πριν φτάσει στο έδαφος διάστημα ίσο με $3h/4$.
Πόσο χρόνο διήρκησε η πτώση ;
Από τι ύψος h έπεσε το σώμα ;

Έστω ότι η πτώση διαρκεί χρόνο t. Τότε $h = \dfrac{1}{2}gt^2$ και $\dfrac{h}{4} = \dfrac{1}{2}g(t-1)^2 \Rightarrow h = 2g(t-1)^2$

Οπότε : $\dfrac{1}{2}gt^2 = 2g(t-1)^2 \Rightarrow t^2 = 4(t-1)^2 \Rightarrow t = 2(t-1) \Rightarrow t = 2\text{ s}$

και $h = \dfrac{1}{2}gt^2 = \dfrac{1}{2}\cdot 10 \cdot 2^2 = 20\text{ m}$

Κατακόρυφη βολή

Η αρχική ταχύτητα είναι προς τα πάνω $\upsilon_0>0$ ενώ η επιτάχυνση μέτρου g είναι στην αντίθετη κατεύθυνση και άρα αρνητική $a=-g$. Το σώμα επιβραδύνει ανερχόμενο έως ένα μέγιστο ύψος h_{max} από όπου στη συνέχεια εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση προς τα κάτω (ελεύθερη πτώση). Οι εξισώσεις που ισχύουν είναι:

$$a(t) = -g = \text{σταθερά}, \qquad \upsilon(t) = \upsilon_0 - gt, \qquad y(t) = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}gt^2, \qquad \upsilon^2 = \upsilon_0^2 - 2gy$$

Ο χρόνος ανόδου είναι : $\upsilon(t) = \upsilon_0 - gt \Rightarrow 0 = \upsilon_0 - gt_{\alpha\nu} \Rightarrow \boxed{t_{\alpha\nu} = \dfrac{\upsilon_0}{g}}$

Το μέγιστο ύψος βρίσκεται από : $y(t) = \upsilon_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h_{\max} = \upsilon_0 t_{\alpha\nu} - \dfrac{1}{2}gt_{\alpha\nu}^2$ ή κατευθείαν από $\upsilon^2 = \upsilon_0^2 - 2gy \Rightarrow 0 = \upsilon_0^2 - 2gh_{\max} \Rightarrow \boxed{h_{\max} = \dfrac{\upsilon_0^2}{2g}}$ (ίδιος τύπος με πριν, για την απόσταση ακινητοποίησης με φρενάρισμα).

Ο χρόνος επιστροφής στο έδαφος είναι διπλάσιος από το χρόνο ανόδου ως το μέγιστο ύψος :

$$y(t) = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 0 = \upsilon_0 t_{\varepsilon\pi\iota\sigma\tau\rho} - \frac{1}{2}gt_{\varepsilon\pi\iota\sigma\tau\rho}^2 \Rightarrow t_{\varepsilon\pi\iota\sigma\tau\rho}\left(\upsilon_0 - \frac{1}{2}gt_{\varepsilon\pi\iota\sigma\tau\rho}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{t_{\varepsilon\pi\iota\sigma\tau\rho} = \frac{2\upsilon_0}{g} = 2t_{\alpha\nu}}$$

Η λύση t=0 είναι η αρχική στιγμή όπου το κινητό εκτοξεύεται από ύψος h=0.

Επίσης από την $\upsilon_0 = \sqrt{2gh_{\max}}$ μπορούμε να γράψουμε $t_{\alpha\nu} = \dfrac{\upsilon_0}{g} \Rightarrow \boxed{t_{\alpha\nu} = t_{\pi\tau} = \sqrt{\dfrac{2h_{\max}}{g}}}$ απ' όπου βλέπουμε ότι ο χρόνος ανόδου στο μέγιστο ύψος είναι ίσος με το χρόνο πτώσης από το ίδιο ύψος.

Παρατηρούμε ότι η κίνηση είναι συμμετρική: όσο χρόνο κάνει να ανέβει το κινητό μεταξύ δύο υψών, τόσο χρόνο κάνει και να κατέβει, ενώ επίσης σε κάθε ύψος έχει ίδιο μέτρο ταχύτητας ανεβαίνοντας και κατεβαίνοντας:

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 - 2gy \Rightarrow \upsilon = \pm\sqrt{\upsilon_0^2 - 2gy}$$

$$y = \upsilon_0 t_y - \frac{1}{2}gt_y^2 \Rightarrow t_y^2 - \left(\frac{2\upsilon_0}{g}\right)t_y + \frac{2y}{g} = 0 \Rightarrow t_y^2 - 2t_{\alpha\nu}t_y + \tau_y^2 = 0 \quad \text{δευτεροβάθμια}$$

Όπου t_y οι χρονικές στιγμές που το κινητό βρίσκεται στο τυχαίο ύψος y και $\tau_y=\sqrt{\frac{2y}{g}}$ ο χρόνος που θα έκανε το κινητό να ανέλθει στο ύψος y αν αυτό ήταν το μέγιστο ύψος.

Οπότε $t_{y1,2}=\dfrac{2t_{\alpha\nu}\pm\sqrt{4t_{\alpha\nu}^2-4\tau_y^2}}{2}=t_{\alpha\nu}\pm t_{\alpha\nu}\sqrt{1-\tau_y^2/t_{\alpha\nu}}=t_{\alpha\nu}\left(1\pm\sqrt{1-\tau_y^2/t_{\alpha\nu}^2}\right)$

Το χρονικό διάστημα από y ως $h_{\max}$ είναι :

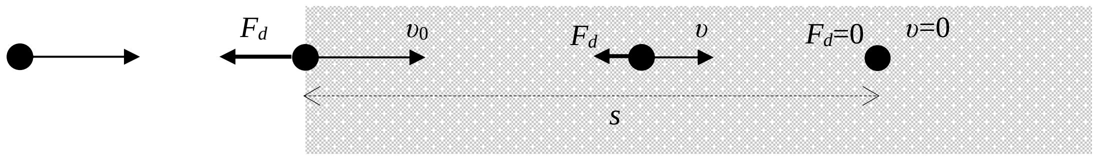
$$\Delta t\left(y\to h_{\max}\right)=t_{\alpha\nu}-t_{y1}=t_{\alpha\nu}-t_{\alpha\nu}\left(1-\sqrt{1-\tau_y^2/t_{\alpha\nu}^2}\right)=t_{\alpha\nu}\sqrt{1-\tau_y^2/t_{\alpha\nu}^2}$$

και το χρονικό διάστημα από $h_{\max}$ πίσω στο y είναι :

$$\Delta t\left(h_{\max}\to y\right)=t_{2y}-t_{\alpha\nu}=t_{\alpha\nu}\left(1+\sqrt{1-\tau_y^2/t_{\alpha\nu}^2}\right)-t_{\alpha\nu}=t_{\alpha\nu}\sqrt{1-\tau_y^2/t_{\alpha\nu}^2}$$

Τα δύο χρονικά διαστήματα είναι ίσα.

3. Απόσβεση (οπισθέλκουσα, drag) $F_{net}=-b\upsilon$



Το σώμα εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα υ_0 ($x_0=0$) μέσα σε μέσο που παρουσιάζει αντίσταση ανάλογη με την ταχύτητά του $F_d=-b\upsilon$ (απόσβεση, οπισθέλκουσα, drag) που είναι και η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα :

$$a=\frac{F_{net}}{m}\Rightarrow\frac{d\upsilon}{dt}=-\frac{b}{m}\upsilon\Rightarrow\frac{d\upsilon}{\upsilon}=-\frac{b}{m}dt\Rightarrow\int_{\upsilon_o}^{\upsilon}\frac{d\upsilon'}{\upsilon'}=-\frac{b}{m}\int_0^t dt'\Rightarrow\ln\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right)=-\frac{b}{m}t\Rightarrow\boxed{\upsilon=\upsilon_0e^{-bt/m}}$$

$$a=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\upsilon_0e^{-\frac{b}{m}t}\right)\Rightarrow\boxed{a=-\frac{\upsilon_0b}{m}e^{-bt/m}}$$

$$\upsilon=\frac{dx}{dt}\Rightarrow\int_0^x dx'=\upsilon_0\int_0^t e^{-bt'/m}dt'\Rightarrow x=-\frac{\upsilon_0m}{b}e^{-bt'/m}\Big|_0^t\Rightarrow\boxed{x=\frac{\upsilon_0m}{b}\left(1-e^{-bt/m}\right)}$$

Το σώμα θα κινηθεί ευθύγραμμα στην κατεύθυνση της αρχικής του ταχύτητας με μεταβαλλόμενες (διαρκώς μειούμενες) ταχύτητα και επιτάχυνση και θα σταματήσει αφού διανύσει απόσταση $s=x(t=\infty)=\dfrac{\upsilon_0m}{b}$

Το μέγεθος $\tau=\dfrac{m}{b}$ έχει διαστάσεις χρόνου και δηλώνει την τάξη μεγέθους του χρονικού διαστήματος που χρειάζεται για να σταματήσει πρακτικά το σώμα.

$$[\tau]=\frac{[m]}{[b]}=\frac{\text{kg}}{\dfrac{\text{N}}{\text{m/s}}}=\frac{\cancel{\text{kg}}}{\dfrac{\cancel{\text{kg}}\ \cancel{\text{m}}/\text{s}^{\cancel{2}}\cdot\cancel{\text{s}}}{\cancel{\text{m}}}}=\text{s}$$

Π.χ. σε χρόνο $t=\tau$ το σώμα έχει διανύσει ήδη $x=s\left(1-e^{-1}\right)=s(1-0,37)=0,63s$, δηλ. το 63% της συνολικής απόστασης s.

Άσκηση

Δείξτε ότι στο φρενάρισμα με οπισθέλκουσα ισχύουν οι σχέσεις : $\upsilon = -at$ (1),

$x = (\upsilon_0 - \upsilon)t$ (2),

$x = \upsilon_0\tau + a\tau^2$ (3)

4. Σταθερή δύναμη συν οπισθέλκουσα (πτώση με αντίσταση αέρα) $F_{net} = mg - b\upsilon$

Σώμα αφήνεται ελεύθερο να πέσει στην ατμόσφαιρα από ύψος h ($y_0 = -h, \upsilon_0 = 0$) υπό την επίδραση της σταθερής δύναμης του βάρους του $B = mg$ ενώ ταυτόχρονα υφίσταται αντίσταση από τον αέρα που είναι ανάλογη της ταχύτητάς του $F_d = -b\upsilon$ (απόσβεση). Θεωρούμε ως θετική φορά του άξονα y την προς τα κάτω κατεύθυνση. Το σώμα θα εκτελέσει κίνηση με μεταβλητή (μειούμενη) επιτάχυνση έως ότου πετύχει μια οριακή ή τερματική (*terminal*) ταχύτητα την οποία και θα διατηρήσει στη συνέχεια έως την πρόσκρουση με το έδαφος. Η οριακή ταχύτητα επιτυγχάνεται όταν η αντίσταση του αέρα F_d προς τα πάνω γίνει ίση με το βάρος του B που το επιταχύνει προς τα κάτω και βρίσκεται εύκολα από :

$$F_{net} = 0 \Rightarrow F_d + B = 0 \Rightarrow -b\upsilon_\tau + mg = 0 \Rightarrow \upsilon_\tau = \frac{mg}{b} \Rightarrow \boxed{\upsilon_\tau = g\tau}$$

Όταν η αντίσταση του αέρα δεν μπορεί να αγνοηθεί παρατηρούμε ότι τα βαρύτερα σώματα πέφτουν πιο γρήγορα από τα ελαφρύτερα.

Για την επιτάχυνση έχουμε

$$F_{net} = ma \Rightarrow F_d + B = ma \Rightarrow -b\upsilon + mg = ma \Rightarrow a\tau = \upsilon_\tau - \upsilon$$

απ' όπου με ολοκλήρωση βρίσκουμε την ταχύτητα

$$\upsilon - \upsilon_\tau = -\tau\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow \int_0^\upsilon \frac{d\upsilon'}{\upsilon' - \upsilon_\tau} = -\frac{1}{\tau}\int_0^t dt' \Rightarrow \ln\left(\frac{\upsilon - \upsilon_\tau}{-\upsilon_\tau}\right) = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)} \Rightarrow \upsilon = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-bt/m}\right)$$

και στη συνέχεια αλγεβρικά την επιτάχυνση

$$a = \frac{\upsilon_\tau - \upsilon}{\tau} = \frac{\upsilon_\tau - \upsilon_\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}{\tau} \Rightarrow \boxed{a = \frac{\upsilon_\tau}{\tau}e^{-t/\tau}} \Rightarrow a = ge^{-bt/m}$$

που επιβεβαιώνει και τον ορισμό $a = d\upsilon/dt$.

Με μία ολοκλήρωση ακόμη βρίσκουμε το ύψος από το έδαφος

$$\frac{dy}{dt} = \upsilon \Rightarrow \int_{-h}^{y} dy' = \int_0^t \upsilon dt' \Rightarrow y + h = \upsilon_\tau\int_0^t\left(1 - e^{-t'/\tau}\right)dt' = \upsilon_\tau t - (-\tau)\upsilon_\tau e^{-t/\tau}\Big|_0^t \Rightarrow$$

$$y = -h + \upsilon_\tau t + \upsilon_\tau\tau\left(e^{-t/\tau} - 1\right) \Rightarrow \boxed{y = -h + \upsilon_\tau(t - \tau) + \upsilon_\tau\tau e^{-t/\tau}} \Rightarrow y = -h + \frac{mg}{b}(t - \tau) + \frac{m^2 g}{b^2}e^{-bt/m}$$

Η κίνηση θα εκτελεστεί σύμφωνα με τις παραπάνω εξισώσεις μόνο μέχρι την πρόσκρουση με το έδαφος $y = 0$. Ο χρόνος πτώσης βρίσκεται από την υπερβατική εξίσωση $\frac{h}{\upsilon_\tau} + \tau = t_{o\lambda} + \tau e^{-t_{o\lambda}/\tau}$ αριθμητικά.