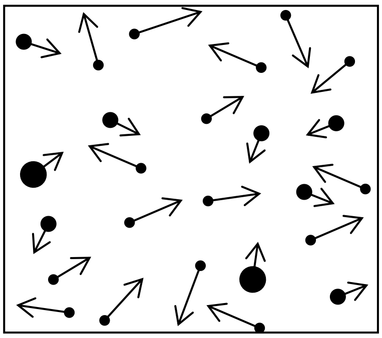
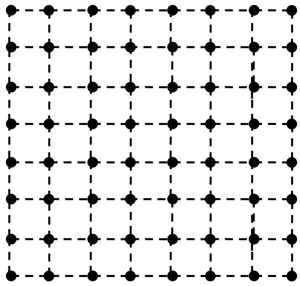
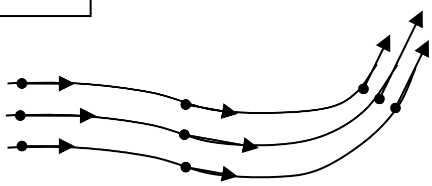
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ



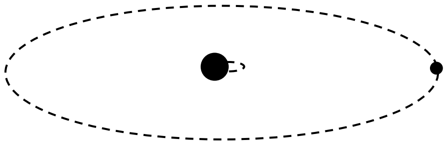
αέριο



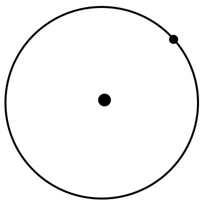
στερεό



υγρό



Αστέρι με πλανήτη



Άτομο υδρογόνου

Θεωρούμε *n* σωματίδια (υλικά σημεία) ως το σύστημά μας. Αυτά αλληλεπιδρούν μεταξύ τους (εσωτερικές δυνάμεις) και με το περιβάλλον τους (εξωτερικές δυνάμεις). Η ολική μάζα του συστήματος είναι : $M = m_1 + m_2 + ...m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i$

Η ολική ορμή γράφεται ως : $\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = M \dfrac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i \Rightarrow \boxed{\vec{P} = M\vec{V} \equiv \vec{P}_{CM}}$

Όπου από την παραπάνω σχέση ορίζεται η ταχύτητα του κέντρου μάζας $\vec{\upsilon}_{CM} \equiv \vec{V} = \dfrac{d\vec{R}}{dt}$ ως η ταχύτητα ενός σημείου $\vec{R}$ το οποίο ονομάζεται διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας (CM) και είναι :

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + ... + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

όπου $\vec{r}_i$ τα διανύσματα θέσης των σωματιδίων του συστήματος από την αρχή Ο. Οπότε πράγματι η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του CM είναι :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = \frac{\vec{P}}{M} \quad \text{και}$$

$$\vec{A} \equiv \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \frac{\vec{F}_{o\lambda}}{M}$$

Σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας (CM)

Μπορούμε να μεταφέρουμε την αρχή του συστήματος συντεταγμένων μας (σημείο αναφοράς) στο κέντρο μάζας δηλαδή στο σημείο $\vec{R}$. Από αυτό το νέο σημείο τα σωματίδια φαίνεται να έχουν θέσεις, ταχύτητες και επιταχύνσεις αντίστοιχα, ίσες με

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R} \ , \qquad \vec{\upsilon}_i' = \vec{\upsilon}_i - \vec{V} \ , \qquad \vec{a}_i' = \vec{a}_i - \vec{A}$$

Έτσι ορίζουμε ένα νέο σύστημα αναφοράς το σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας το οποίο μπορεί και να μην είναι πλέον αδρανειακό. Τα μεγέθη που φέρουν τόνους θα εννοείται ότι αναφέρονται στο σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας.

Σε αυτό το σύστημα αναφοράς η ολική ορμή του συστήματος σωματιδίων είναι ίση με μηδέν

$$\vec{P}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i' = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i' = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{\upsilon}_i - \vec{V}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i - \vec{V} \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i - \vec{V}M = \vec{P} - \vec{P} = 0$$

Για το λόγο αυτό το σύστημα CM λέγεται και σύστημα κέντρου ορμής

Επίσης το άθροισμα $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i' = 0$ είναι ίσο με μηδέν

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i' = \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i - \vec{R} \sum_{i=1}^{n} m_i = M\vec{R} - M\vec{R} = 0$$

που απλώς σημαίνει ότι σε αυτό το σύστημα η θέση του κέντρου μάζας $\vec{R}' \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i'$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων $\vec{R}' = 0$

Κίνηση του κέντρου μάζας - Διατήρηση ορμής

Για κάθε σωματίδιο του συστήματος θα ισχύει ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα : $\vec{F}_i = \dfrac{d\vec{p}_i}{dt}$

Έτσι για όλο το σύστημα θα ισχύει :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{p}_i}{dt} \Rightarrow \vec{F}_{o\lambda} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow \vec{F}_{o\lambda}^{\varepsilon\xi} = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{o\lambda}^{\varepsilon\xi} = M \frac{d\vec{V}}{dt}}$$

Δηλαδή : «*Το σημείο του κέντρου μάζας ενός συστήματος σωματιδίων κινείται σαν ένα υλικό σημείο με μάζα ίση με την ολική μάζα του συστήματος και στο οποίο εφαρμόζεται η συνισταμένη εξωτερική δύναμη*»

Στην ολική δύναμη στο σύστημα εμφανίζονται μόνο οι εξωτερικές δυνάμεις καθώς οι εσωτερικές δυνάμεις από το ένα σωματίδιο στο άλλο είναι ζεύγη δράσης-αντίδρασης και αλληλοεξουδετερώνονται στο άθροισμα. Έτσι βλέπουμε ότι αν η συνισταμένη εξωτερική δύναμη σε ένα σύστημα είναι μηδέν

$$\vec{F}_{o\lambda}^{\varepsilon\xi} = 0$$

τότε η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = M\vec{V} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

και το κέντρο μάζας του συστήματος κινείται με σταθερή ταχύτητα ή ακινητεί.

Στροφορμή συστήματος - Ολική ροπή - Διατήρηση στροφορμής

Για τη στροφορμή του συστήματος δείχνεται εύκολα ότι

$$\vec{L} = \vec{R}\times M\vec{V} + \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{r}_i'\times\vec{\upsilon}_i') = \vec{R}\times\vec{P} + \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i'\times\vec{p}_i' = \vec{L}_{CM} + \vec{L}'$$

Δηλαδή «*Η ολική στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων ως προς οποιοδήποτε σημείο Ο ισούται με τη στροφορμή της ολικής μάζας συγκεντρωμένης στο κέντρο μάζας και κινούμενης με την ταχύτητα του κέντρου μάζας ως προς το Ο συν την ολική στροφορμή του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας*».

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i\times\vec{\upsilon}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{R}+\vec{r}_i{}')\times(\vec{V}+\vec{\upsilon}_i{}') = \vec{R}\times\vec{V}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) + \vec{R}\times\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i{}' + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i{}'\right)\times\vec{V} + \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i{}'\times\vec{\upsilon}_i{}'$$

όμως έχουμε δείξει ότι στο τονούμενο σύστημα συντεταγμένων (σύστημα με αρχή το CM) ό δεύτερος και ο τρίτος όρος είναι ίσοι με μηδέν οπότε :

$$\vec{L} = \vec{R}\times\vec{V}M + \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i'\times m_i\vec{\upsilon}_i' = \vec{R}\times\vec{P} + \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i'\times\vec{p}_i' = \vec{L}_{CM} + \vec{L}'$$

Μεταβολή της στροφορμής

Η ολική ροπή στο σύστημα, ως προς κάποιο σημείο, είναι το άθροισμα των ροπών πάνω σε κάθε σωμάτιο του συστήματος. Αυτές προέρχονται τόσο από εξωτερικές όσο και εσωτερικές δυνάμεις. Όταν οι εσωτερικές δυνάμεις κατευθύνονται πάντα στην ευθεία που ενώνει τα δύο σωμάτια $\vec{F}_{i/j} \propto \vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ και το μέτρο της εξαρτάται μόνο από την μεταξύ τους απόσταση $r = \left|\vec{r}_{ij}\right|$, δηλαδή οι εσωτερικές δυνάμεις είναι κεντρικές, τότε δείχνεται εύκολα ότι δεν επάγουν ροπές στο σύστημα και άρα η συνολική ροπή προέρχεται μόνο από τις εξωτερικές δυνάμεις:

η δύναμη στο σωματίδιο *i* από το σωματίδιο *j* (δράση) : $\vec{F}_{i/j} = f(r)\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) = f(r)\vec{r}_{ij}$

η δύναμη στο σωματίδιο *j* από το σωματίδιο *i* (αντίδραση) : $\vec{F}_{j/i} = f(r)\left(\vec{r}_j - \vec{r}_i\right) = -f(r)\vec{r}_{ij}$

η ροπή στο σωματίδιο *i* της δύναμης από το σωματίδιο *j* που ασκείται στη θέση $\vec{r}_i$ όπου βρίσκεται το σωματίδιο *i*: $\vec{\tau}_{i/j} = \vec{r}_i\times\vec{F}_{i/j} = f(r)\vec{r}_i\times\vec{r}_{ij}$,

η ροπή στο σωματίδιο *j* της δύναμης από το σωματίδιο *i* που ασκείται στη θέση $\vec{r}_j$ όπου βρίσκεται το σωματίδιο *j*: $\vec{\tau}_{j/i} = \vec{r}_j\times\vec{F}_{j/i} = -f(r)\vec{r}_j\times\vec{r}_{ij}$,

το άθροισμα των αμοιβαίων ροπών μεταξύ ενός τυχαίου ζεύγους σωματιδίων *i*, *j* του συστήματος

$$\vec{\tau}_{i/j} + \vec{\tau}_{j/i} = f(r)\vec{r}_i\times\vec{r}_{ij} - f(r)\vec{r}_j\times\vec{r}_{ij} = f(r)(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\times\vec{r}_{ij} = f(r)\vec{r}_{ij}\times\vec{r}_{ij} = 0,$$

Οπότε η συνολική ροπή στο σύστημα από τις εσωτερικές δυνάμεις είναι ίση με μηδέν :

$$\vec{\tau}_{ολ}^{\,εσωτ} = \sum_i \tau_i^{εσωτ} = \sum_i\sum_{j\neq i}\tau_{i/j} = \sum_{ζεύγη\ i,j}(\tau_{i/j} + \tau_{j/i}) = \sum_{ζεύγη\ i,j} 0 = 0$$

Έτσι η συνολική ροπή στο σύστημα είναι αυτή που προέρχεται μόνο από εξωτερικές δυνάμεις πάνω στα σωματίδια του συστήματος :

$$\vec{\tau}_{ολ} = \vec{\tau}_{ολ}^{\,εξωτ} + \vec{\tau}_{ολ}^{\,εσωτ} = \vec{\tau}_{ολ}^{\,εξωτ} + 0 = \sum_{i=1}^{n}\vec{\tau}_i^{\,εξωτ} = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_i^{εξωτ}$$

Για κάθε σωματίδιο του συστήματος ισχύει, από το $2^{ο}$ νόμο του Νεύτωνα, ότι

$$\vec{r}_i\times\vec{F}_i = \vec{r}_i\times\frac{d\vec{p}_i}{dt} \Rightarrow \vec{\tau}_i = \frac{d\vec{L}_i}{dt}$$

οπότε για το σύστημα θα έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{\tau}_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{L}_i}{dt}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}(\vec{\tau}_i^{\,\varepsilon\xi\omega\tau}+\vec{\tau}_i^{\,\varepsilon\sigma\omega\tau})=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i\right)\Rightarrow \quad \boxed{\vec{\tau}_{o\lambda}^{\,\varepsilon\xi\omega\tau}=\frac{d\vec{L}}{dt}}$$

Έτσι αν $\vec{\tau}_{o\lambda}^{\,\varepsilon\xi\omega\tau}=0\Rightarrow\frac{d\vec{L}}{dt}=0\Rightarrow\vec{L}=\sigma\tau\alpha\theta.$

Ιδιαιτερότητα συστήματος κέντρου μάζας

Η παραπάνω σχέση μεταβολής της στροφορμής ισχύει για αδρανειακά συστήματα αναφοράς καθώς για την απόδειξή της χρησιμοποιήθηκε ο 2ος νόμος του Νεύτωνα για τη δύναμη. Όμως αποδεικνύεται ότι για το σύστημα κέντρου μάζας, ισχύει σε αυτή τη μορφή είτε αυτό είναι αδρανειακό είτε όχι : $\vec{\tau}'^{\,\varepsilon\xi\omega\tau}_{o\lambda}=\frac{d\vec{L}'}{dt}$

Κινητική ενέργεια συστήματος

Για την κινητική ενέργεια του συστήματος δείχνεται εύκολα ότι

$$K=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\upsilon_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\vec{\upsilon}_i'+\vec{V}\right)^2=\frac{1}{2}V^2\sum_{i=1}^{n}m_i+\vec{V}\cdot\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\upsilon}_i'+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\upsilon_i'^{\,2}\Rightarrow\boxed{K=K_{CM}+K'}$$

αφού $\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{\upsilon}_i'=0$

Δηλαδή *«Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με την κινητική ενέργεια της ολικής μάζας κινούμενης με την ταχύτητα του κέντρου μάζας συν την κινητική ενέργεια των σωματιδίων του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας».*

Εσωτερική Ενέργεια

Εσωτερική ενέργεια είναι η ενέργεια που αποτελείται από την κινητική ενέργεια ως προς το κέντρο μάζας συν την δυναμική ενέργεια που προέρχεται από τις αμοιβαίες αλληλεπιδράσεις των σωματιδίων του συστήματος, δηλαδή από τις εσωτερικές δυνάμεις:

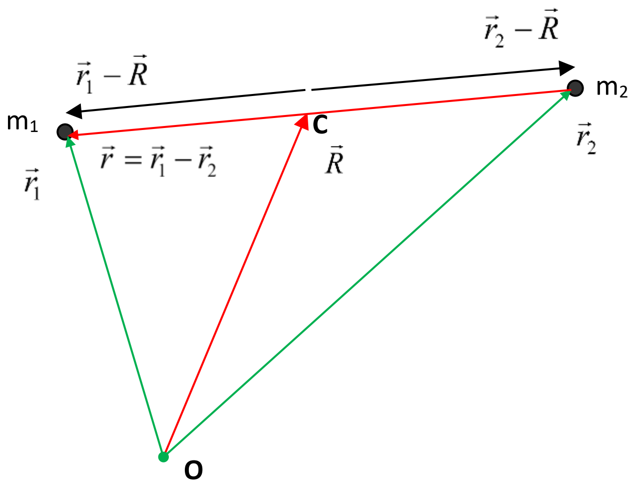
$$E_{o\lambda}=K+U=K_{CM}+K'+U^{\varepsilon\xi\omega\tau}+U^{\varepsilon\sigma\omega\tau}=\left(K_{CM}+U^{\varepsilon\xi\omega\tau}\right)+\left(K'+U^{\varepsilon\sigma\omega\tau}\right)$$

$$E_{\varepsilon\sigma\omega\tau}=K'+U^{\varepsilon\sigma\omega\tau}$$

Σύστημα δύο σωμάτων

Σε ένα σύστημα δύο μόνο σωμάτων τα παραπάνω απλουστεύονται λίγο. Για την περιγραφή ενός συστήματος δύο σωμάτων μπορούμε αντί των δύο διανυσμάτων θέσης $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$ των δύο σωματιδίων να χρησιμοποιήσουμε ισοδύναμα δύο άλλα διανύσματα το διάνυσμα του κέντρου μάζας $\vec{R}$ και το διάνυσμα της σχετικής τους απομάκρυνσης $\vec{r}\equiv\vec{r}_{12}=-\vec{r}_{21}$:

$$\vec{R}=\frac{m_1}{M}\vec{r}_1+\frac{m_2}{M}\vec{r}_2 \qquad\qquad \vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$$



Τότε η δυναμική περιγραφή του συστήματος μπορεί ισοδύναμα να γίνει με τα διανύσματα $\vec{R}$ και $\vec{r}$ από τα οποία προκύπτουν μετέπειτα τα $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$ με απλή άλγεβρα:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r}\,, \qquad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}$$

Για τις ταχύτητες και επιταχύνσεις έχουμε : $\vec{\upsilon} \equiv \vec{\upsilon}_{12} = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2\,,\qquad \vec{V} = \dfrac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}$

$$\vec{a} \equiv \vec{a}_{12} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2\,, \qquad \vec{A} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2}{m_1 + m_2}$$

Οπότε παίρνουμε αντίστοιχα : $\vec{\upsilon}_1 = \vec{V} + \dfrac{m_2}{M}\vec{\upsilon} \qquad \vec{\upsilon}_2 = \vec{V} - \dfrac{m_1}{M}\vec{\upsilon}$

$$\vec{a}_1 = \vec{A} + \frac{m_2}{M}\vec{a} \qquad \vec{a}_2 = \vec{A} - \frac{m_2}{M}\vec{a}$$

Στο σύστημα κέντρου μάζας (CM) : $\vec{r}_1{}' = \vec{r}_1 - \vec{R}\ ,\qquad \vec{r}_2{}' = \vec{r}_2 - \vec{R}$

η σχετική θέση δεν αλλάζει $\vec{r}\,' = \vec{r}$ και το κέντρο μάζας βρίσκεται στην αρχή τον αξόνων $\vec{R}' = 0$:

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}' = (\vec{r}_1 - \vec{R}) - (\vec{r}_2 - \vec{R}) = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}$$

$$\vec{R}' = \frac{m_1}{M}\vec{r}_1{}' + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2{}' = \frac{m_1}{M}(\vec{r}_1 - \vec{R}) + \frac{m_2}{M}(\vec{r}_2 - \vec{R}) = \frac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2 - \vec{R}\left(\frac{m_1}{M} + \frac{m_2}{M}\right) = \vec{R} - \vec{R} = 0$$

Οπότε τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης των σωματιδίων είναι συνάρτηση μόνο των σχετικών διανυσμάτων $\vec{r}, \vec{\upsilon}, \vec{a}$

$$\vec{r}_1{}' = \frac{m_2}{M}\vec{r}\,, \qquad \vec{r}_2{}' = -\frac{m_1}{M}\vec{r}\,, \qquad \vec{r}\,' = \vec{r}$$

$$\vec{\upsilon}_1{}' = \frac{m_2}{M}\vec{\upsilon}\,, \qquad \vec{\upsilon}_2{}' = -\frac{m_1}{M}\vec{\upsilon}\ , \qquad \vec{\upsilon}\,' = \vec{\upsilon}$$

$$\vec{a}_1{}' = \frac{m_2}{M}\vec{a} \qquad \vec{a}_2{}' = -\frac{m_1}{M}\vec{a}\ , \qquad \vec{a}\,' = \vec{a}$$

Σημειώνουμε ότι τα διανύσματα $\vec{r}_1'$ και $\vec{r}_2'$ οι θέσεις δηλαδή των δύο σωμάτων ως προς το κέντρο μάζας τους είναι παράλληλα με το $\vec{r}$, δηλαδή είναι στην ευθεία που συνδέει τα δύο σώματα. Το καθένα έχει ως αρχή το $\vec{R}$ και πέρας τα $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$ αντίστοιχα. Ο λόγος των μέτρων τους r_1'/r_2' είναι αντιστρόφως ανάλογος των μαζών τους. Δηλαδή το κέντρο μάζας βρίσκεται πιο κοντά στο σώμα με τη μεγαλύτερη μάζα:

$$\frac{r_1'}{r_2'} = \frac{m_2}{m_1}$$

Πρόβλημα δύο σωμάτων

Εάν οι μόνες δυνάμεις μεταξύ δύο σωματιδίων είναι η αμοιβαία αλληλεπίδρασή τους $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} \equiv \vec{F}$ τότε η ολική δύναμη στο σύστημα θα είναι μηδέν και το κέντρο μάζας θα ηρεμεί ή θα κινείται με σταθερή ταχύτητα σύμφωνα με τις εκάστοτε αρχικές συνθήκες:

$$\vec{F}^{\varepsilon\xi}_{o\lambda} = M\frac{d\vec{V}}{dt} \Rightarrow 0 = M\frac{d\vec{V}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{V}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{V} = \sigma\tau\alpha\theta = \vec{V}_0 \Rightarrow \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}_0 \Rightarrow \vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t$$

Έτσι για να προσδιορίσουμε τις θέσεις των δύο σωμάτων αρκεί να βρούμε μόνο τη σχετική τους θέση. Αυτή βρίσκεται από τη σχετική τους επιτάχυνση με ολοκλήρωση. Για να βρούμε τη σχετική επιτάχυνση χρησιμοποιούμε τον ορισμό της και τον 3^o νόμο του Νεύτωνα :

$$\vec{a} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \frac{1}{m_1}\vec{F}_{1/2} - \frac{1}{m_2}\vec{F}_{2/1} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F} = \frac{1}{\mu}\vec{F}$$

Έτσι το πρόβλημα των δύο σωμάτων είναι ισοδύναμο μαθηματικά με αυτό ενός σώματος υπό την ίδια δύναμη αλληλεπίδρασης $\vec{F} = \vec{F}_{1/2}$ αλλά με μάζα ίση με την ανηγμένη μάζα μ των δύο σωμάτων:

$$\boxed{\vec{F} = \mu\vec{a}}$$

Όπου η ανηγμένη μάζα μ ορίζεται από την έκφραση $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ που εμφανίστηκε παραπάνω:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \Rightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Συμβολίζοντας τη μικρότερη μάζα με m και κρατώντας την σταθερή, η ανηγμένη μάζα μ παίρνει τις ακόλουθες οριακές τιμές καθώς η μεγαλύτερη μάζα M αλλάζει από m ως ∞ :

$$m = \sigma\tau\alpha\theta. < M, \qquad \mu = \frac{mM}{m+M} = \frac{m}{1 + m/M} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{M\to\infty} & \mu_{\max} = m \\ \xrightarrow{M\to m} & \mu_{\min} = m/2 \end{matrix}$$

Δηλαδή έχει ελάχιστη τιμή την $\mu_{\min} = m/2$ το μισό της κάθε μάζας, όταν οι δύο μάζες είναι ίσες $m_2 = m = m_1$, και μέγιστη τιμή την $\mu_{\max} = m$ την μικρή μάζα όταν η μεγαλύτερη μάζα τείνει στο άπειρο.

Αν θέλουμε να εκφράσουμε το γινόμενο $\mu\vec{a}$ σαν το ρυθμό μεταβολής κάποιας ορμής βλέπουμε ότι αυτή είναι η $\vec{p}_{\sigma\chi\varepsilon\tau} = \mu\vec{\upsilon}$. Οπότε θα έχουμε :

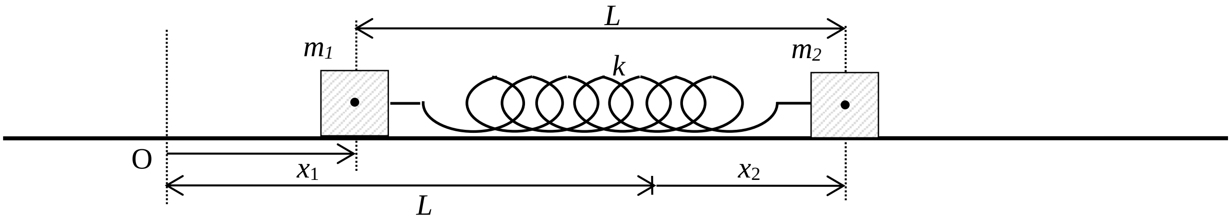
$$\boxed{\vec{F} = \mu\vec{a} = \frac{d\vec{p}_{\sigma\chi\varepsilon\tau}}{dt}}$$

Αυτή η ορμή δεν αντιστοιχεί στις σχετικές ορμές στα αντίστοιχα συστήματα συντεταγμένων

$$\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 = m_1\vec{\upsilon}_1 - m_2\vec{\upsilon}_2' = m_1\left(\vec{V} + \frac{m_2}{M}\vec{\upsilon}\right) - m_2\left(\vec{V} - \frac{m_1}{M}\vec{\upsilon}\right) = (m_1 - m_2)\vec{V} + 2\mu\vec{\upsilon}$$

$$\vec{p}' = \vec{p}_1' - \vec{p}_2' = m_1\vec{\upsilon}_1' - m_2\vec{\upsilon}_2' = m_1\frac{m_2}{M}\vec{\upsilon} - m_2\left(-\frac{m_1}{M}\vec{\upsilon}\right) = 2\mu\vec{\upsilon}$$

Παραδείγματα προβλήματος δύο σωμάτων
Ελατήριο



(1) $-k(x_1 - x_2) = m_1 a_1$ $\xrightarrow{\quad}$ $(1)+(2)$ $0 = MA$ ευθύγραμμη ομαλή

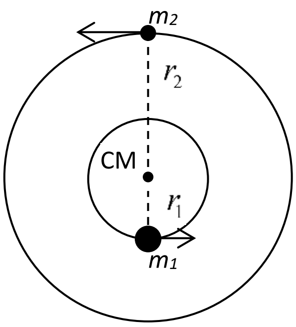
(2) $k(x_1 - x_2) = m_2 a_2$ $\quad$ $m_2(1) - m_1(2)$ $-kx = \mu a$ απλή αρμονική ταλάντωση

Βαρύτητα – Coulomb (Διπλός αστέρας – Άτομο Υδρογόνου)

(1) $-\dfrac{k}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} = m_1 a_1$ $\xrightarrow{\quad}$ $(1)+(2)$ $0 = MA$ ευθύγραμμη ομαλή

(2) $\dfrac{k}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} = m_2 a_2$ $\quad$ $m_2(1) - m_1(2)$ $-\dfrac{k}{r^2} = \mu a$ κύκλος, έλλειψη, παραβολή, υπερβολή

Διπλός αστέρας σε κυκλική τροχιά



Δύο αστέρια που κινούνται υπό την επίδραση της αμοιβαίας βαρυτικής τους έλξης ονομάζονται διπλός αστέρας (ή ηλεκτρόνιο γύρω από πυρήνα). Έστω ότι κινούνται σε κυκλικές τροχιές. Οι αποστάσεις των δύο σωμάτων από το κέντρο μάζας τους (CM) που είναι και οι ακτίνες των κυκλικών τους τροχιών γύρω από το κέντρο μάζας θα είναι κατά τα γνωστά $r_1 = r\,m_2/M$ και $r_2 = r\,m_1/M$ και ισχύει $r_1/r_2 = m_2/m_1$

Για αυτά τα αστέρια μπορούμε να υπολογίσουμε την **ολική τους μάζα** $M = m_1 + m_2$, αν μετρήσουμε την απόσταση r μεταξύ τους και την περίοδο της περιστροφής τους T η οποία θα είναι η ίδια και για τα δύο αστέρια (για να μένει το κέντρο μάζας ακίνητο).
1^{ος} τρόπος: Η σχετική τους θέση r διαγράφει κυκλική τροχιά με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 2\pi/T$ και επιτάχυνση που είναι κεντρομόλος $a = a_c = \omega^2 r$ οπότε έχουμε :

$$F_{\alpha\mu o\iota\beta} = \mu a \Rightarrow F_g = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a_c \Rightarrow G\frac{\cancel{m_1} \cancel{m_2}}{r^2} = \frac{\cancel{m_1}\cancel{m_2}}{M} \cdot \omega^2 r \Rightarrow M = \frac{r^3}{G}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Rightarrow$$

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

2^{ος} τρόπος: Για τον καθένα από τους αστέρες, π.χ. τον 2, έχουμε:

$$F_{o\lambda,2} = m_2 a_2 \Rightarrow F_g = m_2 a_{2\kappa} \Rightarrow G\frac{m_1 \cancel{m_2}}{r^2} = \cancel{m_2} \cdot \omega^2 r_2' \Rightarrow G\frac{\cancel{m_1}}{r^2} = \omega^2 r \frac{\cancel{m_1}}{M} \Rightarrow M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

Για το άτομο του υδρογόνου τα παραπάνω δεν έχουν πρακτική αξία γιατί τα επιταχυνόμενα φορτισμένα σωματίδια ακτινοβολούν, χάνουν ενέργεια και το σύστημα καταρρέει. Η αντιμετώπιση της σχετικής τους κίνησης πρέπει να γίνει κβαντομηχανικά.

Χρήσιμες εκφράσεις για σύστημα δύο σωμάτων

Οι εκφράσεις της ολικής κινητικής ενέργειας, της ολικής στροφορμής και της ολικής ορμής για δύο σώματα, σαν συνάρτηση των $\vec{R}, \vec{r}, \vec{V}, \vec{\upsilon}$ παίρνουν στα δύο συστήματα αναφοράς τις απλές μορφές :

$$K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\mu\upsilon^2 = K_{CM} + K_{\sigma\chi\varepsilon\tau} \qquad K' = \frac{1}{2}\mu\upsilon^2 = K_{\sigma\chi\varepsilon\tau}$$

$$\vec{L} = M\vec{R}\times\vec{V} + \mu\vec{r}\times\vec{\upsilon} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{\sigma\chi\varepsilon\tau} \qquad \vec{L}' = \mu\vec{r}\times\vec{\upsilon} = \vec{L}_{\sigma\chi\varepsilon\tau}$$

$$\vec{P} = M\vec{V} = \vec{P}_{CM} \qquad \vec{P}' = 0$$

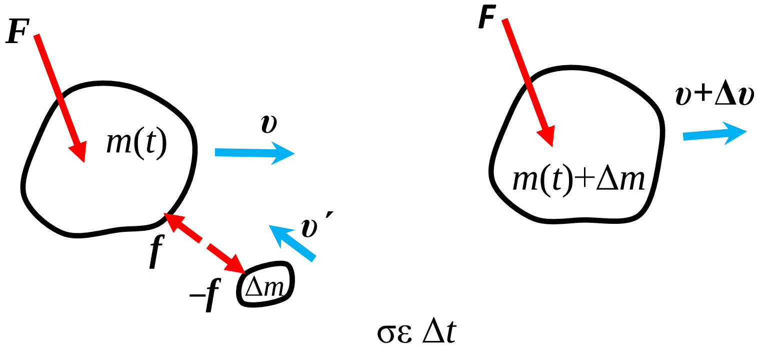
Αποδείξτε τες

Σύστημα μεταβλητής μάζας

Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα για ένα σώμα μεταβλητής μάζας έχει τη μορφή

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}(\vec{\upsilon}' - \vec{\upsilon})$$

και εξάγεται μέσω του θεωρήματος ορμής – ώθησης. Ο πρόσθετος όρος εξαρτάται τόσο από το ρυθμό μεταβολής της μάζας όσο και από την ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}'$ την οποία αυτή έχει όταν προσλαμβάνεται ή αποβάλλεται.



Το σύστημα μεταβάλει τη μάζα του λαμβάνοντας (ή αποβάλλοντας) μάζα Δm με ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}'$ σε χρονικό διάστημα Δt. Κατά την πρόσληψη (ή αποβολή) της μάζας Δm εμφανίζονται οι δυνάμεις δράσης – αντίδρασης $\boldsymbol{f}$ και $-\boldsymbol{f}$ μεταξύ των σωμάτων m και Δm. Η πρόσληψη μάζας γίνεται με συνεχή τρόπο. Δηλαδή $\Delta m \to 0$ για $\Delta t \to 0$ με το λόγο $\Delta m/\Delta t \to$ σε πεπερασμένη τιμή. Αφού η μάζα m προσλάβει (ή αποβάλλει) τη μάζα Δm η ταχύτητά της αλλάζει σε $\boldsymbol{\upsilon}+\Delta\boldsymbol{\upsilon}$. Στο όριο $\Delta t \to 0$, $\Delta\boldsymbol{\upsilon} \to 0$.

Πρόσληψη (πλαστική κρούση) :

Μεταβολή ορμής Δm : $-\vec{f}\Delta t = \Delta m\left(\vec{\upsilon} + \Delta\vec{\upsilon}\right) - \Delta m\vec{\upsilon}' = -\Delta m(\vec{\upsilon}' - \vec{\upsilon}) + \Delta m\Delta\vec{\upsilon}$

Μεταβολή ορμής m : $\vec{F}\Delta t + \vec{f}\Delta t = m(\vec{\upsilon} + \Delta\vec{\upsilon}) - m\vec{\upsilon} = m\Delta\vec{\upsilon}$

Προσθέτοντας κατά μέλη και διαιρώντας με Δt παίρνουμε

$$\vec{F}\Delta t + \vec{f}\Delta t - \vec{f}\Delta t = m\Delta\vec{\upsilon} - \Delta m(\vec{\upsilon}' - \vec{\upsilon}) + \Delta m\Delta\vec{\upsilon} \Rightarrow \vec{F}\Delta t = m\Delta\vec{\upsilon} - \Delta m(\vec{\upsilon}' - \vec{\upsilon}) + \Delta m\Delta\vec{\upsilon} \Rightarrow$$

$$\vec{F} = m\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} - \frac{\Delta m}{\Delta t}(\vec{\upsilon}' - \vec{\upsilon}) + \frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta\vec{\upsilon} \Rightarrow$$

Παίρνοντας το όριο $\Delta t \to 0$ ο τελευταίος όρος μηδενίζεται και έχουμε :

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}(\vec{\upsilon}' - \vec{\upsilon})$$

Αποβολή (έκρηξη δύο θραυσμάτων), πάρτε την διαδοχή των εικόνων ανάποδα, οπότε βάλτε και $\Delta t \to -\Delta t$:

Μεταβολή ορμής Δm : $-\vec{f}(-\Delta t) = \Delta m\vec{\upsilon}' - \Delta m\left(\vec{\upsilon} + \Delta\vec{\upsilon}\right)$

Μεταβολή ορμής m : $\vec{F}(-\Delta t) + \vec{f}(-\Delta t) = m\vec{\upsilon} - m(\vec{\upsilon} + \Delta\vec{\upsilon}) = -m\Delta\vec{\upsilon}$

Προσθέτοντας πάλι κατά μέλη, διαιρώντας με Δt και παίρνοντας το όριο $\Delta t \to 0$ καταλήγουμε πάλι την ίδια εξίσωση

$$-\vec{F}\Delta t-\vec{f}\Delta t+\vec{f}\Delta t=-m\Delta\vec{\upsilon}+\Delta m(\vec{\upsilon}'-\vec{\upsilon})-\Delta m\Delta\vec{\upsilon}\Rightarrow \vec{F}\Delta t=m\Delta\vec{\upsilon}-\Delta m(\vec{\upsilon}'-\vec{\upsilon})+\Delta m\Delta\vec{\upsilon}$$

$$\boxed{m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}+\frac{dm}{dt}(\vec{\upsilon}'-\vec{\upsilon})}$$

Αυτή είναι η εξίσωση για σύστημα μεταβλητής μάζας και ισχύει είτε ο ρυθμός μεταβολής της μάζας είναι θετικός $\frac{dm}{dt}>0$ δηλ. η μάζα αυξάνει, είτε ο ρυθμός μεταβολής της μάζας είναι αρνητικός $\frac{dm}{dt}<0$ δηλ. η μάζα μειώνεται.

Η ταχύτητα $\vec{u}=\vec{\upsilon}'-\vec{\upsilon}$ είναι η σχετική ταχύτητα της μάζας *dm* ως προς τη μάζα *m* και η εξίσωση γράφεται και :

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}+\frac{dm}{dt}\vec{u}$$

που είναι η εξίσωση του πυραύλου.

Συγκρίνοντας με τη συνήθη μορφή του νόμου του Νεύτωνα για σώμα σταθερής μάζας

$$\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}=m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}$$

βλέπουμε ότι όταν η μάζα μεταβάλλεται στο σώμα ασκείται πρόσθετη δύναμη λόγω της απώλειας ή αύξησης ορμής από την πρόσθετη μάζα που θα την ονομάσουμε προώθηση (thrust) :

$$F_T=\frac{dm}{dt}(\vec{\upsilon}'-\vec{\upsilon})$$

Ξαναγράφουμε την εξίσωση ως

$$\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}=\vec{F}+\frac{dm}{dt}\vec{\upsilon}'$$

και βλέπουμε ότι για συστήματα μεταβλητής μάζας η εξίσωση του Νεύτωνα μπορεί να γραφτεί ως

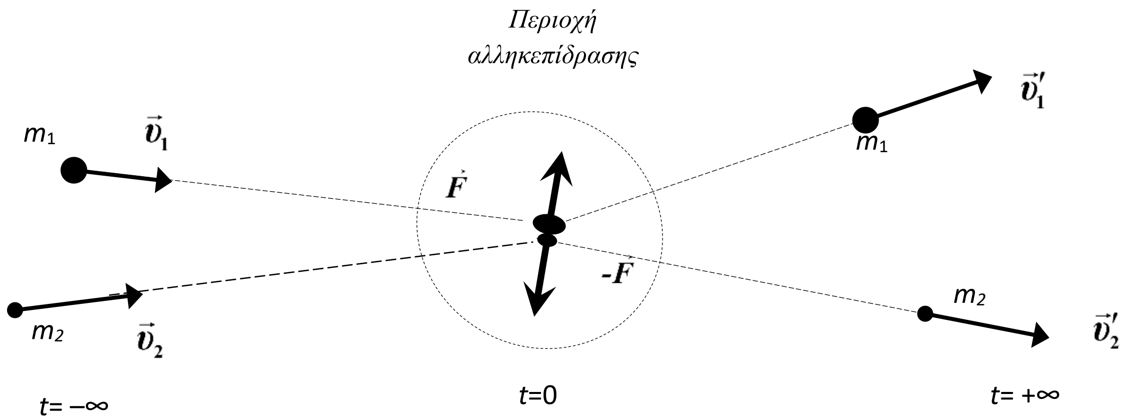
$$\frac{d(m(t)\vec{\upsilon}(t))}{dt}=\vec{F}$$

μόνο όταν η πρόσθετη μάζα Δ*m* δεν έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}'=0$ (π.χ. ιμάντας μεταφοράς στον οποίο φορτώνουμε χαλίκια με σταθερό ρυθμό, σταγόνα που πέφτει στην ατμόσφαιρα και συσσωματώνει τους ακίνητους υδρατμούς)

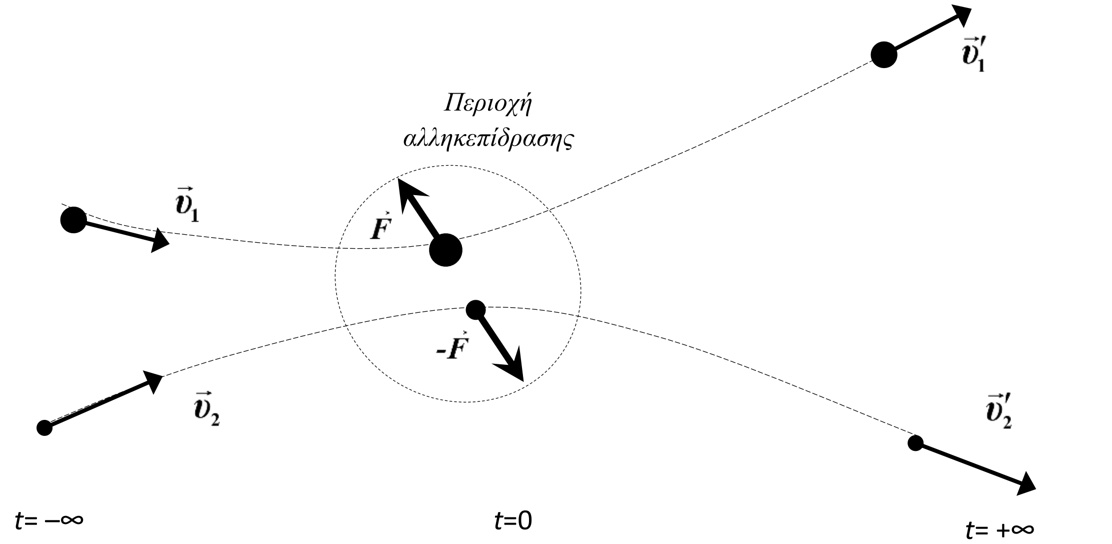
Κρούσεις

Ως κρούση θεωρούμε την αμοιβαία αλληλεπίδραση ελεύθερων σωμάτων όταν πλησιάσουν αρκετά κοντά ώστε να ανταλλάξουν ορμή και ενέργεια σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα ($\Delta t \approx 0$) μέσω των δυνάμεων δράσης αντίδρασης που ασκούν το ένα στο άλλο. Ακόμα και αν τα σώματα δεν είναι ελεύθερα, θεωρούνται ελεύθερα κατά τη διάρκεια της κρούσης γιατί αυτή διαρκεί ελάχιστα και οι εξωτερικές δυνάμεις παράγουν μηδενική ώθηση $\vec{J}_{\varepsilon\xi}=\vec{F}_{\varepsilon\xi}\Delta t\to 0$. Αν τα σώματα έρθουν σε επαφή (μακροσκοπικά) μιλάμε για ***κρούση*** ενώ αν τα σώματα δεν έρθουν σε επαφή μιλάμε για ***σκέδαση***.

ΚΡΟΥΣΗ



<u>ΣΚΕΔΑΣΗ (απωστική)</u>



*<u>Σε αυτήν την ενότητα **με τόνους** θα δηλώνουμε τα μεγέθη **μετά την κρούση** και όχι τα μεγέθη στο CM.</u>*

Στις κρούσεις μας ενδιαφέρει να βρούμε τις ταχύτητες των σωματιδίων μετά την κρούση γνωρίζοντας τις ταχύτητες πριν την κρούση (ή και αντίστροφα).

<u>Διατηρούμενα μεγέθη</u>

Επειδή στις κρούσεις θεωρούμε μόνο τις εσωτερικές δυνάμεις (ζεύγη δράσης-αντίδρασης) θα ισχύει πάντα η **διατήρηση της ορμής** πριν και μετά την κρούση:

$$\vec{P} = \vec{P}' \ ,$$

που για δύο σώματα γράφεται ως :

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{\upsilon}'_1 + m_2\vec{\upsilon}'_2 \qquad (1)$$

Αυτή είναι ισοδύναμη με τρεις εξισώσεις, μια για κάθε διάσταση *x*, *y*, *z*.

Εάν κατά την κρούση **διατηρείται και η κινητική ενέργεια** των σωμάτων, δηλαδή $K = K'$, τότε η κρούση λέγεται **ελαστική** και ισχύει :

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 \qquad (2)$$

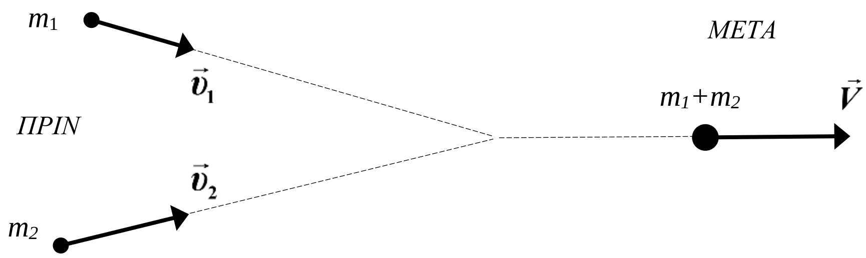
Όταν η κινητική ενέργεια δεν διατηρείται $K \neq K'$, η κρούση ονομάζεται **ανελαστική**. Η διαφορά των κινητικών ενεργειών ονομάζεται απώλεια ενέργειας και συμβολίζεται με Q :

$$Q \equiv K - K'$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 + Q$$

Η ακραία περίπτωση της ανελαστικής κρούσης είναι η **πλαστική** κρούση όπου τα δύο σώματα συσσωματώνονται και κινούνται μαζί μετά την κρούση.

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + Q_{\max}$$



Γράψαμε V για την κοινή ταχύτητα των δύο σωμάτων μετά την κρούση γιατί είναι προφανώς και η ταχύτητα του κέντρου μάζας τους η οποία είναι ίδια με αυτήν πριν την κρούση.

<u>Απώλεια ενέργειας</u>

Όταν τα σώματα είναι μακροσκοπικά η απώλεια ενέργειας Q μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια (παραμόρφωση) και σε θερμότητα λόγω της τριβής μεταξύ τους (αύξηση της θερμοκρασίας τους). Όταν τα σώματα είναι στοιχειώδη, δηλαδή υλικά σημεία, τότε ανελαστική κρούση σημαίνει αλλαγή της μάζας των σωματιδίων (δηλαδή αλλαγή της ταυτότητάς τους) που μπορεί να σημαίνει και τη δημιουργία/καταστροφή κάποιων σωματιδίων.

Καθώς η ταχύτητα του κέντρου μάζας δεν αλλάζει στις κρούσεις (αφού θεωρούμε μόνο τις εσωτερικές δυνάμεις), βλέπουμε από τους τύπους της προηγούμενης παραγράφου ότι η απώλεια ενέργειας Q προέρχεται μόνο από τη σχετική κινητική ενέργεια των δύο σωμάτων που συγκρούονται. :

$$Q \equiv K - K' = \left(K_{CM} + K_{\sigma\chi\varepsilon\tau}\right) - \left(K_{CM} + K'_{\sigma\chi\varepsilon\tau}\right) = K_{\sigma\chi\varepsilon\tau} - K'_{\sigma\chi\varepsilon\tau} = \frac{1}{2}\mu\upsilon^2 - \frac{1}{2}\mu\upsilon'^2 \Rightarrow$$

$$Q = \frac{1}{2}\mu\left(\upsilon^2 - \upsilon'^2\right)$$

Όπου υ και υ' είναι τα μέτρα των οι σχετικών ταχυτήτων μεταξύ των δύο σωμάτων πριν και μετά την κρούση και μ η ανηγμένη μάζα τους.

Όταν η κρούση είναι πλαστική τα σώματα δεν έχουν σχετική ταχύτητα μετά την κρούση υ'=0 οπότε η Q παίρνει τη μέγιστη τιμή της

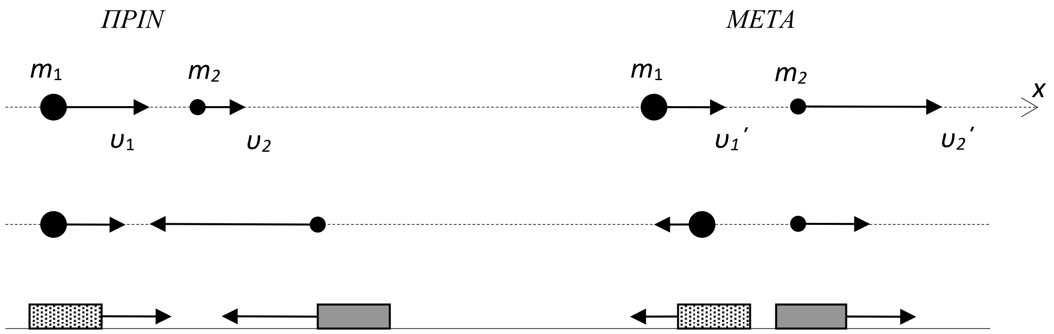
$$Q_{\max} = \frac{1}{2}\mu\upsilon^2$$

Δηλαδή το σύστημα των σωμάτων (συσσωμάτωμα) έχει μετά την κρούση μόνο την κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας και μηδενική κινητική ενέργεια σχετικής κίνησης, ή με άλλα λόγια στο σύστημα CM η κινητική ενέργεια μετά την κρούση είναι μηδέν.

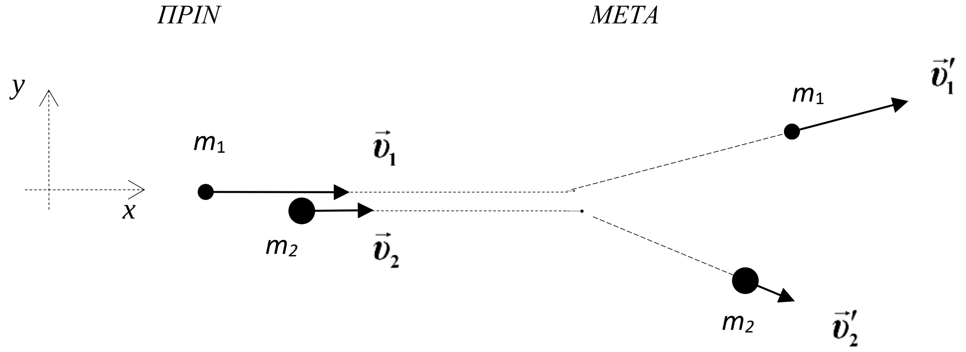
<u>Είδη κρούσεων σε μία και δύο διαστάσεις</u>

Θα εξετάσουμε μόνο περιπτώσεις όπου όλες οι ταχύτητες, αρχικές και τελικές, βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο (π.χ. μπάλες μπιλιάρδου, δίσκοι σε αεροτράπεζα, κλπ.)

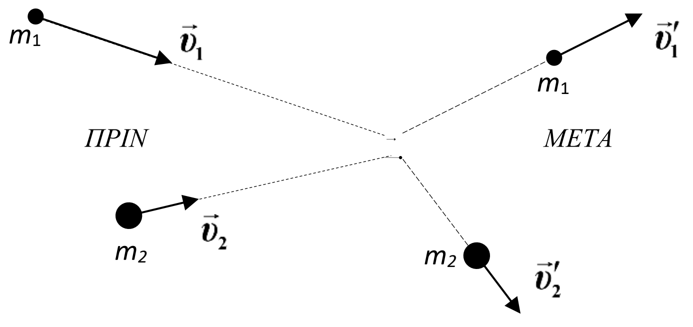
Κεντρικές ονομάζονται οι κρούσεις όπου και οι αρχικές και οι τελικές ταχύτητες είναι πάνω στην ίδια ευθεία και άρα πραγματοποιούνται σε **μία διάσταση** (*x*)



Όταν οι αρχικές ταχύτητες πριν την κρούση δεν είναι πάνω στην ίδια ευθεία αλλά παράλληλες η κρούση ονομάζεται **έκκεντρη** ή πλάγια και είναι δυσδιάστατη (*x*, *y*).



Η έκκεντρη είναι ειδικότερη περίπτωση της **μη κεντρικής κρούσης** όπου ούτε οι αρχικές ταχύτητες είναι παράλληλες



Κανόνας κρούσης του Νεύτωνα

Στην κεντρική ελαστική κρούση αντί να χρησιμοποιούμε την διατήρηση της κινητικής ενέργειας που περιέχει τις τελικές ταχύτητες στο τετράγωνο μπορούμε να χρησιμοποιούμε μια άλλη, γραμμική σχέση, που ονομάζεται κανόνας κρούσης του Νεύτωνα και λόγω της γραμμικότητάς της απλοποιεί την άλγεβρα. Αφού τα σώματα πλησιάζουν μεταξύ τους πριν την κρούση και απομακρύνονται μετά την κρούση η σχετική ταχύτητα μεταξύ τους θα αλλάξει πρόσημο και άρα θα ισχύει :

$$K = K' \Rightarrow K_{\sigma\chi\varepsilon\tau} = K'_{\sigma\chi\varepsilon\tau} \Rightarrow \frac{1}{2}\mu\upsilon^2 = \frac{1}{2}\mu\upsilon'^2 \Rightarrow \upsilon^2 = \upsilon'^2 \Rightarrow \boxed{\upsilon' = -\upsilon}$$

Η παραπάνω δεν είναι διανυσματική σχέση! Ισχύει μόνο στην διεύθυνση της σχετικής ταχύτητας. Αυτή γράφεται και ως :

$$\upsilon_1' - \upsilon_2' = -(\upsilon_1 - \upsilon_2) \Rightarrow \qquad \boxed{\upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2 + \upsilon_2'}$$

Στην ανελαστική κρούση γενικεύουμε την $\upsilon' = -\upsilon$ εισάγοντας μια εμπειρική παράμετρο :

$$\boxed{\upsilon' = -\varepsilon\upsilon}$$

με $0 \le \varepsilon \le 1$ που ονομάζεται συντελεστής κρούσης ή συντελεστής αποκατάστασης (coefficient of restitution) και εξαρτάται από τη φύση των υλικών των δύο σωμάτων (όπως ο συντελεστής τριβής). Αυτή η σχέση και για διάφορα υλικά, ισχύει με ε σταθερό για ένα μεγάλο εύρος ταχυτήτων. Για τις ταχύτητες των σωματιδίων η παραπάνω συνεπάγεται :

$$\boxed{\varepsilon\upsilon_1 + \upsilon_1' = \varepsilon\upsilon_2 + \upsilon_2'}$$

Ο συντελεστής κρούσης ε συνδέεται με την απώλεια ενέργειας Q με τη σχέση :

$$Q = \frac{1}{2}\mu\upsilon^2\left(1-\varepsilon^2\right) \Rightarrow Q = Q_{\max}\left(1-\varepsilon^2\right) \Rightarrow \varepsilon^2 = 1 - Q/Q_{\max}$$

Οπότε έχουμε :

Q=0	ε=1	ελαστική κρούση
0<Q<$Q_{\max}$	0<ε<1	ανελαστική κρούση
Q=$Q_{\max}$	ε=0	πλαστική κρούση

Κεντρική κρούση

Για την κεντρική κρούση έχουμε να λύσουμε τις δύο παρακάτω εξισώσεις για τους δύο αγνώστους υ_1' και υ_2' :

$$\boxed{\begin{gathered} m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' = m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 \\ \upsilon_1' - \upsilon_2' = -\varepsilon\upsilon_1 + \varepsilon\upsilon_2 \end{gathered}}$$

Η λύση του παραπάνω 2x2 συστήματος εξισώσεων είναι :

$$\upsilon_1' = \frac{(m_1 - \varepsilon m_2)\upsilon_1 + m_2(1+\varepsilon)\upsilon_2}{m_1 + m_2}$$

$$\upsilon_2' = \frac{m_1(1+\varepsilon)\upsilon_1 + (m_2 - \varepsilon m_1)\upsilon_2}{m_1 + m_2}$$

Για ε=1 παίρνουμε τη λύση της ελαστικής κρούσης και για ε=0 τη λύση της πλαστικής κρούσης.

Κεντρική ελαστική κρούση

$$\boxed{\begin{gathered} m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' = m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 \qquad (1) \\ \upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2 + \upsilon_2' \qquad (2) \end{gathered}}$$

$$\upsilon_1' = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1\upsilon_1 + (m_2 - m_1)\upsilon_2}{m_1 + m_2}$$

Συμμετρίες. Οι εξισώσεις (1) και (2) είναι συμμετρικές

α) στην μετάθεση $1 \leftrightarrow 2$, και
β) στην μετάθεση $\upsilon \leftrightarrow \upsilon'$
άρα και το αποτέλεσμα θα έχει τις ίδιες συμμετρίες
Οπότε α) χρειάζεται να θυμάστε μόνο τον ένα τύπο π.χ. για το υ_1' , ο άλλος θα είναι $\upsilon_2' = \upsilon_1'(1 \leftrightarrow 2)$

β) οι τύποι για τις αρχικές ταχύτητες αν γνωρίζουμε τις τελικές είναι οι ίδιοι π.χ.

$$\upsilon_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1' + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2'$$

<u>Πλαστική κρουση</u>

$$m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' = m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2$$
$$\upsilon_1' - \upsilon_2' = 0$$

Η λύση του παραπάνω 2x2 συστήματος εξισώσεων είναι :

$$\upsilon_1' = \upsilon_2' = V_{CM} = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$$

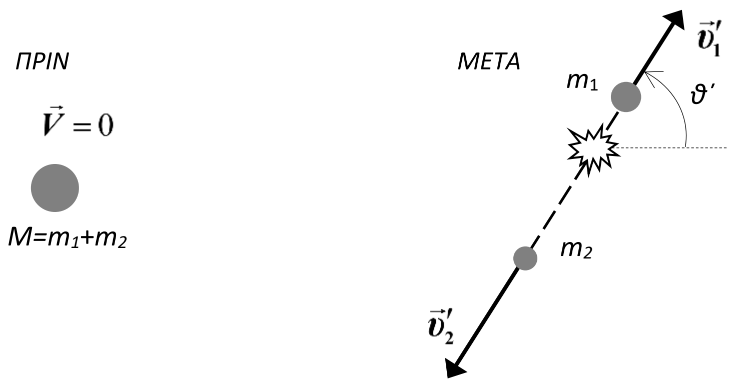
<u>Εκρήξεις</u>

Μια έκρηξη είναι το ακριβώς αντίθετο από μια πλαστική κρούση. Ένα αρχικά ακίνητο σώμα εκρήγνυται σε δύο ή παραπάνω κομμάτια (θραύσματα) χρησιμοποιώντας κάποια αποθηκευμένη ενέργεια Q που περιέχει (δυναμική ελατηρίου, χημική, πυρηνική, κλπ.). Η Q μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια των θραυσμάτων. Ζητάμε τις τελικές ταχύτητες των θραυσμάτων, δεδομένων των μαζών τους και της Q.
Η έκρηξη σε δύο θραύσματα είναι μονοδιάστατο πρόβλημα καθώς τα δύο σώματα θα εκτοξευθούν σε αντίθετες κατευθύνσεις για να διατηρηθεί η ολική ορμή στο μηδέν. Ονομάζουμε το ελαφρύτερο m_1 και το βαρύτερο m_2 και παίρνουμε ως θετική την κατεύθυνση του 1. Από τη διατήρηση της ορμής και της ενέργειας :

$$0 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2', \qquad Q = \frac{1}{2}\mu\upsilon'^2 \Rightarrow \upsilon' = \sqrt{2Q/\mu}$$

παίρνουμε δύο εξισώσεις για να βρούμε τους δύο αγνώστους υ_1' και υ_2'.

$$\upsilon_2' = -\frac{m_1}{m_2}\upsilon_1', \qquad \upsilon_1' - \upsilon_2' = \sqrt{2Q/\mu}$$

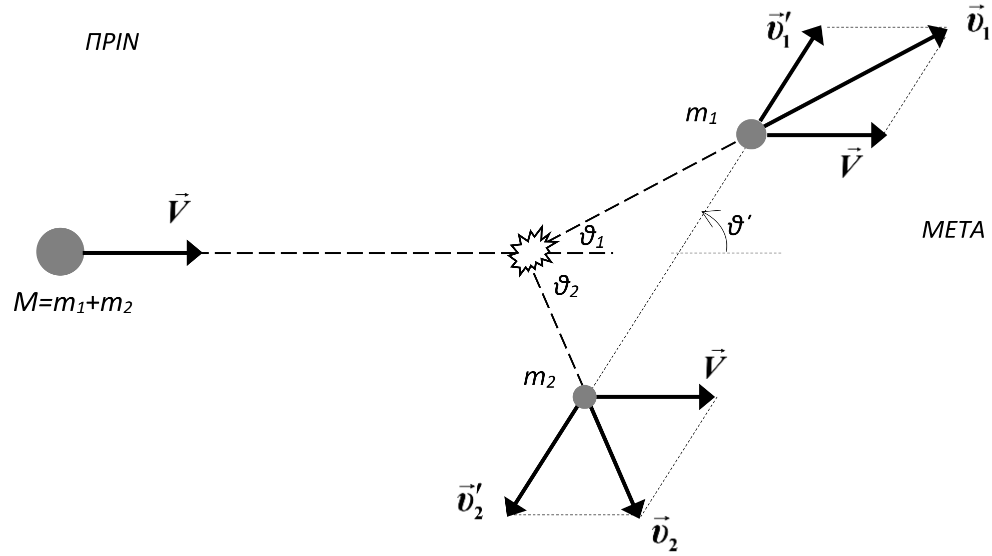


Λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων παίρνουμε :

$$\upsilon_1' - \upsilon_2' = \sqrt{2Q/\mu} \Rightarrow \upsilon_1' + \frac{m_1}{m_2}\upsilon_1' = \sqrt{2Q/\mu} \Rightarrow \qquad \upsilon_1' = \frac{\sqrt{2Q/\mu}}{1 + m_1/m_2}$$

$$\upsilon_2' = -\frac{m_1}{m_2}\upsilon_1' = -\frac{m_1}{m_2}\frac{\sqrt{2Q/\mu}}{1+m_1/m_2} \Rightarrow \qquad \upsilon_2' = -\frac{\sqrt{2Q/\mu}}{1+m_2/m_1}$$

Βλέπουμε ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε ακριβώς τα μέτρα των ταχυτήτων υ_1' και υ_2' των δύο θραυσμάτων αν ξέρουμε τις μάζες τους και τη διαθέσιμη ενέργεια Q. Η ενέργεια και η ορμή θα μοιραστούν με ένα μόνο τρόπο ανάμεσα στα δύο σωματίδια. Δεν μπορούμε όμως να ξέρουμε σε ποια κατεύθυνση θα εκτοξευθούν τα θραύσματα αν δεν γνωρίζουμε λεπτομέρειες για το μηχανισμό της έκρηξης. Από συμμετρία η γωνία θ' μπορεί να είναι οποιαδήποτε και σε οποιοδήποτε επίπεδο.
Αν το σώμα δεν είναι ακίνητο αρχικά, απλά κάνουμε τους υπολογισμούς στο σύστημα του κέντρου μάζας και στο τέλος προσθέτουμε στα αποτελέσματα και την ταχύτητα του κέντρου μάζας.



Επιλέγουμε την αρχική ταχύτητα στον άξονα x : $\vec{V} = (V, 0)$. Αρχικά βρίσκουμε τα μέτρα των ταχυτήτων υ_1' και υ_2'. Επιλέγουμε μια τυχαία γωνία θ'. Αναλύουμε τις ταχύτητες υ_1' και υ_2' σε x και y συνιστώσες. Προσθέτουμε στα αποτελέσματα την ταχύτητα του κέντρου μάζας ώστε να βρούμε τις ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$ στο σύστημα του εργαστηρίου μετά την έκρηξη :

$$\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_1' + \vec{V} = \upsilon_1'(\cos\theta', \sin\theta') + V(1,0) = (V + \upsilon_1'\cos\theta',\ \upsilon_1'\sin\theta')$$

$$\vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}_2' + \vec{V} = -\upsilon_2'(\cos\theta', \sin\theta') + V(1,0) = (V - \upsilon_2'\cos\theta',\ -\upsilon_2'\sin\theta')$$

$$\tan\theta_1 = \frac{\upsilon_1'\sin\theta'}{V + \upsilon_1'\sin\theta'}, \qquad \tan\theta_2 = \frac{-\upsilon_2'\sin\theta'}{V - \upsilon_2'\sin\theta'}$$

Ειδικά για τις εκρήξεις βλέπουμε ότι οι τόνοι στα μεγέθη των παραπάνω εξισώσεων και σχημάτων σημαίνουν και μετά την κρούση και στο σύστημα κέντρου μάζας.

Παραδείγματα

<u>Ελαστική κρούση</u>

1) Ίσες μάζες $m_1 = m_2 \Rightarrow \begin{matrix} \upsilon_1' = \upsilon_2 \\ \upsilon_2' = \upsilon_1 \end{matrix}$ ανταλλαγή ταχυτήτων

2) Ακίνητος στόχος $\upsilon_2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \upsilon_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \\ \upsilon_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \end{array}$

3) Ακίνητος στόχος και ίσες μάζες $\upsilon_2 = 0,\ m_1 = m_2 \Rightarrow \begin{array}{l} \upsilon_1' = 0 \\ \upsilon_2' = \upsilon_1 \end{array}$

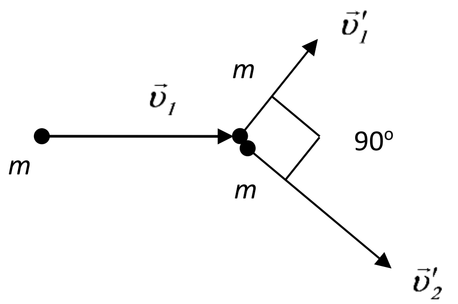
4) Ακίνητος στόχος τεράστιας μάζας $\upsilon_2 = 0, m_2 \to \infty \Rightarrow \begin{array}{l} \upsilon_1' = -\upsilon_1 \\ \upsilon_2' = 0 \end{array}$

5) Ακίνητος στόχος αμελητέας μάζας $\upsilon_2 = 0, m_1 \to \infty \Rightarrow \begin{array}{l} \upsilon_1' = \upsilon_1 \\ \upsilon_2' = 2\upsilon_1 \end{array}$

6) Ακίνητος στόχος με τριπλάσια μάζα από το βλήμα $\upsilon_2 = 0, m_2 = 3m_1 \Rightarrow \begin{array}{l} \upsilon_1' = -\upsilon_1/2 \\ \upsilon_2' = \upsilon_1/2 \end{array}$

7) Αντίθετες ταχύτητες και λόγος μαζών 3: $\upsilon_2 = -\upsilon_1,\ m_2 = 3m_1 \Rightarrow \begin{array}{l} \upsilon_1' = -2\upsilon_1 \\ \upsilon_2' = 0 \end{array}$

8) Έκκεντρη (δυσδιάστατη) ελαστική κρούση βλήματος σε ίσης μάζας στόχο → οι τελικές ταχύτητες είναι κάθετες



$$\left.\begin{array}{l} \vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \quad (\text{τρίγωνο}) \\ \dfrac{p_1^2}{2m} = \dfrac{p_1'^2}{2m} + \dfrac{p_1'^2}{2m} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p_1^2 = p_1'^2 + p_2'^2 + 2\vec{p}_1' \cdot \vec{p}_2' \\ p_1^2 = p_1'^2 + p_2'^2 \quad (\text{ορθογώνιο}) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{p}_1' \cdot \vec{p}_2' = 0 \Rightarrow \vec{p}_1' \perp \vec{p}_2'$$

9) Ακίνητος στόχος:

Μεταφορά κινητικής ενέργειας : $|\Delta K_1| \equiv K_1 - K_1' = K_2' = \dfrac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} K_1$

Κλάσμα μεταφερόμενης κινητικής ενέργειας : $\dfrac{\Delta K}{K_1} \equiv \dfrac{K_2'}{K_1} = \dfrac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = \dfrac{4\mu}{M}$

<u>Μη κεντρική πλαστική κρούση</u>

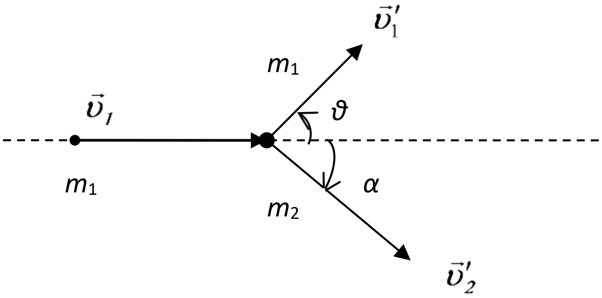
Πανομοιότυπα με τη μονοδιάστατη περίπτωση. Η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι απλά η ταχύτητα του κέντρου μάζας των δύο σωμάτων πριν την κρούση.

$$\vec{P} = \vec{P}' \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_x = P_x' \\ P_y = P_y' \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m_1\upsilon_{1x} + m_2\upsilon_{2x} = (m_1 + m_2)V_x \\ m_1\upsilon_{1y} + m_2\upsilon_{2y} = (m_1 + m_2)V_y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} V_x = \dfrac{m_1\upsilon_{1x} + m_2\upsilon_{2x}}{(m_1 + m_2)} \\ V_y = \dfrac{m_1\upsilon_{1y} + m_2\upsilon_{2y}}{(m_1 + m_2)} \end{array}$$

Ενδιαφέρουσες περιπτώσεις για ασκήσεις είναι όταν οι μάζες είναι ίσες ή οι αρχικές ταχύτητες είναι κάθετες κλπ.

<u>Μη κεντρική ελαστική κρούση : μέγιστη μεταφορά κινητικής ενέργειας</u>

Η μη κεντρική ελαστική κρούση μελετάται συνήθως στο σύστημα του εργαστηρίου όπου το ένα σωμάτιο είναι αρχικά ακίνητο (στόχος). Οι τέσσερις άγνωστοι μετά την κρούση είναι τα μέτρα των ταχυτήτων υ_1', υ_2' και οι γωνίες θ, α που παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα. Η γωνία *θ* ονομάζεται γωνία σκέδασης και η γωνία *α* γωνία ανάκρουσης.



Υπάρχουν διάφορες γωνίες *θ* και *α* κατά τις οποίες είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί η κρούση. Αυτές ορίζουν το χώρο των φάσεων. Ενδιαφερόμαστε για τη σχέση μεταξύ της ταχύτητας υ_2' του σώματος 2 μετά την κρούση και της γωνίας ανάκρουσης *α* και ειδικότερα για την τιμή της γωνίας ανάκρουσης *α* για την οποία η ταχύτητα υ_2' γίνεται μέγιστη.

Δουλεύουμε με τα διανύσματα της ορμής και γράφουμε την κινητική ενέργεια σαν συνάρτηση της ορμής $K = p^2/2m$

$$\left.\begin{array}{c} \vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \\ \dfrac{p_1^2}{2m_1} = \dfrac{p_1'^2}{2m_1} + \dfrac{p_2'^2}{2m_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} p_1'^2 = p_1^2 + p_2'^2 - 2\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2' \\ p_1'^2 = p_1^2 - p_2'^2 m_1/m_2 \end{array}\right\} \Rightarrow p_2'\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) = 2p_1\cos\alpha \Rightarrow \upsilon_2' = 2\frac{m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1\cos\alpha$$

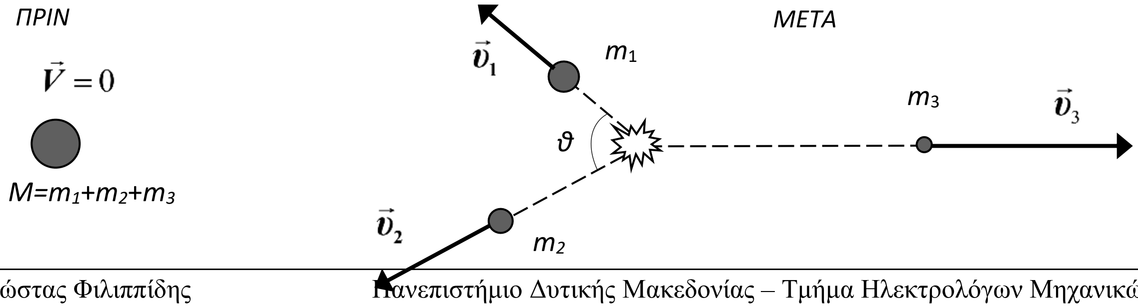
Παρατηρούμε ότι (για δεδομένες τις δύο μάζες) η υ_2' γίνεται μέγιστη όταν $\cos\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0$ και άρα $\theta=0$ ή *π*. Δηλαδή όταν η κρούση είναι κεντρική και το 2ο σώμα εκτοξεύεται κατά την κατεύθυνση του βλήματος που το χτύπησε. Σε αυτή την περίπτωση η υ_2' παίρνει τη μέγιστη δυνατή τιμή της που είναι (σε συμφωνία με την κεντρική ελαστική κρούση) :

$$\upsilon_{2,\max}' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1$$

και άρα έχουμε τη μέγιστη μεταφορά κινητικής ενέργειας από το σώμα 1 στο σώμα 2.

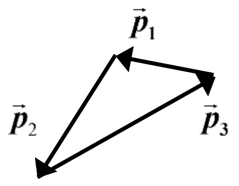
<u>Έκρηξη τριών θραυσμάτων</u>

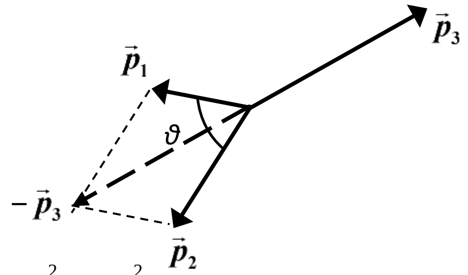
Η έκρηξη τριών θραυσμάτων είναι δυσδιάστατο πρόβλημα. Το εξετάζουμε στο σύστημα του κέντρου μάζας όπου το αρχικό σώμα θεωρείται ακίνητο. Οι ορμές των θραυσμάτων μετά την έκρηξη πρέπει να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και να αθροίζουν μηδέν. Το επίπεδο αυτό βέβαια μπορεί να είναι οποιοδήποτε. Έτσι έχουμε τέσσερις ουσιαστικά αγνώστους τα μέτρα των ορμών p_1, p_2, p_3 και τη γωνία *θ* μεταξύ των 1 και 2.



Διατήρηση ορμής (2 εξισώσεις): $\vec{p}_1+\vec{p}_2+\vec{p}_3=0 \Rightarrow \vec{p}_3=-(\vec{p}_1+\vec{p}_2)$

Η παραπάνω εξίσωση σημαίνει ότι οι ορμές πρέπει να φτιάχνουν τρίγωνο.





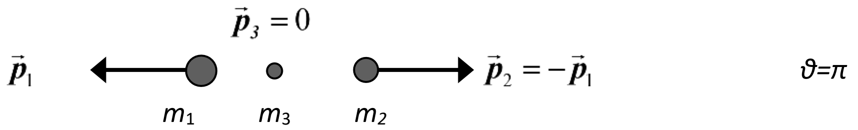
Διατήρηση ενέργειας (1 εξίσωση) : $Q=\dfrac{p_1^2}{2m_1}+\dfrac{p_2^2}{2m_2}+\dfrac{p_3^2}{2m_3}$

Η παραπάνω εξίσωση σημαίνει ότι το συνολικό μήκος των πλευρών του τριγώνου είναι σταθερό.
Από τις τρεις εξισώσεις που έχουμε μπορούμε να βρούμε μόνο τους τρεις από τους τέσσερις αγνώστους. Έτσι, αντίθετα με την έκρηξη δύο θραυσμάτων, εδώ οι ορμές και άρα οι ταχύτητες όλων των θραυσμάτων δεν προσδιορίζονται μοναδικά. Η ενέργεια και η ορμή μπορούν να μοιραστούν με διάφορους τρόπους ανάμεσα στα θραύσματα. Αυτό μπορούμε να το δούμε εύκολα στο τρίγωνο των ορμών. Το κατασκευάζουμε με μια θηλιά που την τεντώνουμε με ένα δάχτυλο από το ένα χέρι και δύο από το άλλο. Τότε «ανοίγοντας» την γωνία μεταξύ των πλευρών 1 και 2 (ανοίγοντας τα δάχτυλα του ίδιου χεριού) το μήκος της πλευράς 3 μεγαλώνει. Το να ανοίξουμε τα δάχτυλα σημαίνει ότι «κλείνει» η γωνία θ.
Έτσι η ταχύτητα του τρίτου έστω σωματιδίου μπορεί να πάρει ένα φάσμα τιμών που εξαρτάται από τις ορμές p_1, p_2 και τη γωνία θ μεταξύ τους:

$$-\vec{p}_3=\vec{p}_1+\vec{p}_2 \Rightarrow p_3^2=p_1^2+p_2^2+2\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2=p_1^2+p_2^2+2p_1\,p_2\cos\theta \Rightarrow$$

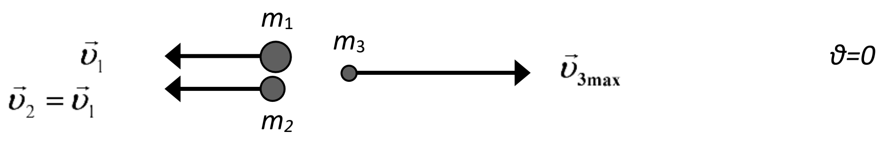
$$p_3=\sqrt{p_1^2+p_2^2+2p_1\,p_2\cos\theta}$$

Η ελάχιστη τιμή της p_3 είναι το μηδέν όταν το σωματίδιο 3 μείνει ακίνητο στο κέντρο και τα άλλα δύο θραύσματα εκτοξευθούν αντιδιαμετρικά με αντίθετες ορμές σαν να ήταν η έκρηξη δύο θραυσμάτων:



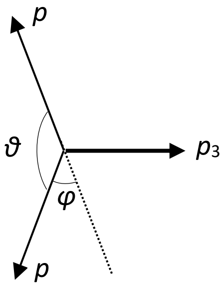
$$p_{3\min}=0 \qquad \text{για} \quad \cos\theta=-1 \quad \text{και} \quad p_1=p_2=\sqrt{2Q\mu_{12}}$$

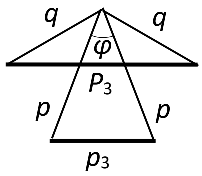
Η μέγιστη τιμή της p_3 θα είναι όταν η έκρηξη αναχθεί επίσης σε έκρηξη δύο θραυσμάτων όπου τώρα το ένα είναι το σωματίδιο 3 και το άλλο τα σωματίδια 1 και 2 μαζί, τα οποία εκτοξεύονται αντίθετα με το 1

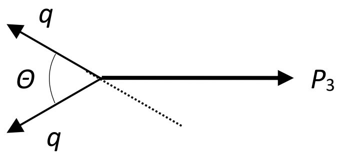


$$p_{3\max}=\sqrt{2Q\mu_{(12)3}} \qquad \text{για} \quad \cos\theta=1 \quad \text{και} \quad \upsilon_1=\upsilon_2$$

Για τις ενδιάμεσες γωνίες π.χ. στην απλή περίπτωση όπου έστω $|\vec{p}_1'|=|\vec{p}_2'|=p$ τότε όσο «κλείνει» η γωνία θ τόσο μεγαλώνει η p_3 για να διατηρηθεί η ορμή στο μηδέν (παρόλο που η p μικραίνει σε q για να ισχύει η διατήρηση της ενέργειας):







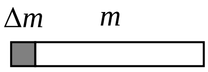
Το παραπάνω γεγονός έχει άμεση εφαρμογή στη διάσπαση β των πυρήνων και στην ανακάλυψη του νετρίνου.

Πύραυλος (ή αεριωθούμενο)

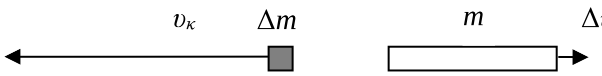
Το αντιμετωπίζουμε ως έκρηξη ακίνητου σώματος.

Στο κέντρο μάζας του συστήματος καύσιμα – πύραυλος τη χρονική στιγμή t πριν την εκτόξευση των καυσαερίων η ορμή του συστήματος είναι μηδέν :

$$p = 0$$



Τη χρονική στιγμή $t+\Delta t$ έχουν καεί καύσιμα Δm εκλύοντας συγκεκριμένη ενέργεια. Αυτή μετατρέπεται σε κινητική εκτοξεύοντας τα καυσαέρια προς τα πίσω και προωθώντας τον πύραυλο προς τα μπροστά.



Η σχετική ταχύτητα u, των δύο πλέον σωμάτων, καυσαέρια – πύραυλος, είναι δεδομένη, δεδομένης της χημικής ενέργειας που εκλύεται κατά την καύση. Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων έχουν μέτρα (δες σύστημα δύο σωμάτων και κέντρο μάζας):

$$\upsilon_\kappa = \frac{m}{m+\Delta m}u \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} u\,, \qquad \upsilon_\pi = \frac{\Delta m}{m+\Delta m}u = \Delta\upsilon \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} 0$$

Όλη η παραπάνω συζήτηση σκοπό έχει να κάνει κατανοητό ότι η μάζα των καυσαερίων Δm και η ταχύτητα του πυραύλου $\Delta\upsilon$ είναι τα μικρά μεγέθη για $\Delta t\to 0$. Έτσι απαιτώντας πάλι η ολική ορμή του συστήματος να είναι 0, γράφουμε το πολύ απλό:

$$p' = 0 \Rightarrow m\Delta\upsilon = \Delta m \upsilon_\kappa$$

από όπου διαιρώντας με Δt και παίρνοντας το όριο $\Delta t\to 0$ έχουμε :

$$m\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\upsilon_\kappa\frac{\Delta m}{\Delta t}\right) \Rightarrow m\frac{d\upsilon}{dt} = u\frac{dm}{dt} \Rightarrow \qquad \boxed{F_T = u\frac{dm}{dt}}$$

καθώς ως δύναμη προώθησης (thrust) «παραδοσιακά» ορίζεται η εναπομείνασα μάζα m του πυραύλου επί την επιτάχυνσή της: $F_T \equiv m\dfrac{d\upsilon}{dt}$

Ολοκληρώνοντας την $m\dfrac{d\upsilon}{dt} = u\dfrac{dm}{dt}$ παίρνουμε

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = u\frac{dm}{dt} \Rightarrow d\upsilon = u\frac{dm}{m} \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = u\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} \Rightarrow \upsilon(t) = \upsilon_0 + u\ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right)$$

Η u είναι η σχετική ταχύτητα των καυσαερίων ως προς τον πύραυλο. Είναι αρνητική ποσότητα καθώς δείχνει προς τα αριστερά. Επίσης αρνητικός είναι ο χρονικός ρυθμός μεταβολής της μάζας οπότε η δύναμη προώθησης είναι θετική προς τα δεξιά όπως πρέπει.
Η σχετική ταχύτητα u των καυσαερίων είναι μια σταθερά του προβλήματος. Η εκλυόμενη ενέργεια από την καύση θα είναι ανάλογη της μάζας Δm που αντιδρά και μπορούμε να γράψουμε :

$$Q = \lambda\Delta m \Rightarrow dQ = \lambda dm$$

όπου λ (J/kg) κάποια σταθερά από τη θερμοχημεία. Αν όλη αυτή η χημική ενέργεια μετατραπεί σε κινητική θα έχουμε για την κινητική ενέργεια στο κέντρο μάζας

$$K' = Q \Rightarrow dK' = dQ$$

Όμως $K' = \frac{1}{2}\mu u^2$ όπου μ η ανηγμένη μάζα των δύο σωμάτων. Αυτή είναι

$$\mu = \frac{m\Delta m}{m + \Delta m} \xrightarrow[\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta m \to 0}]{} \Delta m$$

Άρα $dK' = \frac{1}{2}dmu^2$

Οπότε θα έχουμε $dK' = dQ \Rightarrow \frac{1}{2}dmu^2 = \lambda dm \Rightarrow \qquad u = \sqrt{2\lambda}$

Ο ρυθμός μείωσης της μάζας dm/dt ελέγχεται και μπορεί αν επιθυμούμε να διατηρηθεί σταθερός. Είναι ανάλογος της ταχύτητας της αντίδρασης η οποία εξαρτάται από διάφορους παράγοντες (συγκέντρωση αντιδρώντων, θερμοκρασία, πίεση, κατάσταση αντιδρώντων, κλπ.) τους οποίους μπορούμε να ρυθμίζουμε.

Ουσιαστικά επαναλάβαμε την ανάλυση για σύστημα μεταβλητής μάζας. Παίρνοντας κατευθείαν την εξίσωση $m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}(\vec{\upsilon}' - \vec{\upsilon})$ για $\vec{F} = 0$ και αναγνωρίζοντας ότι $\vec{u} = \vec{\upsilon}' - \vec{\upsilon}$ έχουμε την εξίσωση του πυραύλου