Διατήρηση ορμής

Η πρώτη σημαντική συνέπεια των νόμων του Νεύτωνα : 1-2) $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{ολ}$, 3) $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$

είναι η **αρχή διατήρησης της ορμής**.

Για ένα απομονωμένο σώμα ή απομονωμένο σύστημα σωματιδίων ο $2^{ος}$ νόμος ισοδυναμεί με τη διατήρηση της ορμής

$$\boxed{\vec{F}_{ολ} = 0 \Rightarrow \vec{p} = 0 \text{ ή σταθερή}}$$

Ο $3^{ος}$ νόμος επίσης ισοδυναμεί με την αρχή διατήρησης της ορμής ενώ ταυτόχρονα καταδεικνύει τον μηχανισμό της διατήρησης της ορμής για δύο απομονωμένα σώματα που υπόκεινται μόνο στην αμοιβαία αλληλεπίδρασή τους

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} \Rightarrow \vec{F}_{ολ,συστημα} = \vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{2/1} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{ολ} = 0 \text{ ή σταθερή}$$

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} \Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{σταθ.},$$

και εύκολα μπορεί να γενικευτεί για οποιοδήποτε αριθμό σωματιδίων.

Ο $3^{ος}$ νόμος δεν ισχύει για τη μαγνητική δύναμη όμως η αρχή διατήρησης της ορμής αποκαθίσταται λαμβάνοντας υπόψη και την ορμή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (κύματος) που μεσολαβεί.

<u>Θεώρημα Ώθησης – Ορμής</u>

Από το $2^{ο}$ νόμο ορίζεται το μέγεθος της ώθησης (ή ώσης) $\vec{J}$ ως η μεταβολή της ορμής που επιφέρει μια δύναμη που δρα επί χρονικό διάστημα *Δt*.

$$d\vec{J} \equiv d\vec{p} = \vec{F}dt \Rightarrow \boxed{\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \Delta\vec{p}}$$

Όταν ο $2^{ος}$ νόμος γράφεται σε αυτή τη μορφή ονομάζεται θεώρημα ώθησης – ορμής.

Αν η δύναμη είναι σταθερή τότε $\boxed{\vec{J} = \vec{F}\Delta t = \vec{F}(t_2 - t_1)}$

Η έννοια της ώθησης είναι χρήσιμη όταν γνωρίζουμε τη δύναμη σαν συνάρτηση του χρόνου. Τότε αν γνωρίζουμε την ταχύτητα του σώματος κάποια αρχική στιγμή προσδιορίζουμε την ταχύτητα του μια οποιαδήποτε άλλη χρονική στιγμή από:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \frac{1}{m}\vec{J}(t)$$

Επίσης χρησιμοποιείται για να προσδιορίσουμε τη μέση τιμή της δύναμης κάποιο χρονικό διάστημα *Δt* :

$$\bar{\vec{F}} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \quad \text{ή απλά σε μια διάσταση} \quad \bar{F} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

Το θεώρημα ώθησης – ορμής χρησιμοποιείται κυρίως για την εύρεση της κίνησης συστημάτων μεταβλητής μάζας (π.χ. πύραυλος).

Διατήρηση στροφορμής

Για τη στροφορμή υλικών σημείων ο $2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα γράφεται

$$\vec{r} \times \vec{F}_{ολ} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{\tau}_{ολ} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

Αφού $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ καθώς ο πρώτος όρος $\dfrac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = m\vec{\upsilon} \times \vec{\upsilon} = 0$

Αν η μεταξύ δύο σωμάτων ***δύναμη είναι και κεντρική***, δηλαδή αν

$$\vec{F}_{1/2} = f(r)\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = f(r)\vec{r}_{12} \qquad \text{όπου } r = \left|\vec{r}_{12}\right|$$

τότε εκτός από την ορμή διατηρείται και η στροφορμή τους :

$$\frac{d\vec{L}_1}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{1/2} = \vec{r}_1 \times f(r)\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = -f(r)\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = f(r)\vec{r}_2 \times \vec{r}_1 =$$

$$= -\vec{r}_2 \times f(r)\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) = -\vec{r}_2 \times \vec{F}_{2/1} = -\frac{d\vec{L}_2}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\left(\vec{L}_1 + \vec{L}_2\right)}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Αντίστοιχα με την ώθηση ορίζεται η στροφική ώθηση

$$d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt \Rightarrow \boxed{\Delta\vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}\,dt}$$

Τα παραπάνω μπορούν εύκολα να γενικευτούν και για οποιοδήποτε αριθμό σωματιδίων μεγαλύτερου του δύο.

Έργο – Ενέργεια – Ισχύς

Η επόμενη σημαντική συνέπεια των νόμων του Νεύτωνα είναι η διατήρηση της ενέργειας.

<u>Ορισμός έργου</u>

Με την έννοια του έργου ποσοτικοποιούμε τον «κόπο» που καταβάλουμε ασκώντας δύναμη για να προκαλέσουμε μια μεταβολή σε ένα σώμα, δηλαδή, είτε να το μετατοπίσουμε κατά $\Delta\vec{r}$ αλλάζοντας τη θέση του, είτε να αλλάξουμε (παραμορφώσουμε) το σχήμα του (αν δεν είναι υλικό σημείο αλλά εκτεταμένο σώμα). Ορίζεται ως η συνιστώσα της εφαρμοζόμενης δύναμης στην διεύθυνση της μετατόπισης $F_{\parallel}$, επί το μέτρο της μετατόπισης $|\Delta\vec{r}|$ που προκαλεί στο σημείο εφαρμογής της.

Αν η δεδομένη δύναμη είναι σταθερή και η μετατόπιση ευθύγραμμη έχουμε :

$$W = F_{\parallel}\left|\Delta\vec{r}\right| = F\left|\Delta\vec{r}\right|\cos\theta = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

Σημειώνουμε ότι η $\vec{F}$ είναι μια από τις δυνάμεις που δρουν στο σώμα και όχι η $\vec{F}_{o\lambda}$. Η τροχιά του σώματος καθορίζεται από την $\vec{F}_{o\lambda}$ και όχι μόνο από την $\vec{F}$.

Η μονάδα μέτρησης του έργου στο SI είναι το τζάουλ J : $[W]=[F][r]=\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}=\mathrm{J}$

Στη γενική περίπτωση όπου η μετατόπιση δεν είναι ευθύγραμμη και η δύναμη δεν είναι σταθερή χωρίζουμε την τροχιά σε στοιχειώδη ευθύγραμμα κομμάτια κατά τα οποία η δύναμη μπορεί να θεωρηθεί σταθερή και προσθέτουμε (ολοκληρώνουμε) τα επιμέρους στοιχειώδη έργα :

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow W_{12} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Αυτό είναι ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα και γενικά εξαρτάται από το σχήμα της τροχιάς (καμπύλης) που ακολουθεί το σώμα.

<u>Έργο στην περιστροφική κίνηση</u>

Για σώμα που εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας R μόνο η εφαπτομενική συνιστώσα F_t της δύναμης, θα παράγει έργο

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_t ds = F_t R d\theta = \tau d\theta \Rightarrow W_{12} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta$$

Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας

Προκύπτει ότι : το έργο της ολικής δύναμης, $\vec{F}_{o\lambda}$, κατά τη μετακίνηση ενός υλικού σημείου από τη θέση $\vec{r}_1$ όπου έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ στη θέση $\vec{r}_2$ όπου έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$ είναι ίσο με τη μεταβολή ενός μεγέθους K που θα ονομάσουμε ***κινητική ενέργεια*** :

$$K=\frac{1}{2}m\upsilon^2$$

Δηλαδή : $W_{12}=K_2-K_1$ ή $dW=dK$

Απόδειξη:

$$W_{12}=\int_1^2\vec{F}_{o\lambda}\cdot d\vec{r}=m\int_1^2\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot d\vec{r}=m\int_1^2 d\vec{\upsilon}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=m\int_1^2\vec{\upsilon}\cdot d\vec{\upsilon}=m\int_1^2 d\left(\frac{1}{2}\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon}\right)=\frac{m}{2}\int_1^2 d\left(\upsilon^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}m\upsilon_2^2-\frac{1}{2}m\upsilon_1^2=K_2-K_1$$

$$\left[\ \vec{\upsilon}\cdot d\vec{\upsilon}=\upsilon_x d\upsilon_x+\upsilon_y d\upsilon_y+\upsilon_z d\upsilon_z=d\left(\frac{1}{2}\upsilon_x^2\right)+d\left(\frac{1}{2}\upsilon_y^2\right)+d\left(\frac{1}{2}\upsilon_z^2\right)=\frac{1}{2}d\left(\upsilon^2\right)\ \right]$$

Ο τύπος της κινητικής ενέργειας $K=\frac{1}{2}m\upsilon^2$ είναι επίσης προσεγγιστικός (όπως και ο τύπος της ορμής $\vec{p}=m\vec{\upsilon}$) και δεν ισχύει για ταχύτητες κοντά στην ταχύτητα του φωτός (σχετικιστικές). Για πληρότητα σας δίνω τον πλήρη τύπο της κινητικής ενέργειας : $K=(\gamma-1)mc^2=\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}-1\right)mc^2$

Δείξτε ότι για τις μικρές ταχύτητες της καθημερινότητας $\upsilon<<c$ ισχύει : $K=(\gamma-1)mc^2=\frac{1}{2}m\upsilon^2+...$

Για ένα σύστημα σωματιδίων η συνολική κινητική του ενέργεια ορίζεται κατά τα γνωστά ως το άθροισμα των επιμέρους κινητικών ενεργειών των σωματιδίων που το απαρτίζουν :

$$K=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\upsilon_i^2$$

Διατηρητικές ή συντηρητικές δυνάμεις

Για ορισμένες δυνάμεις ισχύει επίσης το εξής: το έργο τους δεν εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθεί το σώμα αλλά μόνο από την αρχική και την τελική του θέση ξεχωριστά. Ή ισοδύναμα το έργο για μια κλειστή διαδρομή είναι μηδέν. Τότε το έργο θα γράφεται σαν :

$$W_{12}=U_1-U_2 \quad \text{ή} \quad \int_1^2\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int_1^2 dU\equiv U_1-U_2 \quad \text{ή} \quad dW=-dU$$

απ΄ όπου ορίζεται η ποσότητα U που εξαρτάται μόνο από τη θέση του σώματος και ονομάζεται ***δυναμική ενέργεια***.

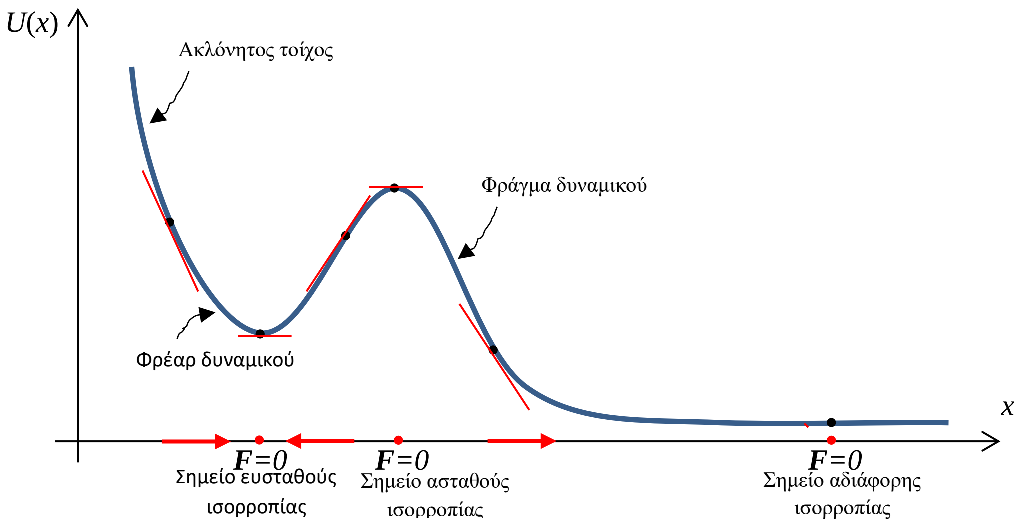
Μόνο οι διαφορές της δυναμικής ενέργειας από ένα σημείο σε ένα άλλο μας ενδιαφέρουν καθώς η διαφορά είναι που αντιστοιχεί σε κάποιο φυσικό μέγεθος, στο έργο. Έτσι θέτουμε την δυναμική ενέργεια ίση με το μηδέν αυθαίρετα $U(\vec{r}_0)=0$ σε κάποιο σημείο αναφοράς (το 2), εκεί που μας βολεύει κάθε φορά και η δυναμική ενέργεια κάθε άλλου σημείου $\vec{r}$ (του 1) ορίζεται ως :

$$U(\vec{r})-U(\vec{r}_0)=W(\vec{r}\to\vec{r}_0)\Rightarrow U(\vec{r})=\int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0}\vec{F}\cdot d\vec{r}'\Rightarrow$$

το έργο της δύναμης για τη μετακίνηση του υλικού σημείου από εν λόγω σημείο στο σημείο αναφοράς.

Αντίστροφα η δύναμη συνδέεται με τη δυναμική ενέργεια ως εξής:

για μονοδιάστατα προβλήματα: $\boxed{F=-\frac{dU}{dx}}$ (από $Fdx=-dU$)



Για τρισδιάστατα προβλήματα: $\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} U}$ (από $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU$).

Το αντικείμενο $\vec{\nabla}\varphi(x, y, z)$ που ονομάζεται κλίση ή βαθμίδα μιας βαθμωτής συνάρτησης $\varphi(x, y, z)$ των τριών μεταβλητών x, y, z της θέσης, είναι ένα διάνυσμα που κατασκευάζεται από τις μερικές παραγώγους της φ:

$$\vec{\nabla}\varphi(x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\hat{z}$$

και είναι στην κατεύθυνση στην οποία η συνάρτηση φ μεταβάλλεται κατά το μέγιστο χωρικά.
Ο τελεστής

$$\vec{\nabla} = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

ονομάζεται ανάδελτα ή del.
Αφού $d\varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx$ είναι η μεταβολή της συνάρτησης φ στην κατεύθυνση x, δηλαδή όταν το x μεταβληθεί από x σε $x+dx$, κατ' αναλογία με τη μεταβολή συνάρτησης $f(x)$ μιας μεταβλητής $df = \frac{df}{dx}dx$ η συνολική μεταβολή της φ όταν το διάνυσμα θέσης μεταβληθεί από

$$\vec{r} = (x, y, z) \xrightarrow{\sigma\varepsilon} \vec{r}' = (x', y', z') = (x+dx, y+dy, z+dz) = (x, y, z) + (dx, dy, dz) = \vec{r} + d\vec{r}$$

Η συνολική μεταβολή της φ θα είναι

$$d\varphi = d\varphi_x + d\varphi_y + d\varphi_z = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz = \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r}$$

Μπορείτε εύκολα να αποδείξετε ότι για κάθε βαθμωτή συνάρτηση φ ισχύει η διανυσματική ταυτότητα :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = 0$$

Φανταστείτε το σαν το εξωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος με τον εαυτό του το οποίο είναι μηδέν.

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \hat{x}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}\right) = 0$$

Αφού $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}$, κλπ. , η σειρά της παραγώγισης δεν έχει σημασία.

Μη συντηρητικές δυνάμεις

Όλες οι δυνάμεις τριβής και αντίστασης ρευστών (οπισθέλκουσα) οι οποίες είναι πάντα αντίθετες στην ταχύτητα του σώματος είναι μη συντηρητικές. Το έργο τους είναι πάντα αρνητικό αφού είναι αντίθετες στη μετατόπιση και εξαρτάται από τη διαδρομή του σώματος. Όσο μεγαλύτερο είναι το μήκος της διαδρομής του σώματος τόσο μεγαλύτερο είναι και το έργο των μη συντηρητικών δυνάμεων.

Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας

Οι δυνάμεις που παρουσιάζουν την παραπάνω ιδιότητα λέγονται διατηρητικές (ή συντηρητικές) γιατί στην περίπτωσή τους υπάρχει μια ποσότητα E που ονομάζεται ολική μηχανική ενέργεια και ορίζεται ως το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας : $E = K + U$

η οποία διατηρείται, δηλαδή παραμένει σταθερή κατά την κίνηση του σώματος :

$$W_{12} = U_1 - U_2 \Rightarrow K_2 - K_1 = U_1 - U_2 \Rightarrow U_2 + K_2 = U_1 + K_1 \Rightarrow E_2 = E_1 = \sigma\tau\alpha\theta$$

$$dU + dK = 0 \Rightarrow dE = 0$$

Αν σε ένα σώμα δρουν τόσο συντηρητικές (σ) όσο και μη συντηρητικές δυνάμεις ($\mu\sigma$) τότε έχουμε:

$$W_{12} = U_1 - U_2 + W_{12}^{\mu\sigma} \Rightarrow K_2 - K_1 = U_1 - U_2 + W_{12}^{\mu\sigma} \Rightarrow$$

$$E_2 = E_1 + W_{12}^{\mu\sigma} \Rightarrow dE = dW^{\mu\sigma}$$

Χρησιμότητα της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας

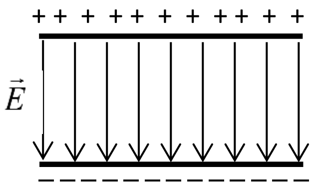
Η διατήρηση της ενέργειας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη καθώς μας επιτρέπει να λύνουμε προβλήματα χωρίς να μπαίνουμε στις λεπτομέρειες της κινητικής και *χωρίς να εμπλέκουμε το χρόνο*.

Η βαρυτική και η ηλεκτροστατική δύναμη είναι διατηρητικές. Για τη βαρυτική δύναμη κοντά στην επιφάνεια της Γης, δηλαδή το βάρος, την οποία θεωρούμε σταθερή και με κατεύθυνση προς τα κάτω ($F_G \,||\, -y$), η δυναμική ενέργεια θα είναι :

$$F_G = -mg \Rightarrow U_G = \int_h^0 (-mg)dy' = -mgy\Big|_h^0 \Rightarrow U_G = mgh$$

Όπου θεωρούμε την δυναμική ενέργεια ίση με μηδέν στην επιφάνεια της Γης (h=0) όπου h είναι το ύψος του σώματος από την επιφάνεια.

Ακριβώς παρόμοια σε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο (π.χ. επίπεδος πυκνωτής), το οποίο επίσης κατευθύνεται προς τα κάτω ($E \,||\, -y$), θα ισχύει αντίστοιχα για την ηλεκτροστατική ενέργεια



$$F_E = -qE \Rightarrow U_E = \int_y^0 \left(-qE\right) dy' \Rightarrow U_E = qEy$$

Ένα θετικό φορτίο (q>0) θα «πέσει» προς τα κάτω όπου η δυναμική ενέργεια ελαττώνεται. Προς τα εκεί δηλαδή που δείχνει το ηλεκτρικό πεδίο. Αντίθετα, προς τα πάνω, θα κινηθεί ένα αρνητικό φορτίο επίσης όμως μειώνοντας τη δυναμική του ενέργεια κινούμενο προς μεγαλύτερα x και άρα κάνοντας πιο αρνητική τη δυναμική του ενέργεια.

Γενικά οι δυνάμεις **σταθερής κατεύθυνσης** αποδεικνύεται ότι είναι διατηρητικές

$$W(A \to B) = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}_{AB}$$

Η ***μαγνητική δύναμη δεν παράγει ποτέ έργο*** καθώς είναι πάντα κάθετη στην ταχύτητα και υπό αυτήν την έννοια μπορεί να θεωρηθεί διατηρητική.

Μια ***δύναμη επαναφοράς*** (π.χ. ελατήριο που ακολουθεί το νόμο του Hooke)
$F_s = -kx$
είναι επίσης διατηρητική με δυναμική ενέργεια :
$$U_s = \int_x^0 (-kx)dx \Rightarrow U_s = \frac{1}{2}kx^2$$
όπου x είναι η επιμήκυνση (x>0) ή η συσπείρωση (x<0) του ελατηρίου από τη θέση ισορροπίας του (x=0, το φυσικό του μήκος).

Τέλος δείχνουμε ότι και ***οι κεντρικές δυνάμεις είναι διατηρητικές***, δηλαδή το έργο τους εξαρτάται μόνο από το αρχικό σημείο Α και από το τελικό σημείο Β που βρίσκονται στις θέσεις $\vec{r} = \vec{a}$ και $\vec{r} = \vec{b}$ αντίστοιχα και όχι από τη διαδρομή (καμπύλη) C που ακολουθούμε για να πάμε από το ένα στο άλλο. Μάλιστα εξαρτάται μόνο από τις αποστάσεις τους από την αρχή των αξόνων r_A και r_B.
$$W_{A\to B} = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F}(r)\cdot d\vec{r}_C = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} f(r)\hat{r}\cdot d\vec{r}_C$$
Επειδή η δύναμη είναι κεντρική μόνο το ακτινικό κομμάτι της διαδρομής, δηλ. του $d\vec{r}_C$, θα συνεισφέρει στο ολοκλήρωμα ανεξάρτητα από τη διαδρομή δηλ.
$$\hat{r}\cdot d\vec{r}_C = \hat{r}\cdot\left(\hat{r}\ dr + \hat{\theta}\ r_C d\theta + \hat{\varphi}\ r_C \sin\theta_C d\varphi\right) = \hat{r}\cdot\hat{r}dr = dr$$
αφού $\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0,\quad \hat{r}\cdot\hat{\varphi} = 0$ επειδή είναι κάθετα. Έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται ένα ορισμένο μονοδιάστατο ολοκλήρωμα στη μεταβλητή r που εξαρτάται μόνο από τα όριά του :
$$W_{A\to B} = \int_{r_A}^{r_B} f(r)dr = U(r_A) - U(r_B)$$
όπου $\dfrac{dU(r)}{dr} = -f(r)$

Οπότε για την ηλεκτροστατική δύναμη (Coulomb) καθώς και την βαρυτική δύναμη του νόμου του Νεύτωνα που είναι κεντρικές δυνάμεις οι αντίστοιχες δυναμικές ενέργειες είναι
$$U_e(r) - U_e(\infty) = W_e(r\to\infty) \Rightarrow U_e(r) = W_e(r\to\infty) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r^{-2+1}}{-2+1}\right)_r^\infty \Rightarrow$$
$$\boxed{U_e(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r}}$$
$$U_g(r) - U_g(\infty) = W_g(r\to\infty) \Rightarrow U_g(r) = W_g(r\to\infty) = -GMm\int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} = -GMm\left(\frac{r^{-2+1}}{-2+1}\right)_r^\infty \Rightarrow$$
$$\boxed{U_g(r) = -\frac{GMm}{r}}$$
Στην επιφάνεια της Γης, δηλαδή για ύψη $h << R_\Gamma$, χρησιμοποιώντας την προσέγγιση $(1+x)^n = 1 + nx + O(x^2) \approx 1 + nx$, που ισχύει για $x << 1$ παίρνουμε
$$U_g(h) \equiv U_g(R_\Gamma + h) = -\frac{G\,M_\Gamma m}{R_\Gamma + h} = -\frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma(1+h/R_\Gamma)} = -\frac{G\,M_\Gamma m}{R_\Gamma}\left[1 - \frac{h}{R_\Gamma} + O(x^2)\right] \approx -\frac{G\,M_\Gamma m}{R_\Gamma} + \frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma^2}h \Rightarrow$$
$$U_g(h) = U_g(R) + mgh \qquad \text{όπου } g = \frac{G_\Gamma M_\Gamma}{R^2}$$
Καθώς ενδιαφερόμαστε πάντα για διαφορές δυναμικής ενέργειας μπορούμε να αγνοούμε τον σταθερό όρο και να θέτουμε για τη δυναμική ενέργεια μιας μάζας m σε μικρό ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης:

$$\boxed{U_g = mgh}$$

Δυναμικό

Εκτός από τη δυναμική ενέργεια ενός σώματος μάζας m (ή φορτίου q) μέσα στο πεδίο που δημιουργεί η μάζα M (ή το φορτίο Q) ορίζεται και η έννοια του δυναμικού ως η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα μάζας (ή ανά μονάδα φορτίου) του συγκεκριμένου σημείου του πεδίου.

Η ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια ανά μονάδα ηλεκτρικού φορτίου ονομάζεται ηλεκτρικό δυναμικό :

$$V = \frac{U_e}{q}$$

Άρα το δυναμικό μετριέται σε J/C που ονομάζεται βολτ: V = J/C.
Το ηλεκτρικό δυναμικό του πεδίου που δημιουργεί σημειακό φορτίο Q είναι :

$$\boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}}$$

Το δυναμικό χαρακτηρίζει το συγκεκριμένο σημείο του πεδίου και εξαρτάται από τη θέση του σημείου σε σχέση με το φορτίο πηγή Q και από την τιμή του ηλεκτρικού φορτίου Q που δημιουργεί το ηλεκτρικό πεδίο. Γνωρίζοντας το δυναμικό ενός σημείου μπορούμε να βρούμε τη δυναμική ενέργεια που θα αποκτήσει οποιοδήποτε άλλο δοκιμαστικό φορτίο q τοποθετηθεί σε εκείνο το σημείο: $U_e = qV$

Το βαρυτικό δυναμικό σημειακής μάζας M είναι αντίστοιχα

$$\boxed{\varphi(r) = -\frac{GM}{r}}$$

και η δυναμική ενέργεια $U_g = m\varphi$

Οι εντάσεις των πεδίων εξαρτώνται από το δυναμικό όπως η δύναμη από τη δυναμική ενέργεια

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\varphi$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

Μια διανυσματική ταυτότητα

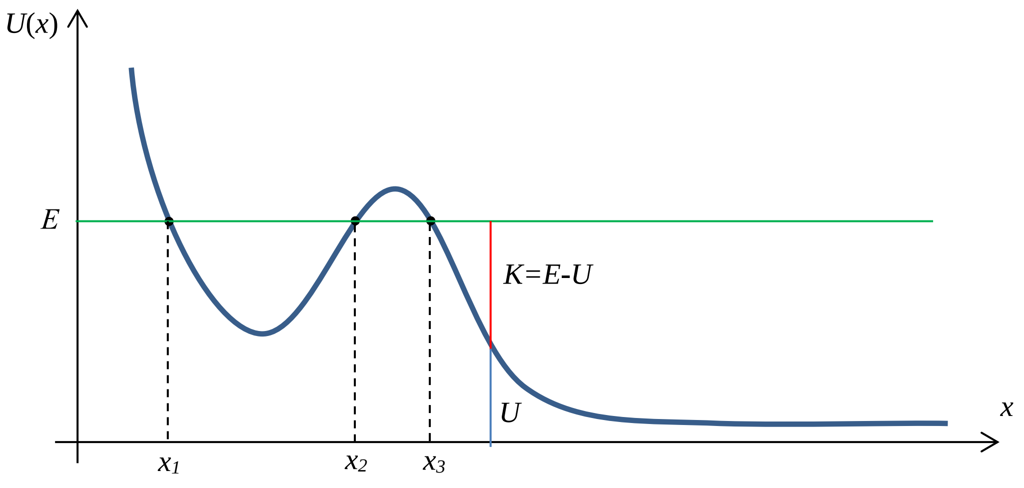
Επειδή για κάθε βαθμωτή συνάρτηση f ισχύει η ταυτότητα $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}f = 0$, για τις διατηρητικές δυνάμεις που προκύπτουν από μια βαθμωτή συνάρτηση U, τη δυναμική ενέργεια, ως $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ θα ισχύει ότι :

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0}$$

Αντίστοιχα για τις εντάσεις των πεδίων ισχύει : $\vec{\nabla}\times\vec{g} = 0$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$$

Κίνηση σε πεδίο δύναμης



Επειδή η κινητική ενέργεια είναι πάντα μια θετική ποσότητα, η κίνηση σώματος με ενέργεια E θα περιορίζεται στις θέσεις x για τις οποίες ισχύει : $E - U(x) \geq 0$.

Στα σημεία όπου $E = U(x)$ η κινητική ενέργεια και άρα η ταχύτητα μηδενίζεται. Τα σημεία αυτά ονομάζονται **σημεία τροπής** ή αψίδες και αποτελούν τα όρια της επιτρεπόμενης κίνησης.
Αν το σώμα με ενέργεια E βρισκόταν αρχικά κάπου μεταξύ των σημείων x_1 και x_2 θα εκτελεί ταλάντωση μεταξύ αυτών των δύο θέσεων.
Αν το σώμα με ενέργεια E βρισκόταν αρχικά δεξιότερα του x_3 τότε αν το προσέγγιζε θα το φτάσει με διαρκώς μειούμενη ταχύτητα μέχρι να σταματήσει στη θέση x_3 και στη συνέχεια θα αναστρέψει ταχύτητα και θα απομακρυνθεί για πάντα.

Ισχύς

Ο ρυθμός παραγωγής έργου ονομάζεται ισχύς P : $P \equiv \dfrac{dW}{dt}$

και επειδή είναι $dW = dK$ η ισχύς είναι ίση και με το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας : $P = \dfrac{dK}{dt}$

Στη μεταφορική κίνηση η στιγμιαία ισχύς παίρνει τη μορφή: $P = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$

$$dW/dt = \vec{F} \cdot d\vec{r}/dt = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$$

ενώ στην περιστροφική τη μορφή $P = \tau\omega$

$$dW/dt = \tau d\theta/dt = \tau\omega$$

Ισοδύναμα το έργο μπορεί να υπολογιστεί από : $W = \int P dt$

Όταν όλες οι δυνάμεις είναι διατηρητικές : $dW = -dU$ τότε είναι και : $P = -\dfrac{dU}{dt}$ οπότε προκύπτει η διατήρηση της ενέργειας $\dfrac{dE}{dt} = \dfrac{dK}{dt} + \dfrac{dU}{dt} = P - P = 0$

Αν κάποιες από τις δυνάμεις δεν είναι διατηρητικές τότε έχουμε : $\dfrac{dE}{dt} = \dfrac{dW^{\mu\sigma}}{dt}$

δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής (απώλειας) της ενέργειας είναι ίσος με την ισχύ των μη συντηρητικών δυνάμεων

Θερμότητα – Εσωτερική ενέργεια

Εκτεταμένα σώματα που δεν είναι υλικά σημεία αλλά αποτελούνται από πάρα πολλά υλικά σημεία μπορούν να μεταβάλουν τη συνολική τους ενέργεια και με την ανταλλαγή μιας ποσότητας που λέγεται **θερμότητα.** Η θερμότητα μεταβάλει την μικροσκοπική κινητική και δυναμική ενέργεια των μορίων του συστήματος που ονομάζεται εσωτερική ενέργεια. Είναι μεταφορά ενέργειας που δεν μπορεί να εκφραστεί ως έργο, δηλαδή ως μια μακροσκοπική δύναμη επί μια μακροσκοπικά παρατηρούμενη μετατόπιση. Σχετίζεται με τη μεταβολή του φυσικού μεγέθους της **θερμοκρασίας**, που είναι ένα μέγεθος που χαρακτηρίζει συστήματα που αποτελούνται από πολλά σωματίδια. Η θερμοκρασία είναι μακροσκοπικό μέγεθος και ποσοτικοποιεί την έννοια του θερμού και του ψυχρού. Δεν έχει νόημα για ένα υλικό σημείο καθώς προκύπτει ότι είναι ανάλογη με τη **μέση εσωτερική ενέργεια των σωματιδίων του συστήματος** όταν αυτό αποτελείται από πάρα πολλά σωματίδια. Η εσωτερική ενέργεια είναι η κινητική ενέργεια των σωματιδίων του συστήματος ως προς ένα σημείο που λέγεται κέντρο μάζας του συστήματος συν τη δυναμική ενέργεια των αμοιβαίων αλληλεπιδράσεων των σωματιδίων του συστήματος μεταξύ τους. Είναι ενέργεια που δεν «φαίνεται» πάντα μακροσκοπικά, εξωτερικά. Π.χ. για ένα ιδανικό αέριο, δηλαδή υλικά σημεία που δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους από απόσταση, η θερμοκρασία είναι ανάλογη με την μέση κινητική ενέργεια των μορίων του συστήματος που είναι περιορισμένα σε ένα ακίνητο κουτί και συγκρούονται μεταξύ τους ελαστικά.

Για τα μακροσκοπικά σώματα τα οποία μπορούμε να αντιμετωπίζουμε ως υλικά σημεία (όταν οι διαστάσεις τους είναι πολύ μικρότερες του χώρου στον οποίο κινούνται) το έργο των μη συντηρητικών δυνάμεων που ασκούνται πάνω τους (π.χ. τριβή) καταλήγει πάντα να μετατραπεί σε θερμότητα.
Η ποσότητα της θερμότητας που απαιτείται για να υψωθεί η θερμοκρασία ενός υλικού κατά $\Delta\theta$ εξαρτάται από το είδος του υλικού, την ποσότητά του και τη διαφορά θερμοκρασίας και δίνεται από τον εμπειρικό τύπο της θερμιδομετρίας (που ουσιαστικά ορίζει τη θερμότητα) :

$$Q = mc\Delta\theta$$

Ειδική θερμότητα

Η σταθερά $c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{d\theta}$ ονομάζεται ειδική θερμότητα προσδιορίζεται πειραματικά για κάθε υλικό και είναι το ποσό της θερμότητας (J) που απαιτείται για να ανέβει η θερμοκρασία ενός kg του υλικού κατά 1 K (ή ^oC). Παραδοσιακά η θερμότητα μετριόταν σε θερμίδες cal και η ειδική θερμότητα σε cal/gr/^oC. Ως θερμίδα οριζόταν η ποσότητα θερμότητας που απαιτείται για να αυξηθεί η θερμοκρασία ενός γραμμαρίου (g) νερού από τους 14,5 ^oC στους 15,5 ^oC. Έτσι η ειδική θερμότητα του νερού είναι εξ ορισμού ίση με το 1 cal/gr/ ^oC. Όταν η ποσότητα του υλικού μετριέται σε mol $n = m/M$ όπου M το μοριακό βάρος του υλικού τότε ο τύπος της θερμιδομετρίας γράφεται

$$Q = nC\Delta\theta$$

όπου η σταθερά $C = \frac{1}{n}\frac{dQ}{d\theta}$ ονομάζεται ειδική γραμμομοριακή θερμότητα και συνδέεται με την ειδική θερμότητα με τον τύπο $C = Mc$

Για ένα σώμα Χ το γινόμενο της ποσότητας του υλικού του επί την αντίστοιχη ειδική του θερμότητα ονομάζεται θερμοχωρητικότητα του σώματος

$$C_X = mc = nC$$

Μηχανικό ισοδύναμο της θερμότητας

Όταν έγινε αντιληπτό ότι η θερμότητα αποτελεί απλά άλλη μια μορφή μεταβιβαζόμενης ενέργειας από ένα σώμα σε ένα άλλο και άρα μπορεί να έχει αποτέλεσμα ισοδύναμο με κάποιο μηχανικό έργο (Joule) προσδιορίστηκε και ο συντελεστής μετατροπής μονάδων από cal σε J ο οποίος ονομάζεται μηχανικό ισοδύναμο της θερμότητας

1 cal = 4,186 J

(μπορείτε να τον επιβεβαιώσετε στο ενεργειακό περιεχόμενο κάθε συσκευασίας τροφίμων). Έτσι σε μονάδες SI η ειδική θερμότητα του νερού είναι 4186 J/kg·K