ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ 2-D ΚΑΙ 3-D , ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Περιγραφή θέσης σε δύο διαστάσεις

Για διαστάσεις περισσότερες από μία, χρειαζόμαστε παραπάνω από έναν αριθμό για να προσδιορίσουμε τη θέση ενός σημείου στο επίπεδο ή στο χώρο. Αυτό μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους και η μορφή του διανύσματος της θέσης θα εξαρτάται από τον τρόπο περιγραφής ή το σύστημα αξόνων που χρησιμοποιούμε.
Σε **καρτεσιανές συντεταγμένες** σε δύο διαστάσεις το διάνυσμα θέσης εκφράζεται ως:

$$\vec{r}=\left(x,y\right) \text{ ή } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\hat{x}+y\hat{y}\ ,$$

Είναι δηλαδή μια συλλογή από δύο αριθμούς, τις συντεταγμένες, την τετμημένη x και την τεταγμένη y που είναι οι κάθετες προβολές του σημείου στους αντίστοιχους ορθογώνιους άξονες και τις οποίες είτε γράφουμε σε μορφή γραμμής είτε σε μορφή στήλης. Ισοδύναμα είναι το άθροισμα των δύο διανυσμάτων $x\hat{x}$ και $y\hat{y}$ που ονομάζονται συνιστώσες. Τα διανύσματα $\hat{x}=(1,0)$ ή $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\hat{y}=(0,1)$ ή $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι μοναδιαία και δηλώνουν την κατεύθυνση των κάθετων αξόνων x και y αντίστοιχα, τους οποίους έχουμε επιλέξει για να προσδιορίζουμε τις θέσεις των σημείων του επιπέδου:

$$\hat{x}\cdot\hat{x}=1=\hat{y}\cdot\hat{y},\quad \hat{x}\cdot\hat{y}=0$$

Το μέτρο του διανύσματος θέσης, δηλαδή η απόσταση του σημείου από την αρχή των αξόνων (σημείο αναφοράς) δίνεται από το πυθαγόρειο θεώρημα (όπως και για κάθε διάνυσμα):

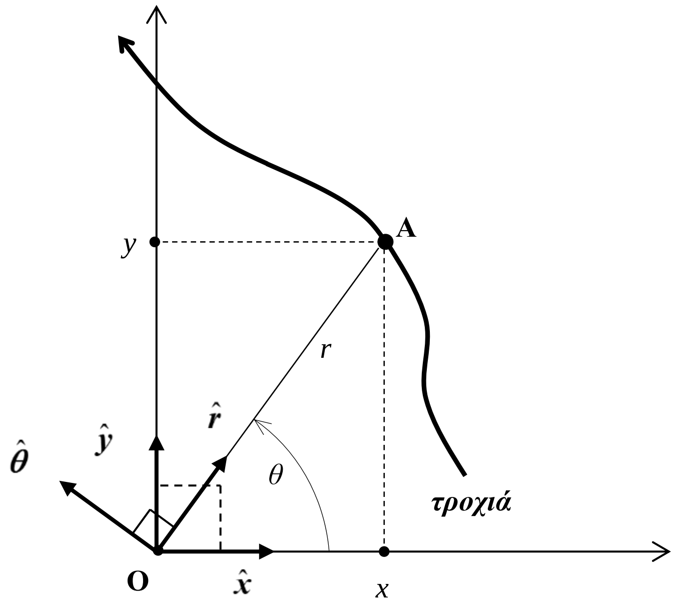
$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\left|\vec{r}\right|^2=\vec{r}\cdot\vec{r}=(x\hat{x}+y\hat{y})\cdot(x\hat{x}+y\hat{y})\Rightarrow r^2=x^2+y^2$$

Μπορούμε ισοδύναμα να χρησιμοποιήσουμε την απόσταση r μαζί με τη γωνία θ από τον άξονα x για να προσδιορίσουμε τη θέση. Αυτές λέγονται **πολικές συντεταγμένες**. Η σχέση μεταξύ των δύο συστημάτων δίνεται από τις παρακάτω εξισώσεις που προκύπτουν εύκολα από το σχήμα :

$$x=r\cos\theta \qquad \hat{x}=\cos\theta\hat{r}-\sin\theta\hat{\theta} \qquad r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad \hat{r}=\cos\theta\hat{x}+\sin\theta\hat{y}$$

$$y=r\sin\theta \qquad \hat{y}=\sin\theta\hat{r}+\cos\theta\hat{\theta} \qquad \theta=\arctan(y/x) \qquad \hat{\theta}=-\sin\theta\hat{x}+\cos\theta\hat{y}$$



Οπότε σε πολικές συντεταγμένες το διάνυσμα θέσης εκφράζεται ως :

$$\vec{r} = (r\cos\theta, r\sin\theta) = r\hat{r}$$

Η κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{r}$ ονομάζεται ακτινική ενώ η κάθετη σε αυτήν, η $\hat{\theta}$ ονομάζεται αζιμουθιακή (δηλώνει την κατεύθυνση κατά την οποία αυξάνει η γωνία θ). Παρατηρήστε ότι ενώ οι άξονες x, y και τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα $\hat{x}$ και $\hat{y}$ παραμένουν σταθερά καθώς το κινητό διατρέχει την τροχιά του τα πολικά μοναδιαία διανύσματα $\hat{r}$ και $\hat{\theta}$ έχουν διαφορετική κατεύθυνση για κάθε σημείο της τροχιάς.

Η στοιχειώδης μετατόπιση είναι : καρτεσιανές $d\vec{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y}$

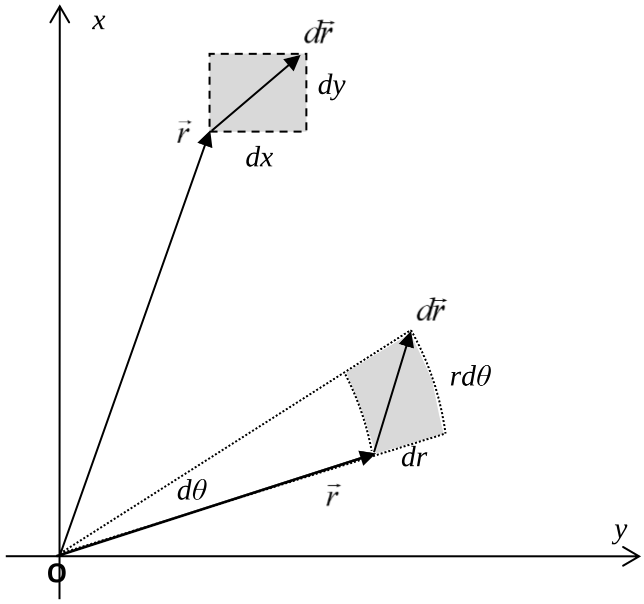
πολικές $d\vec{r} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta}$

Το στοιχειώδες μήκος είναι καρτεσιανές $ds^2 = |d\vec{r}|^2 = dx^2 + dy^2$

πολικές $ds^2 = |d\vec{r}|^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$

Το στοιχειώδες εμβαδόν : καρτεσιανές $dA = dxdy$

πολικές $dA = rdrd\theta$



Κινηματικά μεγέθη

Για δύο διαστάσεις και καρτεσιανές συντεταγμένες η μέση ταχύτητα ορίζεται ανάλογα με τη μονοδιάστατη περίπτωση:

$$\bar{\vec{\upsilon}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}\right) = (\bar{\upsilon}_x, \bar{\upsilon}_y)$$

Διανυσματικά η στιγμιαία ταχύτητα που θα αναφέρεται στο εξής απλά ως ταχύτητα είναι, σε αναλογία με τη μονοδιάστατη περίπτωση:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}, \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\right) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (\upsilon_x, \upsilon_y) \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Το μέτρο της ταχύτητας είναι :

$$\upsilon \equiv \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta t}\right) = \sqrt{\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2} = |\vec{\upsilon}|$$

Για τη στιγμιαία ταχύτητα (velocity), το μέτρο της $\upsilon = |\vec{\upsilon}|$, συμπίπτει με τη στιγμιαία αριθμητική ταχύτητα (speed) v αφού για $\Delta t \to 0$ το μέτρο της στοιχειώδους μετατόπισης $|d\vec{r}|$ είναι ίσο με το μήκος διαδρομής ds : $|d\vec{r}| \equiv \sqrt{dx^2+dy^2} = ds$. Έτσι έχουμε :

$$\upsilon = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt} = v$$

Ανάλογα, για την επιτάχυνση η γενίκευση σε δύο διαστάσεις σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι επίσης :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = (\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\upsilon_x}{\Delta t}, \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\upsilon_y}{\Delta t}) = (\frac{d\upsilon_x}{dt}, \frac{d\upsilon_y}{dt}) = (\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}) = (a_x, a_y) \equiv \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \equiv \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης βρίσκεται επίσης από το Πυθαγόρειο θεώρημα

$$a = \sqrt{a_x^2+a_y^2}$$

Η επιτάχυνση δεν είναι απαραίτητα παράλληλη με το διάνυσμα της ταχύτητας. Η συνιστώσα της επιτάχυνσης που είναι κάθετη στην ταχύτητα ονομάζεται κεντρομόλος και είναι υπεύθυνη για τις στροφές που εκτελεί το κινητό. Έτσι θα έχουμε επιτάχυνση ακόμα και αν το μέτρο της ταχύτητας δεν αλλάζει αλλά απλά η ταχύτητα αλλάζει διεύθυνση, δηλαδή το κινητό στρίβει.

Συμβολισμός χρονικών παραγώγων

Για λόγους οικονομίας χώρου πολλές φορές οι χρονικές παράγωγοι συμβολίζονται και με μία τελεία πάνω από το αντίστοιχο μέγεθος που μεταβάλλεται. Δηλαδή μπορούμε να γράφουμε :

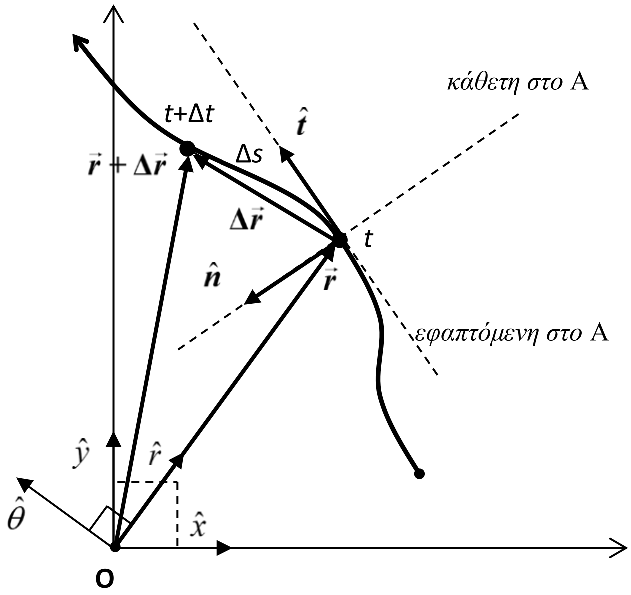
$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \qquad a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \dot{\upsilon}_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

και αντίστοιχα για τα διανύσματα

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}, \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \dot{\vec{\upsilon}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt} = \ddot{\vec{r}}$$

Επιτρόχια και κεντρομόλος επιτάχυνση

Αν σε ένα τυχαίο σημείο της τροχιάς φέρουμε την εφαπτόμενη ευθεία (tangent) και την κάθετη (normal) σε αυτή, τότε μπορούμε να ορίσουμε δύο νέα μοναδιαία διανύσματα πάνω στην τροχιά. Το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα $\hat{t}$ και το κάθετο σε αυτό $\hat{n}$. Το πρώτο δείχνει προς την κατεύθυνση της κίνησης ενώ το δεύτερο προς τα κοίλα της τροχιάς. (Προσοχή μην μπερδέψετε τον χρόνο – time, που συμβολίζουμε με t με το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα $\hat{t}$ - tangent).



Αυτά τα μοναδιαία διανύσματα ορίζουν ένα τρίτο ορθογώνιο σύστημα αξόνων το **επιτρόχιο σύστημα**. Όπως και τα πολικά μοναδιαία διανύσματα έτσι και τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{t}$, $\hat{n}$ αλλάζουν κατεύθυνση (όχι όμως μέτρο) κατά την κίνηση του σώματος πάνω στην τροχιά.

Όπως επισημάναμε παραπάνω όταν το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο θέσεων τείνει στο μηδέν $\Delta t\to 0$, τότε η στοιχειώδης μετατόπιση γίνεται παράλληλη με την τροχιά και το μέτρο της ίσο με το στοιχειώδες μήκος διαδρομής $|d\vec{r}| = ds$ πάνω στην τροχιά. Οπότε μπορούμε να γράψουμε $d\vec{r} = ds\hat{t}$ και άρα ***η ταχύτητα είναι πάντα εφαπτόμενη της τροχιάς*** και ίση με

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\hat{t} = \upsilon\hat{t}$$

Άρα το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα ορίζεται από $\hat{t} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$. Έχει μέτρο ίσο με μονάδα αφού $|d\vec{r}| = ds$ και κατεύθυνση $d\vec{r}$, δηλαδή από ένα σημείο της τροχιάς στο «επόμενο».

Επειδή έχει σταθερό μέτρο ίσο με ένα,

$$\hat{t}\cdot\hat{t} = 1 \Rightarrow \frac{d\hat{t}}{ds}\cdot\hat{t} + \hat{t}\cdot\frac{d\hat{t}}{ds} = 0 \Rightarrow 2\hat{t}\cdot\frac{d\hat{t}}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{d\hat{t}}{ds}\perp\hat{t}$$

που σημαίνει ότι το διάνυσμα $\dfrac{d\hat{t}}{ds}$ είναι κάθετο στο $\hat{t}$ και άρα στην τροχιά. Έτσι ορίζουμε το μοναδιαίο πρωταρχικό κάθετο διάνυσμα στην τροχιά ως : $\hat{n} = \dfrac{d\hat{t}/ds}{\left|d\hat{t}/ds\right|}$

Θέλουμε επίσης να εκφράσουμε την επιτάχυνση $\vec{a}$ σε συνιστώσες $\hat{t}$ και $\hat{n}$ παράλληλα και κάθετα στην τροχιά :

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t\hat{t} + a_n\hat{n}$$

Οι δύο αυτές συνιστώσες ονομάζονται επιτρόχια (a_t) και κεντρομόλος (a_n) αντίστοιχα. Για να τις βρούμε παίρνουμε την παράγωγο της ταχύτητας :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d(\upsilon\hat{t})}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\hat{t} + \upsilon\frac{d\hat{t}}{dt} = \dot{\upsilon}\hat{t} + \upsilon\dot{\hat{t}}$$

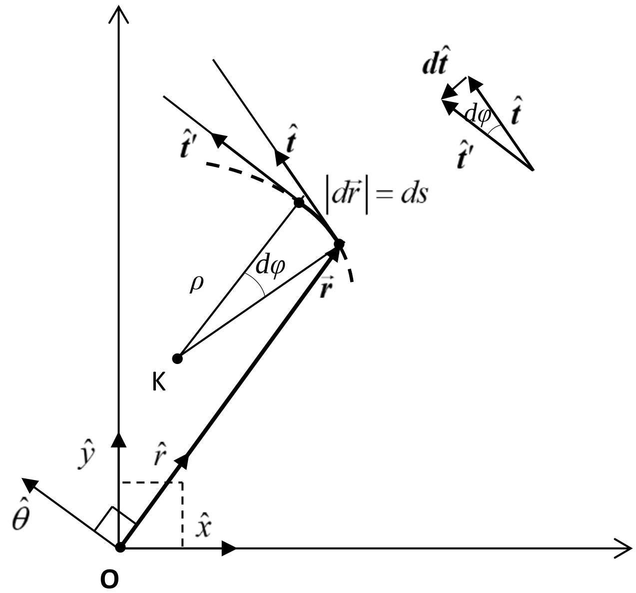
Η χρονική μεταβολή του εφαπτομενικού διανύσματος $\hat{t}$ δεν θα αλλάξει το μέτρο του, αφού αυτό είναι μοναδιαίο, αλλά μόνο την κατεύθυνσή του δηλαδή θα το στρίψει (όπως και η μεταβολή κατά μήκος της τροχιάς όπως είπαμε παραπάνω). Για να γίνει αυτό χωρίς να αλλάξει το μέτρο του πρέπει η μεταβολή να γίνει κάθετα σε αυτό και άρα στη διεύθυνση του $\hat{n}$. Οπότε

$$d\hat{t} = \left|d\hat{t}\right|\hat{n} \quad \text{και} \quad \frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{\left|d\hat{t}\right|}{dt}\hat{n}$$

Γενικά, αυτό ισχύει και για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα: η μεταβολή του είναι κάθετη στο διάνυσμα.
Άρα ο πρώτος όρος είναι η επιτρόχια επιτάχυνση:

$$a_t = \dot{\upsilon} = \frac{d\upsilon}{dt}$$

Για να βρούμε την κεντρομόλο πρέπει να κάνουμε λίγη γεωμετρία.



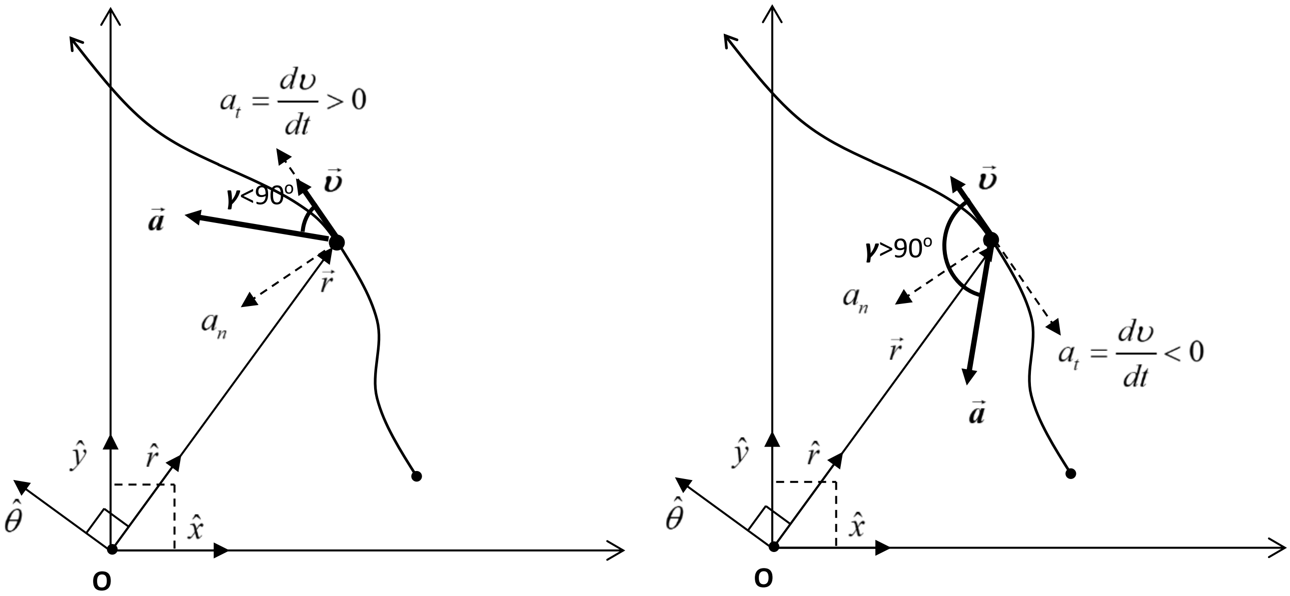
Κάθε στοιχειώδες τμήμα της τροχιάς μπορεί να προσεγγιστεί με τόξο κύκλου κάποιας ακτίνας ρ γύρω από κάποιο στιγμιαίο κέντρο καμπυλότητας Κ όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα δύο ισοσκελή τρίγωνα του σχήματος είναι όμοια καθώς η γωνία της κορυφής είναι και στα δύο ίση με $d\varphi$. Οπότε παίρνουμε :

$$\frac{\left|d\hat{t}\right|}{\left|\hat{t}\right|} = \frac{ds}{\rho} \Rightarrow \left|d\hat{t}\right| = \frac{ds}{\rho}, \qquad \frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{\left|d\hat{t}\right|}{dt}\hat{n} = \frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt}\hat{n} = \frac{\upsilon}{\rho}\hat{n}$$

Έτσι η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι : $\vec{a}_n = \upsilon\dot{\hat{t}} = \upsilon\dfrac{\upsilon}{\rho}\hat{n} \Rightarrow a_n = \dfrac{\upsilon^2}{\rho}$

Επίσης βρίσκουμε ότι $\left|\dfrac{d\hat{t}}{ds}\right| = \left|\dfrac{d\hat{t}}{dt}\dfrac{dt}{ds}\right| = \left|\dfrac{\upsilon}{\rho}\hat{n}\dfrac{1}{\upsilon}\right| \Rightarrow \left|\dfrac{d\hat{t}}{ds}\right| = \dfrac{1}{\rho} = \kappa$ οπότε $\hat{n} = \rho\dfrac{d\hat{t}}{ds}$

Το ρ ονομάζεται στιγμιαία ακτίνα καμπυλότητας και το αντίστροφό του $\kappa=1/\rho$ καμπυλότητα.
Το αποτέλεσμα αυτό για την κεντρομόλο επιτάχυνση έβγαλε πρώτος ο Νεύτωνας. Στην περίπτωση που τμήμα της τροχιάς είναι ευθεία τότε η ακτίνα καμπυλότητας εκεί είναι άπειρη και η κεντρομόλος επιτάχυνση μηδέν. Η κεντρομόλος επιτάχυνση δείχνει πάντα προς το στιγμιαίο κέντρο περιστροφής, προς τα κοίλα της τροχιάς. Η επιτρόχια επιτάχυνση όμως μπορεί να δείχνει είτε προς τη φορά της κίνησης (επιτάχυνση πάνω στην τροχιά) δηλ. παράλληλα με την ταχύτητα είτε αντίθετα (επιβράδυνση).
Έτσι η γωνία της επιτάχυνσης με την ταχύτητα θα εξαρτάται από τη φορά της επιτρόχιας επιτάχυνσης δηλ. το πρόσημο του όρου $d\upsilon/dt$. Όταν έχουμε επιτάχυνση η γωνία θα είναι οξεία (γ<90^o) ενώ όταν έχουμε επιβράδυνση η γωνία θα είναι αμβλεία (γ<90^o).



Ταχύτητα και επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες

Το να βρούμε τις εκφράσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε πολικές συντεταγμένες είναι απλά μια άσκηση παραγωγίσεων ως προς το χρόνο, του διανύσματος θέσης εκφρασμένο σε πολικές συντεταγμένες:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\left(r\hat{r}\right)}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}\right)}{dt} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + r\ddot{\hat{r}} = \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\hat{r}} + r\ddot{\hat{r}}$$

Οι χρονικές παράγωγοι των πολικών μοναδιαίων διανυσμάτων $\dot{\hat{r}},\ \dot{\hat{\theta}}$ υπολογίζονται εύκολα από τη σχέση που τα συνδέει με τα καρτεσιανά μοναδιαία διανύσματα :

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y} \quad \text{και} \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}$$

τα οποία όμως δεν μεταβάλλονται $\dot{\hat{x}} = 0 = \dot{\hat{y}}$ με το χρόνο. Έτσι η μεταβολή των $\hat{r},\ \hat{\theta}$ θα προέλθει μόνο από τις χρονικές παραγώγους $\dot{\theta}$ και $\ddot{\theta}$, της αζιμουθιακής γωνίας θ, οι οποίες έχουν συνήθως τον παρακάτω συμβολισμό και ονομασία

γωνιακή ταχύτητα: $\omega \equiv \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

γωνιακή επιτάχυνση: $\alpha \equiv \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$

Οπότε παίρνουμε

$$\begin{matrix} \dot{\hat{r}} = -\omega\sin\theta\hat{x} + \omega\cos\theta\hat{y} \\ \dot{\hat{\theta}} = -\omega\cos\theta\hat{x} - \omega\sin\theta\hat{y} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \dot{\hat{r}} = \omega\hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} = -\omega\hat{r} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \ddot{\hat{r}} = \alpha\hat{\theta} + \omega\dot{\hat{\theta}} \\ \ddot{\hat{\theta}} = -\alpha\hat{r} - \omega\dot{\hat{r}} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \ddot{\hat{r}} = -\omega^2\hat{r} + \alpha\hat{\theta} \\ \ddot{\hat{\theta}} = -\alpha\hat{r} - \omega^2\hat{\theta} \end{matrix}$$

Παρατηρούμε και πάλι ότι η παράγωγος ενός μοναδιαίου διανύσματος είναι κάθετη στο διάνυσμα.
Από τα παραπάνω η έκφραση για την ταχύτητα θα είναι :

$$\vec{\upsilon} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} \Rightarrow \quad \vec{\upsilon} = \dot{r}\hat{r} + \omega r\hat{\theta} = \upsilon_r\hat{r} + \upsilon_\theta\hat{\theta}$$

Ο πρώτος όρος ονομάζεται ακτινική ταχύτητα : $\upsilon_r = \dot{r} = \frac{dr}{dt}$.

Η ακτινική ταχύτητα δηλώνει το πόσο γρήγορα απομακρύνεται το κινητό από το κέντρο ($dr/dt > 0$) ή το πόσο γρήγορα το πλησιάζει ($dr/dt < 0$) κατά μήκος της ακτίνας

Ο δεύτερος όρος ονομάζεται αζιμουθιακή ταχύτητα $\upsilon_\theta = \omega r = r\dfrac{d\theta}{dt}$.

Η αζιμουθιακή ταχύτητα δηλώνει πόσο γρήγορα γυρίζει το κινητό γύρω από το κέντρο. Όταν η αζιμουθιακή ταχύτητα είναι θετική το κινητό γυρίζει δεξιόστροφα (αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού) γύρω από το κέντρο.

Αντίστοιχα για την επιτάχυνση παίρνουμε

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\hat{r}} + r\ddot{\hat{r}} = \ddot{r}\hat{r} + 2\omega\dot{r}\hat{\theta} - \omega^2 r\hat{r} + \alpha r\hat{\theta} \Rightarrow \qquad \vec{a} = \left(\frac{d\upsilon_r}{dt} - \omega^2 r\right)\hat{r} + \left(r\frac{d\omega}{dt} + 2\omega\dot{r}\right)\hat{\theta}$$

Η ερμηνεία για τους πρώτους όρους της κάθε συνιστώσας είναι προφανής. Είναι οι αντίστοιχες «καθαρές» επιταχύνσεις ακτινικά και γωνιακά. Ο ακτινικός όρος μπορεί να υπάρχει ακόμα και αν η γωνία δεν αλλάζει (δεν υπάρχει περιστροφή) ενώ ο αζιμουθιακός όρος μπορεί να υπάρχει ακόμα και αν η ακτίνα δεν αλλάζει (κίνηση σε κύκλο). Ο δεύτεροι όροι αναμιγνύουν γωνιακές ή ακτινικές επιταχύνσεις με ακτινικές και γωνιακές ταχύτητες αντίστοιχα. Είναι :

η γνωστή μας «κεντρομόλος» επιτάχυνση $a_c = -\omega^2 r = -\dfrac{\upsilon_\theta^2}{r}$

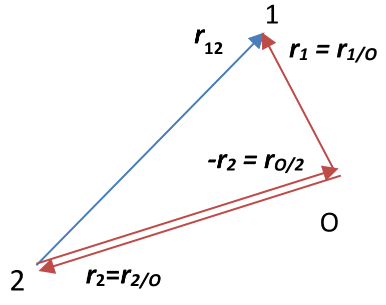
και η επιτάχυνση Coriolis : $a_C = 2\omega\dot{r} = 2\omega\upsilon_r$

Την επιτάχυνση Coriolis μπορούμε να την αισθανθούμε αν προσπαθήσουμε να κινηθούμε ευθεία κατά μήκος μιας ακτίνας πάνω σε ένα δάπεδο που γυρίζει όπως το «γύρω-γύρω» μιας παιδικής χαράς. Παρόλο που δεν είσαστε μεθυσμένοι το πάτωμα «θα γυρίζει» σαν να ήσασταν και θα δυσκολεύεστε να κρατηθείτε στην ευθεία.

Σχετικά διανύσματα

Η σχετική θέση ενός σώματος 1 ως προς ένα άλλο 2 ορίζεται σαν η διαφορά των αντίστοιχων διανυσμάτων θέσης:

$$\vec{r}_{12} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \ ,$$



Αυτό ισοδυναμεί με μεταφορά του σημείου αναφοράς σε ένα νέο σημείο το Ο΄ που βρίσκεται στη θέση του σώματος 2

$$\vec{r}_{1/2} = \vec{r}_{O/2} + \vec{r}_{1/O} = \vec{r}_{1/O} - \vec{r}_{2/O} \equiv \vec{r}_{12}$$

Η γραφή : $\vec{r}_{1/2} = \vec{r}_{1/O} + \vec{r}_{O/2}$

μνημονεύεται πιο εύκολα καθώς οι δείκτες συνδυάζονται σαν κλάσματα : $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{O}\cdot\dfrac{O}{2}$

και σημαίνει ότι η σχετική θέση του 1 ως προς το 2 είναι η σχετική θέση του 1 ως προς το Ο συν τη σχετική θέση του Ο ως προς το 2.

Αντίστοιχα για την σχετική ταχύτητα έχουμε τον κανόνα :

$$\vec{\upsilon}_{12} \equiv \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2 \Rightarrow \vec{\upsilon}_{1/2} = \vec{\upsilon}_{1/O} + \vec{\upsilon}_{O/2}$$

ο οποίος λέγεται και κανόνας άθροισης των ταχυτήτων. Π.χ. αν ένας δρομέας τρέχει στο κατάστρωμα ενός πλοίου με ταχύτητα +4 m/s ενώ το πλοίο κινείται με ταχύτητα +10 m/s ως προς την αποβάθρα η ταχύτητα του δρομέα ως προς την αποβάθρα θα είναι

$$\upsilon_{\delta\rho o\mu/\alpha\pi o\beta} = \upsilon_{\delta\rho o\mu/\pi\lambda o\acute{\iota}o} + \upsilon_{\pi\lambda o\acute{\iota}o/\alpha\pi o\beta} = 4+10 = 14 \text{ m/s}$$

Επειδή στον ορισμό της ταχύτητας εμπλέκεται ο χρόνος, ο απλός και «λογικός» αυτός κανόνας της καθημερινότητας δεν ισχύει όταν οι ταχύτητες είναι πολύ μεγάλες και πλησιάζουν την ταχύτητα το φωτός (σχετικότητα).

Αντίστοιχα η σχετική επιτάχυνση ορίζεται ως :

$$\vec{a}_{12} \equiv \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \Rightarrow \vec{a}_{1/2} \equiv \vec{a}_{1/\mathrm{O}} + \vec{a}_{\mathrm{O}/2}$$

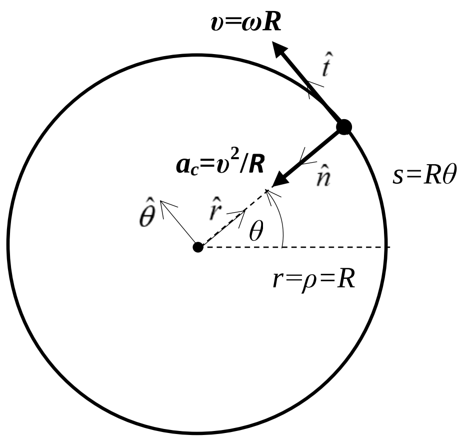
Συγκεκριμένα είδη κινήσεων σε δύο διαστάσεις

Ανάλογα με το πρόβλημα που έχουμε να λύσουμε χρησιμοποιούμε το κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων ώστε να έχουμε τις εκφράσεις για την ταχύτητα και επιτάχυνση που βολεύουν καλύτερα.

Κυκλική κίνηση

Στην κυκλική κίνηση βολεύουν οι πολικές συντεταγμένες (r,θ) καθώς το μέτρο του διανύσματος θέσης παραμένει σταθερό $r = R$. Αντικαθιστώντας λοιπόν $\dot{r} = \upsilon_r = 0$ στις πολικές εκφράσεις της ταχύτητας και επιτάχυνσης παίρνουμε τις εξισώσεις που ισχύουν.

Ουσιαστικά τα δύο συστήματα συντεταγμένων, το πολικό και το επιτρόχιο, συμπίπτουν γιατί το κέντρο καμπυλότητας είναι σταθερό και ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων. Έτσι έχουμε $\hat{\theta} = \hat{t}$, $\hat{r} = -\hat{n}$, $\theta = \varphi$, *r*=*ρ*. Επίσης η ταχύτητα, που είναι πάντα εφαπτομενική, εδώ ταυτίζεται με την αζιμουθιακή: $\upsilon_\theta = \upsilon_t \equiv \upsilon$.



Οπότε ισχύουν :

Θέση :	$r = \rho = R$	$\theta = \theta(t)$	$s = R\theta$
Ταχύτητα :	$\upsilon_r = \upsilon_n = 0$	$\upsilon_\theta = \omega R = \upsilon$ ή	$\upsilon = \dfrac{ds}{dt} = R\dfrac{d\theta}{dt} \Rightarrow \upsilon = \omega R$
Επιτάχυνση :	κεντρομόλος		$a_n = a_c = \dfrac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R$
	επιτρόχιος και αζιμουθιακή		$a_t = a_\theta \equiv \dfrac{d\upsilon}{dt} = R\dfrac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_t = \alpha R$

Αν η γωνιακή επιτάχυνση είναι μηδέν $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = 0$ τότε η γωνιακή ταχύτητα *ω* και η ταχύτητα *υ* παραμένουν σταθερές και έχουμε **ομαλή κυκλική κίνηση** όπου ισχύουν

$$\omega = \omega_0 = \sigma\tau\alpha\theta \qquad \theta = \theta_0 + \omega t$$

ανάλογα με την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Αν η γωνιακή επιτάχυνση είναι μη μηδενική αλλά παραμένει σταθερή έχουμε **ομαλά μεταβαλλόμενη κυκλική κίνηση** και παίρνουμε ολοκληρώνοντας, σε αντιστοιχία με την ομαλά μεταβαλλόμενη ευθύγραμμη κίνηση, τις εξισώσεις :

$$\alpha = \sigma\tau\alpha\theta\,, \quad \omega = \omega_0 + \alpha t\,, \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2\,, \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)\,, \quad \frac{\theta - \theta_0}{t} = \frac{\omega + \omega_0}{2}$$

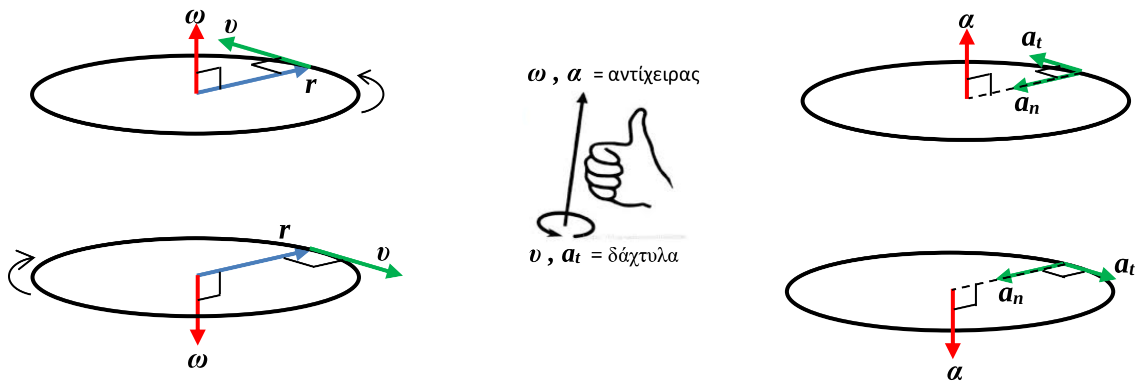
Η **ομαλή κυκλική κίνηση** είναι μια κίνηση που **επαναλαμβάνεται περιοδικά** κάθε : $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

καθώς : $\theta(t+T) = \theta_0 + \omega(t+T) = \theta_0 + \omega t + \omega\dfrac{2\pi}{\omega} = \theta(t) + 2\pi = \theta(t)$

Όπως για κάθε περιοδική κίνηση ορίζεται η συχνότητα : $f = \dfrac{1}{T}$ και ισχύει $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$

Διανυσματικές σχέσεις στην κυκλική κίνηση

Την γωνιακή ταχύτητα ω την αναπαριστάνουμε με ένα διάνυσμα $\vec{\omega}$ κάθετο στο επίπεδο της τροχιάς και με κατεύθυνση που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. Το ίδιο ισχύει και για την γωνιακή επιτάχυνση α : $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$



Βλέπουμε ότι τα τρία διανύσματα $\vec{r},\ \vec{\upsilon},\ \vec{\omega}$ είναι κάθετα μεταξύ τους (όπως είναι και τα $\vec{r},\ \vec{\upsilon},\ \vec{\alpha}$) ενώ η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι σε αντίθετη κατεύθυνση από το $\vec{r}$ και ισχύουν οι παρακάτω διανυσματικές σχέσεις

$$\vec{r}\cdot\vec{\upsilon} = \vec{r}\cdot\vec{\omega} = \vec{\upsilon}\cdot\vec{\omega} = \vec{r}\cdot\vec{\alpha} = \vec{\upsilon}\cdot\vec{\alpha} = 0$$

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{r}\times\vec{\upsilon} = r^2\vec{\omega}$$

$$\vec{\omega}\times\vec{\upsilon} = -\omega^2\vec{r} = \vec{a}_n$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha}\times\vec{r}$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega}\times\vec{\upsilon} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

Επαληθεύστε τες, αφού ξέρετε τα μέτρα και τις κατευθύνσεις όλων των διανυσμάτων και χρησιμοποιώντας το τριπλό διανυσματικό γινόμενο $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ και τον κανόνα παραγώγισης γινομένου

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b} + \vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}$$

Π.χ. $\vec{r}\times\vec{\upsilon}=\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})=(\vec{r}\cdot\ \vec{r})\vec{\omega}-(\vec{r}\cdot\ \vec{\omega})\vec{r}=r^2\vec{\omega}$

Καρτεσιανές συντεταγμένες στην κυκλική κίνηση

Αν χρησιμοποιήσουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες για την περιγραφή της κίνησης, παίρνουμε για τα x και y:

$$x=R\cos(\omega t+\theta_0)=R\sin(\omega t+\theta_0+\pi/2) \qquad y=R\sin(\omega t+\theta_0)$$

Η εξίσωση της τροχιάς είναι :

$$x^2+y^2=R^2$$

Δηλαδή η **ομαλή κυκλική κίνηση** μπορεί να θεωρηθεί σαν η σύνθετη κίνηση ενός κινητού που εκτελεί ταυτόχρονα **δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις**. Μία στη διεύθυνση x και μία στη διεύθυνση y και τις δύο με την ίδια ω και με διαφορά αρχικής φάσης $\pi/2$ μεταξύ τους. Για το λόγο αυτό η γωνιακή ταχύτητα ω λέγεται και κυκλική συχνότητα. Είναι η συχνότητα με την οποία διαγράφει τον κύκλο το κινητό του οποίου οι προβολές στους άξονες κάνουν απλή αρμονική ταλάντωση.

Γράφοντας την εξίσωση κίνησης ως :

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t) \qquad \text{με } \vec{r}_1(t)=R\cos(\omega t)\hat{x} \quad \text{και} \quad \vec{r}_2(t)=R\sin(\omega t)\hat{y}$$

Βλέπουμε ότι η τελική θέση ενός κινητού που συμμετέχει ταυτόχρονα σε δύο κινήσεις είναι το διανυσματικό άθροισμα των θέσεων που θα είχε αν εκτελούσε την κάθε κίνηση ανεξάρτητα στο ίδιο χρονικό διάστημα. Αυτή είναι η **αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων του Γαλιλαίου**.

Ελλειπτική κίνηση

Αν τα πλάτη των παραπάνω δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων δεν είναι ίδια :

$$x=A\cos(\omega t) \qquad y=B\sin(\omega t)$$

συμπεραίνουμε ότι το κινητό θα εκτελεί ελλειπτική τροχιά (από τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα)

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$$

με το κέντρο της έλλειψης στην αρχή των αξόνων (x=0, y=0).

$$\vec{r}=A\cos\omega t\cdot\hat{x}+B\sin\omega t\cdot\hat{y}$$

$$\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}=-A\omega\sin\omega t\cdot\hat{x}+B\omega\cos\omega t\cdot\hat{y}$$

Η κίνηση δεν είναι ομαλή

$$|\vec{\upsilon}|=\frac{d\vec{r}}{dt}=\omega\sqrt{A^2\sin^2\omega t+B^2\cos^2\omega t}\neq \sigma\tau\alpha\theta$$

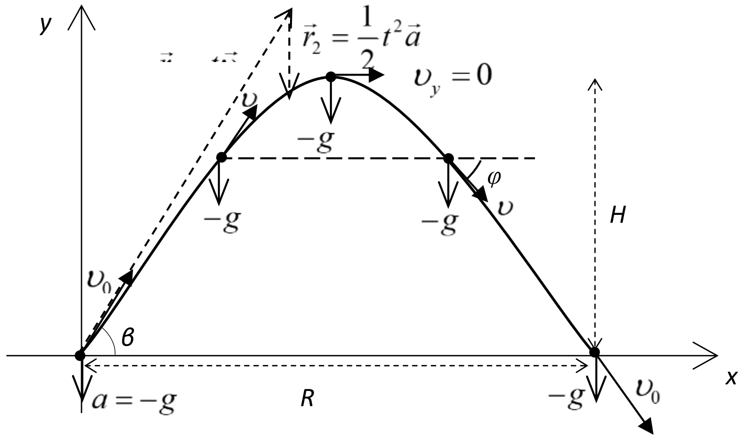
Δείχνεται εύκολα ότι η επιτάχυνση δείχνει πάντα προς την αρχή των αξόνων:

$$\vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-A\omega^2\cos\omega t\cdot\hat{x}-B\omega^2\sin\omega t\cdot\hat{y}=-\omega^2\vec{r}=-\omega^2 r\hat{r}$$

Πλάγια Βολή

Εκτοξεύουμε υλικό σημείο με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ κοντά στην επιφάνεια της Γης όπου υφίσταται κατακόρυφη και προς τα κάτω σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}=-g\hat{y}$, με g=9,80 m/s^2≈10 m/s^2. Το σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο κινήσεις: μια ευθύγραμμη ομαλή στη διεύθυνση της αρχικής ταχύτητας $\vec{\upsilon}_0$ και μια ομαλά επιταχυνόμενη στη διεύθυνση της $\vec{a}$. Η τελική του θέση, δηλ. κάθε σημείο της τροχιάς του, θα βρίσκεται από το διανυσματικό άθροισμα των θέσεων που θα είχε αν έκανε την κάθε κίνηση ανεξάρτητα. Επειδή η επιτάχυνση είναι σταθερή στον κατακόρυφο άξονα, βολεύουν οι καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\vec r(t)=\vec r_1(t)+\vec r_2(t)=t\vec\upsilon_0+\frac{1}{2}t^2\vec a\Rightarrow \vec r(t)=\upsilon_0\cos\beta\cdot t\hat x+(\upsilon_0\sin\beta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2)\hat y$$



Με τις αρχικές συνθήκες του σχήματος $x_0=0$, $y_0=0$, αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0 σε γωνία β από τον οριζόντιο άξονα οι εξισώσεις κίνησης σε κάθε αξονα είναι :

$a_x=0$ $\qquad$ $a_y=-g=\sigma\tau\alpha\theta.$

$\upsilon_x=\upsilon_0\cos\beta=\sigma\tau\alpha\theta.$ $\qquad$ $\upsilon_y=\upsilon_0\sin\beta-gt$ $\qquad$ $\upsilon=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}$ $\quad$ $\tan\varphi=\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}$

$x=\upsilon_0\cos\beta\cdot t$ $\qquad$ $y=\upsilon_0\sin\beta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2$

Απαλείφοντας το χρόνο *t* από τις εξισώσεις των *x* και *y*, βρίσκουμε την εξίσωση της τροχιάς του σώματος

$$t=\frac{x}{\upsilon_0\cos\beta}\quad,\quad y=\upsilon_0\sin\beta\cdot\frac{x}{\upsilon_0\cos\beta}-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{\upsilon_0\cos\beta}\right)^2\Rightarrow \boxed{y=-\frac{g}{2\upsilon_0^2\cos^2\beta}\cdot x^2+\tan\beta\cdot x}$$

που είναι της μορφής $y=-Ax^2+Bx$ με $A=\frac{g}{2\upsilon_0^2\cos^2\beta}$ και $B=\tan\beta$, δηλαδή είναι παραβολή με τα κοίλα προς τα κάτω.

Μεγέθη με ενδιαφέρον είναι :

1) οι χρόνοι ανόδου, καθόδου και πτήσης, που υπολογίζονται θέτοντας $\upsilon_y=0$ και y=0 όπως στην επιβραδυνόμενη κίνηση:

$$t_{ανόδου}=t_{καθόδου}=\frac{1}{2}t_{πτήσης}\,,\qquad t_{ανόδου}=\frac{\upsilon_{0y}}{g}=\frac{\upsilon_0\sin\beta}{g}$$

Ο χρόνος ανόδου καθορίζεται από το μέτρο της αρχικής κατακόρυφης ταχύτητας.

2) το μέγιστο ύψος *H* που υπολογίζεται από $H\equiv y_{\max}=y(t_{ανόδου})$ όπως στην επιβραδυνόμενη κίνηση

$$H=\frac{\upsilon_{0y}^2}{2g}=\frac{\upsilon_0^2\sin^2\beta}{2g}=\frac{1}{2}gt_{αν}^2$$

Το μέγιστο ύψος καθορίζεται από το χρόνο ανόδου.

3) το βεληνεκές *R* που υπολογίζεται από $R=x(t_{πτήσης})$

$$R = \frac{\upsilon_0 \cos\beta \cdot 2\upsilon_0 \sin\beta}{g} = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\beta}{g}$$

Όταν $\sin 2\beta = 1 \Rightarrow 2\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$, δηλαδή όταν η βολή γίνεται στις 45^o, το βεληνεκές γίνεται μέγιστο:

$$R_{\max} = \frac{\upsilon_0^2}{g}$$

Το μέγιστο ύψος που ανέρχεται το σώμα, είναι τότε

$$H_{45^0} = \frac{\upsilon_0^2}{2g}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\upsilon_0^2}{4g} = \frac{H_{90^o}}{2}$$

το μισό του αντίστοιχου της κατακόρυφης βολής.

Στις περιπτώσεις όπου η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν (τότε πρέπει $y_0 \neq 0$ για να έχουμε κίνηση, που είναι ελεύθερη κατακόρυφη πτώση) ή όταν η βολή είναι οριζόντια δηλ. β=0, συνήθως βολεύει να παίρνουμε τη θετική φορά του άξονα y προς τα κάτω.

Τα παραπάνω αποτελέσματα για το H και R μπορούσαμε να τα πάρουμε και από την εξίσωση της τροχιάς συμπληρώνοντας το τετράγωνο :

$$y = -Ax^2 + Bx = -A\left(x^2 - 2\frac{B}{2A}x + \frac{B^2}{4A^2} - \frac{B^2}{4A^2}\right) = -A\left(x - \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{B^2}{4A} \Rightarrow$$

$$y - \frac{B^2}{4A} = -A\left(x - \frac{B}{2A}\right)^2 \Rightarrow y - H = -A(x - R/2)^2 \Rightarrow y - y_0 = -A(x - x_0)^2 \Rightarrow y' = -Ax'^2$$

που είναι παραβολή με τα κοίλα προς τα κάτω (συντελεστής του x^2 αρνητικός άρα $\frac{d^2y}{dx^2} = -2A < 0$) και που έχει την κορυφή της στο σημείο (y_0 , x_0)=(H , $R/2$). Αντικαθιστώντας τις τιμές των A και B παίρνουμε πάλι τα ίδια αποτελέσματα που βρήκαμε πριν από τις χρονικές εξισώσεις:

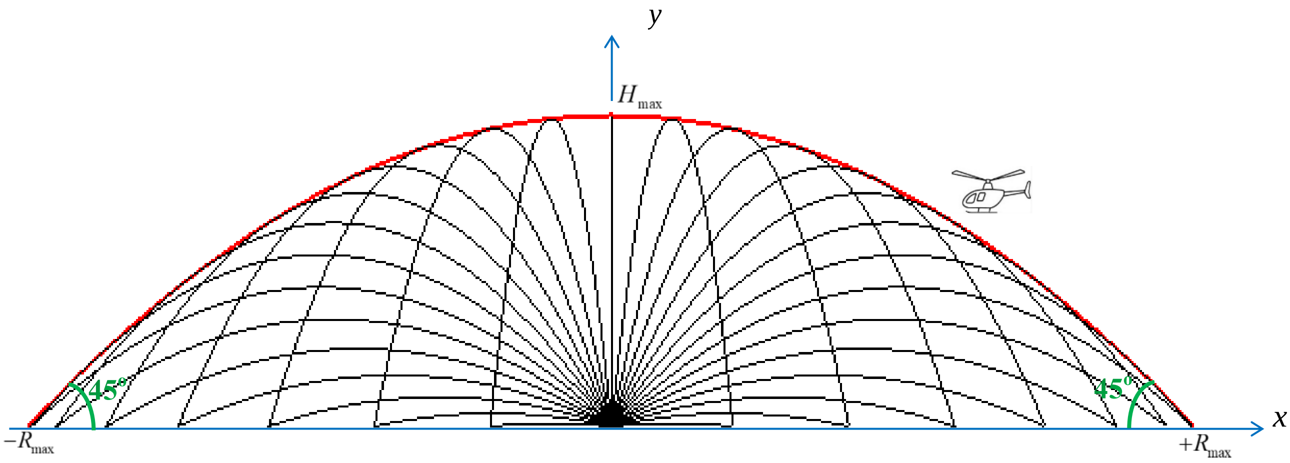
$$H = \frac{B^2}{4A} = \frac{1}{4}\frac{\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}}{\frac{g}{2\upsilon_0^2\cos^2\beta}} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\beta}{2g}$$

$$R = \frac{B}{A} = \frac{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\frac{g}{2\upsilon_0^2\cos^2\beta}} = \frac{\upsilon_0^2 2\cos\beta\sin\beta}{g} = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\beta}{g}$$

Ασκήσεις

1) Παραβολή ασφαλείας (Evangelista Torricelli στο De motu gravium 1644)
Πυροβόλο σε πεδίο βολής εκτοξεύει κατά ριπάς σε όλες τις γωνίες, βλήματα με αρχική ταχύτητα υ_0.

1.1 Δείξτε ότι το ασφαλές όριο (κόκκινη καμπύλη) που μπορεί να πλησιάσει ένα ελικόπτερο χωρίς να κινδυνεύει να φάει κανένα αδέσποτο βλήμα είναι μια παραβολή (λέγεται παραβολή ασφαλείας) και υπολογίστε την. Αν αισθάνεστε άβολα με τα πυροβόλα όπλα φανταστείτε μια δέσμη από πίδακες νερού (σιντριβάνια) προς όλες τις γωνίες και ένα πετούμενο έντομο που πρέπει να αποφύγει το νερό (νομίζω ο Torricelli για σιντριβάνια μιλούσε).



1.2 Ελέγξτε ότι η κορυφή της παραβολής ασφαλείας είναι στο μέγιστο ύψος της κατακόρυφης βολής: $H(\theta=0^{o})=H_{max}=\upsilon_0^2/2g$

1.3 Ελέγξτε ότι τα σημεία που η παραβολή ασφαλείας τέμνει τον οριζόντιο άξονα είναι αυτά του μέγιστου βεληνεκούς: $R(\theta=45^{o})=R_{max}=\upsilon_0^2/g$

1.4 Δείξτε ότι η παραβολή ασφαλείας τέμνει τον άξονα x με γωνία 45°

Υπόδειξη: Γράψτε την εξίσωση της τροχιάς ως μια δευτεροβάθμια εξίσωση $\alpha u^2+\beta u+\gamma=0$ ως προς $u=\tan\theta$ και απαιτείστε να έχει πραγματικές λύσεις, δηλαδή Δ>0. Η εξίσωση Δ=0 είναι η ζητούμενη καμπύλη και έχει μορφή παραβολής.

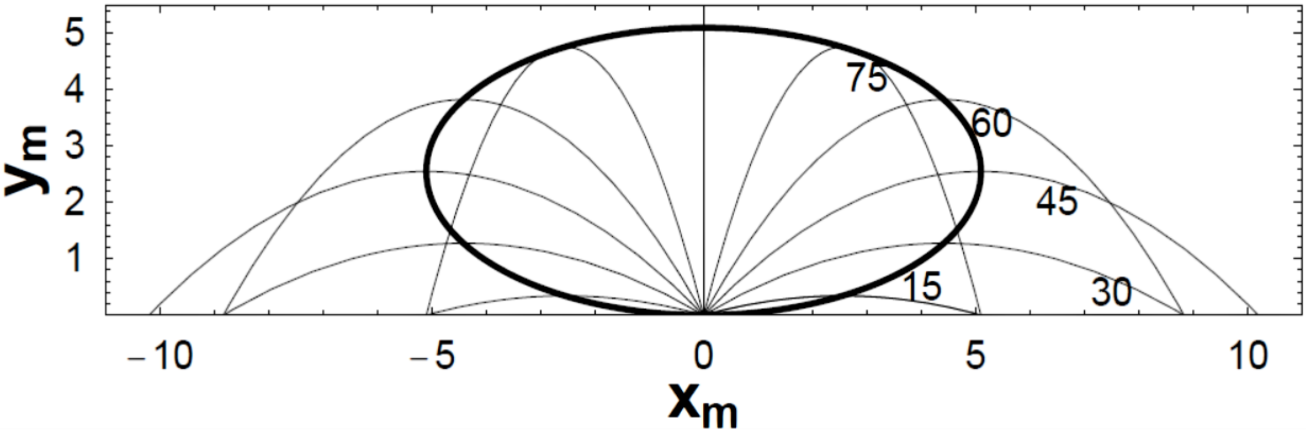
Ενδιάμεσα βήματα: $1=\sin^2\theta+\cos^2\theta \Rightarrow \dfrac{1}{\cos^2\theta}=\tan^2\theta+1$, $\alpha=gx^2$, $\beta=-2\upsilon_0^2 x$, $\gamma=2\upsilon_0^2 y+gx^2$

Απάντηση: $y-\dfrac{\upsilon_0^2}{2g}=-\dfrac{g}{2\upsilon_0^2}x^2$

2.1 Δείξτε ότι τα σημεία (x_m, y_m) που βρίσκεται το μέγιστο ύψος κάθε τροχιάς των βλημάτων του πυροβόλου που βάλλει κατά ριπάς σε όλες τις γωνίες σχηματίζουν έλλειψη :

$$\frac{x_m^2}{a^2}+\frac{(y_m-b)^2}{b^2}=1$$

2.2 Δείξτε ότι η εκκεντρότητα της έλλειψης $e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$ δεν εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της βολής υ_0 και g. Δηλαδή θα είναι όμοια με την αντίστοιχη έλλειψη για διαφορετική αρχική ταχύτητα βλημάτων που μπορεί να βάλλονται και σε άλλο πλανήτη.



Υπόδειξη: Βρείτε τη χρονική στιγμή t_m που επιτυγχάνεται το μέγιστο ύψος και αντικαταστήστε στις χρονικές εξισώσεις $x_m = x(t_m)$ και $y_m = y(t_m)$. Η έλλειψη προκύπτει συνδυάζοντας τις δύο εκφράσεις μέσω της βασικής τριγωνομετρικής ταυτότητας.

Ενδιάμεσα βήματα: Τριγωνομετρικές ταυτότητες της διπλάσιας γωνίας :

$$\sin 2\theta = 2\cos\theta \sin\theta , \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \qquad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

Απάντηση: $a = \dfrac{\upsilon_0^2}{2g} = h_{\max}$, $\quad b = \dfrac{a}{2}$

Πλάγια βολή με αντίσταση αέρα (Stokes)

Εκτοξεύουμε σώμα μάζας m με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0 = \upsilon_{0x}\hat{x} + \upsilon_{0y}\hat{y}$ σε γωνία βολής $90^{\circ} \geq \alpha > 0^{\circ}$ από την οριζόντιο $\tan\alpha = \upsilon_{0y}/\upsilon_{0x}$. Τώρα όμως θα λάβουμε υπόψη μας και την αντίσταση του αέρα. Έτσι εκτός από την κατακόρυφη προς τα κάτω σταθερή επιτάχυνση g από τη δύναμη της βαρύτητας θα προκαλείται επιτάχυνση και από την οπισθέλκουσα την οποία παίρνουμε να είναι ανάλογη και αντίθετη της ταχύτητας (Stokes):

$$\vec{F}_D = -b\vec{\upsilon} = -b\upsilon_x\hat{x} - b\upsilon_y\hat{y} , \qquad \vec{F}_G = -mg\hat{y}$$

[Η περίπτωση οπισθέλκουσας Newton όπου η αντίσταση είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας $\vec{F}_D = -D|\vec{\upsilon}|\vec{\upsilon}$ δεν έχει κλειστή λύση με στοιχειώδεις συναρτήσεις και δεν θα την εξετάσουμε]

$2^{ος}$ Νόμος Νεύτωνα : $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}_G + \vec{F}_D}{m} = -\dfrac{b}{m}\upsilon_x\hat{x} - \left(g + \dfrac{b}{m}\upsilon_y \right)\hat{y}$

Σε κάθε διάσταση ξεχωριστά οι εξισώσεις της επιτάχυνσης είναι

$$a_x = -\frac{b}{m}\upsilon_x \Rightarrow \frac{d\upsilon_x}{dt} = -\beta\upsilon_x$$

$$a_y = -g - \frac{b}{m}\upsilon_y \Rightarrow \frac{d\upsilon_y}{dt} = -g - \beta\upsilon_y$$

όπου ορίζουμε $\beta = b/m$ με $[\beta] = \mathrm{s}^{-1}$ και $\tau = 1/\beta = m/b$ με $[\tau] = \mathrm{s}$.

Όμως αυτές τις έχουμε ήδη λύσει (με απευθείας ολοκληρώσεις) όταν μελετούσαμε την κίνηση σε μια διάσταση. Στην διεύθυνση x η κίνηση είναι φρενάρισμα με οπισθέλκουσα ενώ στην διεύθυνση y είναι κατακόρυφη βολή ή ελεύθερη πτώση, δηλαδή σταθερή επιτάχυνση, συν οπισθέλκουσα.

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = -\beta\upsilon_x \Rightarrow \frac{d\upsilon_x}{\upsilon_x} = -\beta dt \Rightarrow \int_{\upsilon_{0x}}^{\upsilon_0} \frac{d\upsilon_x}{\upsilon_x} = -\beta\int_0^t dt \Rightarrow \ln\left(\frac{\upsilon_x}{\upsilon_{x0}}\right) = e^{-\beta t} \Rightarrow \upsilon_x = \upsilon_{0x}e^{-\beta t}$$

Άρα $a_x = -\beta\upsilon_{0x}e^{-\beta t} = -\frac{\upsilon_{0x}}{\tau}e^{-\beta t}$

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^x dx = \upsilon_{0x}\int_0^t e^{-\beta t}dt \Rightarrow x = -\frac{\upsilon_{0x}}{\beta}e^{-\beta t}\Big|_0^t \Rightarrow x = \upsilon_{0x}\tau\left(1-e^{-\beta t}\right)$$

Για την διεύθυνση y ορίζουμε την τερματική ταχύτητα : $\upsilon_\tau = \frac{mg}{b} = \frac{g}{\beta} = g\tau$

$$\frac{d\upsilon_y}{dt} = -g - \beta\upsilon_y \Rightarrow \frac{d\upsilon_y}{dt} = -\beta(\upsilon_\tau + \upsilon_y) \Rightarrow = \int_{\upsilon_{0y}}^{\upsilon_y} \frac{d\upsilon_y}{\upsilon_\tau + \upsilon_y} = -\beta\int_0^t dt \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{\upsilon_y + \upsilon_\tau}{\upsilon_{0y} + \upsilon_\tau}\right) = -\beta t \Rightarrow \upsilon_y = -\upsilon_\tau + (\upsilon_{0y} + \upsilon_\tau)e^{-\beta t}$$

$$\frac{dy}{dt} = \upsilon_y \Rightarrow \int_0^y dy = \int_0^t \upsilon dt \Rightarrow y = \int_0^t \left(-\upsilon_\tau + (\upsilon_{0y} + \upsilon_\tau)e^{-\beta t}\right) dt = -\upsilon_\tau t - \frac{1}{\beta}(\upsilon_{0y} + \upsilon_\tau)e^{-\beta t}\Big|_0^t \Rightarrow$$

$$y = (\upsilon_{0y} + \upsilon_\tau)\tau - \upsilon_\tau t - (\upsilon_{0y} + \upsilon_\tau)\tau e^{-t/\tau}$$

Η αντίσταση του αέρα μειώνει το χρόνο πτήσης, το βεληνεκές και το μέγιστο ύψος και κάνει το κομμάτι της τροχιάς που αντιστοιχεί στην πτώση πιο απότομο.

Τροχιές για α=70°:

χωρίς αντίσταση αέρα

με αντίσταση αέρα Stokes (F=-$b\upsilon$)

με αντίσταση αέρα Newton (F=-$D\upsilon^2$)

Ο χρόνος ανόδου υπολογίζεται εύκολα θέτοντας πάλι $\upsilon_y = 0$:

$$0 = -\upsilon_\tau + (\upsilon_{0y} + \upsilon_\tau)e^{-\beta t_{\alpha\nu}} \Rightarrow \upsilon_\tau = (\upsilon_{0y} + \upsilon_\tau)e^{-\beta t_{\alpha\nu}} \Rightarrow e^{\beta t_{\alpha\nu}} = 1 + \frac{\upsilon_{0y}}{\upsilon_\tau} \Rightarrow t_{\alpha\nu} = \tau \ln\left(1 + \frac{\upsilon_{0y}}{\upsilon_\tau}\right)$$

Συμφωνεί αυτό το αποτέλεσμα με το προηγούμενο αποτέλεσμα μας $t_{\alpha\nu} = \frac{\upsilon_{0y}}{g}$ απουσία αντίστασης αέρα;

Παίρνουμε το όριο $b \to 0$

$$t_{\alpha\nu} = \tau \ln\left(1 + \frac{\upsilon_{0y}}{\upsilon_\tau}\right) = \frac{m}{b}\ln\left(1 + \frac{\upsilon_{0y}}{mg}b\right) \xrightarrow[b\to 0]{} \frac{m}{0}\ln(1+0) = \infty \cdot 0$$

Όταν το *b* είναι πολύ μικρό ο δεύτερος όρος μέσα στο λογάριθμο γίνεται πολύ μικρότερος από τον πρώτο που είναι μονάδα. Όμως δεν μπορούμε απλά να θέσουμε *b=0* γιατί ο συντελεστής *m/b* μπροστά από το λογάριθμο απειρίζεται οπότε παίρνουμε $\infty \cdot 0$ που είναι αόριστο. Αναπτύσσουμε το λογάριθμο σε σειρά γύρω από το ln(1)=0.

Γιά $|x| < 1$: $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$

$$t_{\alpha\nu} = \frac{m}{b}\ln\left(1 + \frac{\upsilon_{0y}}{mg}b\right) = \frac{m}{b}\left[\frac{\upsilon_{0y}}{mg}b - \frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon_{0y}}{mg}b\right)^2 + \dots\right] = \frac{\upsilon_{0y}}{g} - \frac{1}{2}\frac{\upsilon_{0y}^2}{mg^2}b + O(b^2)$$

Τώρα μπορούμε να πάρουμε το όριο $b \to 0$ και βλέπουμε ότι όλοι οι όροι της σειράς εκτός από τον πρώτο μηδενίζονται. Ο πρώτος όρος είναι ο χρόνος ανόδου χωρίς αντίσταση αέρα. Οπότε πράγματι

$$t_{\alpha\nu} = \frac{m}{b}\ln\left(1 + \frac{\upsilon_{0y}}{mg}b\right) \xrightarrow[b\to 0]{} t_{\alpha\nu} = \frac{\upsilon_{0y}}{g}$$

Ισοδύναμα, μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα L' Hopital.

Εύκολα βρίσκεται και το μέγιστο ύψος

$$H = (\upsilon_{0y} + \upsilon_\tau)\tau - \upsilon_\tau t_{\alpha\nu} - (\upsilon_{0y} + \upsilon_\tau)\tau e^{-t_{\alpha\nu}/\tau} = (\upsilon_{0y} + \upsilon_\tau)\tau - \upsilon_\tau \tau \ln\left(1 + \frac{\upsilon_{0y}}{\upsilon_\tau}\right) - (\upsilon_{0y} + \upsilon_\tau)\tau e^{-\frac{1}{\tau}\tau \ln\left(1 + \frac{\upsilon_{0y}}{\upsilon_\tau}\right)} =$$

$$= (\upsilon_{0y} + \upsilon_\tau)\tau - \upsilon_\tau \tau \ln\left(1 + \frac{\upsilon_{0y}}{\upsilon_\tau}\right) - (\upsilon_{0y} + \upsilon_\tau)\tau \frac{\upsilon_\tau}{\upsilon_{0y} + \upsilon_\tau}$$

$$= \upsilon_{0y}\tau - \upsilon_\tau \tau \ln\left(1 + \frac{\upsilon_{0y}}{\upsilon_\tau}\right) = \frac{m\upsilon_{0y}}{b} - \frac{gm^2}{b^2}\ln\left(1 + \frac{\upsilon_{0y}}{mg}b\right)$$

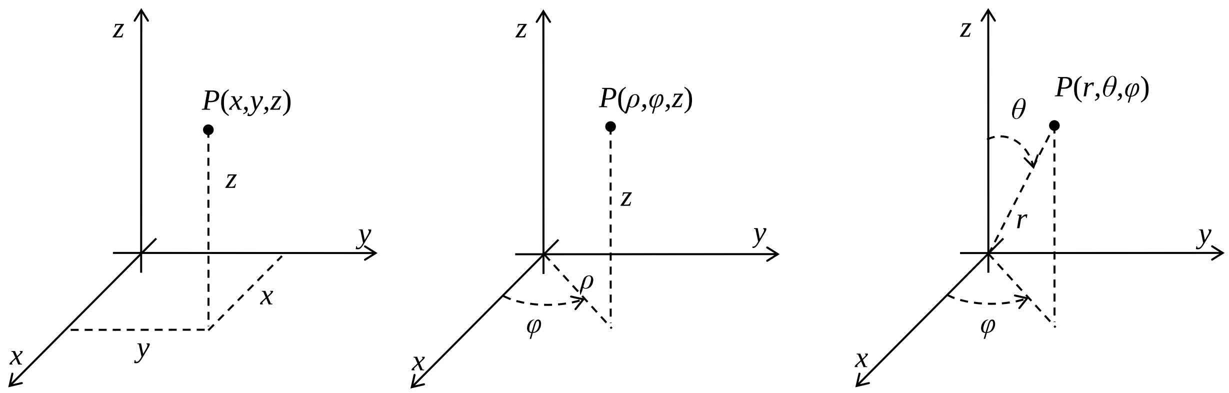
Αναπτύσσουμε σε σειρά ως προς το $\frac{\upsilon_{0y}}{\upsilon_\tau} = \frac{\upsilon_{0y}}{mg}b$

$$H = \upsilon_{0y}\tau - \upsilon_\tau \tau\left[\frac{\upsilon_{0y}}{\upsilon_\tau} - \frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon_{0y}}{\upsilon_\tau}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\upsilon_{0y}}{\upsilon_\tau}\right)^3 - \dots\right] = \upsilon_{0y}\tau - \upsilon_{0y}\tau + \upsilon_\tau \tau \frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon_{0y}}{\upsilon_\tau}\right)^2 - O(b) =$$

$$= \frac{mg}{b}\frac{m}{b}\frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon_{0y}}{mg}b\right)^2 - O(b) = \frac{\upsilon_{0y}^2}{2g} - O(b)$$

και επιβεβαιώνουμε ότι : $H = \upsilon_{0y}\tau - \upsilon_\tau \tau \ln\left(1 + \frac{\upsilon_{0y}}{\upsilon_\tau}\right) \xrightarrow[b\to 0]{} H = \frac{\upsilon_{0y}^2}{2g}$

Περιγραφή θέσης σε τρεις διαστάσεις



Καρτεσιανές Κυλινδρικές Σφαιρικές

Καρτεσιανές συντεταγμένες

Η γενίκευση σε τρεις διαστάσεις των καρτεσιανών συντεταγμένων γίνεται απευθείας προσθέτοντας μια τρίτη διάσταση z (ύψος) στον προσδιορισμό της θέσης:

$$\vec{r} = \left(x, y, z\right) \text{ ή } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}\,,$$

Η στοιχειώδης μετατόπιση είναι : $d\vec{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$,

Το στοιχειώδες μήκος είναι : $ds^2 = \left|d\vec{r}\right|^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$,

Ο στοιχειώδης όγκος είναι : $dV = dxdydz$,

Το σύστημα είναι ορθοκανονικό

$\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1\,,\quad \hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{y}\cdot\hat{z} = \hat{z}\cdot\hat{x} = 0$

και δεξιόστροφο

$\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z},\ \ \hat{y}\times\hat{z} = \hat{x}\,,\quad \hat{z}\times\hat{x} = \hat{y}$

Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ διατηρούν σταθερό τον προσανατολισμό τους όταν το σημείο P κινείται στο χώρο.

Τα κινηματικά μεγέθη ορίζονται με απευθείας γενίκευση από τις δύο διαστάσεις

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z} = \upsilon_x\hat{x} + \upsilon_y\hat{y} + \upsilon_z\hat{z} = (\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)\,,$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \left(\frac{d\upsilon_x}{dt}, \frac{d\upsilon_y}{dt}, \frac{d\upsilon_z}{dt}\right) = \frac{d\upsilon_x}{dt}\hat{x} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\hat{y} + \frac{d\upsilon_z}{dt}\hat{z} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z} = (a_x, a_y, a_z)\,,$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες

Απλά προσθέτουμε την τρίτη διάσταση z (ύψος) στις πολικές συντεταγμένες του επιπέδου

$$\vec{r} = \left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z\right),$$

$$x = \rho\cos\varphi \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = \rho\sin\varphi \qquad \varphi = \arctan(y/x)$$
$$z = z \qquad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

Η στοιχειώδης μετατόπιση είναι : $d\vec{r} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\varphi\hat{\varphi} + dz\hat{z}$,

Το στοιχειώδες μήκος είναι : $ds^2 = |d\vec{r}|^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$,

Ο στοιχειώδης όγκος είναι : $dV = \rho d\rho d\varphi dz$

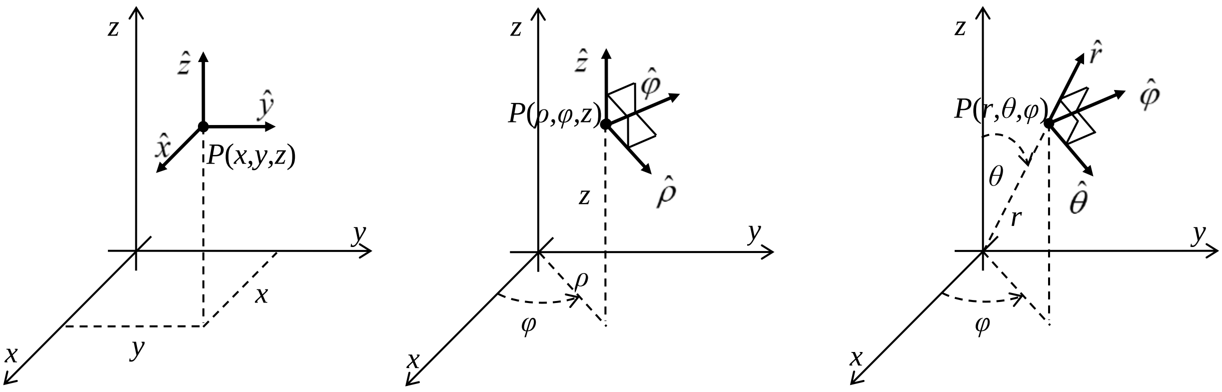
Το σύστημα είναι ορθοκανονικό

$\hat{\rho}\cdot\hat{\rho} = \hat{\varphi}\cdot\hat{\varphi} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1$, $\quad \hat{\rho}\cdot\hat{\varphi} = \hat{\varphi}\cdot\hat{z} = \hat{z}\cdot\hat{\rho} = 0$

και δεξιόστροφο

$\hat{\rho}\times\hat{\varphi} = \hat{z}$, $\quad \hat{\varphi}\times\hat{z} = \hat{\rho} = 0$, $\quad \hat{z}\times\hat{\rho} = \hat{\varphi}$

Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}$ **ΔΕΝ διατηρούν σταθερό τον προσανατολισμό τους** όταν το σημείο P κινείται στο χώρο.



Καρτεσιανές Κυλινδρικές Σφαιρικές

Σφαιρικές συντεταγμένες

Χρησιμοποιούμε την απόσταση r από την αρχή των αξόνων προσδιορίζοντας έτσι μια σφαίρα ακτίνας r στην οποία βρίσκεται το σημείο. Στη συνέχεια με δύο γωνίες προσδιορίζουμε τη θέση του σημείου πάνω στη σφαίρα (όπως στην επιφάνεια της Γης χρησιμοποιούμε το γεωγραφικό πλάτος και μήκος).

$$\vec{r} = \left(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta\right),$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ ακτινική απόσταση}$$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\cos\varphi \qquad \theta = \arctan\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \text{ πολική γωνία}$$
$$z = r\cos\theta$$

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x} \text{ αζιμουθιακή γωνία}$$

Οι τιμές που μπορεί να πάρουν οι γωνίες είναι : $0 \le \theta \le \pi$ και $0 \le \varphi < 2\pi$

Για τον προσδιορισμό των γωνιών πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη και το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκονται από τα πρόσημα των *x, y, z*.

Το σύστημα είναι ορθοκανονικό

$\hat{r}\cdot\hat{r}=\hat{\theta}\cdot\hat{\theta}=\hat{\varphi}\cdot\hat{\varphi}=1\ ,\quad \hat{r}\cdot\hat{\theta}=\hat{\theta}\cdot\hat{\varphi}=\hat{\varphi}\cdot\hat{r}=0$

και δεξιόστροφο

$\hat{r}\times\hat{\theta}=\hat{\varphi}\ ,\quad \hat{\theta}\times\hat{\varphi}=\hat{r}\ ,\quad \hat{\varphi}\times\hat{r}=\hat{\theta}$

Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{r},\hat{\theta},\hat{\varphi}$ **ΔΕΝ διατηρούν σταθερό τον προσανατολισμό τους** όταν το σημείο *P* κινείται στο χώρο.

Επιτρόχιο σύστημα

Το μοναδιαίο εφαπτομενικό (tangent) διάνυσμα στην τροχιά και το πρωταρχικό κάθετο (normal), ορίζονται όπως και στις δύο διαστάσεις. Το τρίτο μοναδιαίο διάνυσμα που ονομάζεται δικάθετο (binormal) ορίζεται από το εξωτερικό τους γινόμενο $\hat{t}=\dfrac{d\vec{r}}{ds},\quad \hat{n}=R\dfrac{d\hat{t}}{ds},\quad \hat{b}=\hat{t}\times\hat{n}$ όπου $R=\left|\dfrac{d\hat{t}}{ds}\right|$ ή στιγμιαία ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς

Η ταχύτητα είναι εφαπτόμενη στην τροχιά

$\vec{\upsilon}=\upsilon\hat{t}$

Η επιτάχυνση έχει πάλι δύο συνιστώσες τη γραμμική και την κεντρομόλο

$$\vec{a}=\frac{d(\upsilon\hat{t})}{dt}=\frac{d\upsilon}{dt}\hat{t}+\upsilon\frac{d\hat{t}}{dt}=\frac{d\upsilon}{dt}\hat{t}+\upsilon\frac{d\hat{t}}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{d\upsilon}{dt}\hat{t}+\upsilon\frac{1}{R}\hat{n}\upsilon\Rightarrow\vec{a}=\frac{d\upsilon}{dt}\hat{t}+\frac{\upsilon^2}{R}\hat{n}=a_t\hat{t}+a_n\hat{n}$$

Το σύστημα είναι ορθοκανονικό

$\hat{t}\cdot\hat{t}=\hat{n}\cdot\hat{n}=\hat{b}\cdot\hat{b}=1\ ,\quad \hat{t}\cdot\hat{n}=\hat{n}\cdot\hat{b}=\hat{b}\cdot\hat{t}=0$

και δεξιόστροφο

$\hat{t}\times\hat{n}=\hat{b}\ ,\quad \hat{n}\times\hat{b}=\hat{t}\ ,\quad \hat{b}\times\hat{t}=\hat{n}$

Παραδείγματα

1) Σώμα κινείται έτσι ώστε η θέση του να δίνεται από τον τύπο

$$\vec{r}(t)=3\cos\omega t\ \hat{x}+3\sin\omega t\ \hat{y}\qquad \text{(SI)}$$

Να δείξετε ότι α) η απόσταση του από την αρχή των αξόνων είναι σταθερή $r=\sigma\tau\alpha\theta$

β) το μέτρο της ταχύτητάς του είναι $\upsilon=\omega r$, επίσης σταθερό

γ) η ταχύτητά του $\vec{\upsilon}$, είναι κάθετη στο διάνυσμα θέσης $\vec{r}$.

δ) η επιτάχυνση δείχνει προς την αρχή των αξόνων και έχει μέτρο ανάλογο με την απόσταση από την αρχή των αξόνων *r* , επίσης σταθερό

ε) το διάνυσμα $\vec{r}\times\vec{\upsilon}$ είναι σταθερό

στ) περιγράψτε την κίνηση που κάνει το σώμα

α) $r^2=x^2+y^2+z^2=3^2\cos^2\omega t+3^2\sin^2\omega t+0^2=9(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)=9\Rightarrow r=3$

β) $\vec{\upsilon}(t)=\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}=-3\omega\sin\omega t\ \hat{x}+3\omega\cos\omega t\ \hat{y}$

$$|\vec{\upsilon}(t)|\equiv\upsilon(t)=\sqrt{\upsilon_x^2(t)+\upsilon_y^2(t)+\upsilon_z^2(t)}=\sqrt{\left(-3\omega\sin\omega t\right)^2+\left(3\omega\cos\omega t\right)^2+0^2}=$$

$$=\omega\sqrt{\left(3\cos\omega t\right)^2+\left(3\sin\omega t\right)^2+0^2}=\omega\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\omega r$$

$$\vec{r}\cdot\vec{\upsilon} = (3\cos\omega t\ \hat{x} + 3\sin\omega t\ \hat{y})\cdot(-3\omega\sin\omega t\ \hat{x} + 3\omega\cos\omega t\ \hat{y}) =$$

γ) $$= -9\omega\cos\omega t\sin\omega t\ \hat{x}\cdot\hat{x} + 9\omega\cos^2\omega t\ \hat{x}\cdot\hat{y} - 9\omega\sin^2\omega\ \hat{y}\cdot\hat{x} + 9\sin\omega t\cos\omega t\ \hat{y}\cdot\hat{y} =$$

$$= -9\omega\cos\omega t\sin\omega t\ + 9\omega\cos\omega t\sin\omega t\ = 0 \Rightarrow \vec{r}\perp\vec{\upsilon}$$

δ) $$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt} = -3\omega^2\cos\omega t\ \hat{x} - 3\omega^2\sin\omega t\ \hat{y} = -\omega^2\vec{r} = -\omega^2 r\ \hat{r}$$

ε) $$\vec{r}\times\vec{\upsilon} = (3\cos\omega t\ \hat{x} + 3\sin\omega t\ \hat{y})\times(-3\omega\sin\omega t\ \hat{x} + 3\omega\cos\omega t\ \hat{y}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 3\cos\omega t & 3\sin\omega t & 0 \\ -3\omega\sin\omega t & 3\omega\cos\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0\cdot\hat{x} + 0\cdot\hat{y} + 9\omega(\cos^2\omega t\ + \sin^2\omega t)\ \hat{\mathrm{z}} = 9\omega\ \hat{\mathrm{z}}$$

στ) Η τροχιά είναι στο επίπεδο *x-y* (αφού *z*=0). Το σώμα κάνει ομαλή κυκλική κίνηση με ακτίνα $R = r = 3\ \mathrm{m}$ γύρω από την αρχή των αξόνων.

2) Σώμα κινείται έτσι ώστε η θέση του να δίνεται από τον τύπο

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{C} = 3\cos\omega t\ \hat{x} + 3\sin\omega t\ \hat{y} + 4\ \hat{z} \qquad \text{(SI)}$$

Να δείξετε ότι α) η απόσταση του από την αρχή των αξόνων είναι σταθερή $r = 5 = \sigma\tau\alpha\theta$

β) η απόστασή του από τον άξονα *z* είναι σταθερή $d_z \equiv \sqrt{x^2+y^2} = R = 3 = \sigma\tau\alpha\theta$

γ) η απόσταση του από το σημείο $\vec{C} = \vec{r} - \vec{R}$ είναι σταθερή και ίση με *R*

δ) για το διάνυσμα $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$ ισχύει $\vec{\upsilon} = \vec{\omega}\times\vec{R}$

ε) το μέτρο της ταχύτητάς του είναι $\upsilon = \omega R$, επίσης σταθερό

στ) η ταχύτητά του $\vec{\upsilon}$**,** είναι κάθετη στο διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ **.**

ζ) η ταχύτητά του $\vec{\upsilon}$**,** είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{R}$ **.**

η) η γωνία *θ* μεταξύ του διανύσματος θέσης $\vec{r}$ και του άξονα *z* (άρα και του διανύσματος $\vec{C}$) παραμένει σταθερή και ίση με *θ*=36,87º

θ) η επιτάχυνση δείχνει προς τον άξονα *z* και έχει μέτρο ανάλογο με την απόσταση από τον άξονα *z* , επίσης σταθερό

ι) Περιγράψτε την κίνηση που κάνει το σώμα

ια) Δείξτε ότι το διάνυσμα $\vec{r}\times\vec{\upsilon}$ έχει σταθερό μέτρο και περιστρέφεται γύρω από τον άξονα *z* με κυκλική συχνότητα *ω*

α) $$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 3^2\cos^2\omega t + 3^2\sin^2\omega t + 4^2 = 9(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) + 16 = 25 \Rightarrow r = 5$$

β) $$d_z^2 = x^2 + y^2 = 3^2\cos^2\omega t + 3^2\sin^2\omega t = 9(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = 9 \Rightarrow d_z = 3$$

γ) προφανές επειδή το σημείο *C* είναι πάνω στον άξονα *z*

$$\vec{C} = \vec{r} - \vec{R} = (3\cos\omega t\ \hat{x} + 3\sin\omega t\ \hat{y} + 4\ \hat{z}) - (3\cos\omega t\ \hat{x} + 3\sin\omega t\ \hat{y}) = 4\ \hat{z}$$

$$d_{Cr} = \left|\vec{r} - \vec{C}\right| = \left|\vec{r} - (\vec{r} - \vec{R})\right| = \left|\vec{R}\right| = R = 3$$

δ) $$\vec{\upsilon}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -3\omega\sin\omega t\ \hat{x} + 3\omega\cos\omega t\ \hat{y}$$

$$\vec{\omega}\times\vec{R} = \omega\hat{z}\times(3\cos\omega t\ \hat{x} + 3\sin\omega t\ \hat{y}) = 3\omega\cos\omega t\ \hat{z}\times\hat{x} + 3\omega\sin\omega t\ \hat{z}\times\hat{y} = 3\omega\cos\omega t\ \hat{y} - 3\omega\sin\omega t\ \hat{x} = \vec{\upsilon}$$

ε)
$$\left|\vec{\upsilon}(t)\right| \equiv \upsilon(t) = \sqrt{\upsilon_x^2(t)+\upsilon_y^2(t)+\upsilon_z^2(t)} = \sqrt{\left(-3\omega\sin\omega t\right)^2+\left(3\omega\cos\omega t\right)^2+0^2} =$$
$$= \omega\sqrt{\left(3\cos\omega t\right)^2+\left(3\sin\omega t\right)^2+0^2} = \omega\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2} = \omega R$$

ή $\left|\vec{\upsilon}\right| = \left|\vec{\omega}\times\vec{R}\right| = \left|\vec{\omega}\right|\left|\vec{R}\right|\sin\theta_{\omega R} = \left|\vec{\omega}\right|\left|\vec{R}\right|\cdot\ 1 = \omega R$

επειδή τα διανύσματα $\vec{\omega}$ και $\vec{R}$ είναι κάθετα μεταξύ τους

στ)
$$\vec{r}\cdot\ \vec{\upsilon} = (3\cos\omega t\ \hat{x}+3\sin\omega t\ \hat{y}+4\ \hat{z})\cdot\ (-3\omega\sin\omega t\ \hat{x}+3\omega\cos\omega t\ \hat{y}) =$$
$$= -9\omega\cos\omega t\sin\omega t\ \hat{x}\cdot\ \hat{x}+9\omega\cos^2\omega t\ \hat{x}\cdot\ \hat{y}-9\omega\sin^2\omega\ \hat{y}\cdot\ \hat{x}+9\sin\omega t\cos\omega t\ \hat{y}\cdot\ \hat{y}$$
$$-12\omega\sin\omega t\ \hat{z}\cdot\ \hat{x}+12\omega\sin\omega t\ \hat{z}\cdot\ \hat{y} =$$
$$= -9\omega\cos\omega t\sin\omega t\ +9\omega\cos\omega t\sin\omega t\ =0 \Rightarrow \vec{r}\perp\vec{\upsilon}$$

ζ)
$$\vec{R}\cdot\ \vec{\upsilon} = (3\cos\omega t\ \hat{x}+3\sin\omega t\ \hat{y})\cdot\ (-3\omega\sin\omega t\ \hat{x}+3\omega\cos\omega t\ \hat{y}) =$$
$$= -9\omega\cos\omega t\sin\omega t\ \hat{x}\cdot\ \hat{x}+9\omega\cos^2\omega t\ \hat{x}\cdot\ \hat{y}-9\omega\sin^2\omega\ \hat{y}\cdot\ \hat{x}+9\sin\omega t\cos\omega t\ \hat{y}\cdot\ \hat{y} =$$
$$= -9\omega\cos\omega t\sin\omega t\ +9\omega\cos\omega t\sin\omega t\ =0 \Rightarrow \vec{r}\perp\vec{\upsilon}$$

η)
$$\cos\theta = \frac{\vec{r}\cdot\ \hat{z}}{\left|\vec{r}\right|\left|\hat{z}\right|} = \frac{(3\cos\omega t\ \hat{x}+3\sin\omega t\ \hat{y}+4\ \hat{z})\cdot\ \hat{z}}{5\cdot\ 1} = \frac{4}{5} \Rightarrow \theta = 36,87^{\circ}$$

θ)
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt} = -3\omega^2\cos\omega t\ \hat{x}-3\omega^2\sin\omega t\ \hat{y} = -\omega^2\vec{R} = -\omega^2 R\hat{R}(t)$$

Το $\vec{R} = \vec{r}-\vec{C}$**,** είναι ένα διάνυσμα με αρχή το σημείο $\vec{C}$ και πέρας το σημείο $\vec{r}$ που βρίσκεται το σωματίδιο. Το διάνυσμα $\vec{R}$ είναι παράλληλο με το επίπεδο *xy* καθώς δεν έχει *z* συνιστώσα. Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{R}(t) = \frac{\vec{R}(t)}{R} = \cos\omega t\ \hat{x}+\sin\omega t\ \hat{y}$ είναι ένα διάνυσμα που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα *ω* γύρω από τον άξονα z. $\left|\hat{R}(t)\right| = \sqrt{\cos^2\omega t\ +\sin^2\omega t} = 1$.

Άρα η επιτάχυνση $\vec{a}$ που είναι σε αντίθετη κατεύθυνση από το $\vec{R}$ είναι παράλληλη με το επίπεδο *xy* και δείχνει προς τον άξονα z.

ι) Η τροχιά είναι στο επίπεδο *z*=4 (παράλληλο με το επίπεδο *x*-*y*) αφού το *z* παραμένει πάντα ίσο με 4. Η απόσταση του σώματος από τον άξονα *z* είναι σταθερή και ίση με 3 ενώ η γραμμική του ταχύτητα είναι σταθερή και ίση με 3*ω*. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση γύρω από το σημείο (0, 0, 4) παράλληλα με το επίπεδο *xy*.

Γενικά

$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) = R\cos\omega t\ \hat{x}+R\sin\omega t\ \hat{y}$: ομαλή κυκλική κίνηση στο επίπεδο *xy* ακτίνας *R* γύρω από την αρχή των αξόνων

$\vec{r}(t) = \vec{R}(t)+\vec{C} = R\cos\omega t\ \hat{x}+R\sin\omega t\ \hat{y}+C_x\hat{x}+C_y\hat{y}+C_z\hat{z}$: ομαλή κυκλική κίνηση παράλληλα με το επίπεδο *xy* ακτίνας *R* γύρω από το σημείο $\vec{C} = (C_x, C_y, C_z)$

ια)

$$\vec{r}\times\vec{\upsilon}=(3\cos\omega t\ \hat{x}+3\sin\omega t\ \hat{y}+4\ \hat{z})\times(-3\omega\sin\omega t\ \hat{x}+3\omega\cos\omega t\ \hat{y})=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 3\cos\omega t & 3\sin\omega t & 4\\ -3\omega\sin\omega t & 3\omega\cos\omega t & 0\end{vmatrix}=$$

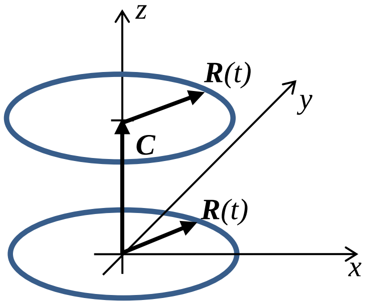
$$=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3\cos\omega t & 3\sin\omega t\\ -3\omega\sin\omega t & 3\omega\cos\omega t\end{vmatrix}\hat{z}+(-1)^{2+3}4\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y}\\ -3\omega\sin\omega t & 3\omega\cos\omega t\end{vmatrix}=$$

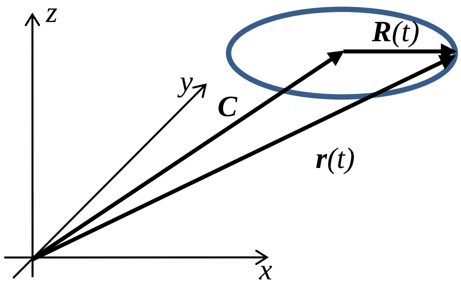
$$=9\omega(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)\ \hat{z}-12\omega(\cos\omega t\ \hat{x}+\sin\omega t\ \hat{y})=9\omega\hat{z}-12\omega\hat{R}(t)$$

Ή $\vec{r}\times\vec{\upsilon}=\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})=(\vec{r}\cdot\ \vec{R})\vec{\omega}-(\vec{r}\cdot\ \vec{\omega})\vec{R}=[(\vec{R}+\vec{C})\cdot\ \vec{R}]\vec{\omega}-[(\vec{R}+\vec{C})\cdot\ \vec{\omega}]\vec{R}$

όμως $\vec{C}\cdot\ \vec{\omega}=C\hat{z}\cdot\ \omega\hat{z}=C\omega$, $\vec{C}\cdot\ \vec{R}=0$ και $\vec{\omega}\cdot\ \vec{R}=0$ ενώ $\vec{R}(t)\cdot\ \vec{R}(t)=R^2$ ανεξάρτητο του χρόνου, οπότε : $\vec{r}\times\vec{\upsilon}=R^2\vec{\omega}-C\omega R\hat{R}(t)$

Επειδή $\vec{\omega},\vec{R}$ είναι κάθετα μεταξύ τους $|\vec{r}\times\vec{\upsilon}|=\sqrt{\left|R^2\vec{\omega}^2\right|+\left|C\omega R\hat{R}(t)\right|^2}=\sqrt{\omega^2R^2+C^2\omega^2R^2}=\omega R\sqrt{1+C^2}$ που είναι σταθερό και ανεξάρτητο από το χρόνο.





3) Σώμα κινείται έτσι ώστε η θέση του να δίνεται από τον τύπο

$$\vec{r}(t)=R\cos\omega t\ \hat{x}+R\sin\omega t\ \hat{y}+Vt\ \hat{z}$$

όπου R, ω, V σταθερές. Περιγράψτε την κίνησή του.

Στη διεύθυνση z το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Αν το σώμα δεν κινούνταν στη διεύθυνση z τότε θα έκανε ομαλή κυκλική κίνηση στο επίπεδο xy γύρω από την αρχή των αξόνων.
Η τελική του κίνηση είναι η επαλληλία των παραπάνω δύο κινήσεων : μια κυκλική τροχιά που ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα στον άξονα z δηλαδή μια κυλινδρική σπείρα ή έλικα.
Η ακτίνα της έλικα είναι η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς : R
Το βήμα (pitch) της έλικας είναι η απόσταση που έχει προχωρήσει το σώμα στον άξονα z στο χρόνο που χρειάζεται να ολοκληρώσει ένα κύκλο, δηλαδή σε χρόνο ίσο με την περίοδο T της κυκλικής κίνησης

$$p=VT=V\frac{2\pi}{\omega}$$

Η ταχύτητα του σώματος σχηματίζει σταθερή γωνία β με τον άξονα z (ή ισοδύναμα $\alpha=\beta-\pi/2$ με το επίπεδο xy)

$$\vec{\upsilon}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\omega R\sin\omega t\ \hat{x}-\omega R\cos\omega t\ \hat{y}+V\ \hat{z}$$

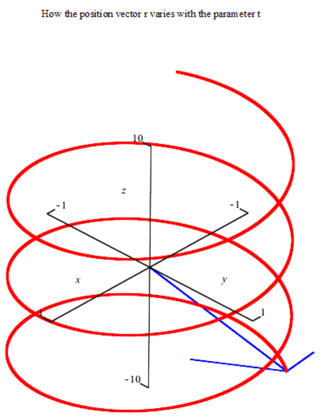
$$|\vec{\upsilon}(t)|=\sqrt{\omega^2R^2\sin^2\omega t+\omega^2R^2\cos^2\omega t+V^2}=\sqrt{\omega^2R^2+V^2}$$

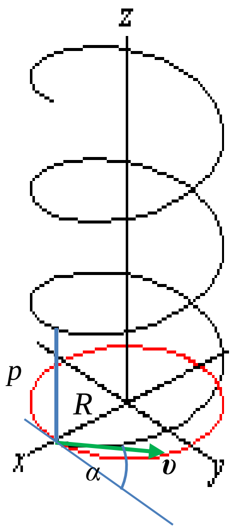
$$\cos\beta=\frac{\vec{\upsilon}\cdot\ \hat{z}}{\upsilon}=\frac{V}{\sqrt{\omega^2R^2+V^2}}$$

$$\tan^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta} - 1 = \frac{\omega^2 R^2 + V^2}{V^2} - 1 \Rightarrow \ \tan\beta = \frac{\omega R}{V}$$

Παρατηρούμε ότι η γωνία αυτή βρίσκεται από την περίμετρο της τροχιάς και το βήμα της

$$\tan\beta = \frac{\omega R}{V} = \frac{2\pi R}{V\,2\pi/\omega} = \frac{2\pi R}{p}$$





4) Σώμα κινείται έτσι ώστε η θέση του να δίνεται από τον τύπο

$$\vec{r}(t) = Ut\cos\omega t\ \hat{x} + Ut\sin\omega t\ \hat{y} + Vt\ \hat{z}$$

όπου U, ω, V σταθερές. Περιγράψτε την κίνησή του.

Κωνική Σπείρα : σταθερό βήμα $p = VT = V\dfrac{2\pi}{\omega}$, ακτίνα που αυξάνει με σταθερό ρυθμό U.