

Κεφάλαιο 9

Παγκόσμια βαρύτητα

Ο νόμος της παγκόσμιας βαρύτητας του Νεύτωνα (Newton's law of universal gravitation)

Κάθε σώμα που υπάρχει στο σύμπαν έλκει κάθε άλλο σώμα με δύναμη ανάλογη του γινομένου των μαζών τους και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασής τους.

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

όπου,

G είναι η **παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας** (gravitational constant)

$$G = 6.673 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

Ο νόμος της παγκόσμιας βαρύτητας (συνέχεια)

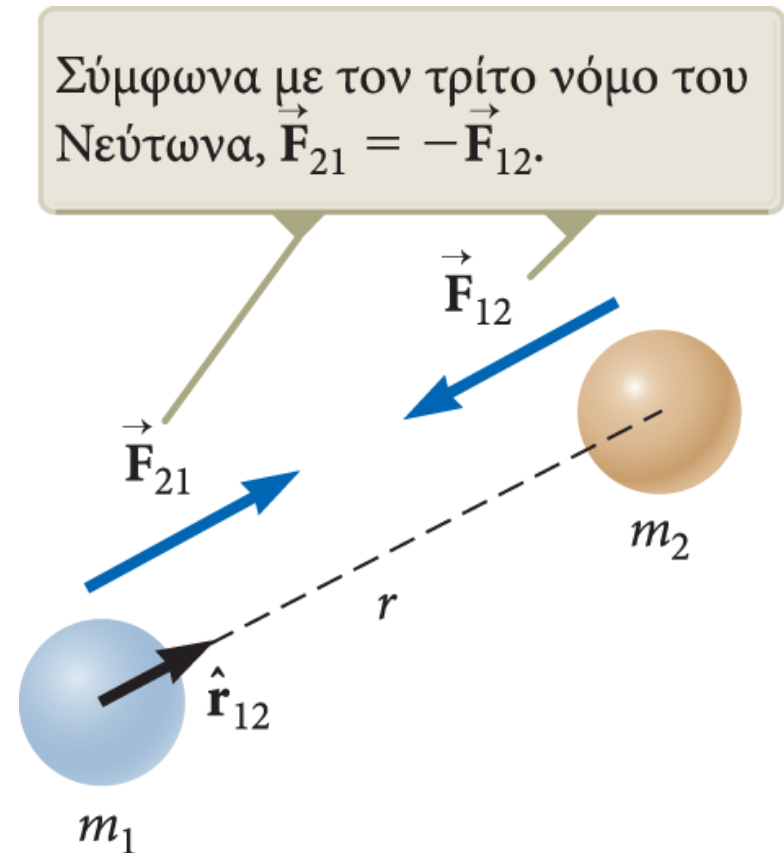
Ο νόμος αναφέρεται συχνά και ως **νόμος του αντίστροφου τετραγώνου**.

- Το μέτρο της δύναμης είναι αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της απόστασης που χωρίζει τα σωματίδια, $F_g \propto \frac{1}{r^2}$.

Ο νόμος σε διανυσματική μορφή μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

- $\vec{F}_{12}$ η δύναμη που ασκεί το σώμα 1 στο σώμα 2
- Το αρνητικό πρόσημο υποδεικνύει ότι η δύναμη είναι ελκτική.



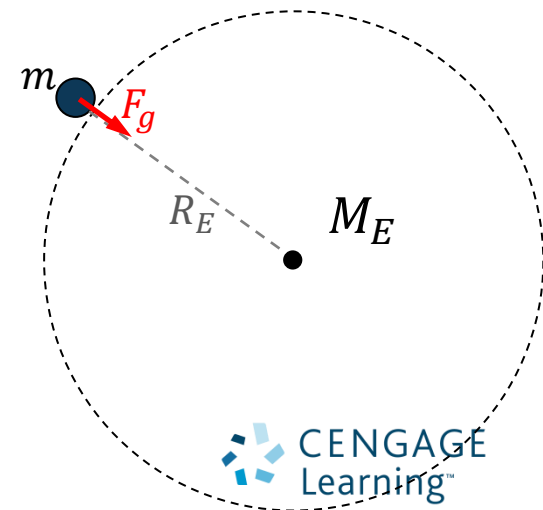
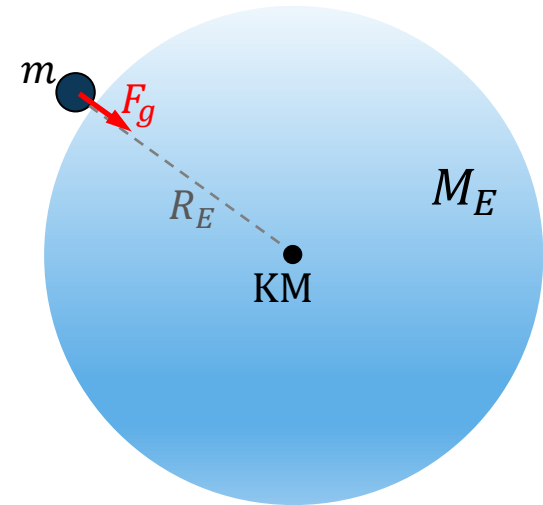
Η βαρυτική δύναμη που ασκεί μια κατανομή μάζας

Η βαρυτική δύναμη που ασκεί μια σφαιρικά συμμετρική κατανομή μάζας, όπως η Γη, σε ένα σώμα που δεν ανήκει σε αυτή την κατανομή είναι ίδια με την αντίστοιχη δύναμη που θα προέκυπτε αν ολόκληρη η μάζα ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας (KM) της κατανομής.

Για παράδειγμα, το μέτρο της δύναμης που ασκεί η Γη σε ένα σώμα μάζας m , το οποίο βρίσκεται κοντά στην επιφάνειά της, είναι

$$F_g = G \frac{M_E m}{R_E^2}$$

όπου, $M_E = M_{Earth}$ η μάζα και $R_E = R_{Earth}$ η ακτίνα της Γης.



G και g

Μην μπερδεύετε τα σύμβολα G και g .

G είναι η **παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας**.

- Έχει την ίδια τιμή παντού.

g είναι η τιμή της **επιτάχυνσης της βαρύτητας**.

- Στην επιφάνεια της Γης είναι $g = 9.80 \text{ m/s}^2$.
- Η τιμή του g μεταβάλλεται ανάλογα με τη γεωγραφική θέση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ M13.1 Μπάλες μπιλιάρδου

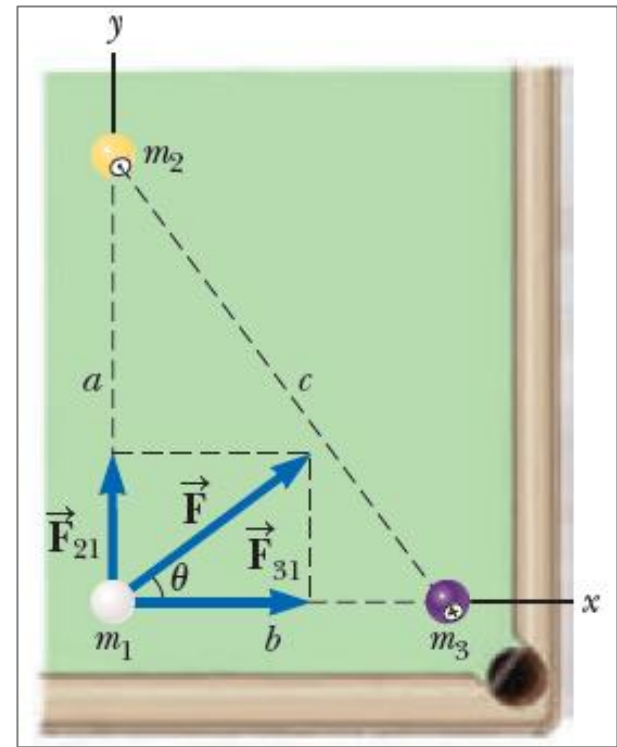
Τρεις μπάλες μπιλιάρδου 0.300kg τοποθετούνται σε ένα τραπέζι στις γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου. Οι πλευρές του τριγώνου έχουν μήκη $a = 0.400\text{m}$, $b = 0.300\text{m}$ και $c = 0.500\text{m}$. Υπολογίστε το διάνυσμα της βαρυτικής δύναμης στη λευκή σφαίρα μάζας m_1 που προκύπτει από τις άλλες δύο σφαίρες.

ΛΥΣΗ

Η δύναμη στη λευκή μπάλα από τη μπάλα m_2

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}}_{21} &= G \frac{m_2 m_1}{a^2} \hat{\mathbf{j}} \\ &= (6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2) \frac{(0.300 \text{ kg})(0.300 \text{ kg})}{(0.400 \text{ m})^2} \hat{\mathbf{j}} = 3.75 \times 10^{-11} \hat{\mathbf{j}} \text{ N}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}}_{31} &= G \frac{m_3 m_1}{b^2} \hat{\mathbf{i}} \\ &= (6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2) \frac{(0.300 \text{ kg})(0.300 \text{ kg})}{(0.300 \text{ m})^2} \hat{\mathbf{i}} = 6.67 \times 10^{-11} \hat{\mathbf{i}} \text{ N}\end{aligned}$$



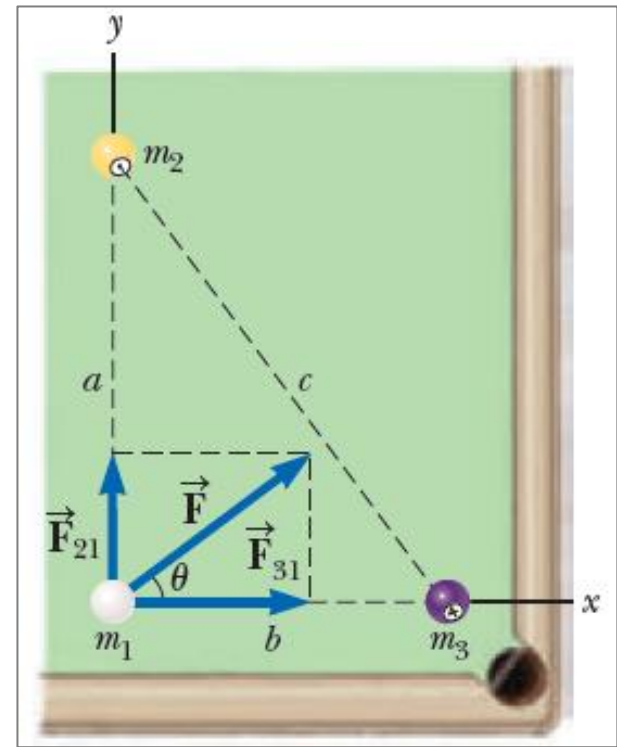
ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Η ολική βαρυντική δύναμη στη λευκή μπάλα είναι

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} = (6.67\hat{i} + 3.75\hat{j}) \times 10^{-11} \text{ N}$$

Το μέτρο της δύναμης είναι

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_{21}^2 + F_{31}^2} = \sqrt{(6.67)^2 + (3.75)^2} \times 10^{-11} \text{ N} \\ &= 7.66 \times 10^{-11} \text{ N} \end{aligned}$$



Η διεύθυνση της ολικής δύναμης δίνεται από τη γωνία θ

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1} \frac{F_{21}}{F_{31}} = \tan^{-1} \frac{3.75 \times 10^{-11} \text{ N}}{6.67 \times 10^{-11} \text{ N}} = \tan^{-1} 0.562 \\ &\Rightarrow \theta = 29.4^\circ \end{aligned}$$

Υπολογισμός του g από το G

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται σε ένα σώμα μάζας m , το οποίο βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση κοντά στην επιφάνεια της Γης, είναι ίσο με mg .

Μπορούμε να εξισώσουμε αυτή την ποσότητα με το μέτρο F_g της δύναμης της παγκόσμιας βαρύτητας που δέχεται το σώμα.

$$mg = F_g \Rightarrow mg = G \frac{M_E m}{R_E^2} \Rightarrow g = \frac{GM_E}{R_E^2}$$

Αν ένα σώμα βρίσκεται σε ύψος h επάνω από την επιφάνεια της Γης, τότε η απόστασή του από το κέντρο γίνεται είναι $R_E + h$.

$$g = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2}$$

Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει ότι όσο αυξάνεται το ύψος h , το g μειώνεται.

Επομένως, $g \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0$ οπότε και το βάρος του σώματος τείνει στο μηδέν.

Η έννοια του πεδίου βαρύτητας - Βαρυτική δύναμη εξ' απόστασεως

Τόσο οι σύγχρονοι του Νεύτωνα όσο και οι διάδοχοί του δυσκολεύτηκαν να αποδεχτούν την έννοια μιας δύναμης που δρα από απόσταση.

Αναρωτιούνταν πώς ήταν δυνατόν δύο αντικείμενα όπως ο Ήλιος και η Γη να αλληλεπιδρούν όταν δεν ήταν σε επαφή μεταξύ τους.

Η εναλλακτική προσέγγιση για την περιγραφή των αλληλεπιδράσεων μεταξύ αντικειμένων από απόσταση ήλθε πολύ αργότερα με τη χρήση της έννοιας του **βαρυτικού πεδίου** ή **πεδίου βαρύτητας** (gravitational field) που υπάρχει σε κάθε σημείο του χώρου.

Όταν ένα σωματίδιο μάζας m τοποθετείται σε ένα σημείο όπου υπάρχει το βαρυτικό πεδίο, το σωματίδιο υφίσταται μια βαρυτική δύναμη $\vec{F}_g$.

Το βαρυτικό πεδίο $\vec{g}$ σε ένα σημείο του χώρου ισούται με τη βαρυτική δύναμη $\vec{F}_g$ που βιώνει ένα σωματίδιο μάζας m τοποθετημένο σε αυτό το σημείο διαιρούμενο με τη μάζα m του σωματιδίου

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m}$$

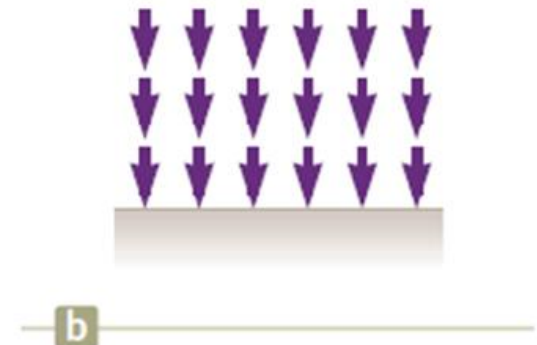
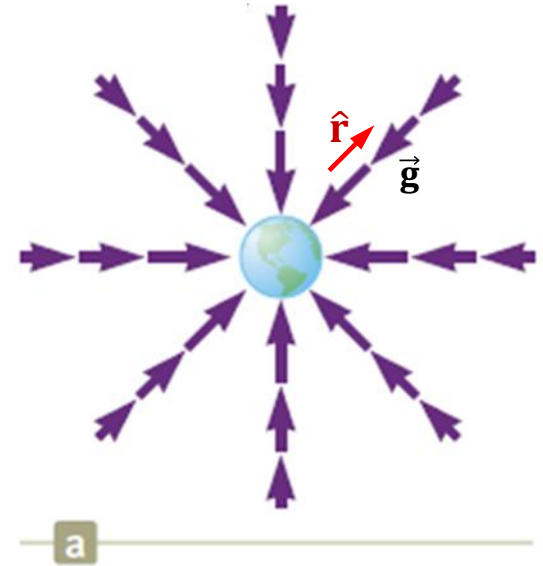
Η έννοια του πεδίου βαρύτητας (συνέχεια)

Το βαρυτικό πεδίο $\vec{g}$ σε απόσταση r από το κέντρο της Γης (εικ α) είναι

$$\left. \begin{aligned} \vec{g} &= \frac{\vec{F}_g}{m} \\ \text{Όμως, } F_g &= G \frac{M_E m}{r^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{g} = -\frac{GM_E}{r^2} \hat{r}$$

$\hat{r}$ μοναδιαίο διάνυσμα που δείχνει ακτινικά προς τα έξω από τη Γη

Κοντά στην επιφάνεια της Γης (μοιάζει επίπεδη), το καθοδικό βαρυτικό πεδίο $\vec{g}$ είναι περίπου σταθερό και ομοιόμορφο (εικ β).



Στην έννοια του **βαρυτικού πεδίου** που συζητάμε εδώ, η ιδιότητα του σωματιδίου που οδηγεί στη δύναμη είναι η **μάζα** m του σωματιδίου.

Η μαθηματική αναπαράσταση της βαρυτικής δύναμης στο σωματίδιο στο μοντέλο πεδίου είναι

$$\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$$

Στη συνέχεια των σπουδών σας, θα δείτε δύο άλλες μορφές πεδίου:

- Το **ηλεκτρικό πεδίο** (electric field), όπου η ιδιότητα ενός σωματιδίου που οδηγεί σε δύναμη είναι **ηλεκτρικό φορτίο** q του σωματιδίου
Όταν ένα φορτισμένο σωματίδιο τοποθετείται σε ηλεκτρικό πεδίο, βιώνει μια ηλεκτρική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_E$.
- Το **μαγνητικό πεδίο** (magnetic field), όπου οι ιδιότητες ενός σωματιδίου που οδηγεί σε δύναμη είναι, αφενός μεν **ηλεκτρικό φορτίο** q του σωματιδίου, αφετέρου δε η **ταχύτητα** v με την οποία κινείται.
Όταν ένα κινούμενο φορτισμένο σωματίδιο τοποθετείται σε μαγνητικό πεδίο, βιώνει μια μαγνητική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_M$.

Οι νόμοι του Κέπλερ

Ο 1^{ος} νόμος του Κέπλερ

- Όλοι οι πλανήτες διαγράφουν ελλειπτικές τροχιές, η μία εστία των οποίων συμπίπτει με τη θέση του Ήλιου.

Ο 2ος νόμος του Κέπλερ

- Το ακτινικό διάνυσμα που ξεκινά από τον Ήλιο και καταλήγει σε έναν πλανήτη (λέγεται και 'επιβατική ακτίνα') σαρώνει ίσες επιφάνειες σε ίσα χρονικά διαστήματα.

Ο 3^{ος} νόμος του Κέπλερ

- Το τετράγωνο της περιόδου της τροχιακής κίνησης κάθε πλανήτη είναι ανάλογο του κύβου του μεγάλου ημιάξονα της ελλειπτικής τροχιάς του.

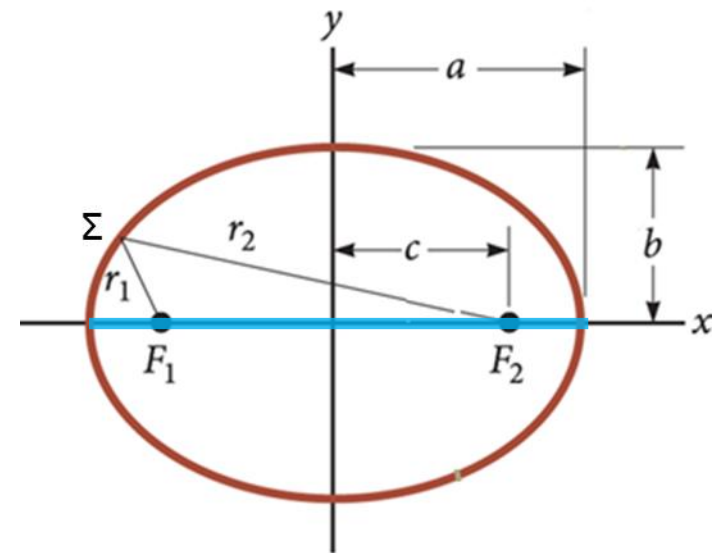
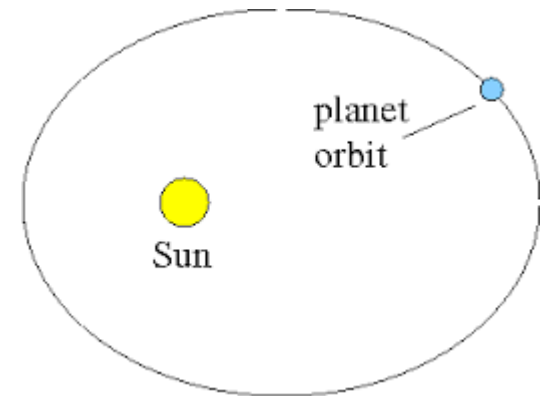
Ελλειπτικές τροχιές των πλανητών και ο 1^{ος} νόμος του Κέπλερ

Όλοι οι πλανήτες διαγράφουν ελλειπτικές τροχιές, η μία εστία των οποίων συμπίπτει με τη θέση του Ήλιου.

Σημειώσεις για τις ελλείψεις

Τα σημεία F_1 και F_2 ονομάζονται **εστίες** της έλλειψης.

- Το άθροισμα των αποστάσεων r_1 και r_2 κάθε σημείου Σ της έλλειψης από τις δύο εστίες έχει σταθερή τιμή, $r_1 + r_2 = \text{const}$
- Η ευθεία που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ σημείων της έλλειψης και διέρχεται από το κέντρο της ονομάζεται **μεγάλος άξονας**.
- Η απόσταση a ονομάζεται **μεγάλος ημιάξονας**.

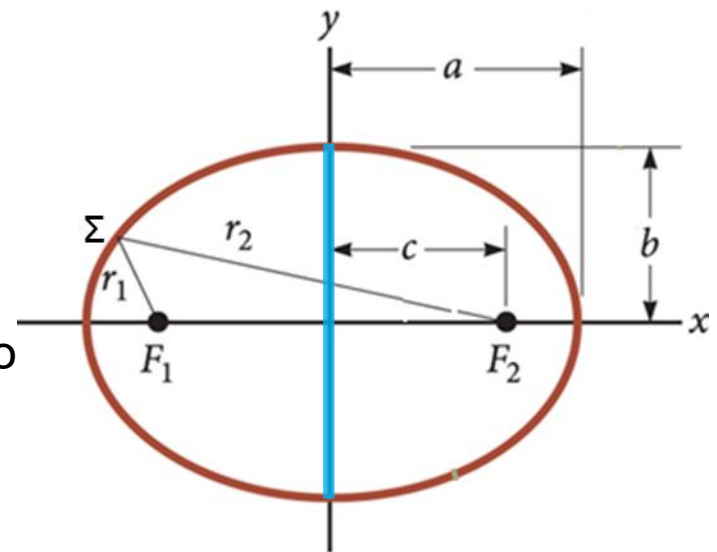


Σημειώσεις για τις ελλείψεις (συνέχεια)

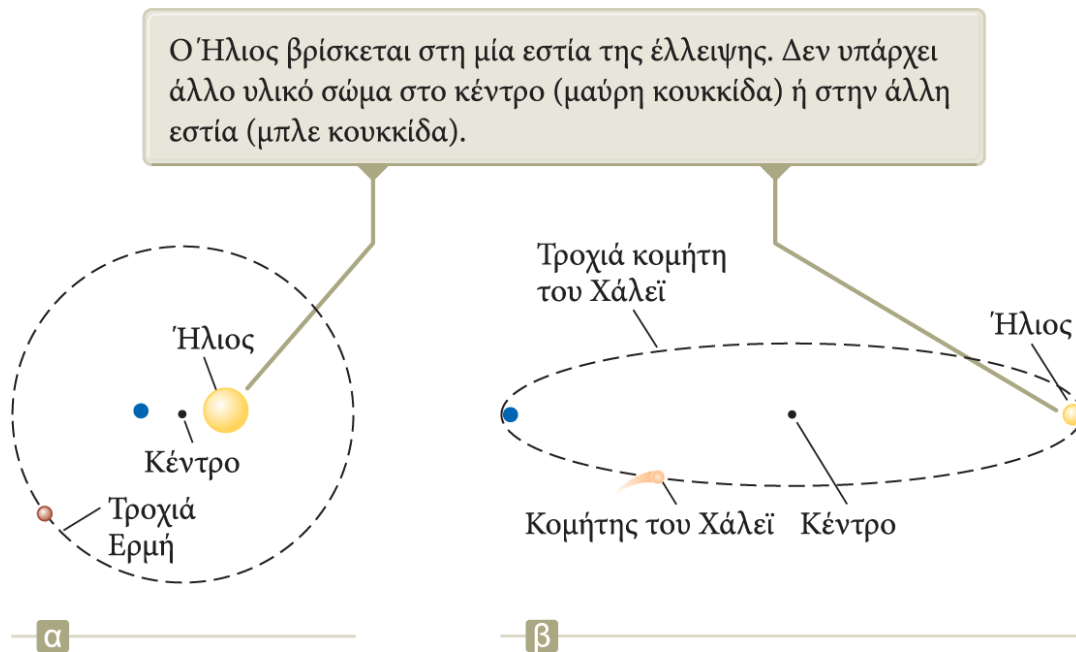
- Η ευθεία που αντιστοιχεί στη μικρότερη απόσταση μεταξύ σημείων της έλλειψης και διέρχεται από το κέντρο της ονομάζεται **μικρός άξονας**.
- Η απόσταση b ονομάζεται **μικρός ημιάξονας**.
- Η εκκεντρότητα e της έλλειψης ορίζεται ως ο λόγος

$$e = \frac{c}{a}$$

- Η εκκεντρότητα μιας έλλειψης κυμαίνεται μεταξύ $0 < e < 1$.
- Για τον κύκλο $e = 0$



Εκκεντρότητες των πλανητικών τροχιών – Παραδείγματα



Η τροχιά του Ερμή έχει τη μεγαλύτερη εκκεντρότητα από όλους τους πλανήτες του ηλιακού συστήματος.

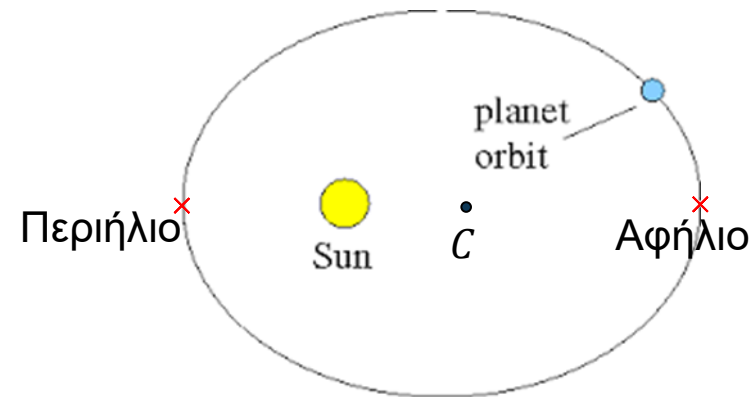
Η εκκεντρότητα της τροχιάς που διαγράφει ο κομήτης του Χάλεϊ έχει πολύ μεγαλύτερη τιμή.

- $e = 0.97$

Σημειώσεις για τις ελλείψεις – Πλανητικές τροχιές

Ο Ήλιος βρίσκεται στη μία εστία της έλλειψης.

- Δεν βρίσκεται στο κέντρο C της έλλειψης.
- Στην άλλη εστία δεν υπάρχει τίποτα.



Για ένα σώμα σε τροχιά γύρω από τον Ήλιο:

Αφήλιο είναι το σημείο με τη μέγιστη απόσταση από τον Ήλιο.

- Η απόσταση για το αφήλιο είναι $a + c$.
- Για ένα σώμα σε τροχιά γύρω από τη Γη, το σημείο αυτό ονομάζεται *απόγειο*.

Περιήλιο είναι το σημείο με την ελάχιστη απόσταση από τον Ήλιο.

- Η απόσταση για το περιήλιο είναι $a - c$.
- Για ένα σώμα σε τροχιά γύρω από τη Γη, το σημείο αυτό ονομάζεται *περίγειο*.

Σημειώσεις για τις ελλείψεις – Πλανητικές τροχιές (συνέχεια)

Η κυκλική τροχιά είναι μια ειδική περίπτωση ελλειπτικής τροχιάς ($e = 0$).

Η ελλειπτική τροχιά είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι η βαρυτική δύναμη ακολουθεί τον νόμο του αντίστροφου τετραγώνου.

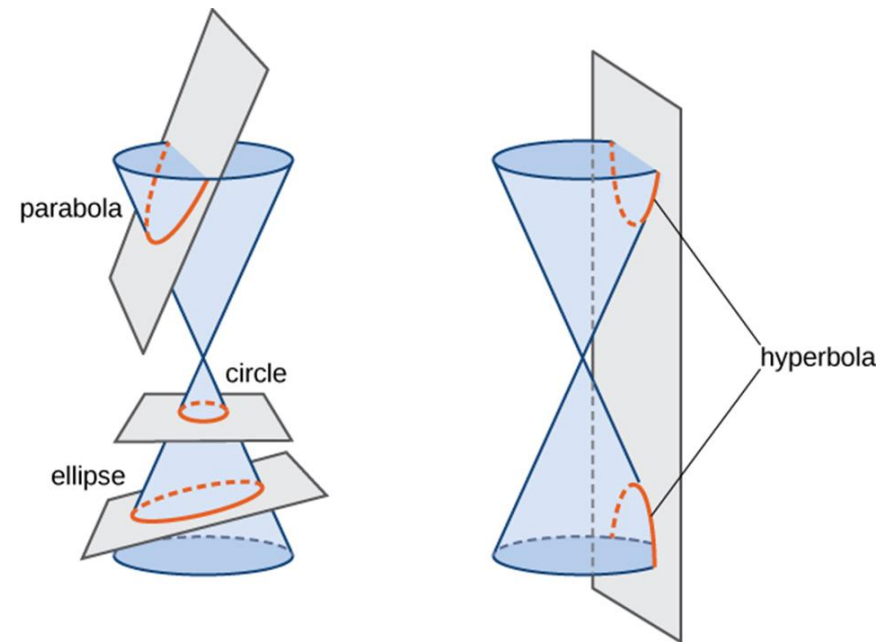
Οι ελλειπτικές και οι κυκλικές τροχιές εκτελούν τα δέσμια σώματα.

- Ένα **δέσμιο** σώμα περιφέρεται σε τροχιά γύρω από το κέντρο της βαρυτικής δύναμης.
- Ένα **ελεύθερο** σώμα ενδέχεται να περάσει κοντά από το κέντρο της βαρυτικής δύναμης μία φορά και να μην επιστρέψει ποτέ.
 - Οι τροχιές των ελεύθερων σωμάτων είναι παραβολές ($e = 1$) ή υπερβολές ($e > 1$).

Κωνικές τομές

Κωνικές τομές (conic sections) ονομάζονται οι γραμμές που δημιουργούνται από την τομή ενός επιπέδου με έναν κώνο.

- Εάν το επίπεδο είναι παράλληλο με τον άξονα περιστροφής (τον άξονα y), τότε η κωνική τομή είναι **υπερβολή** (hyperbola), $e > 1$.
- Εάν το επίπεδο είναι παράλληλο με τη γραμμή παραγωγής, η κωνική τομή είναι **παραβολή** (parabola), $e = 1$.
- Εάν το επίπεδο είναι κάθετο στον άξονα περιστροφής, η κωνική τομή είναι **κύκλος** (circle), $e = 0$.
- Εάν το επίπεδο τέμνει υπό γωνία ως προς τον άξονα (εκτός από 90°), τότε η κωνική τομή είναι **έλλειψη** (ellipse), $0 < e < 1$.



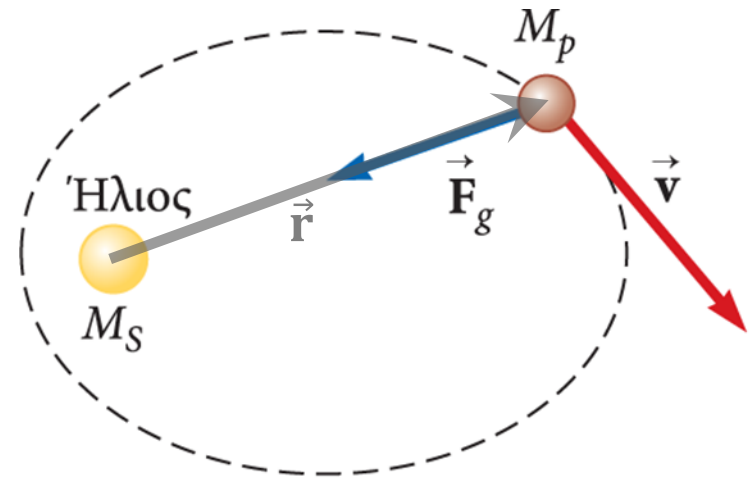
Ο 2^{ος} νόμος του Κέπλερ

Η επιβατική ακτίνα από τον Ήλιο σε έναν πλανήτη σαρώνει ίσες επιφάνειες σε ίσα χρονικά διαστήματα

Θα δούμε, ο νόμος αυτός είναι συνέπεια της διατήρησης της στροφορμής για ένα απομονωμένο σύστημα.

Θεωρούμε τον πλανήτη ως το σύστημά μας

Ο Ήλιος, ως ένα σώμα αρκετά μεγάλης μάζας συγκριτικά με τον πλανήτη ($M_S \gg M_E$), μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι ακίνητος.



Ο Ήλιος ασκεί στον πλανήτη μια βαρυτική δύναμη $\vec{F}_g$ με διεύθυνση την ευθεία r που ενώνει τα κέντρα των δύο σωμάτων.

Η δύναμη αυτή δεν προκαλεί ροπή, $\tau = rF_g \sin 0^\circ = 0$

επομένως, η στροφορμή του πλανήτη είναι σταθερή.

$$\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{L} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{σταθερή}$$

Ο 2^{ος} νόμος του Κέπλερ (συνέχεια)

Υπολογισμός $\vec{L}$ του πλανήτη

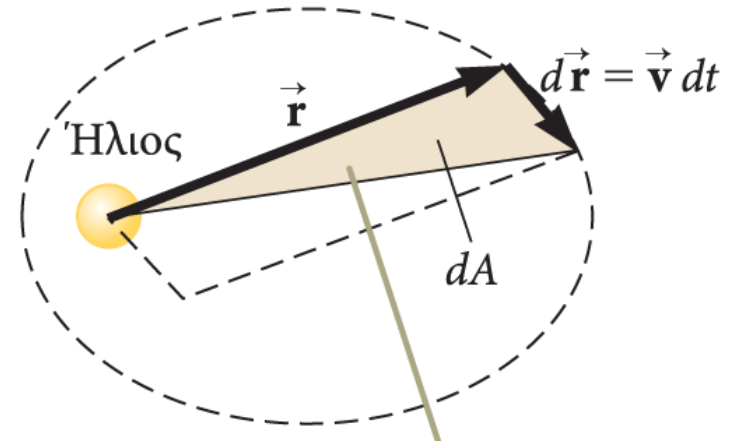
$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} = M_p \vec{r} \times \vec{v} \\ \Rightarrow L &= M_p |\vec{r} \times \vec{v}| \quad (1)\end{aligned}$$

Από γεωμετρικής άποψης, σε χρονικό διάστημα dt , το ακτινικό διάνυσμα $\vec{r}$ καλύπτει επιφάνεια dA , η οποία ισούται με το μισό εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές $\vec{r}$ και $d\vec{r}$.

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v} dt| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| dt$$

Αντικαθιστώντας από την (1), παίρνουμε

$$dA = \frac{L}{2M_p} dt \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2M_p} = \text{σταθερό}$$



Η επιφάνεια που σαρώνει το διάνυσμα $\vec{r}$ σε χρονικό διάστημα dt ισούται με τη μισή επιφάνεια του παραλληλογράμμου.

β

Ο 3^{ος} νόμος του Κέπλερ

Το τετράγωνο της περιόδου της τροχιακής κίνησης κάθε πλανήτη είναι ανάλογο του κύβου του μεγάλου ημιάξονα της ελλειπτικής τροχιάς του ($T^2 \propto a^3$)

Θα δούμε, είναι συνέπεια του νόμου του αντίστροφου τετραγώνου.

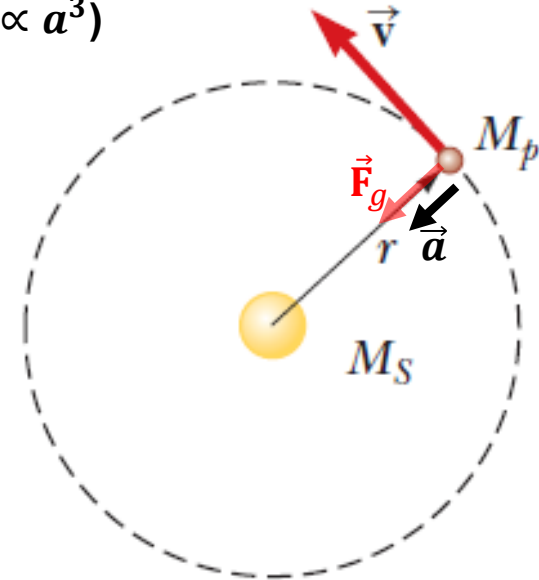
Ας ξεκινήσουμε θεωρώντας μια κυκλική τροχιά.

Η βαρυτική δύναμη $\vec{F}_g$ στον πλανήτη δημιουργεί κεντρομόλο επιτάχυνση $\vec{a}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Από 2^ο νόμο Νεύτωνα} \quad F_g = M_p a = M_p \frac{v^2}{r} \\ \text{Από νόμο βαρύτητας Νεύτωνα} \quad F_g = \frac{GM_S M_p}{r^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{GM_S M_p}{r^2} = M_p \frac{v^2}{r}$$

Όμως, $v = 2\pi r/T$, όπου T η περίοδος, οπότε

$$\frac{GM_S}{r^2} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r}$$



Ο 3ος νόμος του Κέπλερ (συνέχεια)

$$\text{Έχουμε } \frac{GM_S}{r^2} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r}$$

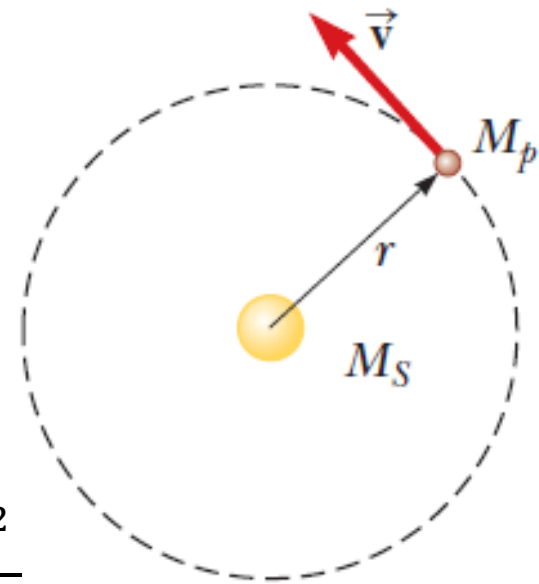
$$\Rightarrow T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S} \right) r^3 \Rightarrow T^2 = K_S r^3$$

$$\text{Η σταθερά } K_S \text{ δίδεται από } K_S = \frac{4\pi^2}{GM_S} = 2.97 \times 10^{-19} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}$$

Αυτή η εξίσωση ισχύει και για ελλειπτικές τροχιές αν αντικαταστήσουμε την ακτίνα r του κύκλου με το μήκος a του ημικύριου άξονα της έλλειψης

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S} \right) a^3 = K_S a^3$$

3ος νόμος του Κέπλερ



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ **M13.4** Η μάζα του ήλιου

Υπολογίστε τη μάζα του Ήλιου, σημειώνοντας ότι η περίοδος της τροχιάς της Γης γύρω από τον Ήλιο είναι 3.156×10^7 s και η απόστασή της από τον Ήλιο είναι 1.496×10^{11} m.

ΛΥΣΗ

Από τον 3^ο νόμο Κέπλερ

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S} \right) r^3$$

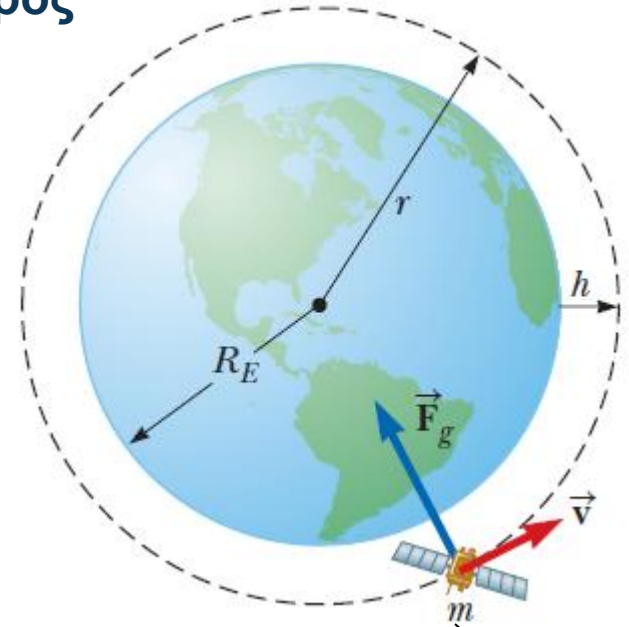
λύνοντας ως προς M_S

$$M_S = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 (1.496 \times 10^{11} \text{ m})^3}{\left(6.674 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \right) (3.156 \times 10^7 \text{ s})^2} = \mathbf{1.99 \times 10^{30} \text{ kg}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ M13.5 Ένας γεωσύγχρονος δορυφόρος

Θεωρήστε έναν δορυφόρο μάζας m που κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη με σταθερή ταχύτητα v και σε υψόμετρο h πάνω από την επιφάνεια της Γης.

(A) Προσδιορίστε την ταχύτητα του δορυφόρου ως προς G , h , R_E (η ακτίνα της Γης) και M_E (η μάζα της Γης).



ΛΥΣΗ

Η μόνη εξωτερική δύναμη που δρα στον δορυφόρο είναι η βαρυτική δύναμη $\vec{F}_g$ προς το κέντρο της Γης που είναι κεντρομόλος δύναμη και κρατά τον δορυφόρο σε κυκλική τροχιά.

$$\text{Από 2}^\circ \text{ νόμο Νεύτωνα } F_g = ma = m \frac{v^2}{r} \quad \left. \vphantom{F_g = ma} \right\} \Rightarrow \frac{GM_E m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

και νόμο βαρύτητας Νεύτωνα $F_g = \frac{GM_E m}{r^2}$

$$\Rightarrow \frac{GM_E \cancel{m}}{\cancel{r}^2} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow \frac{GM_E}{r} = v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_E}{r}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_E}{R_E + h}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ M13.5 (συνέχεια)

(B) Εάν ο δορυφόρος πρόκειται να είναι γεωσύγχρονος (δηλαδή, να φαίνεται να παραμένει σε μια σταθερή θέση πάνω από τη Γη), πόσο γρήγορα κινείται στο διάστημα;

ΛΥΣΗ

Η περίοδος του δορυφόρου πρέπει να είναι $24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$ και ο δορυφόρος πρέπει να βρίσκεται σε τροχιά ακριβώς πάνω από τον ισημερινό.

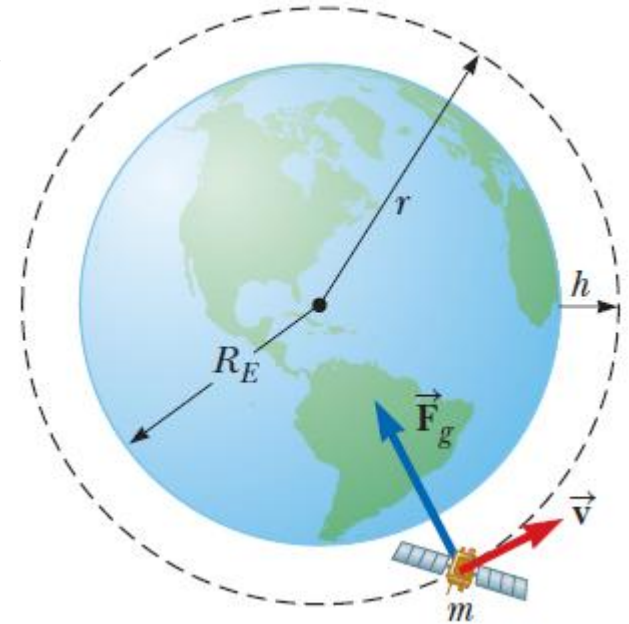
Λύνουμε τον 3^ο νόμο του Κέπλερ ως προς r

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_E} \right) r^3 \Rightarrow r = \left(\frac{GM_E T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow r = \left[\frac{(6.674 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24} \text{ kg})(86400 \text{ s})^2}{4\pi^2} \right]^{1/3} = 4.22 \times 10^7 \text{ m}$$

Από το (A), έχουμε $v = \sqrt{GM_E/r}$ απ'όπου

$$v = \sqrt{(6.674 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24} \text{ kg})/(4.22 \times 10^7 \text{ m})} = 3070 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cong 11000 \text{ km/h}$$



Βαρυτική δυναμική ενέργεια

Ας θυμηθούμε ότι για τις συντηρητικές δυνάμεις (όπως είναι η βαρυτική F_g) το έργο W_g που παράγουν σε ένα σώμα ισούται με το αντίθετο της μεταβολής ΔU της δυναμικής του ενέργειας

$$W_g = -\Delta U = -(U_f - U_i)$$

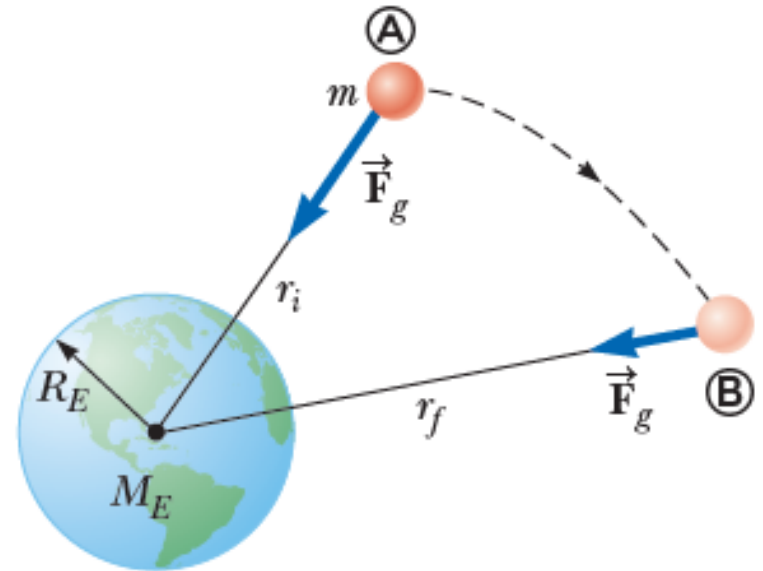
Έστω σωματίδιο μάζας m που κινείται μεταξύ δύο σημείων A και B πάνω από την επιφάνεια της Γης

Το έργο της βαρυτικής δύναμης F_g είναι

$$W_g = - \int_{r_i}^{r_f} F_g dr$$

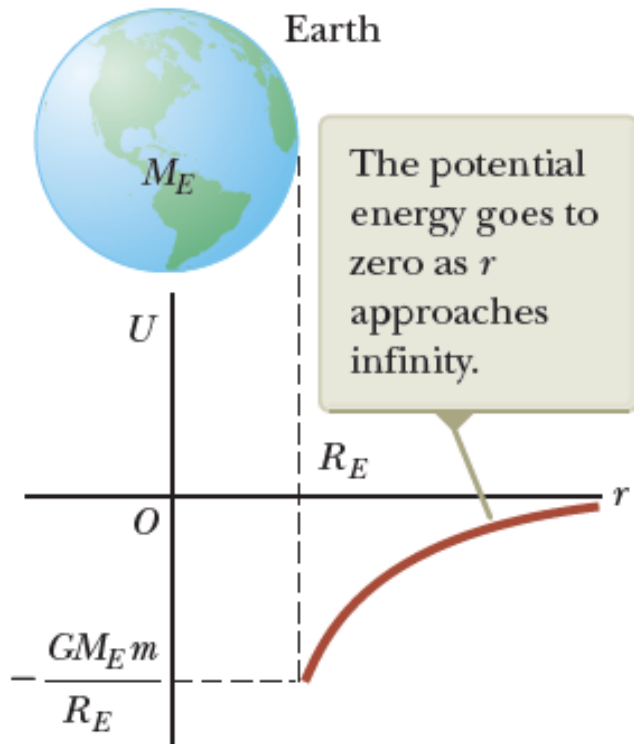
Όμως, $F_g = \frac{GM_E m}{r^2}$ οπότε

$$W_g = - \int_{r_i}^{r_f} \frac{GM_E m}{r^2} dr = -GM_E m \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2} = -GM_E m \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_i}^{r_f} = GM_E m \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)$$



Βαρυτική δυναμική ενέργεια (συνέχεια)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Έχουμε } W_g = -\Delta U = -(U_f - U_i) \\ \text{και } W_g = GM_E m \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) \end{array} \right\} \Rightarrow U_f - U_i = -GM_E m \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)$$



Πάιρνοντας $U_i = 0$ για $r_i = \infty$,
καταλήγουμε για τη δυναμική ενέργεια της
βαρύτητας ενός σώματος σε απόσταση $r \geq R_E$

$$U = -\frac{GM_E m}{r}$$

Βαρυτική δυναμική ενέργεια (συνέχεια)

Αν και η εξίσωση

$$U = -\frac{GM_E m}{r}$$

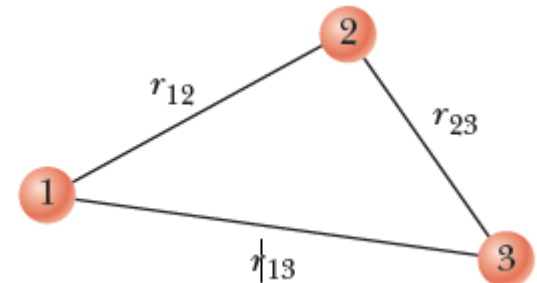
προέκυψε για το σύστημα σωματίδιο m - Γη, παρόμοια μορφή της εξίσωσης μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε δύο σωματίδια μαζών m_1 και m_2 που χωρίζονται από απόσταση r είναι

$$U = -\frac{Gm_1 m_2}{r}$$

Μπορούμε να επεκτείνουμε αυτήν την έννοια σε τρία ή περισσότερα σωματίδια.

Για παράδειγμα, η συνολική δυναμική ενέργεια ενός συστήματος τριών σωματιδίων είναι

$$U_{\text{total}} = U_{12} + U_{13} + U_{23} = -G \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right)$$



Ενέργεια και κίνηση δορυφόρων

Ας θεωρήσουμε ένα σώμα μάζας m που κινείται με ταχύτητα μέτρου v κοντά σε ένα πολύ μεγάλο σώμα μάζας M ($M \gg m$). Το σύστημα μπορεί να είναι:

- ένας πλανήτης που κινείται γύρω από τον Ήλιο,
- ένας δορυφόρος σε τροχιά γύρω από τη Γη ή
- ένας κομήτης που κάνει μια μοναδική πτήση προς τον Ήλιο

Ας υποθέσουμε ότι το σώμα μάζας M είναι ακίνητο σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Η συνολική ενέργεια E του συστήματος ισούται με το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειάς του.

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{r}$$

Σε ένα δέσμιο σύστημα, η ενέργεια $E < 0$ διότι έχουμε επιλέξει $U \rightarrow 0$ όταν $r_i \rightarrow \infty$

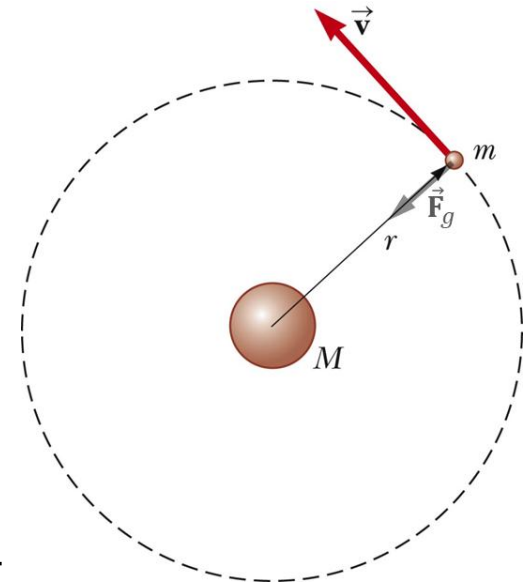
Ενέργεια σε κυκλική τροχιά

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι $E < 0$ για το σύστημα που αποτελείται από ένα αντικείμενο μάζας m που κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από ένα αντικείμενο μάζας $M \gg m$

Έχουμε 2^{ος} νόμος Νεύτωνα $F_g = ma$

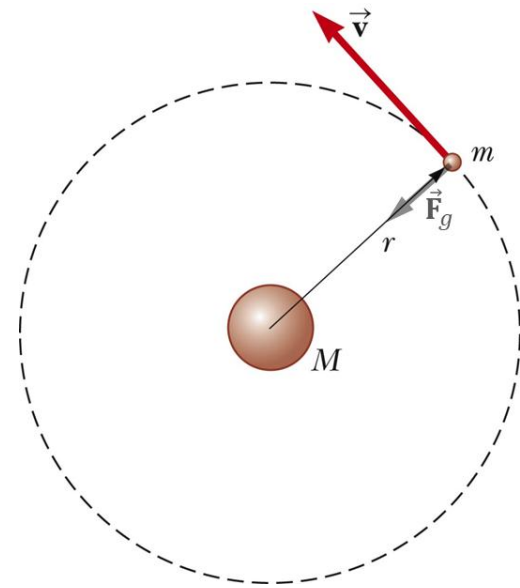
$$\left. \begin{array}{l} F_g \text{ δύναμη βαρύτητας} \quad F_g = \frac{GMm}{r^2} \\ \text{και } a \text{ κεντρομόλος,} \quad a = \frac{v^2}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\frac{GMm}{\cancel{r^2}} = \frac{mv^2}{\cancel{r}} \Rightarrow \frac{GMm}{r} = mv^2 \Rightarrow \frac{GMm}{2r} = \frac{1}{2}mv^2 = K$$

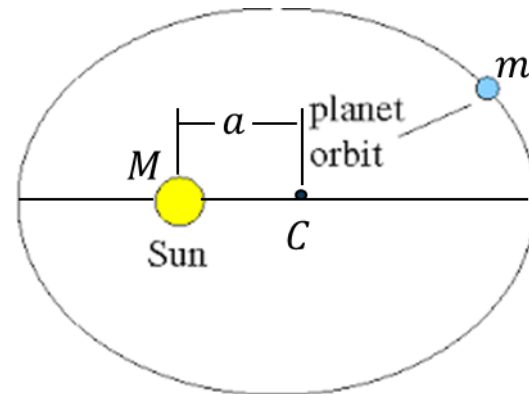


Ενέργεια σε κυκλική τροχιά (συνέχεια)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Έχουμε } \frac{GMm}{2r} = \frac{1}{2}mv^2 \\ \text{Όμως } E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow E = \frac{GMm}{2r} - G\frac{Mm}{r}$$
$$\Rightarrow E = -\frac{GMm}{2r} < 0$$



Για ελλειπτικές τροχιές $E = -\frac{GMm}{2a}$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ M13.7 Αλλαγή της τροχιάς ενός δορυφόρου

Ένα όχημα διαστημικής μεταφοράς (πύραυλος) απελευθερώνει έναν δορυφόρο επικοινωνιών 470 kg ενώ βρίσκεται σε τροχιά 280 km πάνω από την επιφάνεια της Γης. Ένας κινητήρας (μικρός πύραυλος) στον δορυφόρο τον ωθεί σε γεωσύγχρονη τροχιά. Πόση ενέργεια πρέπει να παρέχει ο κινητήρας στο δορυφόρο;

ΛΥΣΗ

Για να μπει ο δορυφόρος σε γεωστατική τροχιά πρέπει να ανέβει σε ύψος 4.22×10^7 m (βλ. Πρβλ. M13.5 B)

Σε αυτό το ύψος, ο δορυφόρος θα έχει ενέργεια

$$E = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{(6.674 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24} \text{ kg})(470 \text{ kg})}{2(4.22 \times 10^7 \text{ m})} = -2.22 \times 10^9 \text{ J}$$

Ο δορυφόρος ελευθερώνεται από τον πύραυλο σε ύψος 280 km δηλαδή σε ακτίνα τροχιάς $r = R_E + 280 \text{ km} = 6.37 \times 10^6 \text{ m} + 280000 \text{ m} = 6.65 \times 10^6 \text{ m}$

Σε αυτό το ύψος απελευθέρωσης, ο δορυφόρος έχει ενέργεια

$$E = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{(6.674 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24} \text{ kg})(470 \text{ kg})}{2(6.65 \times 10^6 \text{ m})} = -1.41 \times 10^{10} \text{ J}$$

Επομένως, ο κινητήρας να παράξει ενέργεια $(-1.41 \times 10^{10} \text{ J}) - (-2.22 \times 10^9 \text{ J})$

$$= 1.19 \times 10^{10} \text{ J}$$

Ταχύτητα διαφυγής από τη Γη

Σώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα από την επιφάνεια της Γης με αρχική ταχύτητα μέτρου v_i .

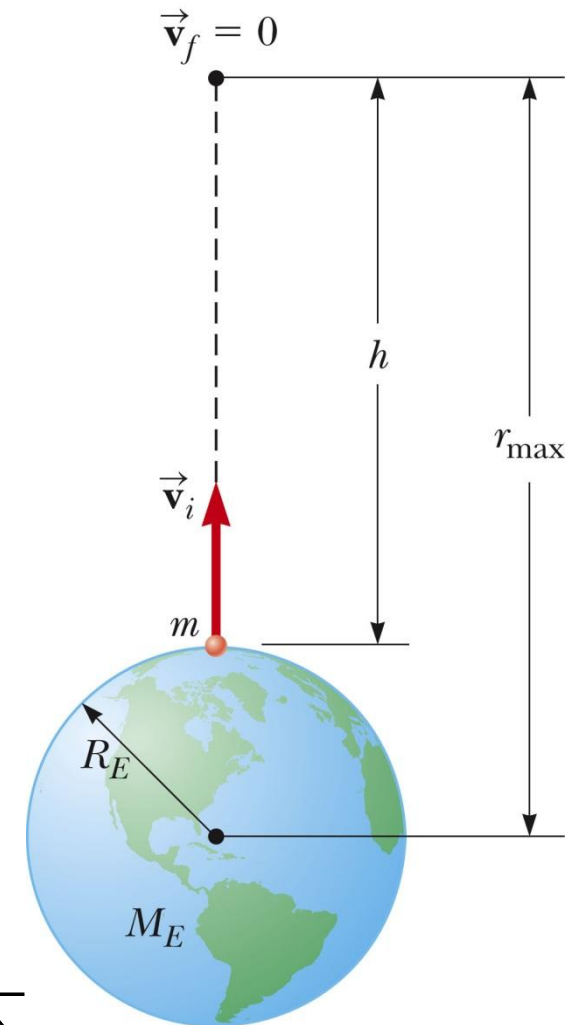
Χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας, μπορούμε να βρούμε την τιμή της ταχύτητας για να φθάσει σε ύψος h .

$$\frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_E m}{R_E} = -\frac{GM_E m}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cancel{m} v_i^2 = \frac{GM_E \cancel{m}}{R_E} - \frac{GM_E \cancel{m}}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v_i^2 = GM_E \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{h} \right)$$

$$\Rightarrow v_i^2 = 2GM_E \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{h} \right) \quad \Rightarrow \quad v_i = \sqrt{2GM_E \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{h} \right)}$$



Ταχύτητα διαφυγής από τη Γη

Έχουμε
$$v_i = \sqrt{2GM_E \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{h} \right)} \quad (1)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την **ταχύτητα διαφυγής** (escape speed) v_{esc} , που είναι η ελάχιστη τιμή της αρχικής ταχύτητας που θα επιτρέψει στο σώμα να απομακρυνθεί από τη Γη και να βρεθεί σε άπειρη απόσταση από αυτήν

Για $h \rightarrow \infty$ η (1) δίνει

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}}$$

Η ταχύτητα διαφυγής είναι ανεξάρτητο από τη μάζα m του αντικειμένου. Με άλλα λόγια, **ένα διαστημόπλοιο έχει την ίδια ταχύτητα διαφυγής με ένα μόριο.**

Ενότητα M13.6

