

Κεφάλαιο 8

Στροφορμή

Η ροπή σαν διανυσματικό γινόμενο και

Είδαμε ότι ροπή (τ) μιας δύναμης F που ασκείται σε ένα σώμα Σ ως προς κάποιον άξονα z είναι η τάση που έχει αυτή η δύναμη να περιστρέψει το σώμα γύρω από αυτόν τον άξονα.

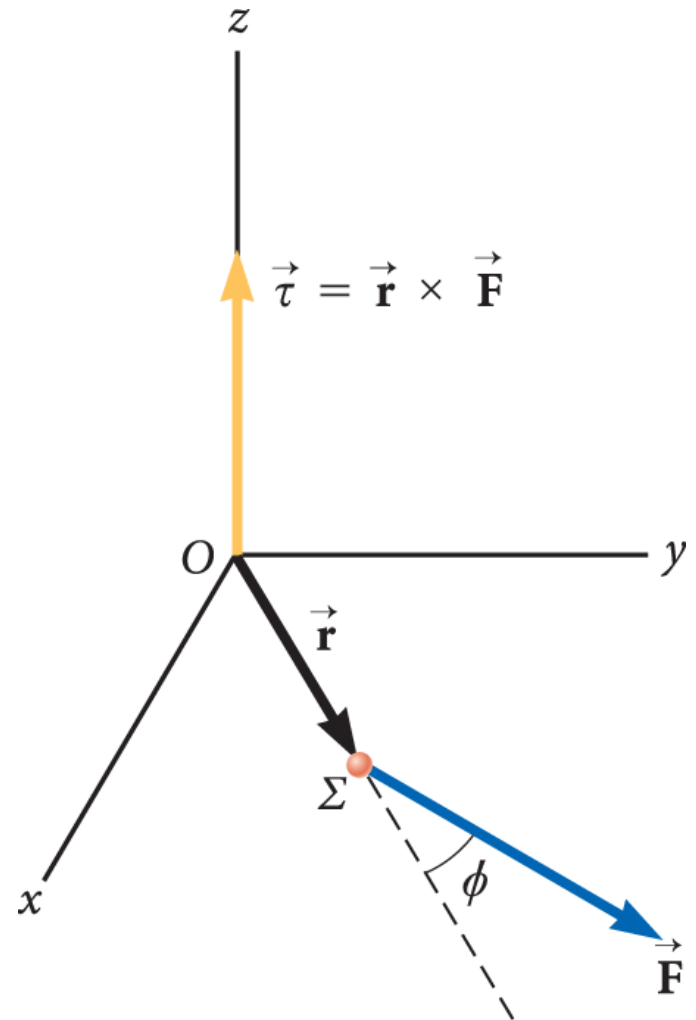
Το μέτρο της ροπής ορίστηκε

$$\tau = rF\sin\phi$$

όπου r είναι η απόσταση του σημείου (ή της δύναμης από τον άξονα περιστροφής).

Τώρα θα δούμε ότι η ροπή είναι το διανυσματικό (ή εξωτερικό) γινόμενο των διανυσμάτων της θέσης και της δύναμης.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



Διανυσματικό γινόμενο – Ορισμός

Για δύο οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ το **διανυσματικό** ή **εξωτερικό γινόμενο** τους $\vec{C}$ συμβολίζεται

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

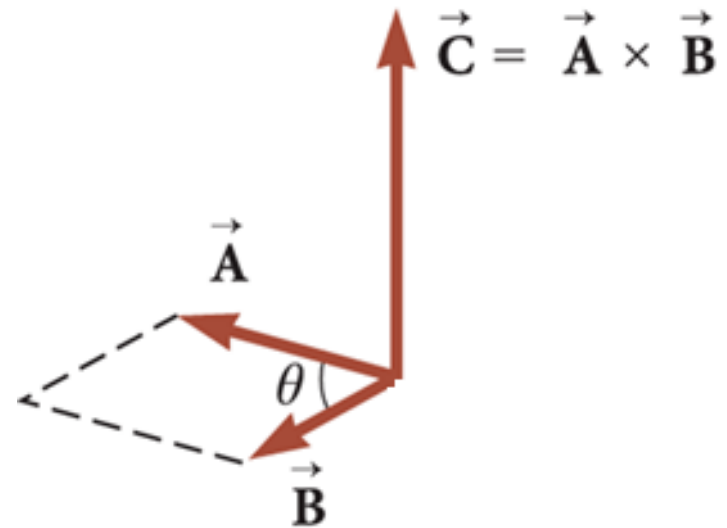
Το μέτρο του διανύσματος $\vec{C}$ είναι

$$C = |\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta$$

- θ είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των $\vec{A}$ και $\vec{B}$.

Θυμηθείτε, το βαθμωτό ή εσωτερικό γινόμενο των $\vec{A}$ και $\vec{B}$ συμβολίζουμε $\vec{A} \cdot \vec{B}$ και είναι ο αριθμός (όχι διάνυσμα)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

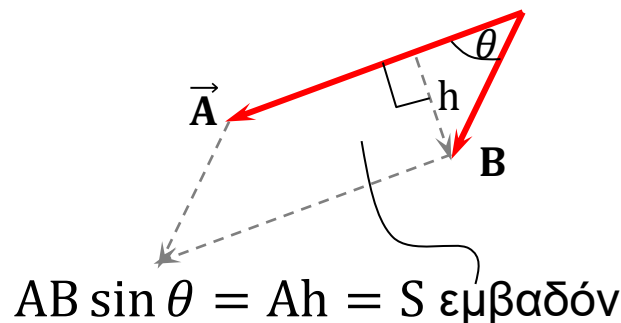
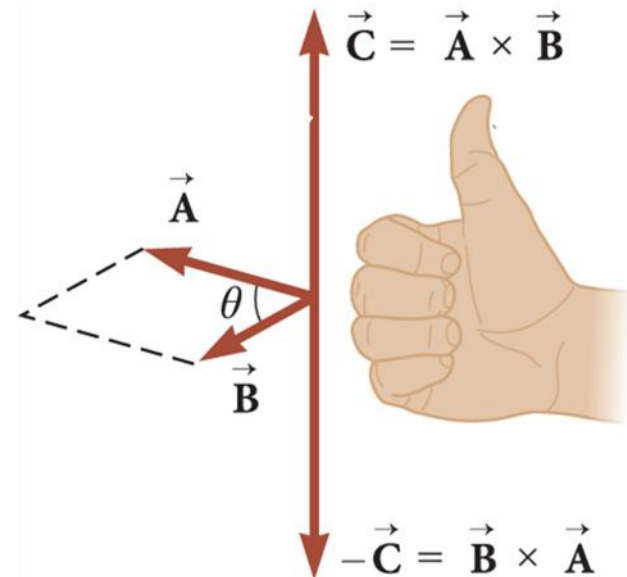


Περισσότερα για το διανυσματικό γινόμενο

Η ποσότητα $AB \sin \theta$ ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα $\vec{A}$ και $\vec{B}$.

Η διεύθυνση του $\vec{C}$ είναι κάθετη στο επίπεδο που σχηματίζουν τα $\vec{A}$ και $\vec{B}$.

Ο καλύτερος τρόπος για να προσδιορίσουμε την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{C}$ είναι να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του δεξιού χεριού.



Ιδιότητες του διανυσματικού γινομένου

Στο διανυσματικό γινόμενο **δεν** ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα. Η σειρά με την οποία πολλαπλασιάζουμε τα δύο διανύσματα έχει σημασία.

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

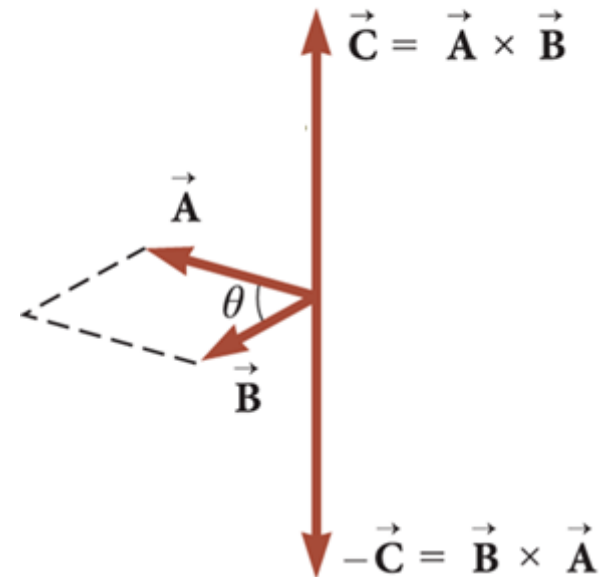
Αν το $\vec{A}$ είναι παράλληλο με το $\vec{B}$ ($\theta = 0^\circ$ ή 180°), τότε $\vec{A} \times \vec{B} = \mathbf{0}$

- Άρα, $\vec{A} \times \vec{A} = \mathbf{0}$.

Αν το $\vec{A}$ είναι κάθετο στο $\vec{B}$, τότε $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$

Στο διανυσματικό γινόμενο ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα.

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$



Ιδιότητες του διανυσματικού γινομένου (συνέχεια)

Η παράγωγος του διανυσματικού γινομένου ως προς μια μεταβλητή, όπως ο χρόνος t , είναι

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}) = \frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Είναι σημαντικό να τηρούμε τη σειρά των παραγόντων του γινομένου.

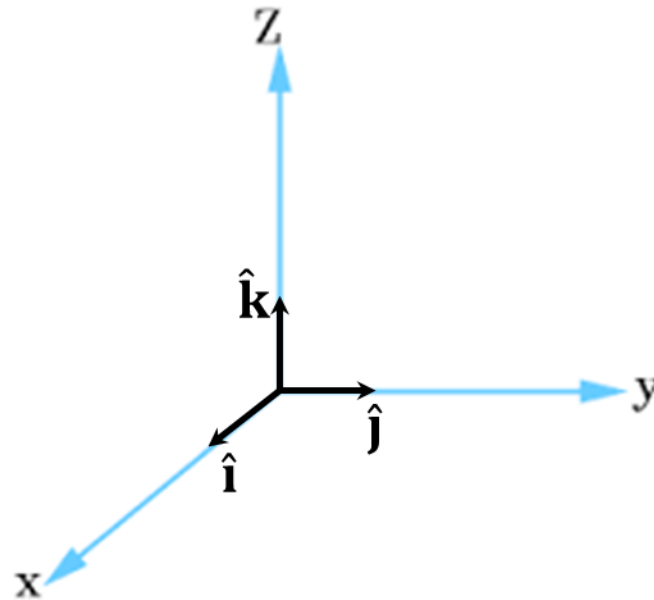
Διανυσματικά γινόμενα μοναδιαίων διανυσμάτων

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{k}}$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}}$$



Πρόσημα των διανυσματικών γινομένων

Στα διανυσματικά γινόμενα, τα πρόσημα μπορούν να αλλάξουν θέση:

- $\vec{A} \times (-\vec{B}) = -\vec{A} \times \vec{B}$
- $\hat{i} \times (-\hat{j}) = -\hat{i} \times \hat{j}$

Χρήση ορίζουσών

Αν A_x, A_y και A_z είναι οι ορθογώνιες συνιστώσες του διανύσματος $\vec{\mathbf{A}}$ και B_x, B_y και B_z του διανύσματος $\vec{\mathbf{B}}$, το διανυσματικό γινόμενο μπορεί να εκφραστεί σε μορφή ορίζουσας ως

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} + \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}}$$

$\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ και $\hat{\mathbf{k}}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα του συστήματος συντεταγμένων.

Αν αναπτύξουμε τις 2x2 ορίζουσες, το γινόμενο γράφεται

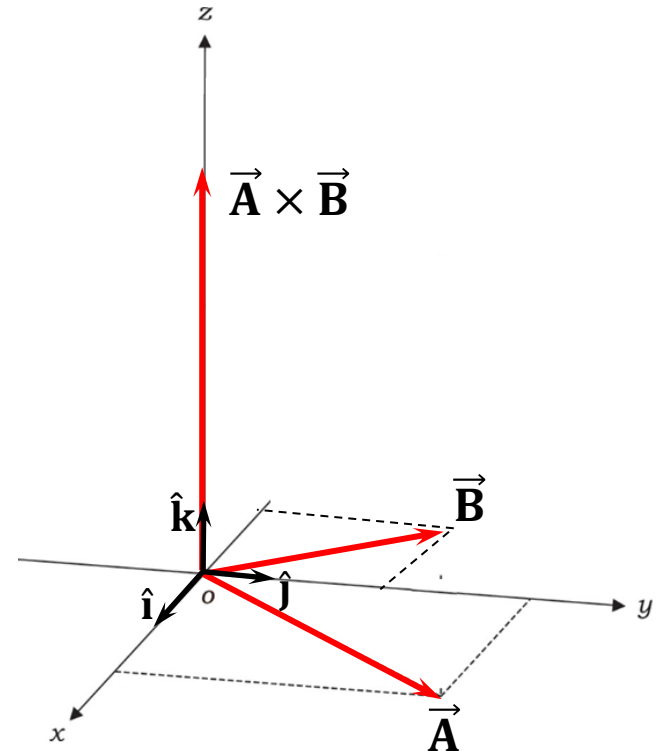
$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{\mathbf{i}} + (A_x B_z - A_z B_x) \hat{\mathbf{j}} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{\mathbf{k}}$$

Παράδειγμα διανυσματικού γινομένου

Αν $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ και $\vec{B} = -\hat{i} + 2\hat{j}$, βρείτε το γινόμενο $\vec{A} \times \vec{B}$

Απάντηση

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= (2\hat{i} + 3\hat{j}) \times (-\hat{i} + 2\hat{j}) \\ &= 2\hat{i} \times (-\hat{i}) + 2\hat{i} \times 2\hat{j} + 3\hat{j} \times (-\hat{i}) + 3\hat{j} \times 2\hat{j} \\ &= 0 + 4\hat{k} + 3\hat{k} + 0 = 7\hat{k}\end{aligned}$$



Παράδειγμα διανύσματος ροπής

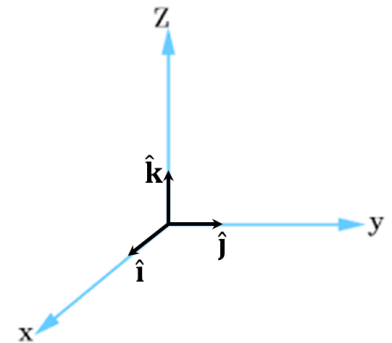
Δίνονται η δύναμη $\vec{F} = (2.00\hat{i} + 3.00\hat{j})\text{N}$ και η θέση του σημείου στο οποίο εφαρμόζεται, $\vec{r} = (4.00\hat{i} + 5.00\hat{j})\text{ m}$. Βρείτε την παραγόμενη ροπή της δύναμης.

Απάντηση

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = [(4.00\hat{i} + 5.00\hat{j})\text{N}] \times [(2.00\hat{i} + 3.00\hat{j})\text{m}]$$

$$= [(4.00)(2.00)\hat{i} \times \hat{i} + (4.00)(3.00)\hat{i} \times \hat{j} + (5.00)(2.00)\hat{j} \times \hat{i} + (5.00)(3.00)\hat{j} \times \hat{j}]$$

$$= (12.0\hat{k} - 10.0\hat{k})\text{ Nm} = 2.0\hat{k}\text{ Nm}$$



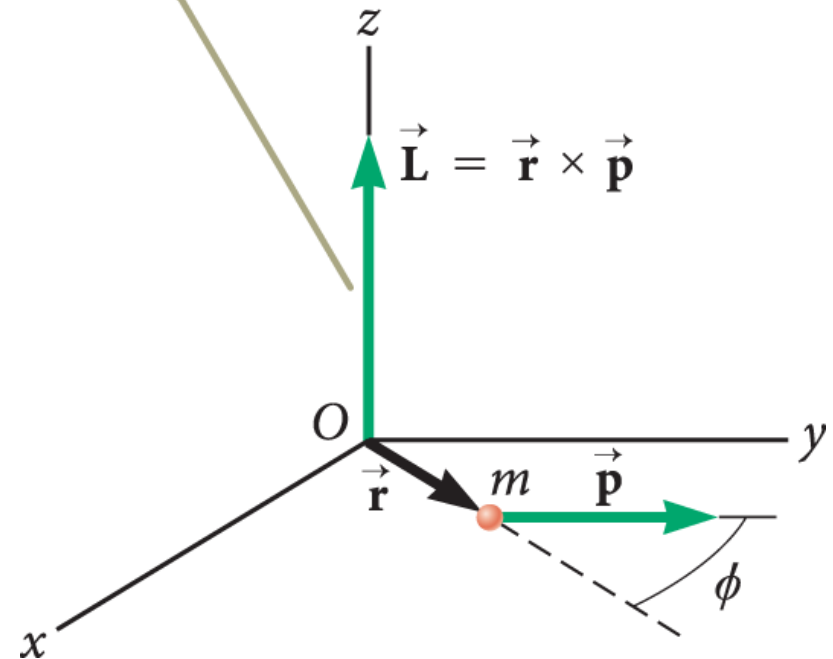
Στροφορμή (angular momentum)

Ορίζουμε ως στροφορμή $\vec{L}$ ενός σωματιδίου μάζας m ως προς την αρχή των αξόνων O το διανυσματικό γινόμενο

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

του διανύσματος $\vec{r}$ της θέσης του σωματιδίου επί την ορμή του $\vec{p}$

Η στροφορμή $\vec{L}$ ενός σωματιδίου ως προς έναν άξονα είναι ένα διάνυσμα κάθετο τόσο στο διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ του σωματιδίου ως προς τον άξονα όσο και στην ορμή $\vec{p}$ του σωματιδίου.



Ροπή και στροφορμή

$$\text{Εξ'ορισμού } \vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} \Rightarrow \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}) = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} \quad (1)$$

$$\text{Όμως, } \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{v}} \times m\vec{\mathbf{v}} = m\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{v}} = 0$$

$$\text{και } \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{r}} \times \sum \vec{\mathbf{F}} = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}}$$

$$\text{Από την (1) καταλήγουμε } \sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$$

δηλαδή, η συνολική ροπή που δέχεται ένα σωματίδιο ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του.

Ροπή και στροφορμή (συνέχεια)

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Στην περιστροφική κίνηση, η παραπάνω εξίσωση είναι ανάλογη με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

στη μεταφορική κίνηση.

- Τα $\sum \vec{\tau}$ και $\vec{L}$ πρέπει να θεωρούνται ως προς τον ίδιο άξονα.
- Η σχέση ισχύει για κάθε σταθερή αρχή ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς
- Σαν αδρανειακό σύστημα αναφοράς μπορούμε να θεωρήσουμε οπουδήποτε σώμα στο οποίο δεν ασκούνται δυνάμεις ή η συνισταμένη τους είναι μηδενική (δηλαδή, κάθε σώμα που ισορροπεί ή κινείται ευθύγραμμα και ομαλά) .

Στροφορμή σωματιδίου στην ομαλή κυκλική κίνηση

Το διάνυσμα της στροφορμής

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

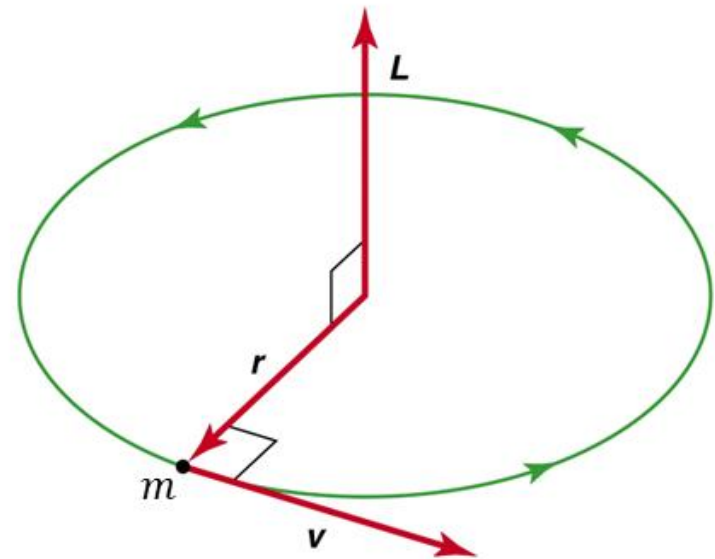
έχει φορά από το διάγραμμα προς τα έξω (κάθετα στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς).

Το μέτρο της στροφορμής είναι

$$L = rp \sin 90^\circ = rmv$$

Ένα σωματίδιο που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση έχει σταθερή στροφορμή ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο της τροχιάς του.

Στο σύστημα SI, η στροφορμή έχει μονάδες $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.



© Encyclopædia Britannica, Inc.

Στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων

Η συνολική στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων ορίζεται ως το διανυσματικό άθροισμα της στροφορμής των μεμονωμένων σωματιδίων.

$$\vec{\mathbf{L}}_{\text{συν.}} = \vec{\mathbf{L}}_1 + \vec{\mathbf{L}}_2 + \cdots + \vec{\mathbf{L}}_n = \sum_i \vec{\mathbf{L}}_i$$

Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο, παίρνουμε

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{συν.}}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{\mathbf{L}}_i}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_i$$

Στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων (συνέχεια)

Έχουμε

$$\frac{d\vec{L}_{\text{συν}}}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i (\cancel{\vec{\tau}_{i,\text{εσωτ}}} + \vec{\tau}_{i,\text{εξωτ}}) \quad = 0$$

Επειδή όμως, οι ροπές που σχετίζονται με τις εσωτερικές δυνάμεις ενός συστήματος σωματιδίων είναι μηδενικές, καταλήγουμε

$$\frac{d\vec{L}_{\text{συν}}}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{i,\text{εξωτ}}$$

δηλαδή, ο ρυθμός μεταβολής της συνολικής στροφορμής ενός συστήματος ως προς έναν άξονα, ο οποίος διέρχεται από την αρχή ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς ισούται με τη συνισταμένη εξωτερική ροπή (ροπή των εξωτερικών δυνάμεων) που ασκείται στο σύστημα.

Στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων (συνέχεια)

$$\frac{d\vec{L}_{\text{συν}}}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{i,\text{εξωτ}}$$

Η παραπάνω εξίσωση αναπαριστά μαθηματικά το μοντέλο του μη απομονωμένου συστήματος ως προς τη στροφορμή.

Αν αναδιατάξουμε την εξίσωση, θα πάρουμε

$$\int \left(\sum_i \vec{\tau}_{i,\text{εξωτ}} \right) dt = \Delta \vec{L}_{\text{συν}}$$

Η σχέση αυτή εκφράζει το **θεώρημα ώθησης-στροφορμής** στην περιστροφή.

Στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων (τελική διαφάνεια)

Η συνισταμένη ροπή $\sum_i \vec{\tau}_{i,KM}$ που ασκείται σε ένα σύστημα ως προς έναν άξονα, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας του συστήματος, ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής $d\vec{L}/dt$ του συστήματος, ανεξάρτητα από την κίνηση του κέντρου μάζας.

- Αυτό ισχύει ακόμα και στην περίπτωση που το κέντρο μάζας πραγματοποιεί επιταχυνόμενη κίνηση, με την προϋπόθεση ότι ροπή $\vec{\tau}$ και στροφορμή $\vec{L}$ υπολογίζονται ως προς το κέντρο μάζας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ M11.4 Σύστημα σωμάτων

Σφαίρα μάζας m_1 και κύβος μάζας m_2 συνδέονται με αβαρές σχοινί που διέρχεται από τροχαλία. Η ακτίνα της τροχαλίας είναι R και η μάζα της λεπτής στεφάνης της είναι M . Οι ακτίνες της τροχαλίας έχουν αμελητέα μάζα. Ο κύβος ολισθαίνει σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές.

Χρησιμοποιώντας τις έννοιες της στροφορμής και της ροπής του συστήματος βρείτε τη γραμμική επιτάχυνση των δυο σωμάτων.

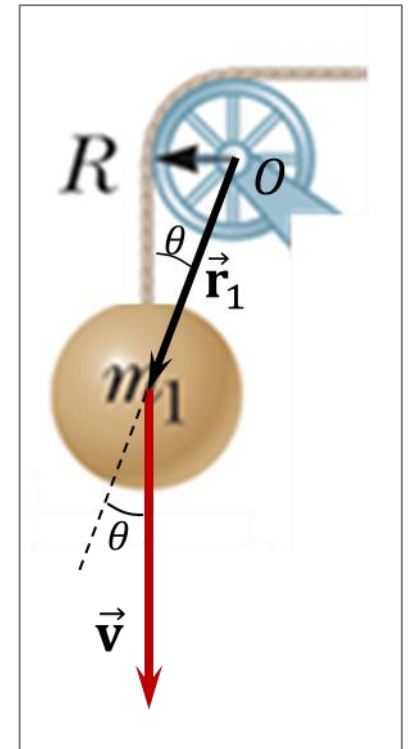
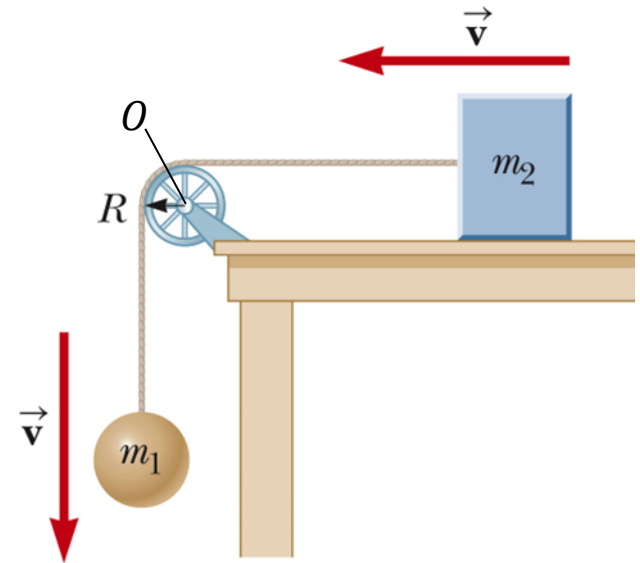
ΛΥΣΗ

Θα υπολογίσουμε τη στροφορμή και τη ροπή που ασκείται στο σύστημα των τριών σωμάτων, σφαίρα, κύβος και τροχαλία ως προς τον άξονα O της τροχαλίας.

Η στροφορμή της σφαίρας ως προς το O είναι (δείτε ένθετη εικόνα σε μεγέθυνση):

$$L_{m_1} = r_1 p_1 \sin \theta = r_1 m_1 v \sin \theta = m_1 v (r_1 \sin \theta)$$

$$\Rightarrow L_{m_1} = m_1 v R$$



ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Στη σφαίρα ασκείται η δύναμη του βάρους της $m_1 g$ που είναι εξωτερική δύναμη στο σύστημα (η τάση από το σχοινί είναι εσωτερική δύναμη στο σύστημα των τριών σωμάτων).

Η ροπή του βάρους είναι (δείτε ένθετη εικόνα σε μεγέθυνση):

$$\tau_{m_1 g} = r_1 m_1 g \sin \theta = m_1 g (r_1 \sin \theta)$$

$$\Rightarrow \tau_{m_1 g} = m_1 g R$$

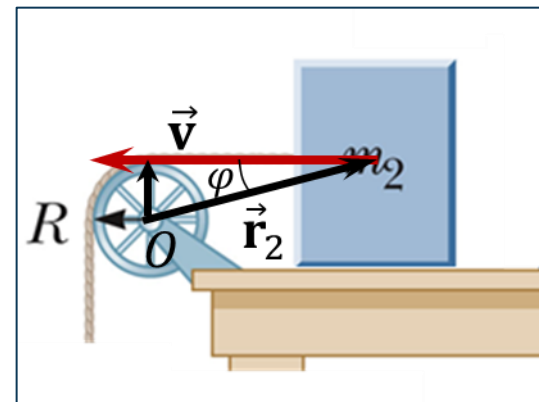
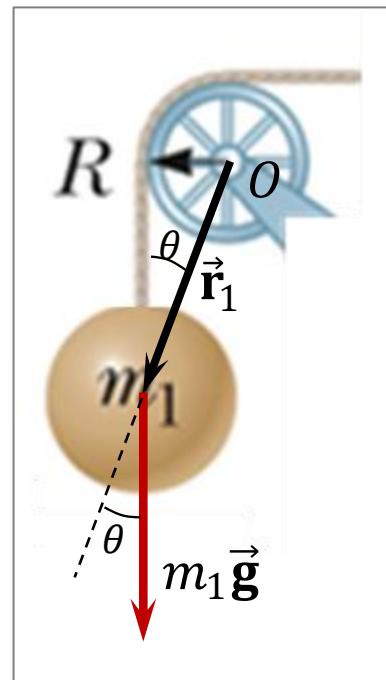
Ομοίως βρίσκουμε ότι η στροφορμή του κύβου ως προς το O είναι (δείτε ένθετη εικόνα κάτω σε μεγέθυνση):

$$L_{m_2} = r_2 p_2 \sin \varphi = r_2 m_2 v \sin \varphi = m_2 v (r_2 \sin \varphi)$$

$$\Rightarrow L_{m_2} = m_2 v R$$

Στον κύβο, η δύναμη του βάρους του και η κάθετη αντίδραση από το επίπεδο αλληλοαναιρούνται, ενώ, δεν υπάρχουν τριβές στη διεύθυνση κίνησης και η τάση από το νήμα είναι εσωτερική δύναμή στο σύστημα.

Συνεπώς, η συνολική ροπή στον κύβο είναι μηδενική.

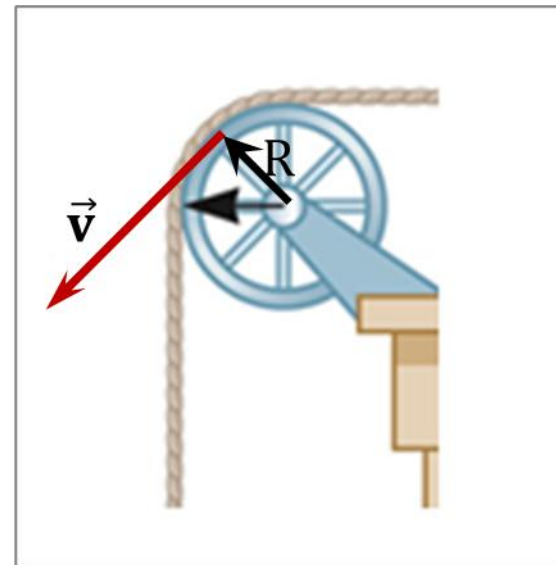


ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Τέλος, όλα τα σημεία της στεφάνης της τροχαλίας κινούνται και αυτά με ταχύτητα μέτρου v κάθετη στην ακτίνα R , οπότε η στροφορμή της τροχαλίας είναι

$$L_M = MRv$$

Θεωρώντας ότι δεν έχουμε τριβές στην τροχαλία από τον άξονά της, η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που ασκείται στη τροχαλία είναι μηδέν.



Η συνολική στροφορμή του συστήματος ως προς O είναι

$$L = L_{m_1} + L_{m_2} + L_M = m_1 v R + m_2 v R + MRv = (m_1 + m_2 + M)vR$$

και η συνολική ροπή ως προς το ίδιο σημείο είναι $\sum \tau = m_1 g R$

Αντικαθιστώντας στη σχέση ροπής-στροφορμής $\frac{dL}{dt} = \sum \tau$ παίρνουμε

$$\frac{d}{dt} [(m_1 + m_2 + M)vR] = m_1 g R \Rightarrow (m_1 + m_2 + M)R \frac{dv}{dt} = m_1 g R$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + M}$$

Στροφορμή περιστρεφόμενου άκαμπτου σώματος

Τα άκαμπτα σώματα είναι στερεά μη παραμορφώσιμα συστήματα.

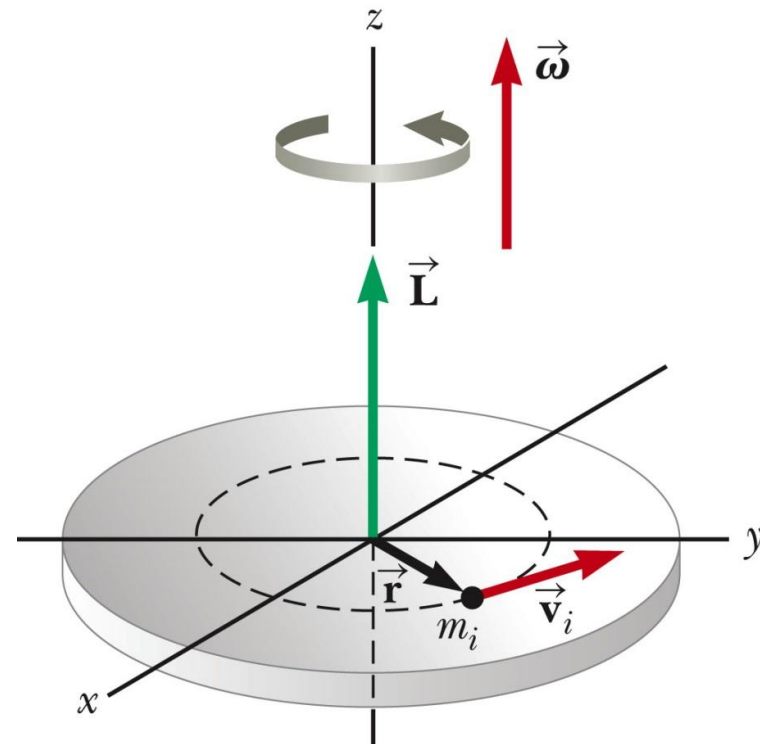
Κάθε σωματίδιο του σώματος περιστρέφεται στο επίπεδο xy γύρω από τον άξονα z με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω .

Η στροφορμή ενός μεμονωμένου σωματιδίου μάζας m_i σε απόσταση r_i από τον άξονα είναι

$$\left. \begin{aligned} L_i &= r_i p_i \sin 0^\circ = r_i m_i v_i \\ v_i &= \omega r_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow L_i = m_i r_i^2 \omega$$

Η συνολική στροφορμή του άκαμπτου σώματος ως προς τον άξονα z είναι

$$L_z = \sum_i L_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega = I \omega$$



Στροφορμή περιστρεφόμενου άκαμπτου σώματος (συνέχεια)

Η στροφορμή περιστρεφόμενου σώματος με γωνιακή ταχύτητα ω είναι

$$L_z = I\omega$$

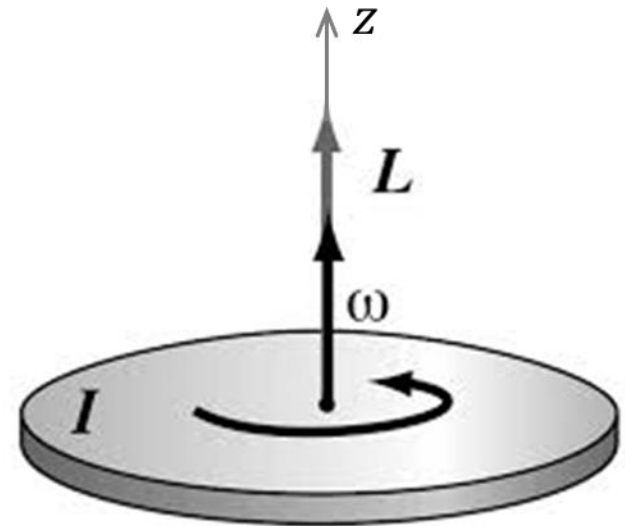
Με παραγωγή παίρνουμε

$$\frac{dL_z}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I a_\omega$$

όπου a_ω το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του περιστρεφόμενου σώματος

Όμως, επειδή $\frac{dL_z}{dt} = \sum \tau_{\epsilon\zeta\omega\tau}$, όπου $\sum \tau_{\epsilon\zeta\omega\tau}$ η ολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων στο σώμα, παίρνουμε

$$\sum \tau_{\epsilon\zeta\omega\tau} = I a_\omega \quad \text{2ος νόμος Νεύτωνα για περιστροφή}$$



Στροφορμή περιστρεφόμενου άκαμπτου σώματος (τελική διαφάνεια)

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για την περιστροφή ισχύει και για άκαμπτα σώματα που περιστρέφονται γύρω από έναν κινούμενο άξονα υπό την προϋπόθεση ότι ο άξονας αυτός:

1. διέρχεται από το κέντρο μάζας
2. είναι άξονας συμμετρίας

Αν ένα συμμετρικό σώμα περιστρέφεται γύρω από έναν σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, ισχύει η διανυσματική μορφή της εξίσωσης:

$$\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\omega}$$

όπου $\vec{\mathbf{L}}$ είναι η συνολική στροφορμή του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής.

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για την περιστροφή ισχύει για οποιοδήποτε σώμα, ανεξάρτητα από τη συμμετρία του, αν το I συμβολίζει τη συνιστώσα της στροφορμής κατά μήκος του άξονα περιστροφής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ M11.6 Ζυγός

Δύο μάζες m_1 και m_2 στηρίζονται στα δυο άκρα μιας ράβδου μήκους l και μάζας M σε ίσες αποστάσεις από τον άξονα περιστροφής O . Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές. Σε μια δεδομένη χρονική στιγμή το σύστημα περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω .

A. Βρείτε το μέτρο της στροφορμής του συστήματος.

ΛΥΣΗ

Η στροφορμή L του συστήματος είναι

$$L = I\omega$$

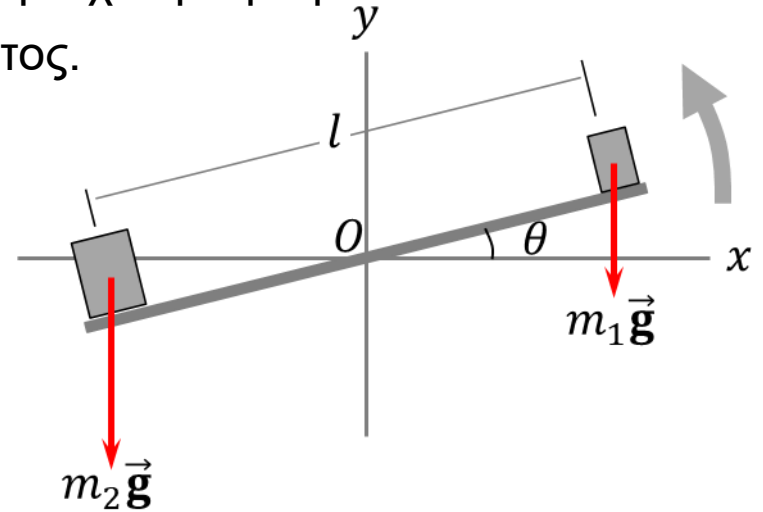
όπου I η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής O .

Η ροπή αδράνειας του συστήματος ισούται με το άθροισμα των ροπών αδράνειας των μερών που το αποτελούν

$$\text{Είναι } I = \frac{1}{12}Ml^2 + m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{l^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)$$

όπου, $\frac{1}{12}Ml^2$ η ροπή αδράνειας της ράβδου και $m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2$, $m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2$ των δύο μαζών.

$$\text{Οπότε } L = I\omega = \frac{l^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2\right)\omega$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (συνέχεια)

Β. Βρείτε τη σχέση που δίνει τη γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος όταν η ράβδος είναι σε γωνία θ ως προς τον ορίζοντα.

ΛΥΣΗ

Η γωνιακή επιτάχυνση a_ω δίνεται από το 2^ο νόμο Νεύτωνα για την περιστροφή

$$\sum \tau_{\text{εξωτ}} = I a_\omega$$

Η συνισταμένη ροπή των εξωτερικών δυνάμεων είναι

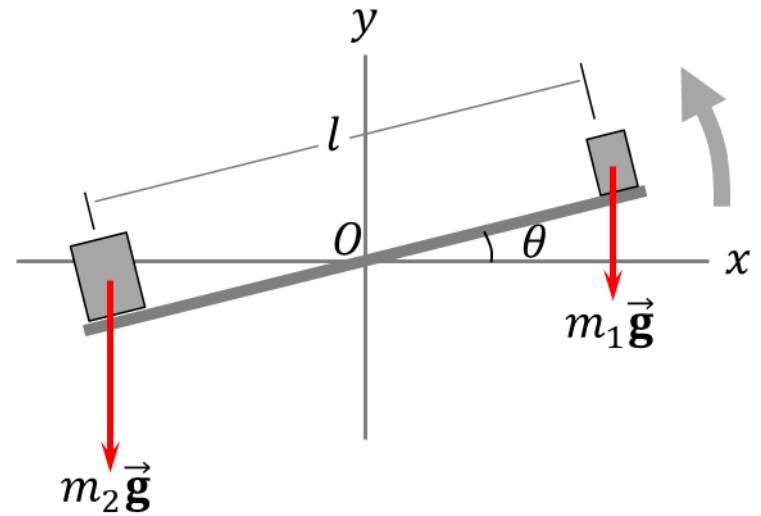
$$\sum \tau_{\text{εξωτ}} = \tau_{m_1 g} + \tau_{m_2 g} + \tau_{Mg}$$

όπου,

$$\tau_{m_1 g} \text{ η ροπή του βάρους } m_1 g \text{ ως προς } O: \tau_{m_1 g} = -m_1 g \frac{l}{2} \cos \theta$$

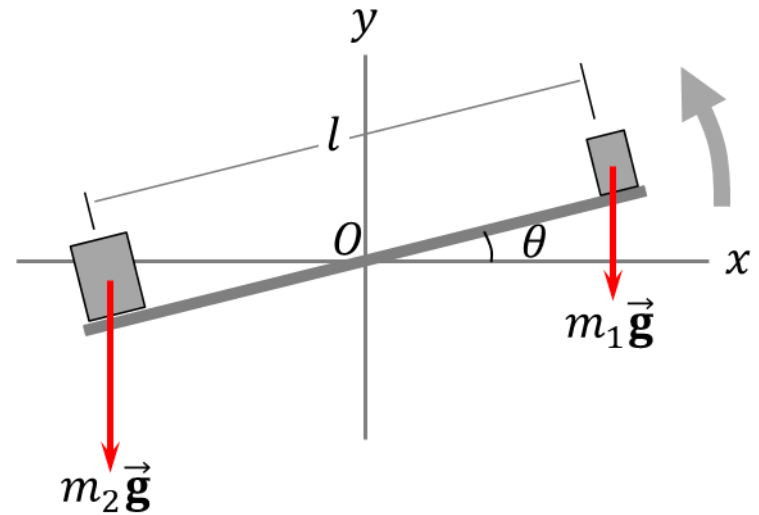
$$\tau_{m_2 g} \text{ η ροπή του βάρους } m_2 g \text{ ως προς } O: \tau_{m_2 g} = m_2 g \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$\tau_{Mg} \text{ η ροπή της ράβδου ως προς } O: \tau_{Mg} = Mg \cdot 0 = 0$$



ΛΥΣΗ (συνέχεια)

$$\begin{aligned}\sum \tau_{\varepsilon\xi\omega\tau} &= \tau_{m_1g} + \tau_{m_1g} + \tau_{Mg} \\ &= m_1g \frac{l}{2} \cos \theta - m_2g \frac{l}{2} \cos \theta + 0 \\ &= \frac{1}{2} (m_1 - m_2) gl \cos \theta\end{aligned}$$



Αντικαθιστώντας στη σχέση

$$\sum \tau_{\varepsilon\xi\omega\tau} = I a_{\omega}$$

Βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} (m_1 - m_2) gl \cos \theta &= \frac{l^2}{4} \left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2 \right) a_{\omega} \\ \Rightarrow a_{\omega} &= \frac{2(m_1 - m_2)g \cos \theta}{l \left(\frac{M}{3} + m_1 + m_2 \right)}\end{aligned}$$

Διατήρηση της στροφορμής

Απο τη σχέση ροπής-στροφορμής

$$\frac{d\vec{L}_{\text{συν}}}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_{i,\text{εξωτ}}$$

προκύπτει ότι αν η συνισταμένη εξωτερική ροπή που ασκείται στο σύστημα είναι μηδενική, $\sum_i \vec{\tau}_{i,\text{εξωτ}} = 0$, τότε $d\vec{L}_{\text{συν}}/dt = 0$

δηλαδή, η συνολική στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή (σε μέτρο και κατεύθυνση) με το χρόνο.

$$\vec{L}_{\text{συν}} = \text{σταθερή} \quad \text{ή} \quad \vec{L}_i = \vec{L}_f$$

- Σε αυτή την αρχή βασίζεται το μοντέλο του απομονωμένου συστήματος ως προς τη στροφορμή.

Διατήρηση της στροφορμής σε παραμορφώσιμα συστήματα

Αν ένα απομονωμένο περιστρεφόμενο σύστημα είναι παραμορφώσιμο, δηλαδή η μάζα του ανακατανέμεται, τότε η ροπή αδράνειας I του συστήματος μεταβάλλεται.

Δεδομένου ότι

$$L = I\omega$$

για να διατηρηθεί η στροφορμή, δηλαδή, για να έχουμε

$$L_i = L_f$$

απαιτείται μια αντισταθμιστική μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας ώστε

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

- Η σχέση αυτή ισχύει τόσο για την περιστροφή γύρω από έναν σταθερό άξονα όσο και για την περιστροφή γύρω από έναν άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας ενός κινούμενου συστήματος.
- Σε κάθε περίπτωση, η συνισταμένη ροπή πρέπει να είναι μηδενική.

Αρχές διατήρησης – Σύνοψη

Για ένα απομονωμένο σύστημα, έχουμε:

A. Διατήρηση της ενέργειας:

- $E_i = E_f$
- Αν δεν μεταφέρεται ενέργεια μέσω του ορίου του συστήματος.

B. Διατήρηση της ορμής:

- $\vec{p}_i = \vec{p}_f$
- Αν η συνισταμένη εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα είναι μηδενική, $\sum F_{\text{εξωτ}} = 0$.

Γ. Διατήρηση της στροφορμής:

- $\vec{L}_i = \vec{L}_f$
- Αν η συνισταμένη εξωτερική ροπή που ασκείται στο σύστημα είναι μηδενική, $\sum \tau_{\text{εξωτ}} = 0$.

Αρχές διατήρησης – Σημειώσεις

Ένα σύστημα μπορεί να είναι απομονωμένο ως προς ένα από αυτά τα μεγέθη (E , $\vec{p}$ ή $\vec{L}$), αλλά όχι ως προς κάποιο άλλο.

- Για παράδειγμα, ένα σύστημα το οποίο δεν είναι απομονωμένο ως προς την ορμή, συχνά δεν είναι απομονωμένο και ως προς την ενέργεια επειδή σε αυτό ασκείται μια συνισταμένη δύναμη ή ροπή.
- Υπάρχουν συστήματα που δεν είναι απομονωμένα ως προς την ενέργεια, αλλά είναι απομονωμένα ως προς την ορμή.
- Συχνά, οι κρούσεις είναι απομονωμένες ως προς την ορμή αλλά δεν είναι απομονωμένες ως προς την ενέργεια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ M11.8 Το καρουσέλ

Μια οριζόντια πλατφόρμα μάζας $M = 100\text{kg}$ σε σχήμα κυκλικού δίσκου ακτίνας $R = 2.0\text{m}$ περιστρέφεται ελεύθερα σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα χωρίς τριβές. Ένας μαθητής μάζας $m = 56.0\text{kg}$ περπατά αργά από το χείλος του δίσκου προς το κέντρο του. Εάν η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος είναι 2.0rad/s όταν ο μαθητής βρίσκεται στο χείλος, ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα όταν φτάνει σε ένα σημείο $r = 0.5\text{m}$ από το κέντρο;

ΛΥΣΗ

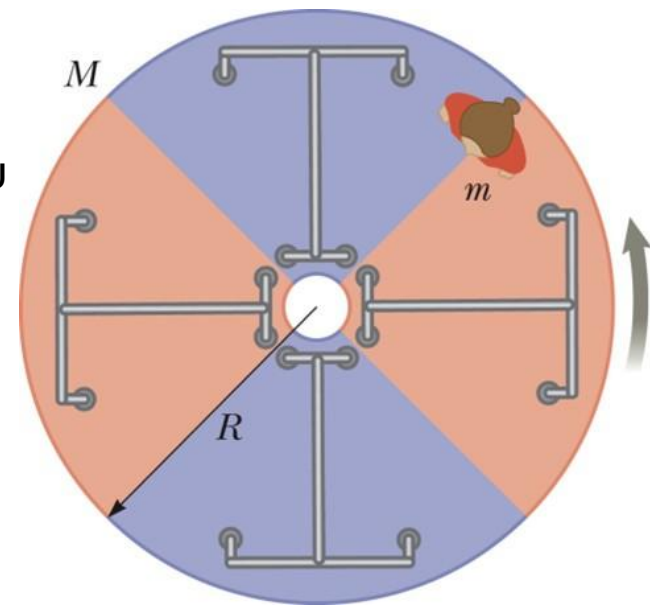
Η ροπή αδράνειας του συστήματος ισούται με τη ροπή αδράνειας της πλατφόρμας συν τη ροπή αδράνειας του μαθητή.

$$I = I_p + I_s \Rightarrow I = \frac{1}{2}MR^2 + mr^2$$

Καθώς ο μαθητής περπατά προς το κέντρο της περιστρεφόμενης πλατφόρμας, η ακτίνα περιστροφής του r μειώνεται, με συνέπεια τη μείωση της ροπής αδράνειας του συστήματος.

Επειδή η πλατφόρμα περιστρέφεται σε άξονα χωρίς τριβές, η στροφορμή του συστήματος διατηρείται.

$$L_i = L_f \quad \text{ή} \quad I_i \omega_i = I_f \omega_f$$



ΛΥΣΗ (συνέχεια)

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f \quad (1)$$

Η μείωση της ροπής αδράνειας I καθώς ο μαθητής περπατά προς το κέντρο έχει σαν συνέπεια το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω του συστήματος να αυξάνεται

Η αρχική ροπή αδράνειας του συστήματος (όταν ο μαθητής είναι στην άκρη, $r = R$) είναι

$$I_i = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2$$

και η αρχική στροφορμή $L_i = I_i \omega_i$

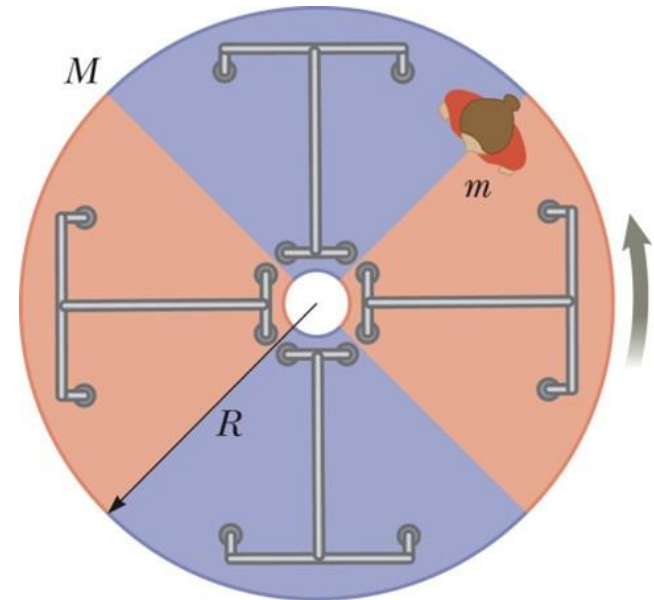
Η τελική ροπή αδράνειας (όταν ο μαθητής είναι στην θέση, $r = 0.50\text{m}$) είναι

$$I_f = \frac{1}{2}MR^2 + mr^2$$

και η τελική στροφορμή $L_f = I_f \omega_f$

Αντικαθιστώντας στην (1), παίρνουμε

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_i = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)}\omega_i$$

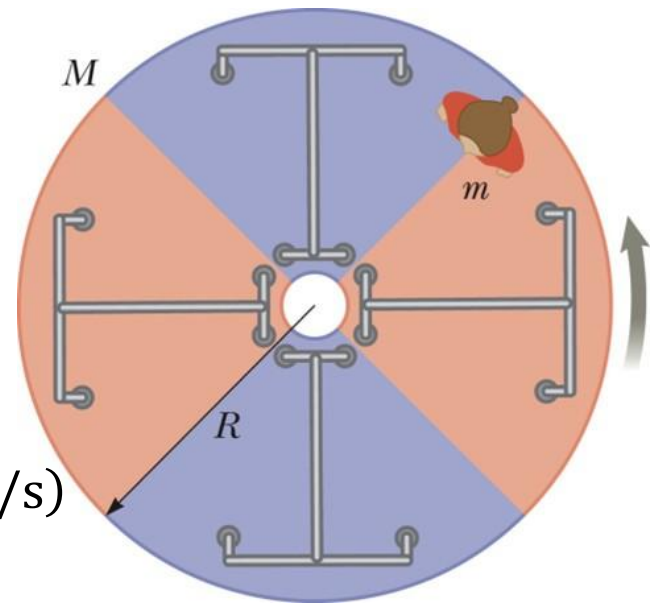


ΛΥΣΗ (συνέχεια)

$$\omega_f = \frac{\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)}\omega_i$$

$$\omega_f = \frac{\left(\frac{1}{2}(100\text{kg})(2.0\text{m})^2 + (60\text{kg})(2.0\text{m})^2\right)}{\left(\frac{1}{2}(100\text{kg})(2.0\text{m})^2 + (60\text{kg})(0.5\text{m})^2\right)}(2.0\text{rad/s})$$

$$= 4.1\text{rad/s}$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ M11.9 Σύγκρουση δίσκου με ράβδο

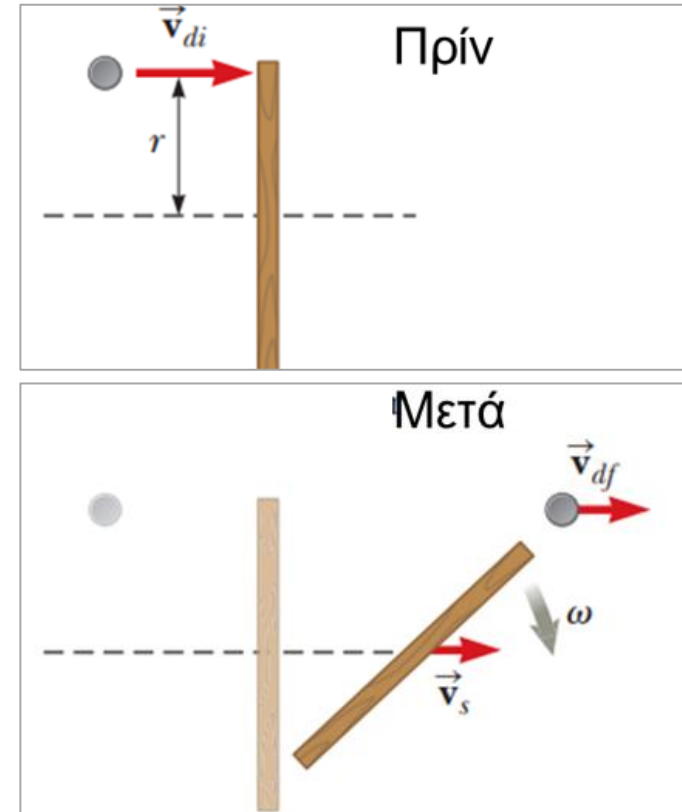
Ένας μικρός δίσκος 2.0 kg που εκτοξεύεται πάνω σε επιφάνεια πάγου με 3.0 m/s χτυπά ένα ραβδί 1.0 kg μήκους 4.0 m που βρίσκεται πάνω στον πάγο σχεδόν χωρίς τριβή (εικ. Α). Ο δίσκος χτυπά στο τελικό σημείο του ραβδιού, σε απόσταση $r = 2.0 \text{ m}$ από το κέντρο του. Ας υποθέσουμε ότι η σύγκρουση είναι ελαστική και ο δίσκος δεν αποκλίνει από την αρχική του γραμμή κίνησης. Βρείτε τη μεταφορική ταχύτητα του δίσκου, τη μεταφορική ταχύτητα του ραβδού και τη γωνιακή ταχύτητα του ραβδού μετά τη σύγκρουση. Η ροπή αδράνειας του ραβδιού γύρω από το κέντρο μάζας του είναι $1.33 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

ΛΥΣΗ

Επειδή, λόγω του πάγου, δεν υπάρχουν τριβές, ο δίσκος και το ραβδί σχηματίζουν ένα απομονωμένο σύστημα όσον αφορά την ορμή και τη στροφορμή (η δύναμη κατά την κρούση δίσκου-ράβδου είναι εσωτερική).

Επίσης, αγνοώντας τον ήχο που παράγεται στη σύγκρουση, το σύστημα είναι επίσης απομονωμένο σύστημα ως προς την ενέργεια.

Επιπλέον, επειδή η σύγκρουση θεωρείται ελαστική, η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι σταθερή



ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Από την διατήρηση της ορμής του συστήματος, έχουμε:

$$\Delta \vec{p}_{\text{tot}} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{\text{tot,after}} - \vec{p}_{\text{tot,before}} = 0$$

$$\Rightarrow (m_d v_{df} + m_s v_s) - m_d v_{di} = 0$$

$$\Rightarrow m_d (v_{di} - v_{df}) = m_s v_s \quad (1)$$

Θεωρώντας τη στροφορμή του συστήματος ως προς έναν άξονα που διέρχεται από το κέντρο C του ραβδίου, έχουμε:

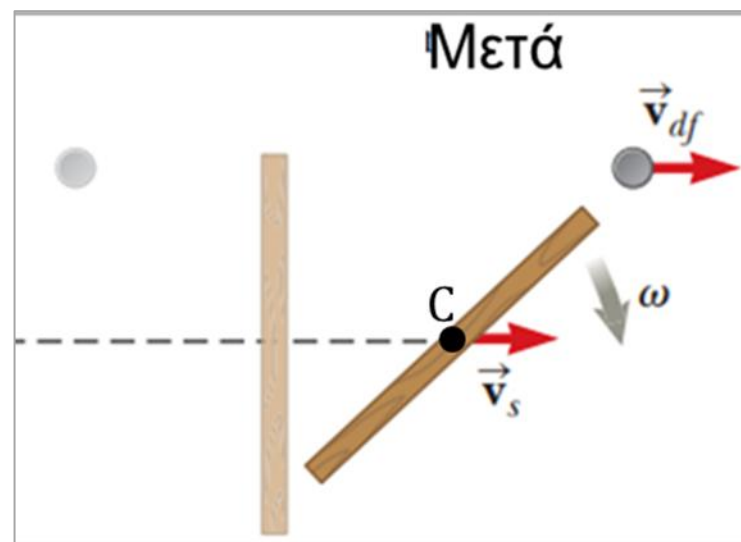
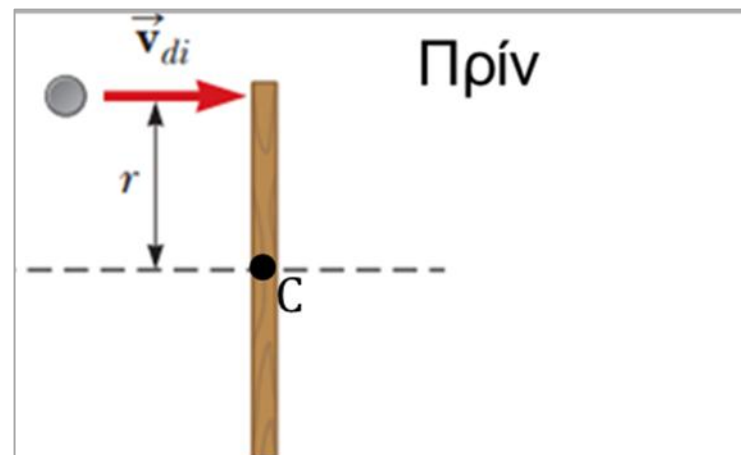
- Πριν την κρούση, η στροφορμή του δίσκου (ως προς C) είναι

$$L_{di} = -r m_d v_{di} \text{ (αρνητική ως δεξιόστροφη)}$$

Μετά την κρούση, η στροφορμή του δίσκου (ως προς C) είναι

$$L_{df} = -r m_d v_{df}$$

και της ράβδου $L_{sf} = I\omega$



ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Από τη διατήρηση της στροφορμής ως προς το C , έχουμε:

$$\Delta \vec{L}_{\text{tot}} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{\text{tot,after}} - \vec{L}_{\text{tot,before}} = 0$$

$$\Rightarrow (-rm_d v_{df} + I\omega) - (-rm_d v_{di}) = 0$$

$$\Rightarrow -rm_d(v_{di} - v_{df}) = I\omega \quad (2)$$

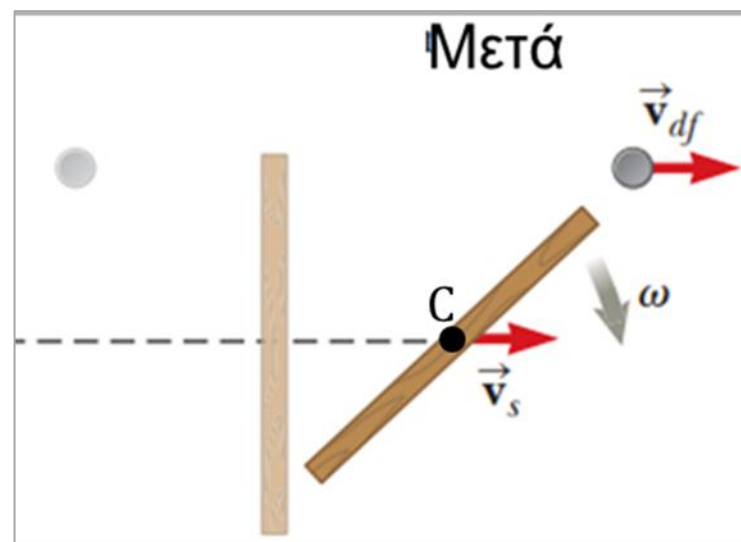
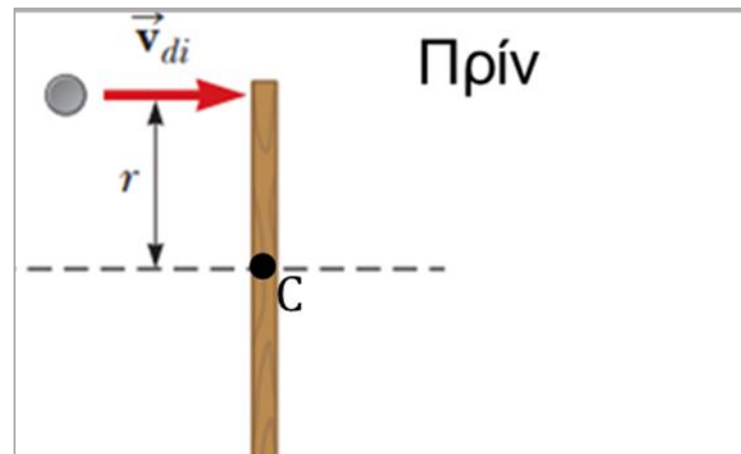
Από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας κατά τη κρούση, έχουμε:

$$\Delta K = 0 \Rightarrow K_{\text{after}} - K_{\text{before}} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} m_d v_{df}^2 + \frac{1}{2} m_s v_s^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \right) - \frac{1}{2} m_d v_{di}^2 = 0$$

$$\Rightarrow m_d(v_{df}^2 - v_{di}^2) + m_s v_s^2 + I \omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow m_d(v_{di} - v_{df})(v_{di} + v_{df}) = m_s v_s^2 + I \omega^2 \quad (3)$$



ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Πολλαπλασιάζοντας την (1) επί r , έχουμε:

$$rm_d(v_{di} - v_{df}) = rm_s v_s$$

και προσθέτοντας την (2)

$$-rm_d(v_{di} - v_{df}) = I\omega$$

παίρνουμε

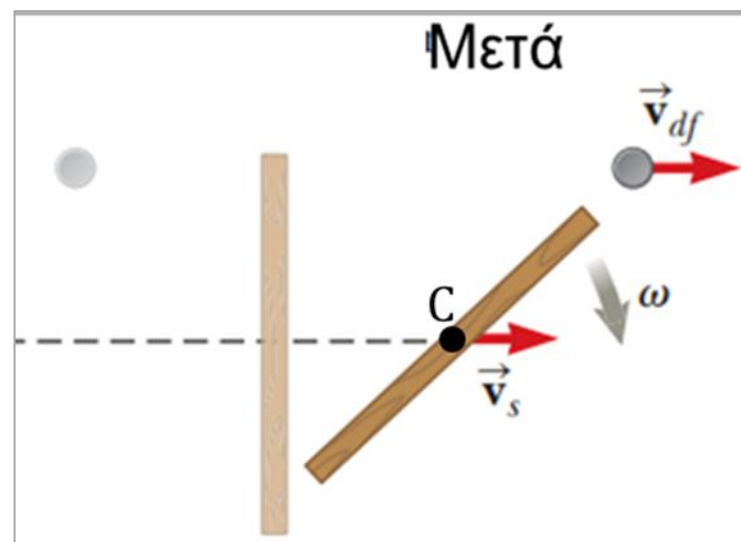
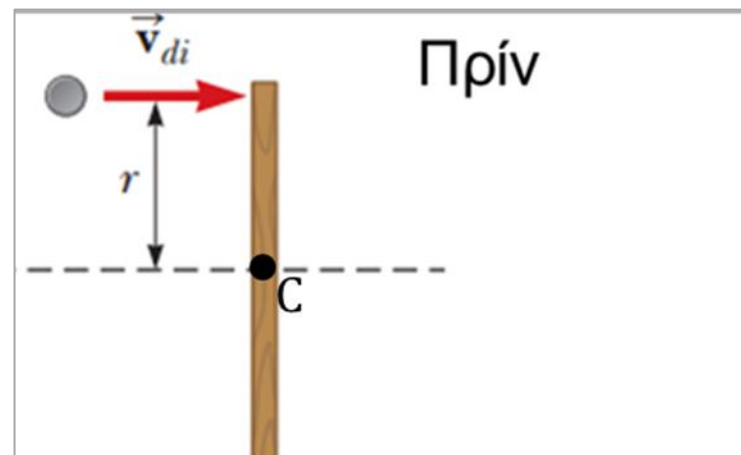
$$0 = rm_s v_s + I\omega$$

$$\Rightarrow \omega = -\frac{rm_s v_s}{I} \quad (4)$$

Διαιρώντας $\frac{(3)}{(1)}$ έχουμε

$$\frac{m_d(v_{di} - v_{df})(v_{di} + v_{df})}{m_d(v_{di} - v_{df})} = \frac{m_s v_s^2 + I\omega^2}{m_s v_s}$$

$$\Rightarrow v_{di} + v_{df} = v_s + \frac{I\omega^2}{m_s v_s} \quad (5)$$



ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Έχουμε $\omega = -\frac{rm_s v_s}{I}$ (4)

και $v_{di} + v_{df} = v_s + \frac{I\omega^2}{m_s v_s}$ (5)

Αντικαθιστώντας το ω από την (4) στην (5), έχουμε

$$v_{di} + v_{df} = v_s + \frac{I \left(-\frac{rm_s v_s}{I} \right)^2}{m_s v_s}$$
$$\Rightarrow v_{di} + v_{df} = v_s \left(1 + \frac{r^2 m_s}{I} \right) \quad (6)$$

Από την (1) έχουμε

$$v_{di} - v_{df} = \frac{m_s v_s}{m_d}$$

και προσθέτοντας κατά μέλη στην (6), και λύνοντας ως προς v_s , βρίσκουμε

Έχουμε

και

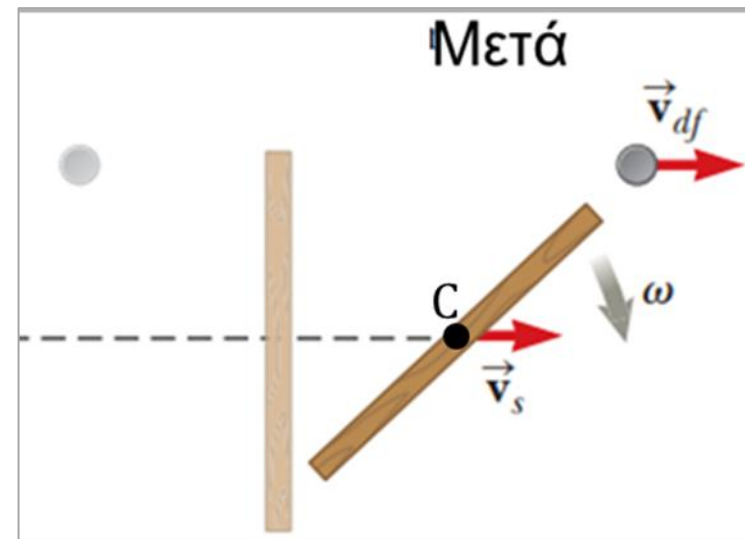
Αντικαθιστώντας το ω από την (4) στην (5), έχουμε

$$v_{di} + v_{df} = v_s + \frac{I \left(-\frac{rm_s v_s}{I} \right)^2}{m_s v_s}$$
$$\Rightarrow v_{di} + v_{df} = v_s \left(1 + \frac{r^2 m_s}{I} \right) \quad (6)$$

Από την (1) έχουμε

$$v_{di} - v_{df} = \frac{m_s v_s}{m_d}$$

και προσθέτοντας κατά μέλη στην (6), και λύνοντας ως προς v_s , βρίσκουμε



$$v_s = \frac{2v_{di}}{1 + \frac{m_s}{m_d} + \frac{r^2 m_s}{I}}$$

ΛΥΣΗ (συνέχεια)

$$v_s = \frac{2v_{di}}{1 + \frac{m_s}{m_d} + \frac{r^2 m_s}{I}}$$
$$= \frac{2(3.0\text{m/s})}{1 + \frac{1.0\text{kg}}{2.0\text{kg}} + \frac{(2.0\text{m})^2(1.0\text{kg})}{1.33\text{kg} \cdot \text{m}^2}} = 1.3 \text{ m/s}$$

Από την (4), έχουμε $\omega = -\frac{rm_s v_s}{I} = -\frac{(2.0\text{m})(1.0\text{kg})\left(\frac{1.3\text{m}}{\text{s}}\right)}{1.33\text{kg} \cdot \text{m}^2} = -2.0 \text{ rad/s}$

Τέλος, λύνοντας την (1) ως προς v_{df} έχουμε

$$v_{df} = v_{di} - \frac{m_s}{m_d} v_s = \frac{3.0\text{m}}{\text{s}} - \frac{1.0\text{kg}}{2.0\text{kg}} \left(\frac{1.3\text{m}}{\text{s}} \right) = 2.3 \text{ m/s}$$

Γυροσκοπική κίνηση

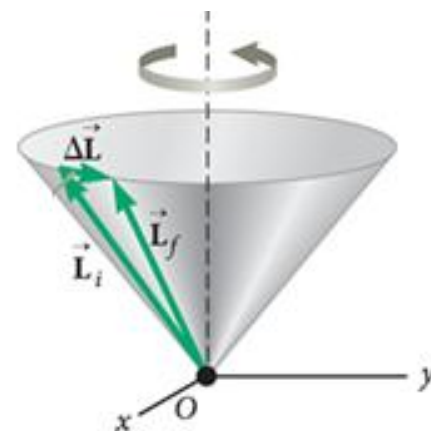
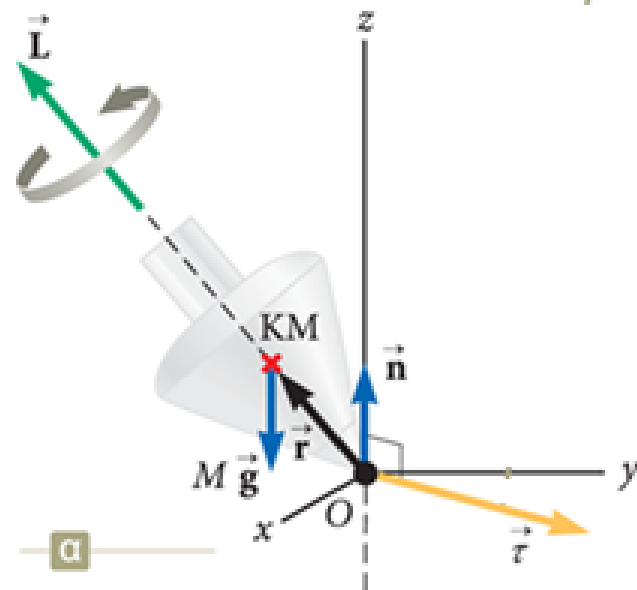
Ένας ασυνήθιστος και ενδιαφέρων τύπος κίνησης είναι μιας σβούρας που περιστρέφεται γύρω από τον άξονα συμμετρίας της (εικ. Α).

Εάν η σβούρα περιστρέφεται γρήγορα, ο άξονας συμμετρίας περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα z , σαρώνοντας έναν κώνο (εικ. Β).

Η κίνηση του άξονα συμμετρίας γύρω από την κατακόρυφο ονομάζεται **μεταπτωτική κίνηση (precessional motion)**

και είναι συνήθως αργή σε σχέση με την περιστρεφόμενη κίνηση της κορυφής.

Είναι πολύ φυσικό να αναρωτιόμαστε γιατί η σβούρα δεν πέφτει.



Γυροσκοπική κίνηση (συνέχεια)

Η περιστρεφόμενη σβούρα έχει στροφορμή $\vec{L}$ ως προς τον άξονα συμμετρίας της

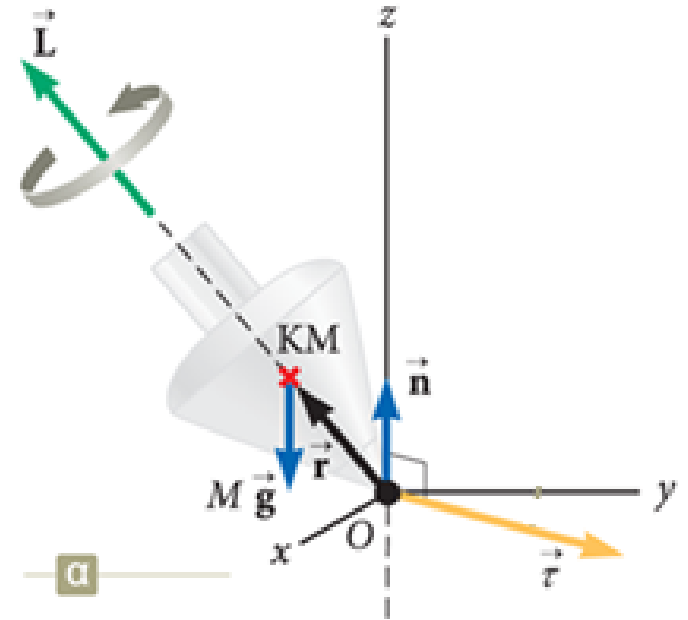
Οι μόνες εξωτερικές δυνάμεις που δέχεται η σβούρα είναι η βαρυτική δύναμη $M\vec{g}$ προς τα κάτω και η κάθετη δύναμη $\vec{n}$ που ασκείται προς τα πάνω στο σημείο περιστροφής O .

Η ροπή της $\vec{n}$ ως προς τον άξονα περιστροφής είναι μηδέν.

Όμως, η βαρυτική δύναμη $M\vec{g}$ παράγει ροπή ως προς το O

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times M\vec{g}$$

που, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού, το διάνυσμα της ροπής βρίσκεται στο οριζόντιο επίπεδο xy .



Γυροσκοπική κίνηση (συνέχεια)

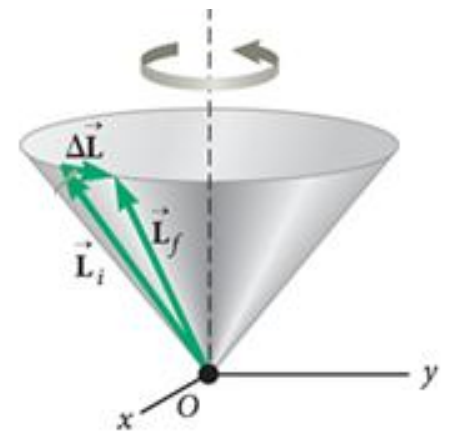
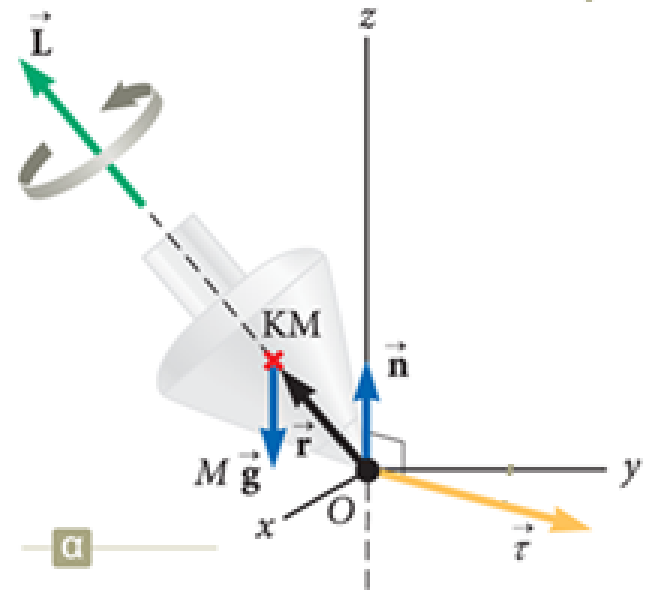
Η συνισταμένη ροπή και η στροφορμή συνδέονται μέσω της σχέσης:

$$\sum \vec{\tau}_{\text{εξω}\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Στο απειροελάχιστο χρονικό διάστημα dt , η ροπή του βάρους προκαλεί μια αλλαγή $d\vec{L}$ στη στροφορμή στη κατεύθυνση της ροπής $\vec{\tau}$ (εικ. β).

Επειδή το $d\vec{L}$ είναι κάθετο στο $\vec{L}$, το μέτρο της στροφορμής δεν αλλάζει ($|\vec{L}_i| = |\vec{L}_f|$)

αλλάζει μόνο η κατεύθυνση της $\vec{L}$.



Γυροσκοπική κίνηση (συνέχεια)

Στο χρονικό διάστημα dt , το διάνυσμα της γωνιακής ορμής $\vec{L}$ περιστρέφεται κατά μια γωνία $d\phi$, η οποία είναι επίσης η γωνία μέσω της οποίας περιστρέφεται ο άξονας του γυροσκοπίου.

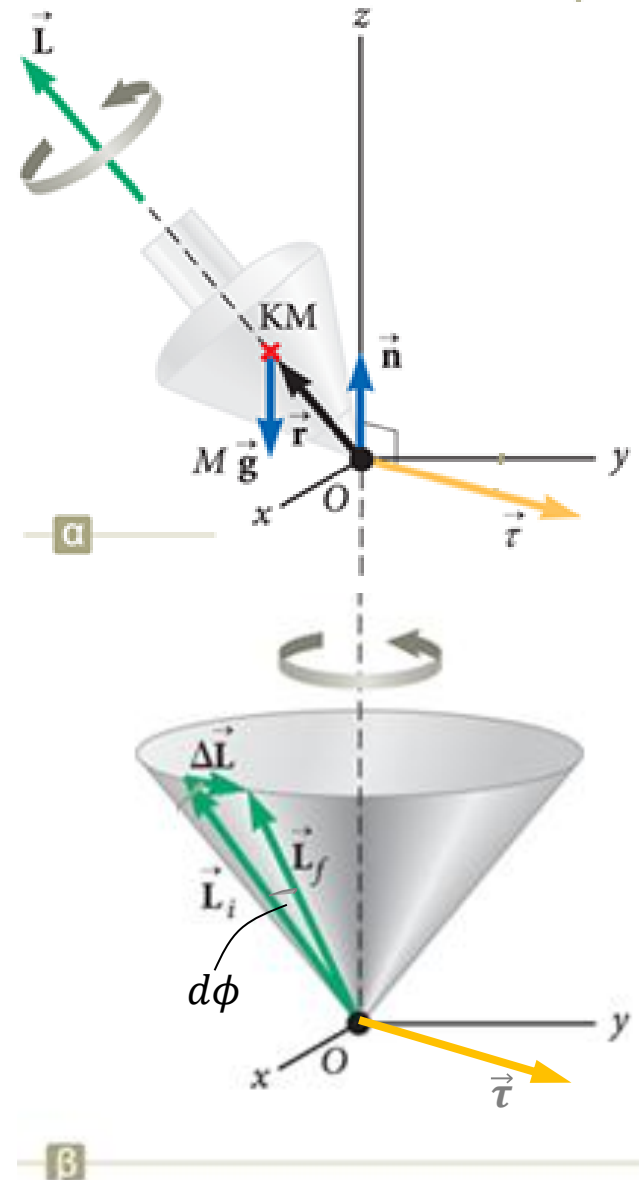
Από το τρίγωνο των διανυσμάτων $\vec{L}_i$, $\vec{L}_f$ και $\Delta\vec{L}$ βλέπουμε:

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{\sum \tau_{\text{εξωτ}} dt}{L} = \frac{(Mgr_{\text{KM}})dt}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{Mgr_{\text{KM}}}{L} = \frac{Mgr_{\text{KM}}}{I\omega}$$

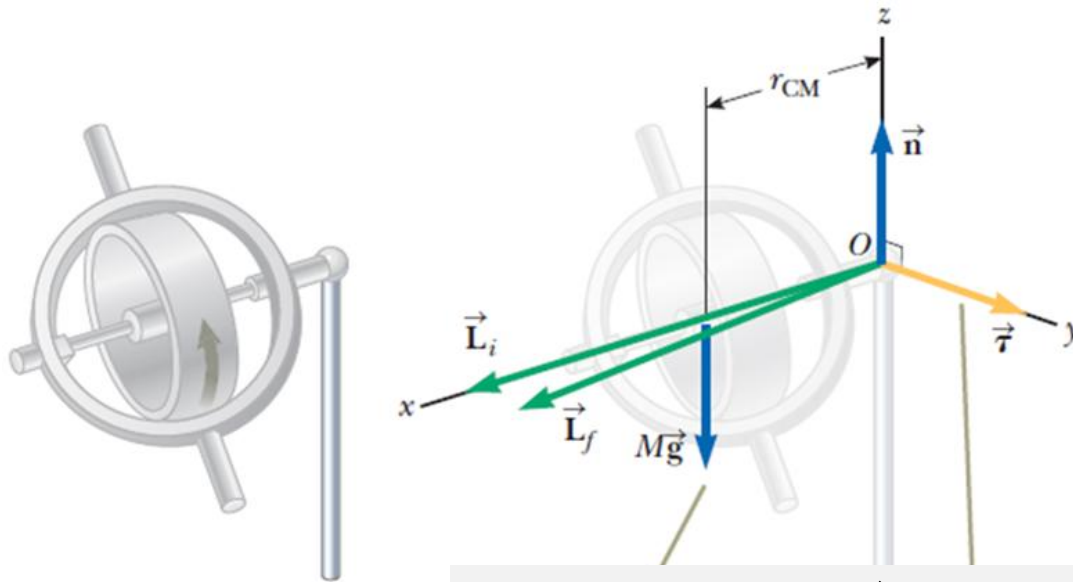
$$\text{Τελικά } \omega_p = \frac{Mgr_{\text{KM}}}{I\omega}$$

όπου, ω_p η συχνότητα μετάπτωσης (**precessional frequency**)

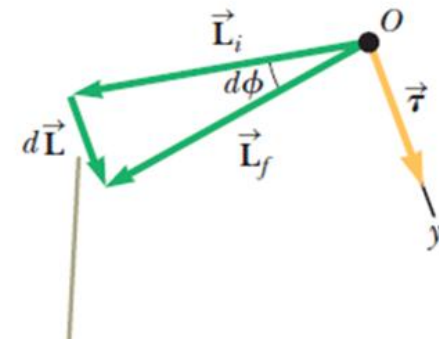


Γυροσκόπιο

Ένα περιστρεφόμενο γυροσκόπιο τοποθετείται σε έναν άξονα στο δεξί άκρο



Η βαρυτική δύναμη $M\vec{g}$ στην αρνητική κατεύθυνση z παράγει μια ροπή $\vec{\tau}$ στο γυροσκόπιο στη θετική κατεύθυνση y γύρω από τον άξονα περιστροφής.



Αποτέλεσμα της ροπής είναι η μεταβολή $\Delta\vec{L}$ στην κατεύθυνση της στροφορμής στη διεύθυνση της ροπής. Ο άξονας του γυροσκοπίου σαρώνει μια γωνία $d\phi$ στο χρόνο dt

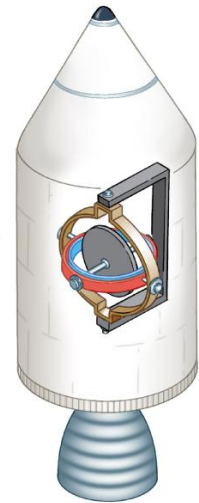
Γυροσκόπια σε διαστημόπλοια

Το διαστημόπλοιο, που κινείται στο διάστημα, φέρει ένα γυροσκόπιο που δεν περιστρέφεται. Η στροφορμή του διαστημοπλοίου ως προς το κέντρο μάζας του είναι μηδενική (εικ. α).

Έστω το γυροσκόπιο τίθεται σε κίνηση (περιστροφή) που του δίνει κάποια στροφορμή (εικ. β)

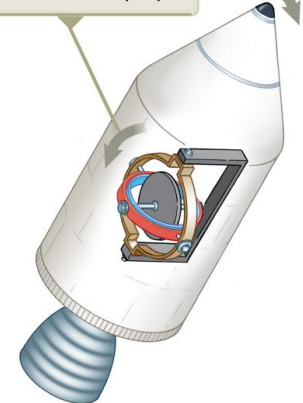
Στο σύστημα διαστημόπλοιο-γυροσκόπιο δεν ασκείται εξωτερική ροπή (είναι απομονωμένο), επομένως η στροφορμή του συστήματος πρέπει να παραμείνει μηδενική.

Αυτό μπορεί να ικανοποιηθεί μόνο εάν το διαστημόπλοιο περιστραφεί προς την αντίθετη κατεύθυνση



α

Όταν το γυροσκόπιο περιστρέφεται αριστερόστροφα, το διαστημόπλοιο περιστρέφεται δεξιόστροφα.



β

ΤΕΛΟΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ