

Κεφάλαιο 7 – Μέρος Α

Περιστροφή στερεού σώματος γύρω από σταθερό άξονα

Στερεό (ή άκαμπτο) σώμα

Ένα άκαμπτο σώμα δεν είναι παραμορφώσιμο.

- Οι σχετικές θέσεις όλων των σωματιδίων που αποτελούν το σώμα παραμένουν σταθερές.
- Όλα τα πραγματικά σώματα παραμορφώνονται σε κάποιο βαθμό, αλλά το μοντέλο του άκαμπτου σώματος είναι χρήσιμο σε πολλές περιπτώσεις όπου η παραμόρφωση είναι αμελητέα.

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε μία νέα κατηγορία προβλημάτων, τα οποία βασίζονται στο μοντέλο του άκαμπτου σώματος και τα οποία αναλύονται με βάση τους νόμους του Νεύτωνα και τις έννοιες του έργου και της ενέργειας.

Γωνιακή θέση

Θεωρήστε περιστρεφόμενο δίσκο με **άξονα περιστροφής** το κέντρο του O .

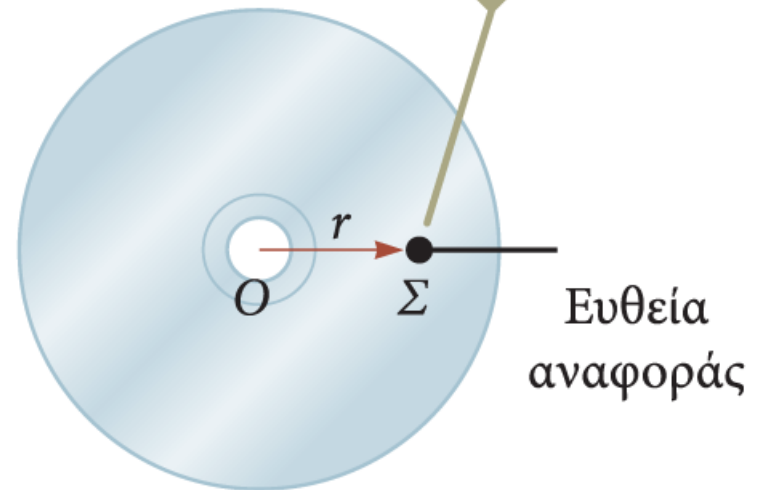
Επιλέγουμε μια σταθερή **ευθεία αναφοράς**.

Μας διευκολύνει να προσδιορίσουμε τη θέση ενός σημείου Σ σε **πολικές συντεταγμένες** (polar coordinates)

Το Σ έχει πολικές συντεταγμένες (r, θ) , όπου

- r είναι η απόσταση του Σ από την αρχή των αξόνων και
- η γωνία θ μετριέται αριστερόστροφα από την ευθεία αναφοράς.

Για να ορίσουμε τη γωνιακή θέση του δίσκου, επιλέγουμε μια σταθερή ευθεία αναφοράς. Ένα σωματίδιο στο σημείο Σ βρίσκεται σε απόσταση r από τον άξονα περιστροφής, ο οποίος διέρχεται από το σημείο O .



Γωνιακή θέση (συνέχεια)

Καθώς το σώμα κινείται, μεταβάλλεται μόνο η συντεταγμένη θ του σημείου Σ .

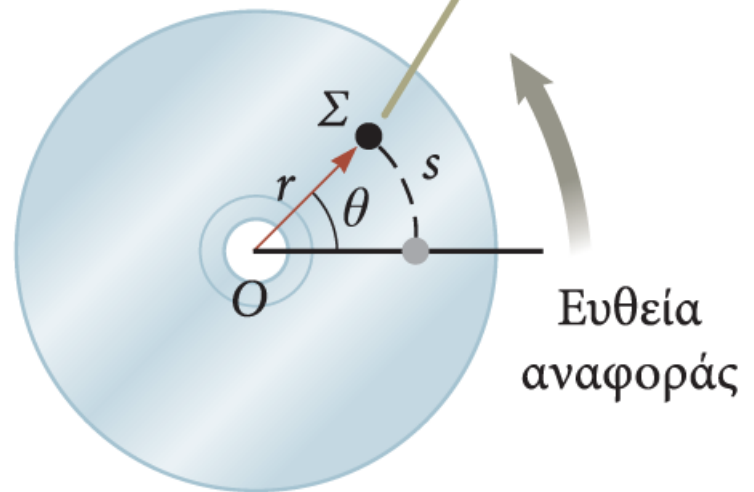
Καθώς το σημείο Σ κινείται κυκλικά σαρώνοντας γωνία θ , διαγράφει τόξο μήκους s .

Το μήκος του τόξου s και η ακτίνα r συνδέονται μέσω της σχέσης

$$s = \theta r$$

Η γωνία θ παίζει τον ίδιο ρόλο στην περιστροφική κίνηση όπως η θέση x στη μεταφορική κίνηση.

Καθώς ο δίσκος περιστρέφεται, το σωματίδιο στο Σ διαγράφει ένα τόξο μήκους s σε μια κυκλική τροχιά ακτίνας r .



Ακτίνιο

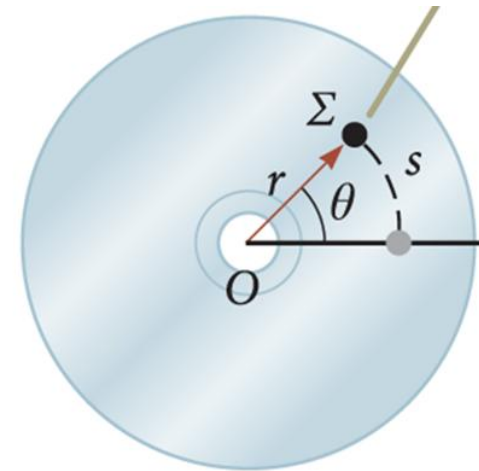
Η σχέση αυτή μπορεί να γραφτεί ως:

$$\theta = \frac{s}{r}$$

Η γωνία θ είναι αδιάστατος αριθμός, αλλά συνηθίζουμε να τη μετράμε σε **ακτίνια (radians, rad)**.

Ένα ακτίνιο είναι η επίκεντρος γωνία που αντιστοιχεί σε ένα τόξο κύκλου το οποίο έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου.

Στις εξισώσεις της περιστροφικής κίνησης, πρέπει να χρησιμοποιείτε γωνίες μετρημένες σε ακτίνια (όχι σε μοίρες $^{\circ}$).



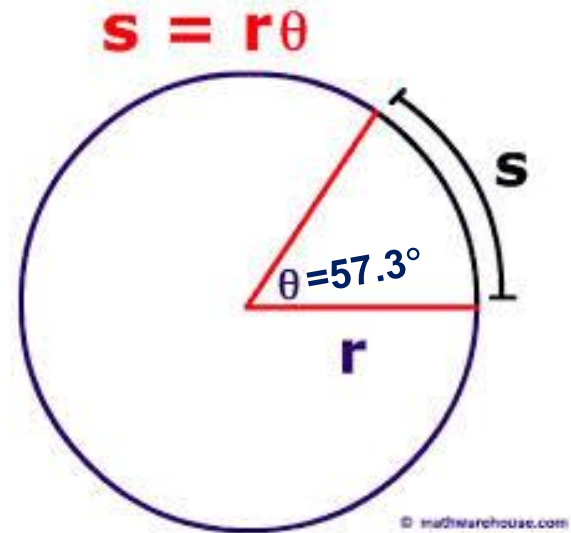
Μετατροπές

Σύγκριση μοιρών με ακτίνα

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57.3^\circ$$

Μετατροπή μοιρών σε ακτίνα

$$\theta \text{ (rad)} = \frac{\pi}{180^\circ} \theta (^\circ)$$



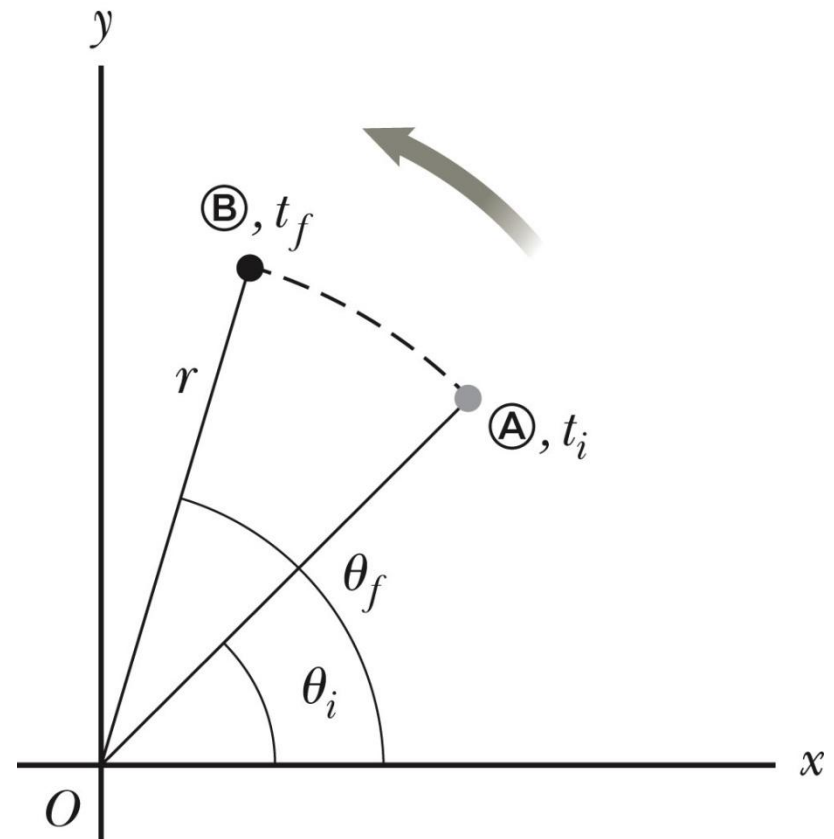
Γωνιακή μετατόπιση

Η **γωνιακή μετατόπιση** ορίζεται ως η γωνία που σαρώνει το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ του σώματος κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος $\Delta t = t_f - t_i$

Ισούται με τη διαφορά

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

της τελικής θ_f μείον την αρχική θ_i γωνία ως προς τον άξονα αναφοράς (x)



Μέτρο γωνιακής ταχύτητας

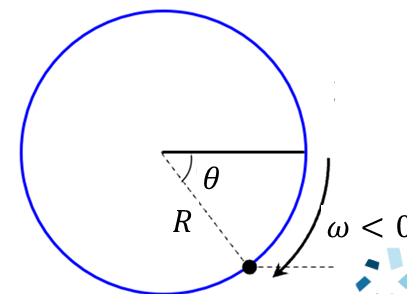
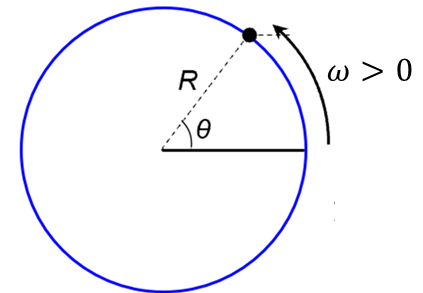
Η (στιγμιαία) **γωνιακή ταχύτητα**, ή **μέτρο της γωνιακής ταχύτητας**, είναι ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής θέσης του σώματος, δηλαδή, ο ρυθμός με τον οποίο το σώμα περιστρέφεται

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Οι μονάδες του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας είναι τα **ακτίνια/δευτερόλεπτο (rad/s)** ή **s⁻¹** (επειδή τα ακτίνια δεν έχουν διαστάσεις)

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι θετικό όταν η γωνία θ αυξάνεται (αριστερόστροφη περιστροφή).

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι αρνητικό όταν η γωνία θ μειώνεται (δεξιόστροφη περιστροφή).



Μέτρο γωνιακής επιτάχυνσης

Η (στιγμιαία) γωνιακή επιτάχυνση, ή μέτρο γωνιακής επιτάχυνσης, είναι ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του σώματος

$$\alpha_{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$$

Σημείωση: Για τη γωνιακή επιτάχυνση χρησιμοποιούμε το σύμβολο α_{ω} για να τη διακρίνουμε από τη γραμμική επιτάχυνση α .

Μέτρο γωνιακής επιτάχυνσης (συνέχεια)

Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης α_ω είναι ανάλογο με το μέτρο της γραμμικής επιτάχυνσης a .

Οι μονάδες της γωνιακής επιτάχυνσης α_ω είναι τα rad/s^2 ή s^{-2} επειδή τα ακτίνια δεν έχουν διαστάσεις.

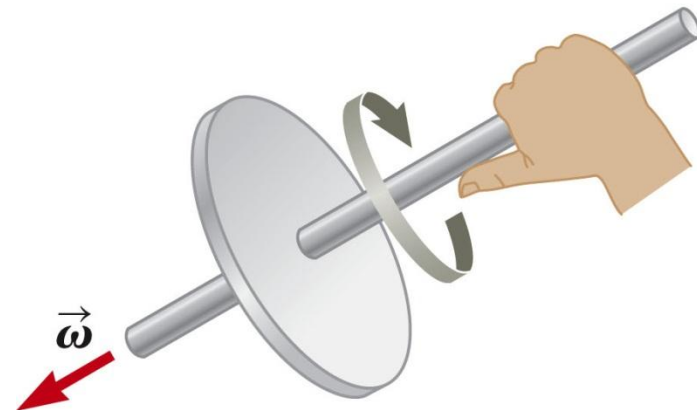
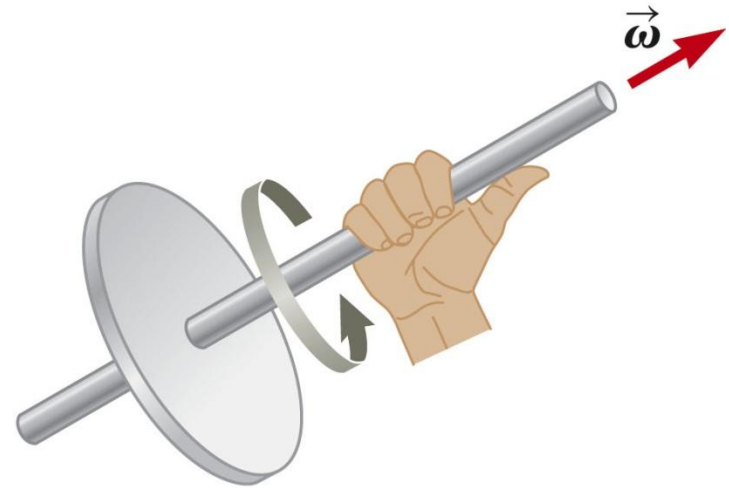
Η γωνιακή επιτάχυνση α_ω είναι θετική όταν ένα σώμα, που περιστρέφεται αριστερόστροφα, επιταχύνει.

Η α_ω είναι επίσης θετική όταν ένα σώμα, που περιστρέφεται δεξιόστροφα, επιβραδύνει.

Οι κατευθύνσεις, λεπτομέρειες

Όπως προαναφέραμε, τα βαθμωτά μεγέθη ω και α_ω είναι τα μέτρα των διανυσμάτων της γωνιακής ταχύτητας και της γωνιακής επιτάχυνσης αντίστοιχα.

Οι κατευθύνσεις αυτών των διανυσμάτων δίνονται **από τον κανόνα του δεξιού χεριού**.



Σύγκριση εξισώσεων περιστροφικής και μεταφορικής κίνησης με σταθερή επιτάχυνση

Γραμμική κίνηση	Περιστροφική κίνηση
Θέση x	Γωνιακή θέση θ
Γραμμική ταχύτητα v	Γωνιακή ταχύτητα ω
Γραμμική επιτάχυνση a	Γωνιακή επιτάχυνση α_ω
$v_f = v_i + a\Delta t$	$\omega_f = \omega_i + \alpha_\omega \Delta t$
$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$	$\theta_f = \theta_i + \omega_i \Delta t + \frac{1}{2} \alpha_\omega (\Delta t)^2$
$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x$	$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha_\omega \Delta \theta$

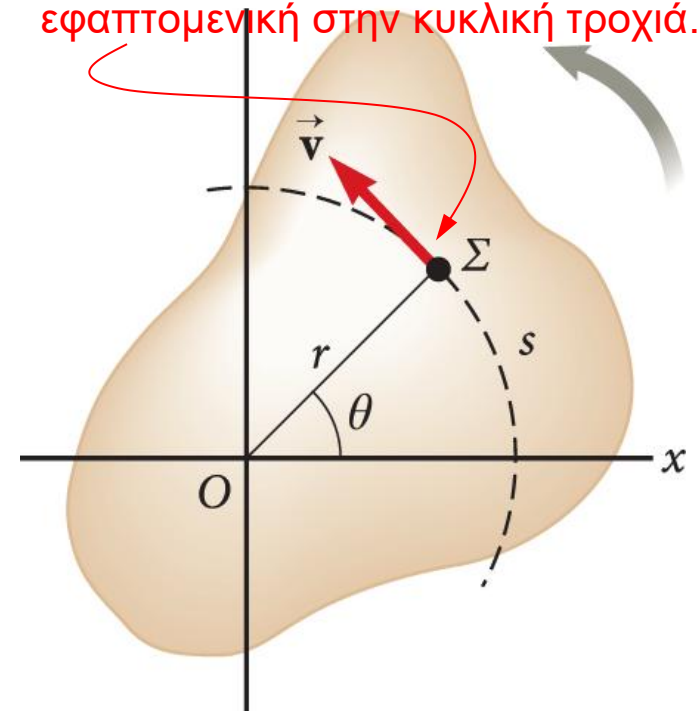
Γραμμική ταχύτητα σε περιστρεφόμενο σώμα

Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας ενός σημείου Σ του σώματος που βρίσκεται σε ακτίνα r από τον άξονα περιστροφής O είναι

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

δηλαδή, μέτρο v της γραμμικής ταχύτητας αυξάνεται όσο αυξάνεται η απόσταση r από το κέντρο περιστροφής του σώματος

Να θυμόμαστε, η γραμμική ταχύτητα $\vec{v}$ είναι πάντα εφαπτομενική στην κυκλική τροχιά.



Παράδειγμα περιστροφικής κίνησης

Για να «διαβάσει» μια συσκευή αναπαραγωγής έναν ψηφιακό δίσκο (CD), η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω του δίσκου πρέπει να μεταβάλλεται έτσι ώστε η γραμμική ταχύτητα v να παραμένει σταθερό ($v = r\omega$)

Επομένως, στα εσωτερικά τμήματα του δίσκου, το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας είναι μεγαλύτερο από ό,τι στα εξωτερικά.

Τυπικά, το μέτρο ταχύτητας της επιφάνειας του δίσκου στο σημείο του συστήματος λέιζερ-φακού που διαβάζει είναι 1.3 m/s. Έτσι

$$\omega = \frac{v}{r} \Rightarrow \omega_{\text{εσωτ}} = \frac{1.3 \text{ m/s}}{23 \times 10^{-3} \text{ m}} = 56.5 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{\text{εξωτ}} = \frac{1.33 \text{ m/s}}{58 \times 10^{-3} \text{ m}} = 22.4 \text{ rad/s}$$



Επιτάχυνση – Λεπτομέρειες

Η **εφαπτομενική επιτάχυνση** a_t ενός σημείου του περιστρεφόμενου σώματος προκαλείται από τη μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας.

Ισούται με το ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας v .

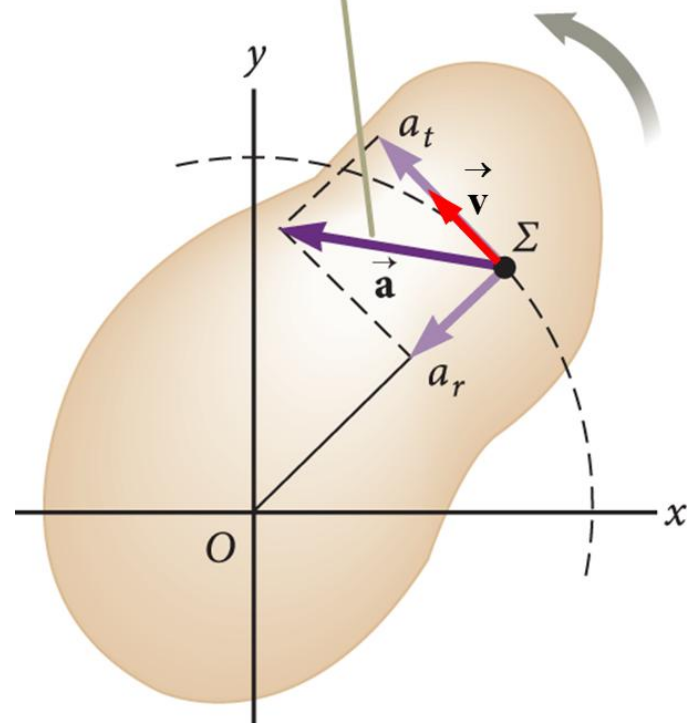
$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha_\omega$$

Η **κεντρομόλος επιτάχυνση** a_r προκαλείται από τη μεταβολή της κατεύθυνσης της ταχύτητας.

Ισούται με

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2$$

Η συνισταμένη επιτάχυνση του σημείου Σ είναι $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$



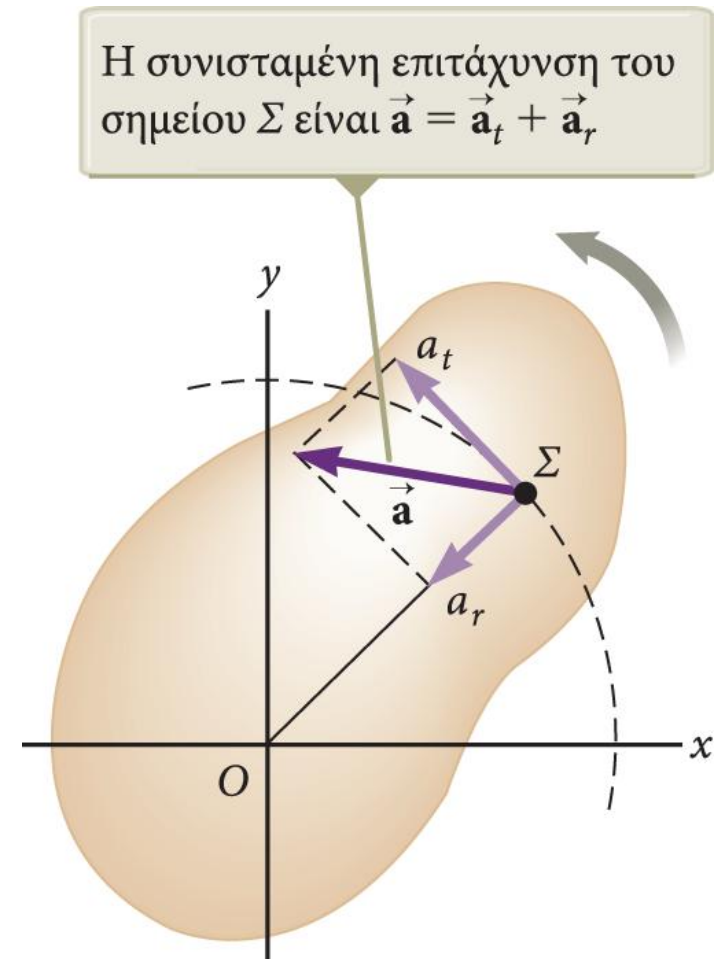
Επιτάχυνση – Λεπτομέρειες

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνολική επιτάχυνση ενός περιστρεφόμενου σώματος από αυτές τις συνιστώσες:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{r^2 a_\omega^2 + r^2 \omega^4}$$

$$\Rightarrow a = r \sqrt{a_\omega^2 + \omega^4}$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.2 Ένας περιστρεφόμενος στροφαλοφόρος άξονας

Το ταχύμετρο ενός αυτοκινήτου καταγράφει τη συχνότητα περιστροφής του στροφαλοφόρου άξονα του κινητήρα. Στο ρελαντί, η μηχανή του αυτοκινήτου γυρίζει με 700 rpm. Όταν το φανάρι γίνεται πράσινο, η περιστροφή του άξονα αυξάνεται στις 2500 rpm μέσα σε 3.0 s με σταθερό ρυθμό. Πόσες περιστροφές κάνει ο στροφαλοφόρος άξονας σε αυτά τα 3 s;

ΛΥΣΗ

Φανταστείτε ότι σχεδιάζετε μια κουκίδα πάνω στο στροφαλοφόρο.

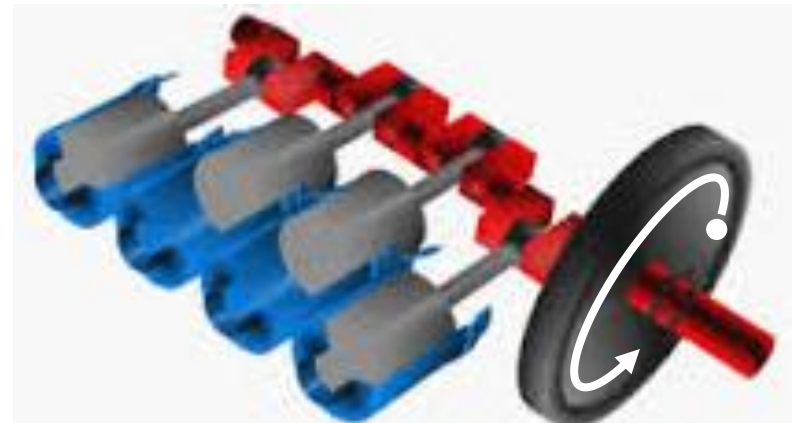
Και ας θεωρήσουμε την αρχική χρονική στιγμή $t_i = 0$ τη γωνιακή θέση της κουκίδας $\theta_i = 0$.

Μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t = 3.0$ s, η κουκίδα θα έχει γυρίσει σε γωνία θ_f που δίνεται από την εξίσωση:

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i \Delta t + \frac{1}{2} \alpha_\omega (\Delta t)^2$$

Η αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_i βρίσκεται αν μετατρέψουμε τα rpm σε rad/s.

$$\omega_i = 700 \frac{\text{rev}}{\text{min}} = 700 \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 73.3 \text{ rad/s}$$



ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Ομοίως, η τελική γωνιακή ταχύτητα σε rad/s είναι

$$\omega_f = 2500 \frac{\text{rev}}{\text{min}} = 2500 \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 262 \text{ rad/s}$$

Η γωνιακή επιτάχυνση μπορεί να υπολογιστεί από την αρχική και την τελική γωνιακή ταχύτητα.

$$\alpha_\omega = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{\Delta t} = \frac{(262 \text{ rad/s}) - (73.3 \text{ rad/s})}{3.0 \text{ s}} = 62.9 \text{ rad/s}^2$$

Επομένως, στη διάρκεια των 3 s η κουκίδα (δηλαδή, ο στροφαλοφόρος άξονας) θα περιστραφεί κατά γωνία

$$\theta_f = 0 + (73.3 \text{ rad/s})(3.0 \text{ s}) + \frac{1}{2}(62.9 \text{ rad/s}^2)(3.0 \text{ s})^2 = 503 \text{ rad}$$

Επειδή, $503 / 2\pi = 80$, βρίσκουμε ότι ο στροφαλοφόρος άξονας, μέχρι να φτάσει τις 2500 rpm, κάνει 80 περιστροφές

Κινητική ενέργεια περιστροφής

Ένα σώμα που περιστρέφεται γύρω από έναν σταθερό άξονα με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω έχει κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής, παρά το γεγονός ότι μπορεί να μην έχει καθόλου γραμμική κινητική ενέργεια.

Η κινητική ενέργεια περιστροφής ενός στερεού σώματος δίνεται από τον τύπο

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Το μέγεθος I ονομάζεται **ροπή αδράνειας** του σώματος και είναι για την περιστροφή ότι είναι η μάζα m για τη γραμμική κίνηση του σώματος.

Ροπή αδράνειας

Η **ροπή αδράνειας** ενός συστήματος μεμονωμένων σωματιδίων ως προς έναν άξονα ορίζεται ως

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

όπου, m_i η μάζα κάθε σωματιδίου και
 r_i η απόστασή του από τον άξονα περιστροφής.

Η μονάδα της της ροπής αδράνειας στο SI είναι το **kg·m²**.

- Η ροπή αδράνειας ενός συστήματος σωματιδίων εξαρτάται από τις μάζες m_i που αποτελούν το σύστημα, αλλά και από τις αποστάσεις r_i των μαζών από τον άξονα περιστροφής, δηλαδή, από την κατανομή των μαζών ως προς τον άξονα περιστροφής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.3 Το κέντρο βάρους (και ροπή αδράνειας)

Μια μπάλα που έχει μάζα $m_1 = 2.0 \text{ kg}$ και μια μπάλα που έχει μάζα $m_2 = 0.50 \text{ kg}$ συνδέονται με μια βέργα χωρίς μάζα που έχει μήκος $L = 0.50 \text{ m}$.

A. Που βρίσκεται το κέντρο μάζας (κέντρο βάρους);

B. Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας.

ΛΥΣΗ

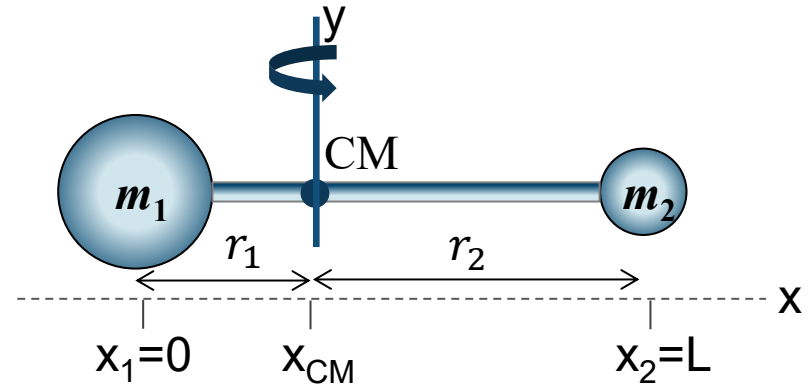
A. Ας πούμε $x_1 = 0$ και $x_2 = L = 0.50 \text{ m}$ τις θέσεις των δύο μπαλών στον άξονα x και x_{CM} τη ζητούμενη θέση του κέντρου μάζας του συστήματος.

$$\text{Έχουμε } x_{\text{CM}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$x_{\text{CM}} = \frac{(2.0 \text{ kg})(0 \text{ m}) + (0.50 \text{ kg})(0.50 \text{ m})}{(2.0 \text{ kg} + 0.50 \text{ kg})} = 0.10 \text{ m}$$

B. Για να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας ως προς έναν άξονα (όπως ο y) που περνάει από το CM, έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = (2.0 \text{ kg})_1 (0.10 \text{ m})^2 + (0.50 \text{ kg})_1 (0.40 \text{ m})^2 \\ &= 0.10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$



Ροπή αδράνειας (συνέχεια)

Για ένα **συνεχές στερεό σώμα**, θεωρούμε ότι το σώμα απαρτίζεται από πολλά μικρά στοιχεία (απειροστά), καθένα με μάζα dm .

Η σχέση για τη ροπή αδράνειας I γράφεται σαν το ολοκλήρωμα

$$I = \int r^2 dm$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της πυκνότητας του σώματος (πυκνότητα = μάζα / όγκος), $\rho = \frac{dm}{dV}$, η ροπή αδράνειας του στερεού σώματος γράφεται

$$I = \int \rho r^2 dV$$

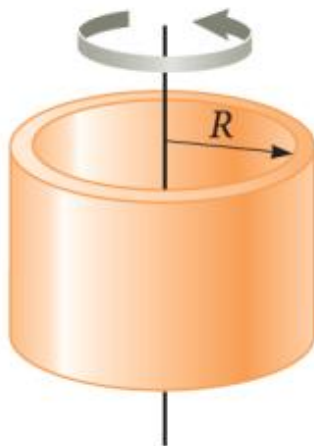
Όταν η πυκνότητα είναι σταθερή (ομογενές σώμα), η ροπή αδράνειας γράφεται:

$$I = \rho \int r^2 dV$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 13.3 Ροπές αδράνειας αντικειμένων με ομοιόμορφη πυκνότητα

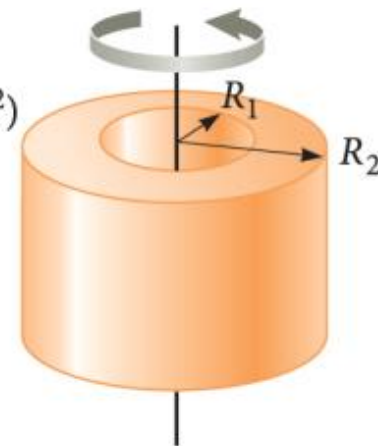
Δακτύλιος ή λεπτό
κυλινδρικό κέλυφος

$$I_{\text{ΚΜ}} = MR^2$$



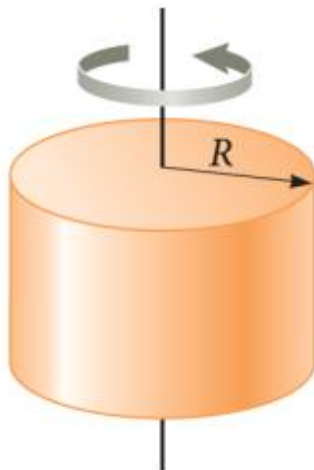
Κοίλος κύλινδρος

$$I_{\text{ΚΜ}} = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$$



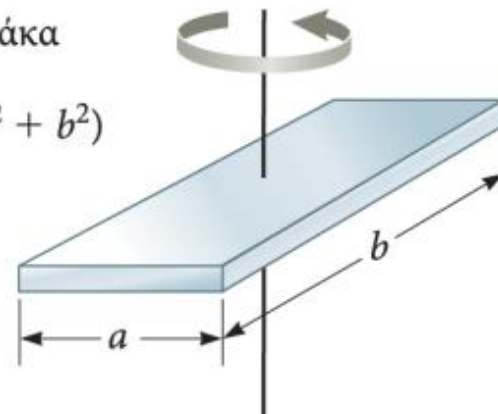
Συμπαγής κύλινδρος
ή δίσκος

$$I_{\text{ΚΜ}} = \frac{1}{2} MR^2$$



Ορθογώνια πλάκα

$$I_{\text{ΚΜ}} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$



ΠΙΝΑΚΑΣ 13.3 Ροπές αδράνειας αντικειμένων με ομοιόμορφη πυκνότητα (συνέχεια)

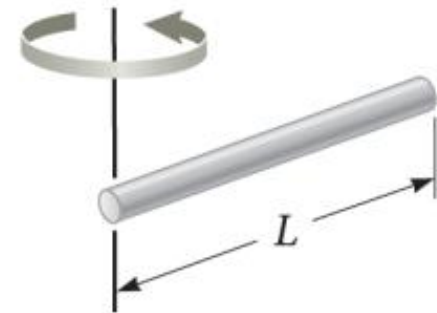
Επιμήκης λεπτή
ράβδος με άξονα
περιστροφής που
διέρχεται από το
κέντρο της

$$I_{\text{ΚΜ}} = \frac{1}{12} ML^2$$



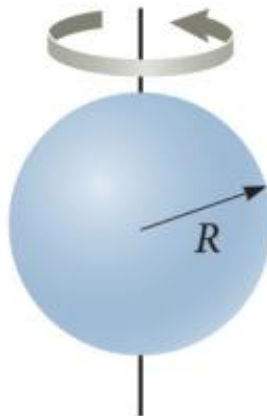
Επιμήκης λεπτή
ράβδος με άξονα
περιστροφής που
διέρχεται από το
άκρο της

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$



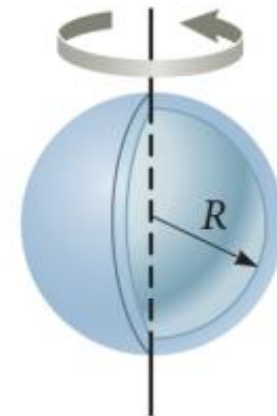
Συμπαγής σφαίρα

$$I_{\text{ΚΜ}} = \frac{2}{5} MR^2$$



Λεπτό σφαιρικό
κέλυφος

$$I_{\text{ΚΜ}} = \frac{2}{3} MR^2$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13.8 Ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς τη μια άκρη της

Βρείτε τη ροπή αδράνειας μιας λεπτής, ομοιόμορφης ράβδου μήκους L και μάζας M η οποία περιστρέφεται ως προς το ένα άκρο της.

ΛΥΣΗ

Θέλουμε να βρούμε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς έναν άξονα που περνάει από το άκρο της O (άξονας y)

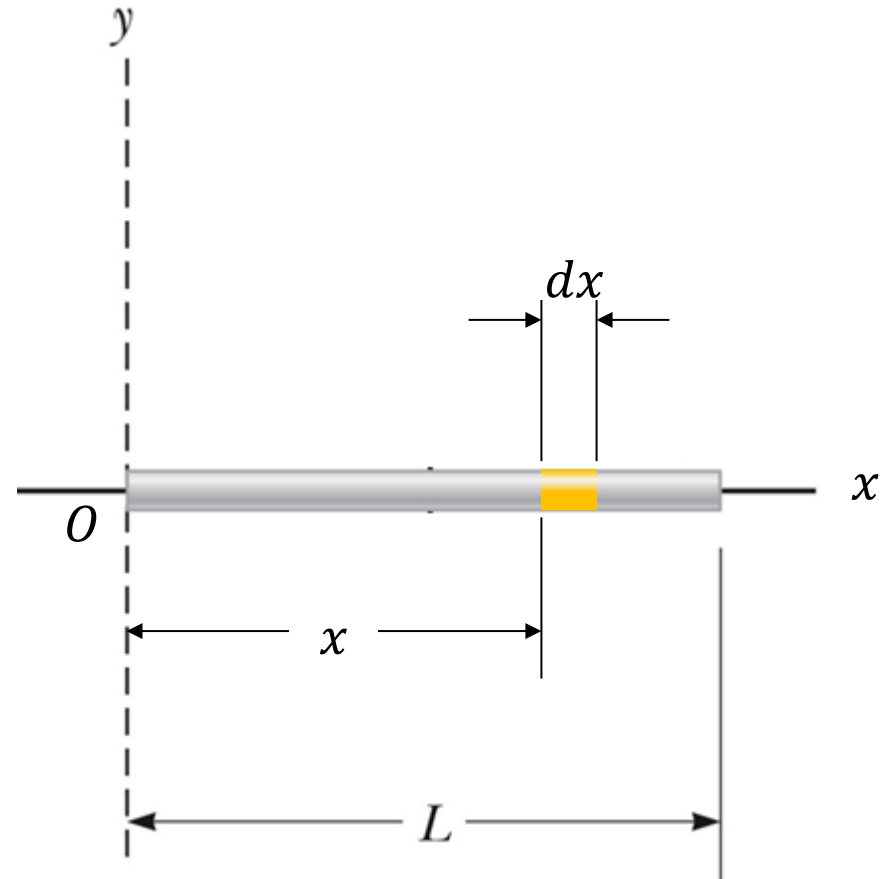
Χωρίζουμε τη βέργα σε μικρά κοματάκια μήκους dx (απειροστά).

Ας φανταστούμε ένα τέτοιο κοματάκι σε απόσταση x από τον άξονα περιστροφής.

Εφ'όσον η ράβδος έχει μάζα M σε μήκος L , το κοματάκι dx θα έχει μάζα

$$dm = \frac{M}{L} dx$$

(βρείτε το με απλή μέθοδο των τριών)



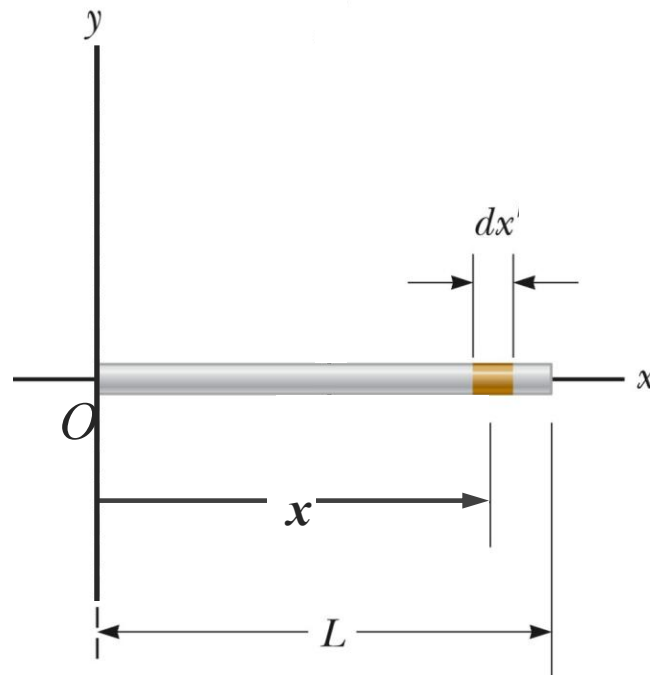
ΛΥΣΗ (Συνέχεια)

Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα y είναι:

$$I = \int_M x^2 dm = \int_{x=0}^{x=L} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_{x=0}^{x=L} x^2 dx$$

$$\text{Όμως } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \xrightarrow{n=2} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{ΟΠΟΤΕ } I &= \frac{M}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=L} = \frac{M}{3L} [x^3]_{x=0}^{x=L} = \frac{M}{3L} (L^3 - 0^3) \\ &= \frac{M}{3L} L^3 = \frac{ML^2}{3} \end{aligned}$$



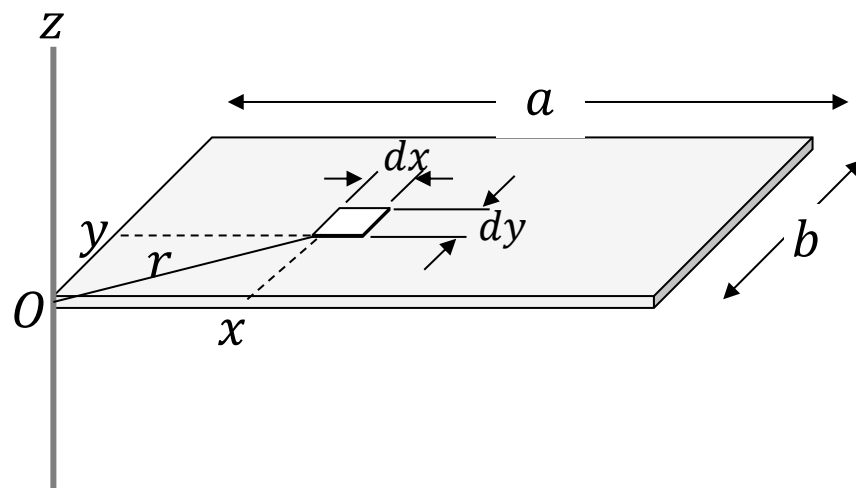
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1 - Ροπή αδράνειας πλάκας

Βρείτε τη ροπή αδράνειας μιας πολύ λεπτής, ομοιόμορφης πλάκας εμβαδού $a \times b$ και μάζας M η οποία περιστρέφεται ως προς άξονα z κάθετο στην επιφάνειά της που διέρχεται από την ακμή της O .

ΛΥΣΗ

Χωρίζουμε την πλάκα σε μικρά στοιχειώδη τμήματα απειροστού εμβαδού $dS = dxdy$.

Έστω ένα τέτοιο στοιχειώδες τμήμα σε απόσταση r από τον άξονα περιστροφής με συντεταγμένες x, y .



Εφόσον η πλάκα έχει μάζα M και εμβαδόν $S = ab$, το τμήμα στοιχειώδες τμήμα απειροστού εμβαδού dS θα έχει μάζα

$$dm = \frac{M}{S} dS = \frac{M}{ab} dxdy$$

Η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα z είναι:

$$I = \int_M r^2 dm = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b r^2 \frac{M}{ab} dxdy = \frac{M}{ab} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b (x^2 + y^2) dxdy$$

ΛΥΣΗ (Συνέχεια)

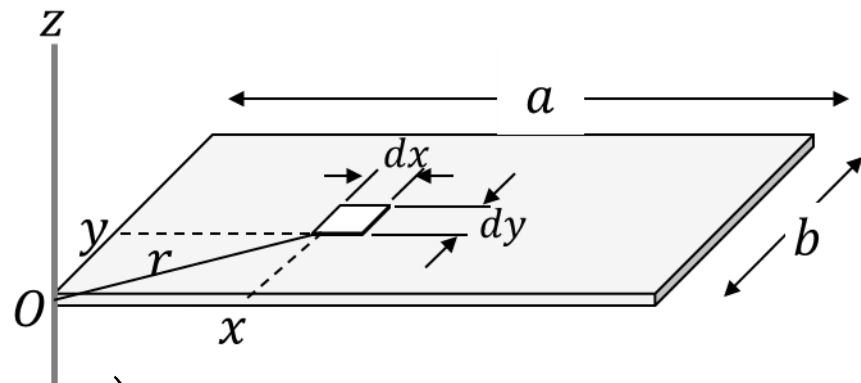
$$I = \frac{M}{ab} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b (x^2 + y^2) dx dy$$

$$= \frac{M}{ab} \left(\int_{x=0}^a \int_{y=0}^b x^2 dx dy + \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b y^2 dx dy \right)$$

$$= \frac{M}{ab} \left(\int_{x=0}^a x^2 dx \int_{y=0}^b dy + \int_{y=0}^b y^2 dy \int_{x=0}^a dx \right)$$

$$= \frac{M}{ab} \left(\int_{x=0}^a bx^2 dx + \int_{y=0}^b ay^2 dy \right) = \frac{M}{ab} \left(b \int_{x=0}^a x^2 dx + a \int_{y=0}^b y^2 dy \right)$$

$$= \frac{M}{ab} \left(b \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^a + a \frac{y^3}{3} \Big|_{y=0}^b \right) = \frac{M}{ab} \left(\frac{ba^3}{3} + \frac{ab^3}{3} \right) = \frac{M}{3} (a^2 + b^2)$$



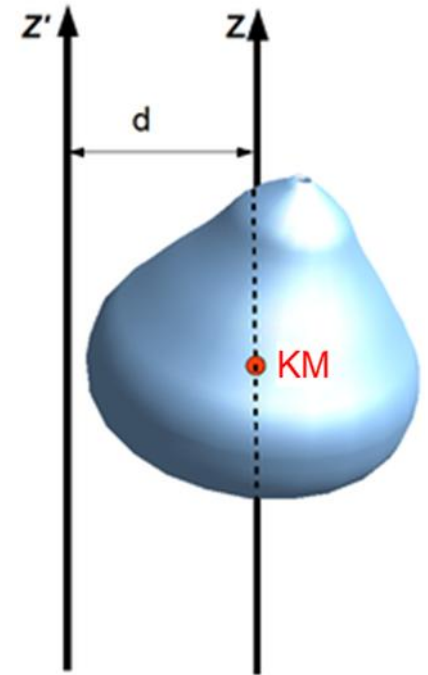
Το θεώρημα των παράλληλων αξόνων

Αν γνωρίζουμε τη ροπή αδράνειας ενός στερεού σχήματος ως προς άξονα z που διέρχεται από το κέντρο μάζας του KM , είναι εύκολο να την υπολογίσουμε ως προς έναν τυχαίο παράλληλο άξονα z' χρησιμοποιώντας το θεώρημα των παράλληλων αξόνων.

Σύμφωνα με το θεώρημα των παράλληλων αξόνων:

$$I = I_{KM} + Md^2$$

- I_{KM} είναι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας.
- I είναι η ροπή αδράνειας ως προς οποιονδήποτε άξονα παράλληλο προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος.
- d είναι η απόσταση του τυχαίου άξονα από το κέντρο μάζας.



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2 - Ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο της

Βρείτε τη ροπή αδράνειας της ομογενούς ράβδου μάζας M και μήκους L ως προς το κέντρο της K (άξονας y').

ΛΥΣΗ

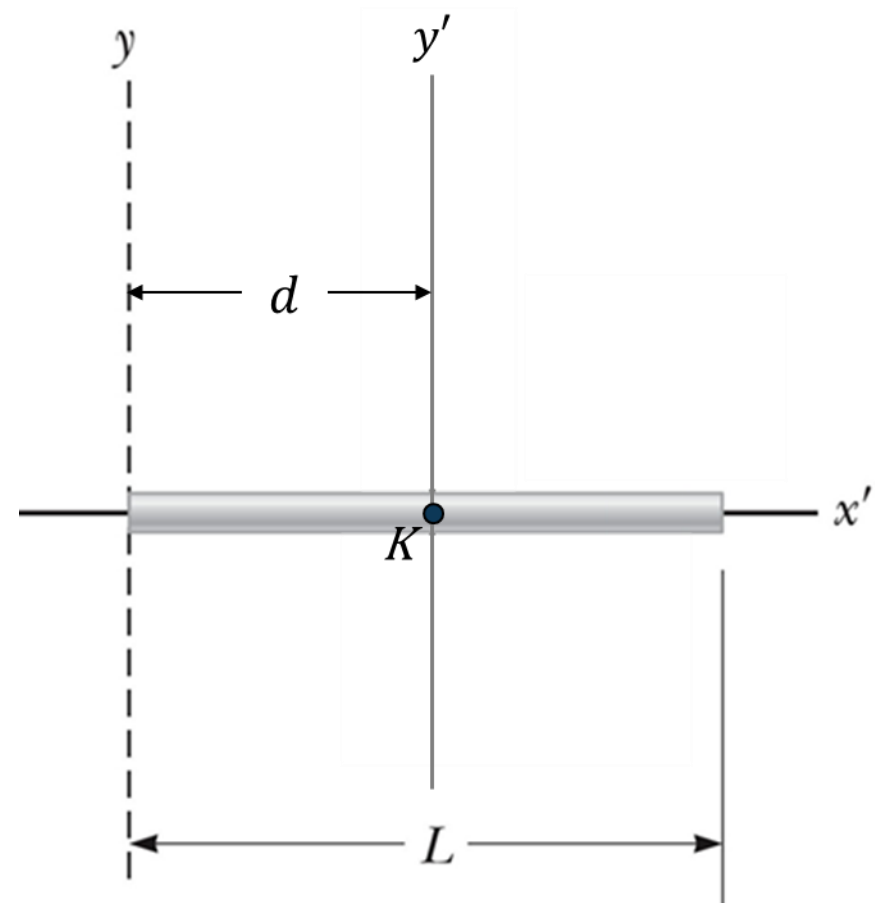
Είδαμε (Παράδειγμα 13.8) ότι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα y από την άκρη της είναι

$$I_y = \frac{ML^2}{3}$$

Από το θεώρημα των παράλληλων αξόνων, έχουμε

$$I_y = I_{y'} + Md^2 \Rightarrow I_{y'} = I_y - Md^2$$

$$\Rightarrow I_{y'} = \frac{ML^2}{3} - M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{12}$$



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3 - Ροπή αδράνειας πλάκας ως προς το κέντρο της

Αποδείξτε ότι η ροπή αδράνειας I_{KM} της πολύ λεπτής, ομοιόμορφης πλάκας του Προβλήματος 1 ως προς άξονα z' κάθετο στην επιφάνειά της που διέρχεται από το κέντρο μάζας της KM είναι $\frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$

ΛΥΣΗ

Είδαμε (Παράδειγμα 13.8) ότι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα z από την άκρη της είναι

$$I_z = \frac{M}{3} (a^2 + b^2)$$

Από το θεώρημα των παράλληλων αξόνων, έχουμε

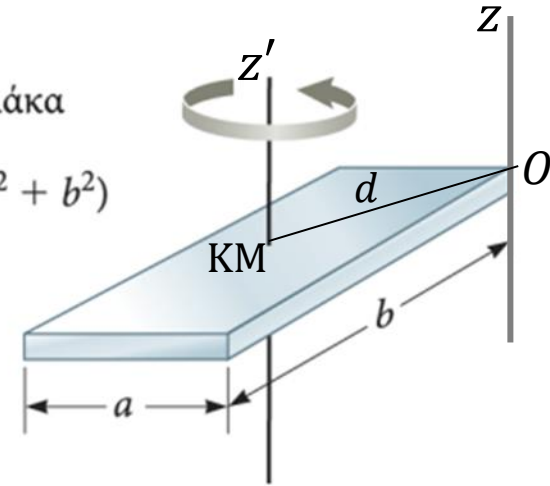
$$I_z = I_{KM} + Md^2 \Rightarrow I_{KM} = I_z - Md^2$$

$$\Rightarrow I_{KM} = \frac{M}{3} (a^2 + b^2) - M \left[\left(\frac{a}{2} \right)^2 + \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow I_{KM} = \frac{M}{3} (a^2 + b^2) - M \left(\frac{a^2 + b^2}{4} \right) = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$

Ορθογώνια πλάκα

$$I_{KM} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4 - Ροπή αδράνειας συμπαγούς κυλίνδρου ή δίσκου

Αποδείξτε ότι η ροπή αδράνειας I_{KM} συμπαγούς κυλίνδρου ή δίσκου μάζας M και ακτίνας R ως προς τον άξονα συμμετρίας της z είναι $\frac{1}{2}MR^2$

ΛΥΣΗ

Έστω στοιχειώδες τμήμα του κυλίνδρου μάζας dm , όγκου dV , με κυλινδρικές συντεταγμένες θέσης (ρ, ϕ, z) .

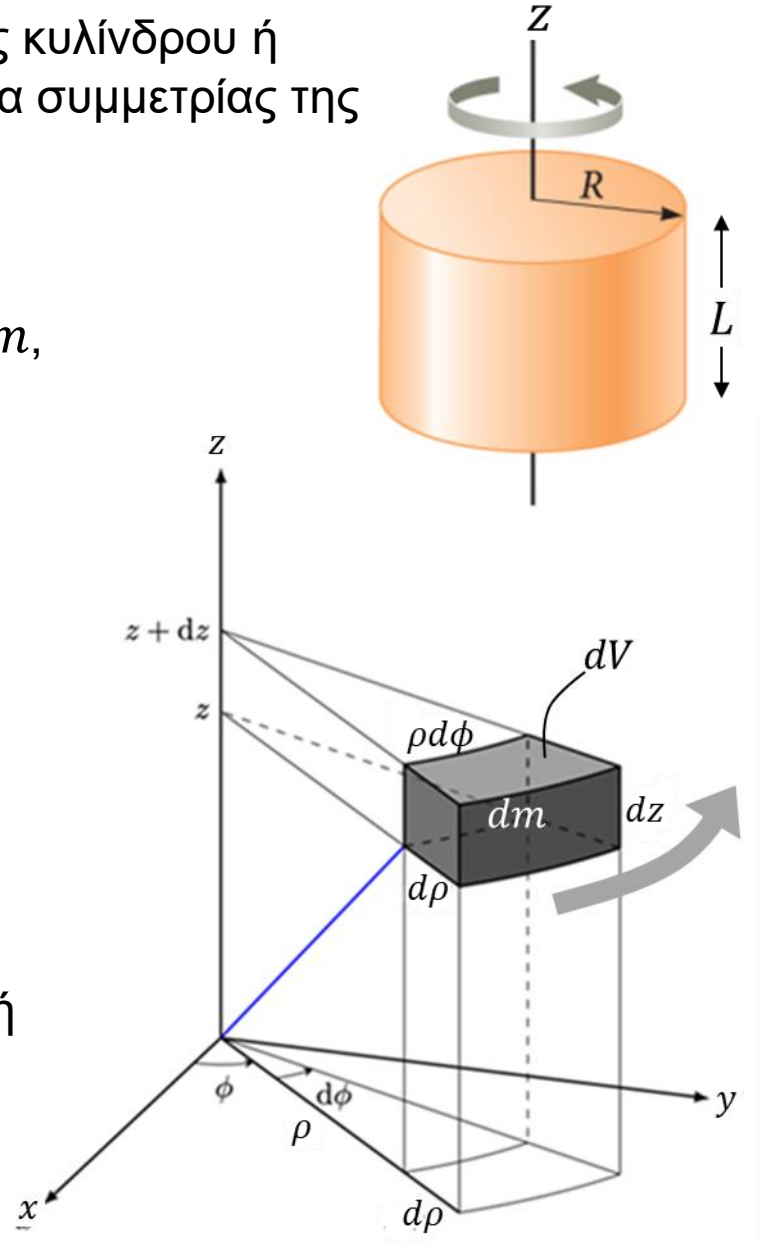
Η ροπή αδράνειας του dm ως προς περιστροφή γύρω από τον άξονα z είναι

$$dI_z = \rho^2 dm$$

όπου ρ είναι η απόσταση του dm από τον άξονα περιστροφής z .

Εφόσον ο κύλινδρος είναι ομογενής (έχει σταθερή πυκνότητα σε όλο τον όγκο του), ισχύει

$$dm = \frac{M}{V} dV$$



ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Δεδομένου ότι οι διαστάσεις του dm είναι $d\rho$, $\rho d\phi$ και dz , ο στοιχειώδης όγκος του είναι

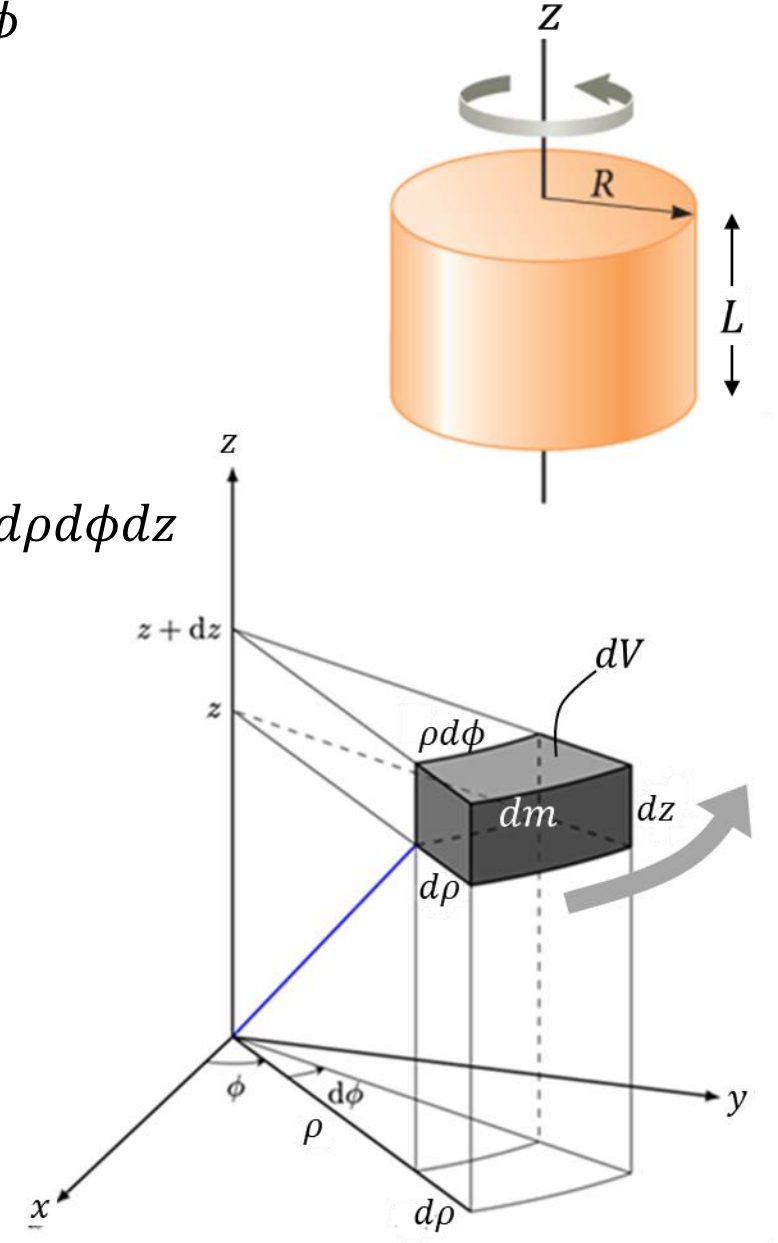
$$dV = (d\rho)(\rho d\phi)(dz) = \rho d\rho d\phi dz$$

Επομένως,

$$\left. \begin{aligned} dm &= \frac{M}{V} dV = \frac{M}{V} \rho d\rho d\phi dz \\ V &= \pi R^2 L \end{aligned} \right\} \Rightarrow dm = \frac{M}{\pi R^2 L} \rho d\rho d\phi dz$$

Η ροπή αδράνειας του dm γράφεται

$$dI_z = \rho^2 dm = \frac{M}{\pi R^2 L} \rho^3 d\rho d\phi dz$$



ΛΥΣΗ (συνέχεια)

$$dI_z = \frac{M}{\pi R^2 L} \rho^3 d\rho d\phi dz$$

Η ροπή αδράνειας I_z όλου του κυλίνδρου είναι

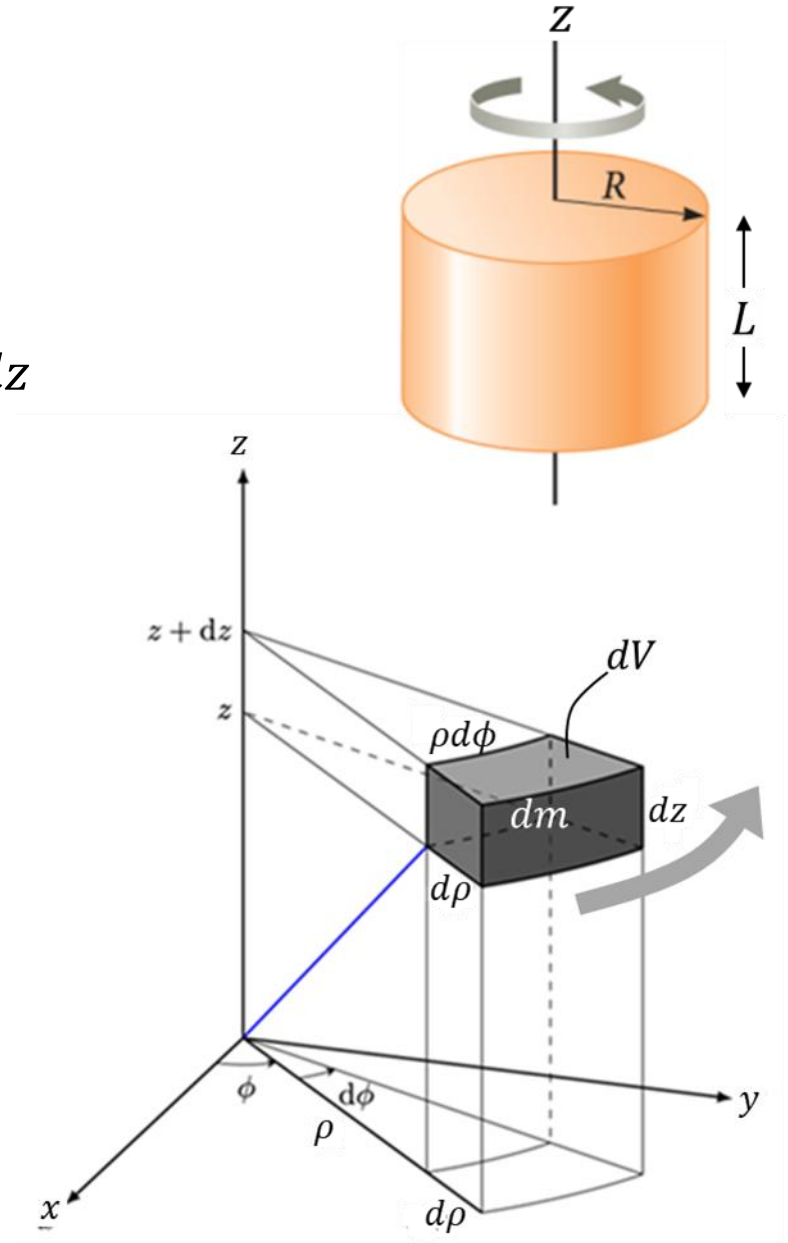
$$I_z = \int dI_z = \int_{\rho=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L \frac{M}{\pi R^2 L} \rho^3 d\rho d\phi dz$$

$$\Rightarrow I_z = \frac{M}{\pi R^2 L} \int_{\rho=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L \rho^3 d\rho d\phi dz$$

$$\Rightarrow I_z = \frac{M}{\pi R^2 L} \int_{\rho=0}^R \rho^3 d\rho \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{z=0}^L dz$$

$$\Rightarrow I_z = \frac{M}{\pi R^2 L} \int_{\rho=0}^R \rho^3 d\rho \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi L$$

$$\Rightarrow I_z = \frac{M \cancel{L}}{\pi R^2 \cancel{L}} \int_{\rho=0}^R \rho^3 d\rho \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi$$



ΛΥΣΗ (συνέχεια)

$$\Rightarrow I_z = \frac{M}{\pi R^2} \int_{\rho=0}^R \rho^3 d\rho (2\pi)$$

$$\Rightarrow I_z = \frac{2\pi M}{\pi R^2} \int_{\rho=0}^R \rho^3 d\rho$$

$$\Rightarrow I_z = \frac{2M}{R^2} \int_{\rho=0}^R \rho^3 d\rho = \frac{2M}{R^2} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^R$$

$$\Rightarrow I_z = \frac{2M}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} M R^2$$

