

Κεφάλαιο 6 – Μέρος Β

Ορμή και κρούση

Κέντρο μάζας

Κάθε σώμα ή σύστημα σωμάτων έχει ένα ειδικό σημείο, που ονομάζεται **κέντρο μάζας**.

Όταν το σώμα ή το σύστημα σωμάτων δέχεται εξωτερικές δυνάμεις, το σημείο αυτό κινείται όπως θα κινούνταν αν η συνισταμένη των δυνάμεων δρούσε σε ένα μόνο σωματίδιο μάζας M στο κέντρο μάζας του συστήματος.

- M είναι η συνολική μάζα του συστήματος.

Η συμπεριφορά αυτή είναι ανεξάρτητη από άλλες κινήσεις, όπως η περιστροφή, η ταλάντωση, ή η παραμόρφωση του συστήματος.

- Αυτό ουσιαστικά είναι το **μοντέλο του σωματιδίου**.

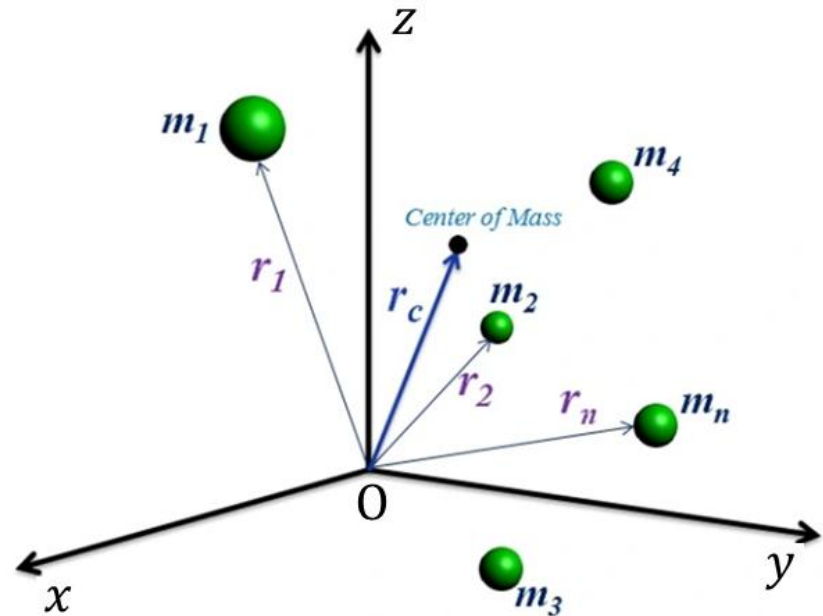
Το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας ενός συστήματος διακριτών σωμάτων

Έστω σύστημα n διακριτών σωμάτων με μάζες $m_1, m_2, \dots, m_n$ με διανύσματα θέσης $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ ως προς σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$

Το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_c$ ή $\vec{r}_{KM}$ του κέντρου μάζας (*Center of Mass*) είναι

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M}$$

όπου, $M = \sum_{i=1}^N m_i$ είναι η συνολική μάζα του συστήματος



Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας ενός συστήματος διακριτών σωμάτων

Αν x_c, y_c και z_c είναι οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας, τότε η

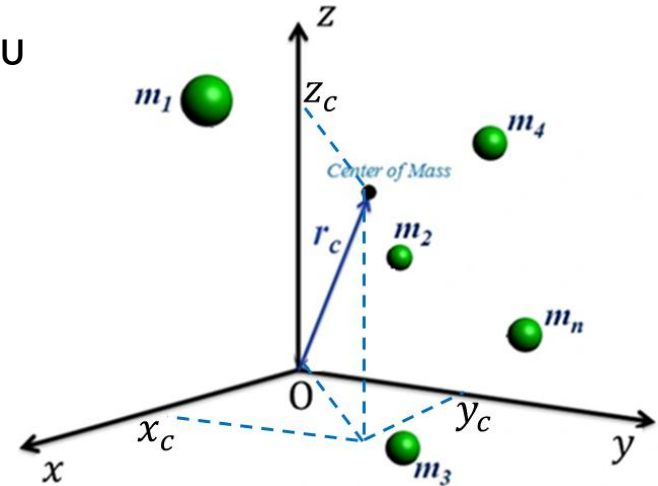
$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M}$$

γράφεται

$$\begin{aligned} x_c \hat{i} + y_c \hat{j} + z_c \hat{k} &= \frac{\sum_{i=1}^N m_i (x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k})}{M} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{M} \hat{i} + \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{M} \hat{j} + \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{M} \hat{k} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{M}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{M}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{M}$$

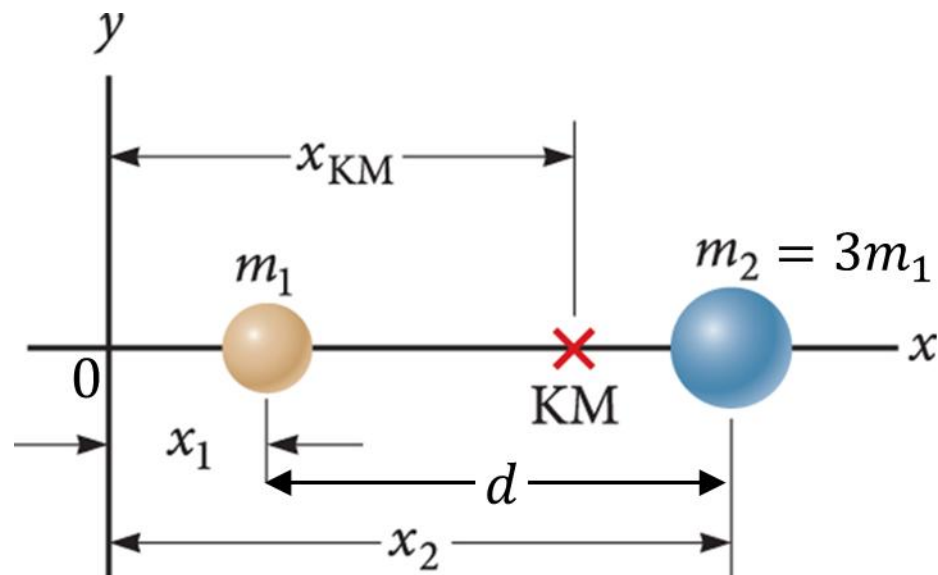


Παράδειγμα: Δείξτε ότι το κέντρο μάζας των δύο σωμάτων της εικόνας, όπου $m_2 = 3m_1$, βρίσκεται στα $\frac{3}{4}$ του μεταξύ τους διαστήματος

Τα δύο σώματα τυχαίνει να βρίσκονται στον άξονα x με συντεταγμένες x_1 και x_2 .

Οι συντεταγμένες τους στους άξονες y και z είναι μηδενικές ($y_1 = z_1 = 0$ και $y_2 = z_2 = 0$)

Επομένως, περιμένουμε το ΚΜ να βρίσκεται στον άξονα x



$$\begin{aligned} x_{\text{KM}} &= \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{M} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x_1 + 3m_1 x_2}{m_1 + 3m_1} = \frac{x_1 + 3x_2}{4} \\ &= \frac{x_1 + 3x_2 - 3x_1 + 3x_1}{4} = \frac{4x_1 + 3(x_2 - x_1)}{4} = x_1 + \frac{3}{4}d \end{aligned}$$

Κέντρο μάζας συνεχούς (συμπαγούς, μη σημειακού) σώματος

Θεωρήστε το συνεχές σώμα ως ένα σύστημα που περιέχει ένα μεγάλο πλήθος από στοιχειώδεις μάζες dm , με διάνυσμα θέσης $\vec{r}$.

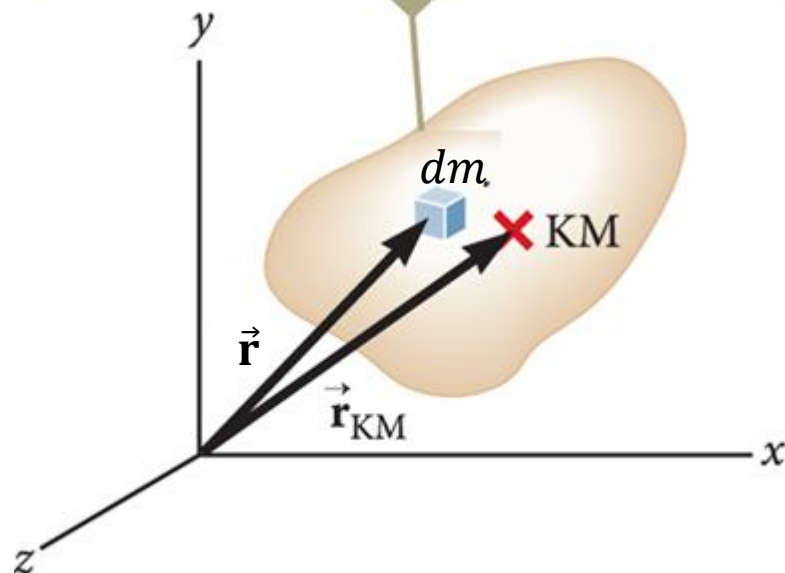
Αντίστοιχα προς τον ορισμό του ΚΜ ενός συστήματος N διακριτών σωματιδίων,

$$\vec{r}_{\text{KM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

σε ένα συνεχές σώμα

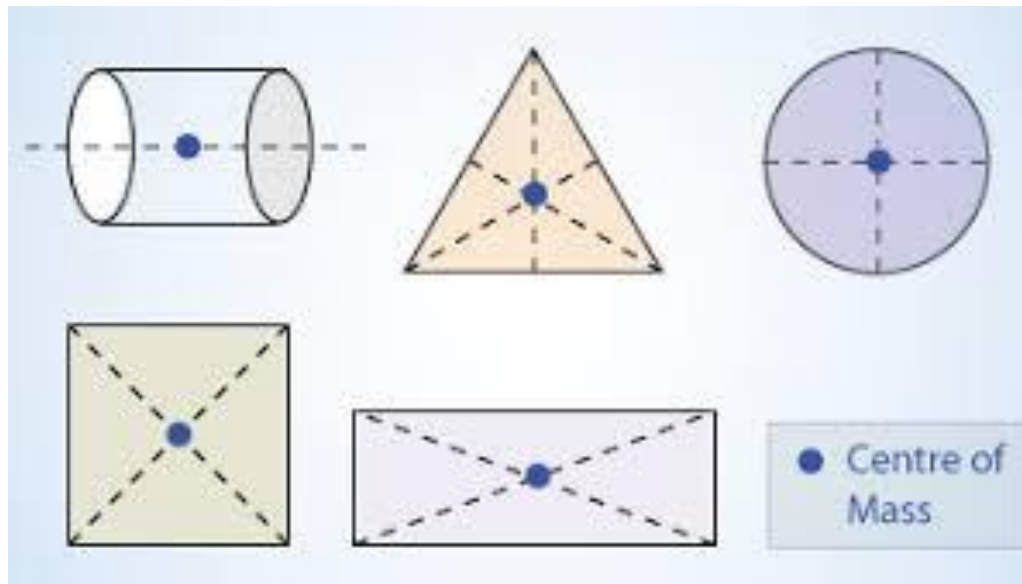
$$\vec{r}_{\text{KM}} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα μη σημειακό σώμα είναι μια κατανομή μικρών στοιχειωδών μαζών dm .



Κέντρο μάζας συμμετρικού σώματος

Το κέντρο μάζας οποιουδήποτε ομογενούς και συμμετρικού σώματος βρίσκεται επάνω σε έναν άξονα συμμετρίας και σε οποιοδήποτε επίπεδο συμμετρίας.



<https://www.aakash.ac.in/important-concepts/physics/centre-of-mass-of-continuous-mass-distribution>

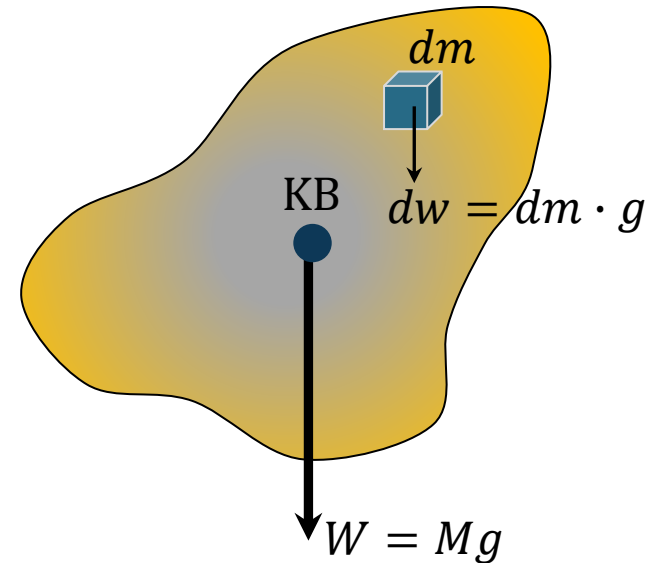
Κέντρο βάρους

Η βαρυτική δύναμη dW δρα σε κάθε μικρό στοιχείο μάζας dm ενός συνεχούς αντικειμένου.

Η συνολική επίδραση όλων αυτών των στοιχειωδών δυνάμεων είναι το βάρος $W = M\vec{g}$ του σώματος που ισοδυναμεί με μια δύναμη που δρα πάνω σε ένα ειδικό σημείο, το οποίο ονομάζεται **κέντρο βάρους** (KB) του σώματος

- Θεωρώντας ότι η επιτάχυνση βαρύτητας g είναι η ίδια σε όλα τα σημεία του σώματος (;;;), το κέντρο βάρους συμπίπτει με το κέντρο μάζας.

$$KB \equiv KM$$



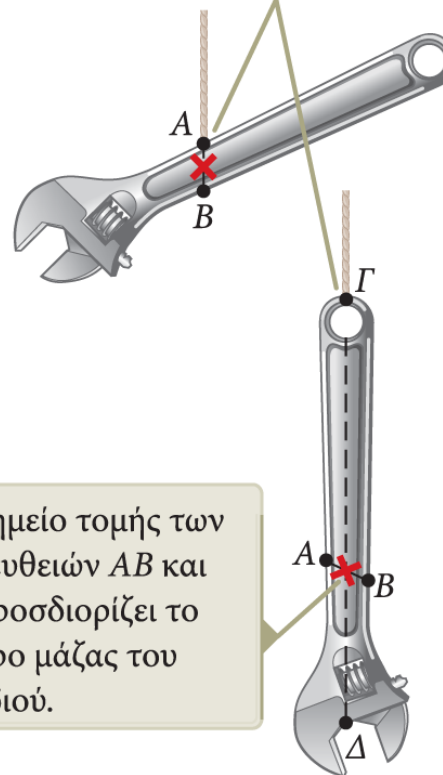
Εύρεση του κέντρου βάρους, σώμα με ακανόνιστο σχήμα

Κρεμάμε το σώμα από ένα σημείο, π.χ. το Α.

Στη συνέχεια, το κρεμάμε από ένα άλλο σημείο, π.χ. το Γ.

Το κέντρο βάρους βρίσκεται στο σημείο τομής των δύο ευθειών AB και $\Gamma\Delta$ που προκύπτουν, στο μέσον της εγκάρσιας διάστασης του κλειδιού.

Κρεμάμε ελεύθερα το γαλλικό κλειδί, πρώτα από το σημείο Α και έπειτα από το σημείο Γ.



Το σημείο τομής των δύο ευθειών AB και $\Gamma\Delta$ προσδιορίζει το κέντρο μάζας του κλειδιού.

Παράδειγμα: Κέντρο μάζας ράβδου

Βρείτε το κέντρο μάζας μιας ομογενούς ράβδου με μάζα M και μήκος L .

ΛΥΣΗ

Έστω στοιχειώδες μήκος dx της ράβδου σε απόσταση x από το άκρο της.

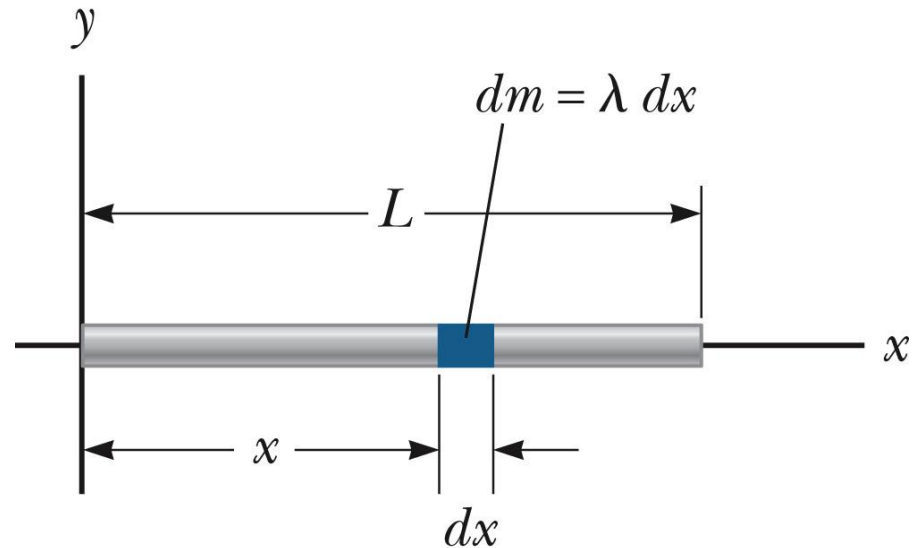
Εφόσον η ράβδος είναι ομογενής, το στοιχειώδες αυτό τμήμα έχει μάζα

$$dm = \frac{M}{L} dx = \lambda dx$$

λ = γραμμική πυκνότητα της ράβδου (μάζα ανά μονάδα μήκους)

$$\vec{r}_{KM} = \frac{1}{M} \int_0^M \vec{r} dm \xrightarrow{x\text{-axis}} x_{KM} = \frac{1}{M} \int_0^M x dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \frac{M}{L} dx = \frac{1}{L} \int_0^L x dx = \frac{1}{L} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=L} = \frac{L}{2}$$

Για ομογενή ράβδο, το ΚΜ είναι στο κέντρο της. Αναμενόμενο;



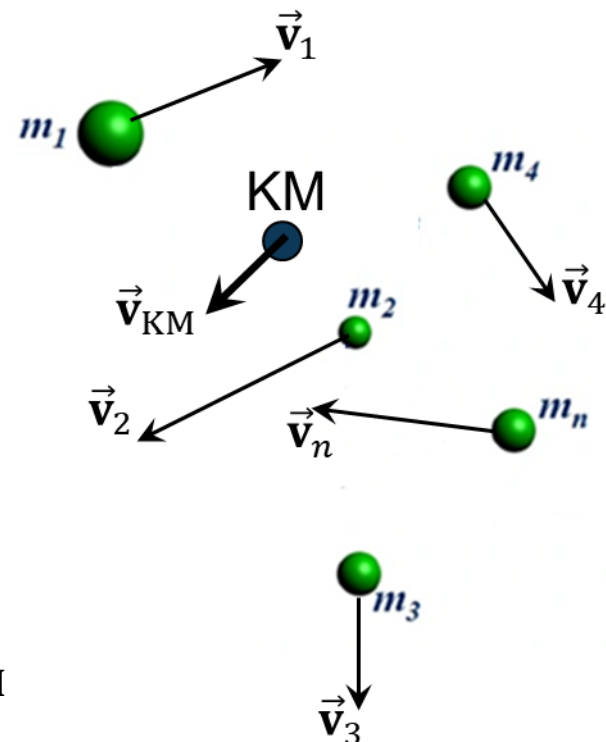
Ταχύτητα και ορμή ενός συστήματος σωματιδίων

Η ταχύτητα $\vec{v}_{\text{KM}}$ του κέντρου μάζας ενός συστήματος n διακριτών σωματιδίων μαζών $m_1, m_2, \dots, m_n$ που κινούνται με ταχύτητες $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, αντίστοιχα, είναι

$$\vec{v}_{\text{KM}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

Η ορμή $\vec{P}$ του συστήματος είναι

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \vec{P} = M \vec{v}_{\text{KM}}$$



δηλαδή, η συνολική ορμή του συστήματος ισούται με το γινόμενο της συνολικής μάζας επί την ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος.

Επιτάχυνση και δύναμη σε ένα σύστημα σωματιδίων

Μπορούμε να βρούμε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας ενός συστήματος n διακριτών σωματιδίων μαζών $m_1, m_2, \dots, m_n$ παραγωγίζοντας την ταχύτητα του κέντρου μάζας ως προς τον χρόνο.

$$\begin{aligned} \text{Όμως, } \left. \begin{aligned} \vec{a}_{\text{KM}} &= \frac{d\vec{v}_{\text{KM}}}{dt} \\ \vec{v}_{\text{KM}} &= \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{a}_{\text{KM}} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i \right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \\ &\Rightarrow \vec{a}_{\text{KM}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{a}_i \end{aligned}$$

όπου, $\vec{a}_i$ η επιτάχυνση του i σωματιδίου ($i = 1, 2, \dots, n$)

Επιτάχυνση και δύναμη σε ένα σύστημα σωματιδίων (συνέχεια)

Έχουμε
$$\vec{a}_{\text{KM}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{a}_i$$

Όμως, από Β' νόμο Νεύτωνα
$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{i,\varepsilon\sigma} + \vec{F}_{i,\varepsilon\zeta}$$

όπου, $\vec{F}_{i,\varepsilon\sigma}$ η συνολική δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο i από τα υπόλοιπα $i - 1$ σωματίδια του συστήματος (συνολική εσωτερική δύναμη στο i) και είναι

$$\vec{F}_{i,\varepsilon\sigma} = \sum_j \vec{F}_{i,j}$$

και $\vec{F}_{i,\varepsilon\zeta}$ η συνολική δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο i από οτιδήποτε άλλο (συνολική εξωτερική δύναμη στο i)

Έτσι,

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i (\vec{F}_{i,\varepsilon\sigma} + \vec{F}_{i,\varepsilon\zeta})$$

Επιτάχυνση και δύναμη σε ένα σύστημα σωματιδίων (συνέχεια)

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i (\vec{F}_{i,\varepsilon\sigma} + \vec{F}_{i,\varepsilon\xi}) = \sum_i \vec{F}_{i,\varepsilon\sigma} + \sum_i \vec{F}_{i,\varepsilon\xi} = \cancel{\sum_i \sum_j \vec{F}_{i,j}} + \sum_i \vec{F}_{i,\varepsilon\xi} = 0$$

Αν αθροίσουμε όλα τα διανύσματα εσωτερικών δυνάμεων $\vec{F}_{i,j}$, αυτά απαλείφονται κατά ζεύγη (3^{ος} νόμος Νεύτωνα), οπότε

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_{i,\varepsilon\xi}$$

Και επειδή ορίσαμε $\sum_i m_i \vec{a}_i = M \vec{a}_{\text{KM}}$ βρίσκουμε

$$\sum_i \vec{F}_{i,\varepsilon\xi} = M \vec{a}_{\text{KM}}$$

Το κέντρο μάζας ενός συστήματος σωματιδίων που έχει συνολική μάζα M κινείται όπως θα κινηθεί ένα σωματίδιο μάζας M , υπό την επίδραση της συνισταμένης εξωτερικής δύναμης που ασκείται στο σύστημα.

Ώθηση και ορμή ενός συστήματος σωματιδίων

Η ώθηση $\vec{\mathbf{I}}$ που προσδίδουν στο σύστημα οι εξωτερικές δυνάμεις είναι

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{I}} &= \int \sum_i \vec{\mathbf{F}}_{i,\text{εξ}} dt = \int M \vec{\mathbf{a}}_{\text{KM}} dt = M \int \vec{\mathbf{a}}_{\text{KM}} dt = M \int \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\text{KM}}}{dt} dt \\ &= M \int d\vec{\mathbf{v}}_{\text{KM}} = M \Delta \vec{\mathbf{v}}_{\text{KM}} = \Delta \vec{\mathbf{P}}\end{aligned}$$

Η συνολική ορμή ενός συστήματος σωματιδίων διατηρείται ($\Delta \vec{\mathbf{P}} = \mathbf{0}$) αν στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις ή ασκούνται αλλά η συνισταμένη τους είναι μηδενική (αλληλοαναιρούνται).

$$\Delta \vec{\mathbf{P}} = \mathbf{0} \quad \text{όταν} \quad \sum_i \vec{\mathbf{F}}_{i,\text{εξ}} = 0$$

- Αυτή η σχέση αποτελεί γενίκευση του μοντέλου του απομονωμένου ως προς την ορμή συστήματος για ένα σύστημα πολλών σωματιδίων

Παράδειγμα κίνησης του κέντρου μάζας – Βλήμα που εκρήγνυται

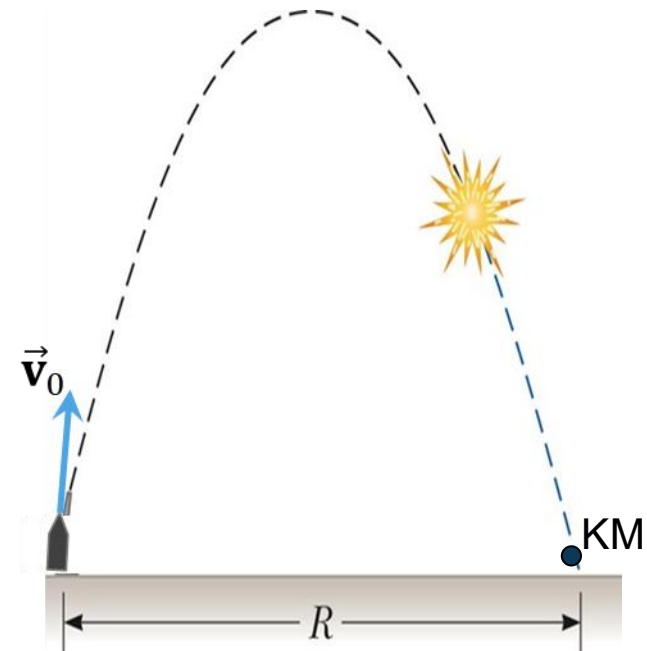
(α) Ένα βλήμα εκτοξεύεται και ξαφνικά εκρήγνυται στον αέρα. Τι μπορείτε να πείτε για την κίνηση του ΚΜ του συστήματος των θραυσμάτων; Αγνοήστε την αντίσταση του αέρα.

Η μόνη εξωτερική δύναμη που ασκείται στο βλήμα (πριν) και στα κομμάτια του (μετά) είναι η βαρύτητα.

Αν το βλήμα δεν είχε εκραγεί, θα ακολουθούσε την τροχιά που δείχνει η διακεκομμένη γραμμή.

Επειδή, οι δυνάμεις που ασκούνται στα κομμάτια από την έκρηξη είναι εσωτερικές, δεν επηρεάζουν την κίνηση του ΚΜ.

Επομένως, μετά την έκρηξη, το κέντρο μάζας των θραυσμάτων ακολουθεί τη διακεκομμένη γραμμή, δηλαδή την ίδια παραβολική τροχιά που θα ακολουθούσε το βλήμα αν δεν είχε εκραγεί.



Παράδειγμα κίνησης του κέντρου μάζας – Βλήμα που εκρήγνυται

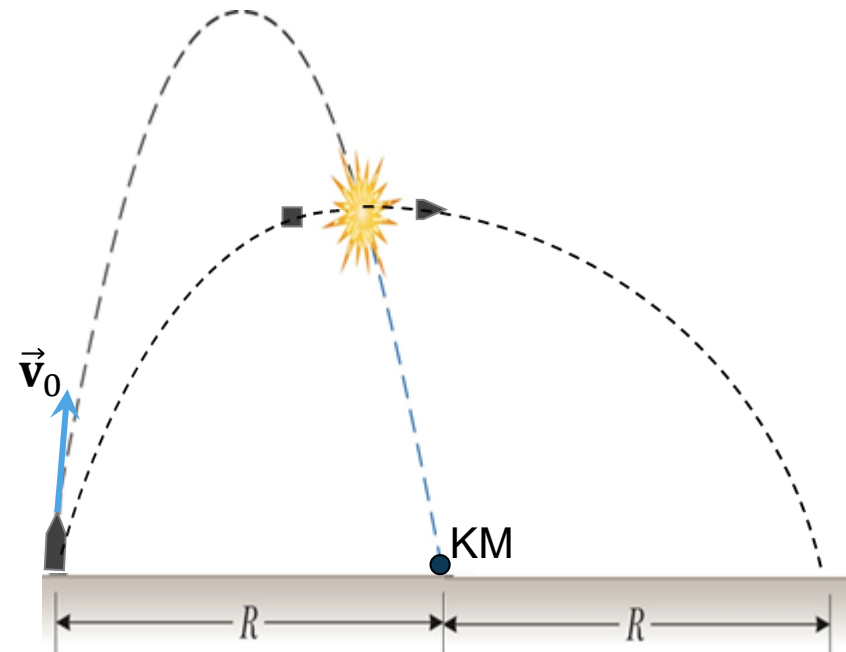
(β) Έστω ότι το βλήμα εκρήγνυται σε δύο κομμάτια με ίσες μάζες. Το ένα κομμάτι προσγειώνεται σε απόσταση $2R$ από το σημείο εκτόξευσης, που θα προσγειωθεί το άλλο;

Εφόσον το ένα κομμάτι προσγειώνεται σε απόσταση R δεξιά από το σημείο ΚΜ και

εφόσον τα δύο κομμάτια έχουν ίσες μάζες,

το δεύτερο κομμάτι θα προσγειωθεί σε απόσταση R αριστερά από το σημείο προσγείωσης του ΚΜ,

δηλαδή, τα επιστρέψει πάλι στο σημείο εκτόξευσης.



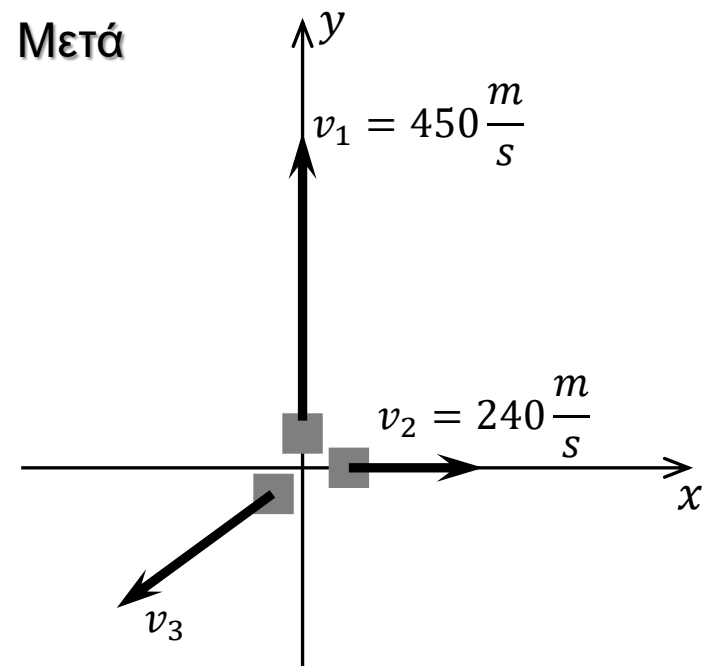
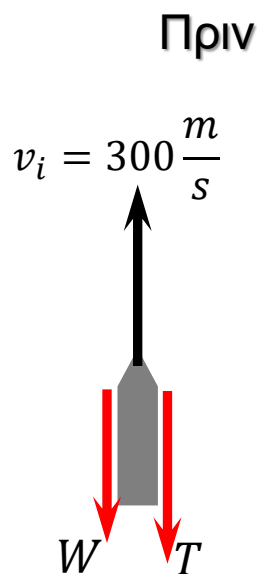
Παράδειγμα κίνησης του κέντρου μάζας – Πύραυλος που εκρήγνυται

Πύραυλος εκτοξεύεται κατακόρυφα. Σε ύψος 1000m, ενώ κινείται με ταχύτητα 300 m/s, εκρήγνυται σε τρία κομμάτια ίσων μαζών. Το ένα κομμάτι κινείται προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου 450 m/s, ενώ το δεύτερο κομμάτι κινείται ανατολικά με ταχύτητα μέτρου 240 m/s. Βρείτε την ταχύτητα του τρίτου κομματιού

Οι εξωτερικές δυνάμεις στον πύραυλο είναι το βάρος του $W = Mg$ και η αντίσταση T από τον αέρα (τριβή)

Από το θεώρημα ώθηση-ορμής, η μεταβολή της ορμής του πριν και μετά την έκρηξη είναι ισούται με την ώθηση των δυνάμεως αυτών κατά το χρονικό διάστημα της έκρηξης.

$$\Delta \vec{P} = \vec{P}_{\text{μετα}} - \vec{P}_{\text{πριν}} = \int (\vec{W} + \vec{T}) dt$$



Επειδή η έκρηξη διαρκεί ελάχιστα,
μπορούμε να θεωρήσουμε την ώθηση
των εξωτερικών δυνάμεων αμελητέα

$$\int (\vec{W} + \vec{T}) dt \approx 0$$

ΟΠΟΤΕ $\vec{P}_{\text{πριν}} \approx \vec{P}_{\text{μετά}}$

Στον άξονα y

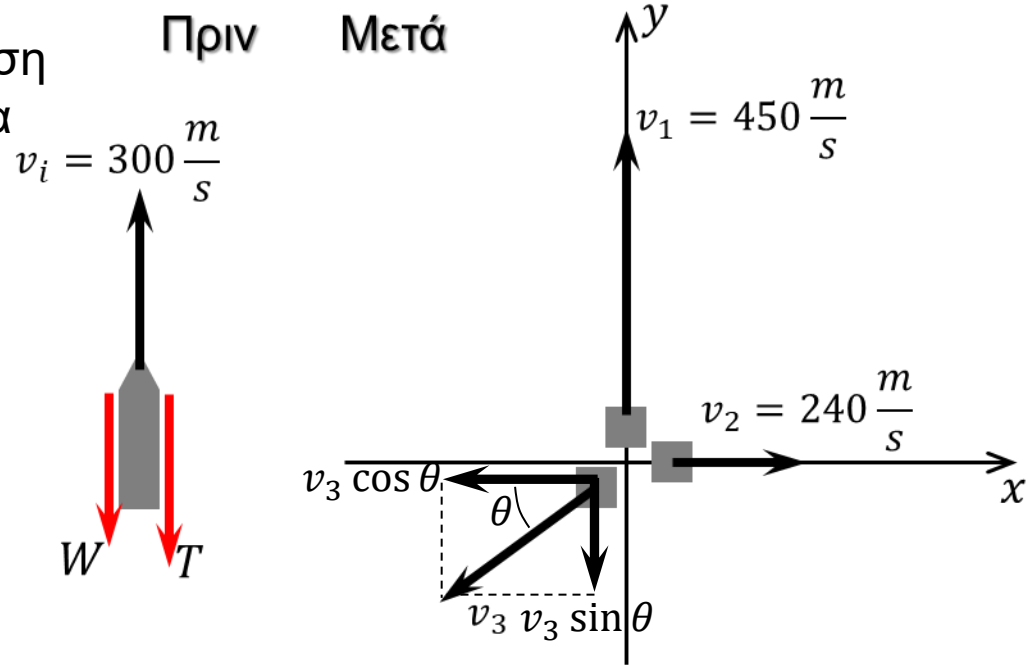
$$Mv_i = \frac{M}{3}v_1 + \frac{M}{3}v_3 \sin \theta$$

$$3v_i = v_1 + v_3 \sin \theta \Rightarrow v_3 \sin \theta = 3v_i - v_1$$

$$\Rightarrow v_3 \sin \theta = 3 \left(300 \frac{m}{s} \right) - 450 \frac{m}{s} = 450 \frac{m}{s} \quad (1)$$

Στον άξονα x

$$0 = \frac{M}{3}v_2 - \frac{M}{3}v_3 \cos \theta \Rightarrow v_3 \cos \theta = v_2 = 240 \frac{m}{s} \quad (2)$$



$$v_3 \sin \theta = 450 \frac{m}{s} \quad (1)$$

$$v_3 \cos \theta = 240 \frac{m}{s} \quad (2)$$

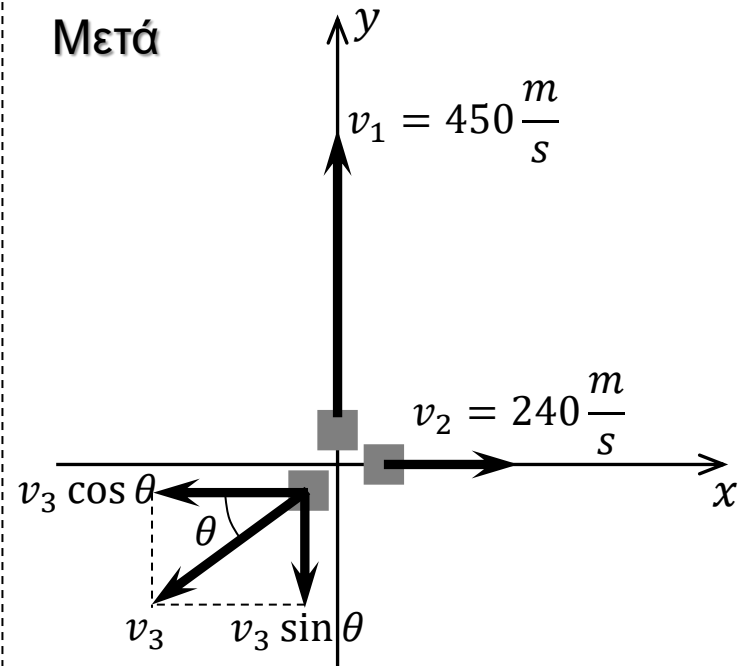
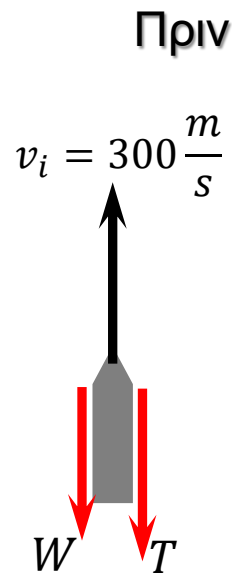
Το τρίτο κομμάτι θα εκτοξευθεί με ταχύτητα μέτρου

$$\begin{aligned} v_3 &= \sqrt{\left(450 \frac{m}{s}\right)^2 + \left(240 \frac{m}{s}\right)^2} \\ &= 510 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

υπό γωνία

$$\theta = \tan^{-1} \frac{450}{240} = 62^\circ$$

ως προς τον ορίζοντα και νότιο-δυτικά



Παραμορφώσιμα συστήματα

- Η περίπτωση του βλήματος ή του πυραύλου που εκρήγνυται σε πολλά θραύσματα αποτελεί ένα παράδειγμα παραμορφώσιμου συστήματος.
- Ένα άλλο παράδειγμα είναι η περίπτωση δύο σωμάτων συνδεδεμένων μεταξύ τους με ελατήριο.A diagram showing two brown rectangular blocks, each labeled with the letter 'm', connected by a coiled metal spring. The blocks are positioned on the left and right, with the spring in the center.
- Αναλύουμε την κίνηση παραμορφώσιμου συστήματος θεωρώντας το σαν σύστημα σωματιδίων.
- Εφαρμόζοντας
 - το **θεώρημα ώθησης-ορμής** σε κάθε περίπτωση,
 - το **θεώρημα διατήρησης της ενέργειας** στην περίπτωση σώματος **απομονωμένου ενεργειακά** από το περιβάλλον του, ή
 - το **θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας** στην περίπτωση σώματος στο οποίο ασκούνται **εξωτερικές δυνάμεις**

μπορούμε να υπολογίσουμε παραμέτρους όπως η ταχύτητα του κέντρου μάζας του παραμορφώσιμου συστήματος

Παραμορφώσιμο σύστημα (ελατήριο) – Παράδειγμα

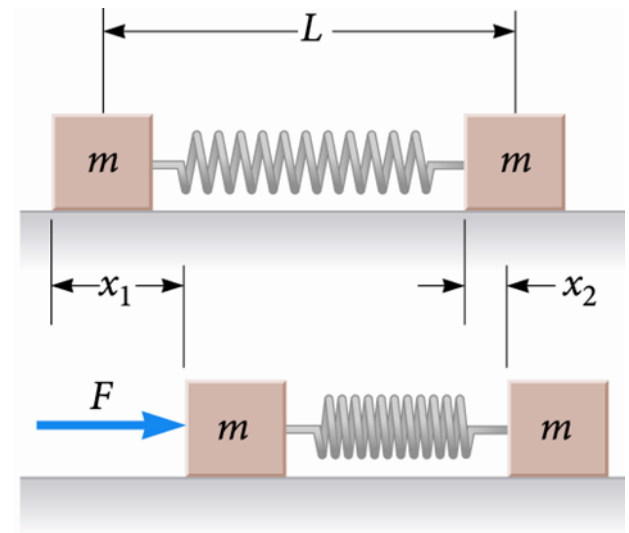
(α) Σε επίπεδο τραπέζι χωρίς τριβές, βρίσκονται δύο κύβοι ίσων μαζών συνδεδεμένοι με ελατήριο αμελητέας μάζας και μήκους ισορροπίας L . Στον αριστερό κύβο ασκείται σταθερή δύναμη F για χρονικό διάστημα Δt που τον μετακινεί κατά x_1 . Σε αυτό το διάστημα, ο δεξιός κύβος μετακινείται κατά x_2 . Στο τέλος του χρονικού διαστήματος Δt , η δύναμη F παύει να ασκείται. Βρείτε την ταχύτητα $v_{\text{ΚΜ}}$ του συστήματος.

Στο χρονικό διάστημα Δt το ΚΜ του συστήματος μετακινείται κατά $\Delta x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

στο σύστημα ασκείται η εξωτερική δύναμη F (προφανώς, οι δυνάμεις στις δύο μάζες από το ελατήριο είναι εσωτερικές του συστήματος)

Από το 2^ο νόμο Νεύτωνα, έχουμε για την επιτάχυνση $a_{\text{ΚΜ}}$ του ΚΜ του συστήματος

$$F_{\varepsilon\xi} = F = (2m)a_{\text{ΚΜ}} \Rightarrow a_{\text{ΚΜ}} = \frac{F}{2m}$$



Παραμορφώσιμο σύστημα (ελατήριο) – Παράδειγμα (συνέχεια)

$$a_{KM} = \frac{F}{2m}$$

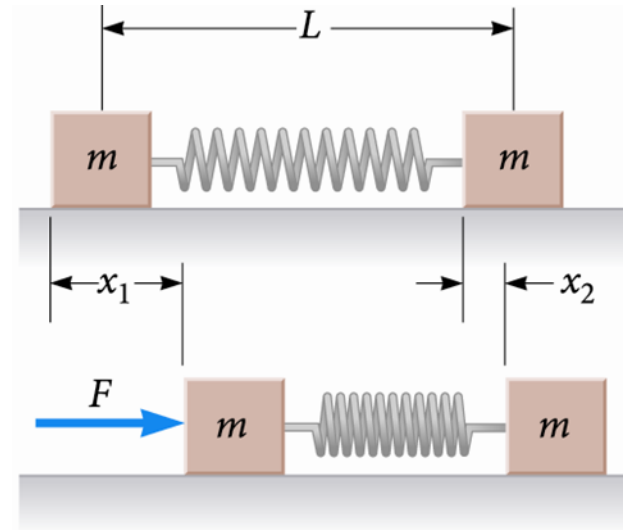
$F = \text{σταθ} \Rightarrow a_{KM} = \text{σταθ} \Rightarrow$ ευθύγραμμη
ομαλά επιταχυνόμενη (ΕΟΕ) κίνηση του ΚΜ
επομένως,

$$v_{KM}^2 = v_{KM,i}^2 + 2a_{KM}\Delta x$$

$$v_{KM}^2 = 0 + 2a_{KM}\Delta x$$

$$v_{KM}^2 = 2 \left(\frac{F}{2m} \right) \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) = F \frac{x_1 + x_2}{2m}$$

$$v_{KM} = \sqrt{F \frac{x_1 + x_2}{2m}}$$



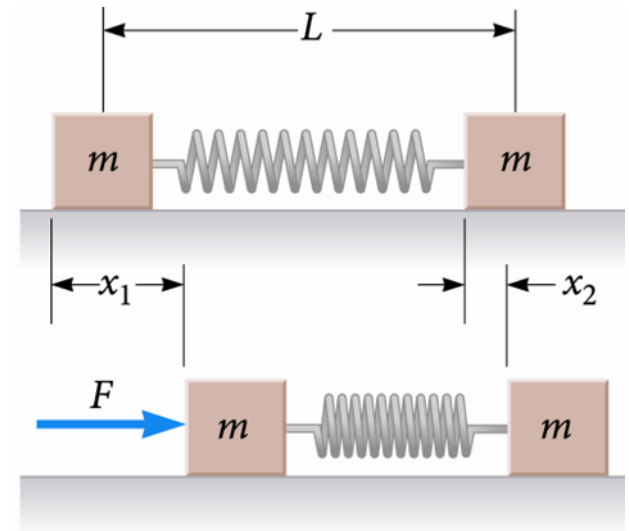
Παραμορφώσιμο σύστημα (ελατήριο) – Παράδειγμα (συνέχεια)

(β) Όταν η δύναμη F σταματήσει, το ΚΜ του συστήματος συνεχίζει να κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα ($v_{\text{ΚΜ}}$), ενώ οι δύο κύβοι ταλαντώνονται μπρος-πίσω ως προς το ΚΜ. Βρείτε τη συνολική ενέργεια του συστήματος που οφείλεται σε αυτή την ταλάντωση ως προς το ΚΜ.

Ολική ενέργεια συστήματος $K_{\text{ΚΜ}} + K_{\text{ταλαν.}} + U_{\text{ταλαν.}}$

- $K_{\text{ΚΜ}}$ η κινητική ενέργεια του ΚΜ του συστήματος,
- $K_{\text{ταλαν.}}$ η κινητική ενέργεια λόγω της ταλάντωσης των δύο μαζών ως προς το ΚΜ και
- $U_{\text{ταλαν.}}$ η δυναμική ενέργεια στο ελατήριο.

$K_{\text{ταλαν.}} + U_{\text{ταλαν.}} = E_{\text{ταλαν.}}$ είναι η ενέργεια ταλάντωσης του συστήματος



Παραμορφώσιμο σύστημα (ελατήριο) – Παράδειγμα (συνέχεια)

(β) Όταν η δύναμη F σταματήσει, το ΚΜ του συστήματος συνεχίζει να κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα ($v_{\text{ΚΜ}}$), ενώ οι δύο κύβοι ταλαντώνονται μπρος-πίσω ως προς το ΚΜ. Βρείτε τη συνολική ενέργεια του συστήματος που οφείλεται σε αυτή την ταλάντωση ως προς το ΚΜ.

Η ολική ενέργεια συστήματος αποκτήθηκε μέσω του έργου $W = F \Delta x$ στο διάστημα Δt , επομένως

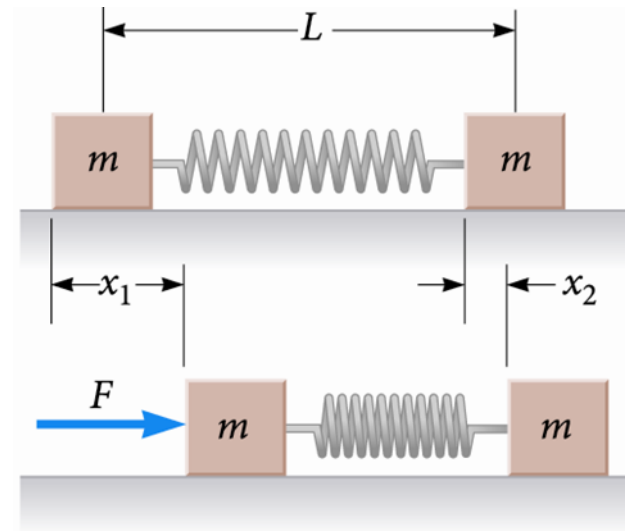
$$K_{\text{ΚΜ}} + E_{\text{ταλαν.}} = F \Delta x$$

$$E_{\text{ταλαν.}} = F \Delta x - K_{\text{ΚΜ}}$$

$$E_{\text{ταλαν.}} = F \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) - \frac{1}{2} (2m) v_{\text{ΚΜ}}^2$$

$$E_{\text{ταλαν.}} = F \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) - \frac{1}{2} (2m) \left(F \frac{x_1 + x_2}{2m} \right)$$

$$E_{\text{ταλαν.}} = F \frac{x_1 - x_2}{2}$$



Πρόβλημα: τα δύο βαγόνια κινούνται κατά μήκος ενός οριζόντιου αεροδιαδρόμου. Στο πίσω μέρος του δεύτερου βαγονιού είναι στερεωμένο ελατήριο σταθεράς $k = 10^3 \text{ N/m}$. Το πρώτο βαγόνι, μάζας $m_1 = 0.5 \text{ kg}$, κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 20 \text{ m/s}$, ενώ το δεύτερο βαγόνι, ίσης μάζας $m_2 = 0.5 \text{ kg}$, κινείται πιο αργά προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου $v_2 = 5 \text{ m/s}$. Μόλις η μάζα m_1 συγκρουστεί με το ελατήριο της μάζας m_2 , το ελατήριο συμπιέζεται κατά x_{max} και μετά τα βαγόνια κινούνται πάλι χωριστά. (α) Βρείτε το μέτρο v της ταχύτητας στη θέση της μέγιστης συμπίεσης.

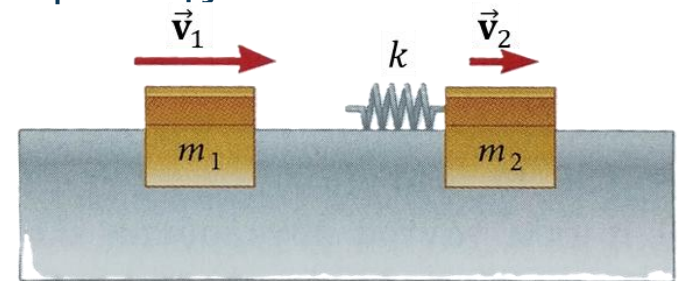
ΛΥΣΗ

Η δύναμεις που ασκούνται στις δύο μάζες μέσω του ελατηρίου κατά την επαφή της μάζας m_1 με το ελατήριο της μάζας m_2 είναι εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος.

επομένως, το σύστημα των δύο μαζών και του ελατηρίου είναι απομονωμένο ως προς την ορμή όσο και ως προς την ενέργεια.

Από την αρχή διατήρησης της ορμής πριν και κατά τη στιγμή της μέγιστης συμπίεσης, έχουμε

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \Rightarrow v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2)}$$

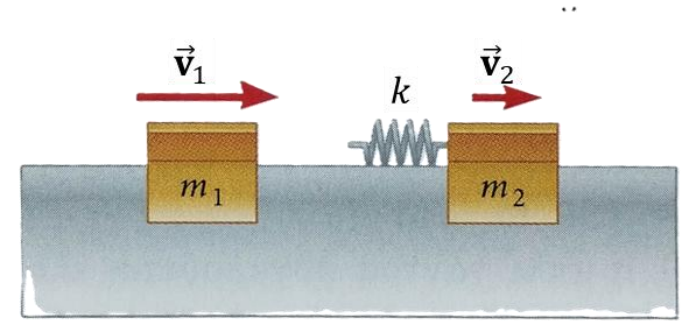


ΛΥΣΗ (συνέχεια)

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2)}$$

$$\Rightarrow v = \frac{(0.5\text{kg})(20\text{m/s}) + (0.5\text{kg})(5\text{m/s})}{(0.5\text{kg} + 0.5\text{kg})}$$

$$\Rightarrow v = 12.5\text{m/s}$$



Πρόβλημα (συνέχεια)

(β) Βρείτε τη μέγιστη συμπίεση x_{max} .

ΛΥΣΗ

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας πριν και κατά τη στιγμή της μέγιστης συμπίεσης, έχουμε

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}kx_{max}^2 \quad (1)$$

όπου,

$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$ η ενέργεια του συστήματος πριν τη στιγμή της μέγιστης συμπίεσης (κινητική),

$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$ η κινητική ενέργεια και $\frac{1}{2}kx_{max}^2$ η δυναμική ενέργεια του συστήματος τη στιγμή μέγιστης συμπίεσης

$$(1) \Rightarrow m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = (m_1 + m_2)v^2 + kx_{max}^2$$

$$\Rightarrow (0.5\text{kg})(20\text{m/s})^2 + (0.5\text{kg})(5\text{m/s})^2 = (1\text{kg})(12.5\text{m/s})^2 + (10^3\text{N/m})x_{max}^2$$

$$\Rightarrow x_{max}^2 = 0.056\text{m}^2 \Rightarrow x_{max} = 0.24\text{m} = 24\text{cm}$$

Πρόβλημα (συνέχεια)

(γ) την ταχύτητα κάθε βαγονιού όταν η μάζα m_1 σταματήσει να έχει επαφή με το ελατήριο.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι μετά τη σύγκρουση της μάζας m_1 με το ελατήριο της μάζας m_2 , όταν τα βαγόνια κινούνται πάλι χωριστά, οι ταχύτητές τους είναι v'_1 και v'_2 .

Από την αρχή διατήρησης της ορμής πριν τη σύγκρουση και μετά που τα βαγόνια κινούνται πάλι χωριστά, έχουμε

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

$$(0.5\text{kg})(20\text{m/s}) + (0.5\text{kg})(5\text{m/s}) = (0.5\text{kg})v'_1 + (0.5\text{kg})v'_2$$

$$v'_1 + v'_2 = 25 \text{ m/s} \quad (2)$$

Ενώ, από την αρχή διατήρησης της ενέργειας, έχουμε

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$$

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v'^2_1 + m_2 v'^2_2$$

ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Αντικαθιστώντας στη $m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2$

$$(0.5\text{kg})(20\text{m/s})^2 + (0.5\text{kg})(5\text{m/s})^2 = (0.5\text{kg})v_1'^2 + (0.5\text{kg})v_2'^2$$

$$v_1'^2 + v_2'^2 = 425 \text{ m}^2/\text{s}^2 \quad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα των (2) και (3), έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} v_1' + v_2' = 25 \text{ m/s} \\ v_1'^2 + v_2'^2 = 425 \text{ m}^2/\text{s}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_2' = 25 - v_1' \\ v_1'^2 + (25 - v_1')^2 = 425 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} v_2' = 25 - v_1' \\ 2v_1'^2 - 50v_1' + 200 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} v_1' = 20 \text{ m/s} \\ v_2' = 5 \text{ m/s} \\ v_1' = 5 \text{ m/s} \\ v_2' = 20 \text{ m/s} \end{cases}$$

Με τη σύγκρουση, τα βαγόνια ανταλλάσσουν ταχύτητες

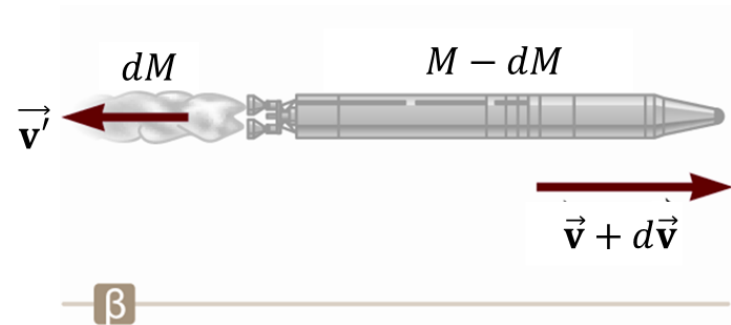
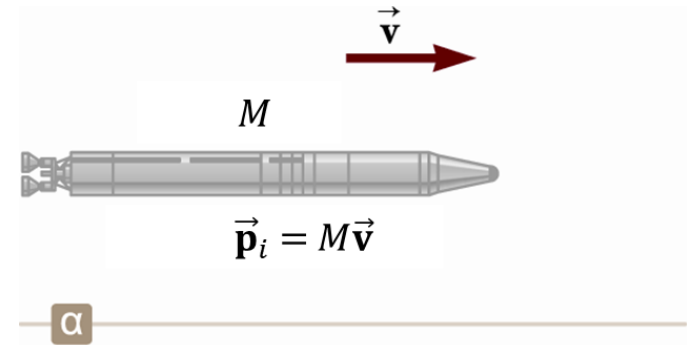
Πρόωση πυραύλων

Έστω πύραυλος κινούμενος με ταχύτητα $\vec{v}$ εκτοξεύοντας προς τα πίσω καυσαέρια με ταχύτητα $\vec{v}'$.

Οι ταχύτητες πυραύλου και καυσαερίων θεωρούνται ως προς τη γη.

Τη χρονική στιγμή t (εικ. α), η συνολική μάζα του πυραύλου (μαζί με τα καύσιμά του) είναι M και κινείται με ταχύτητα μέτρου v .

Η ορμή του είναι $\vec{p}_i = M\vec{v}$



Πρόωση πυραύλων (συνέχεια)

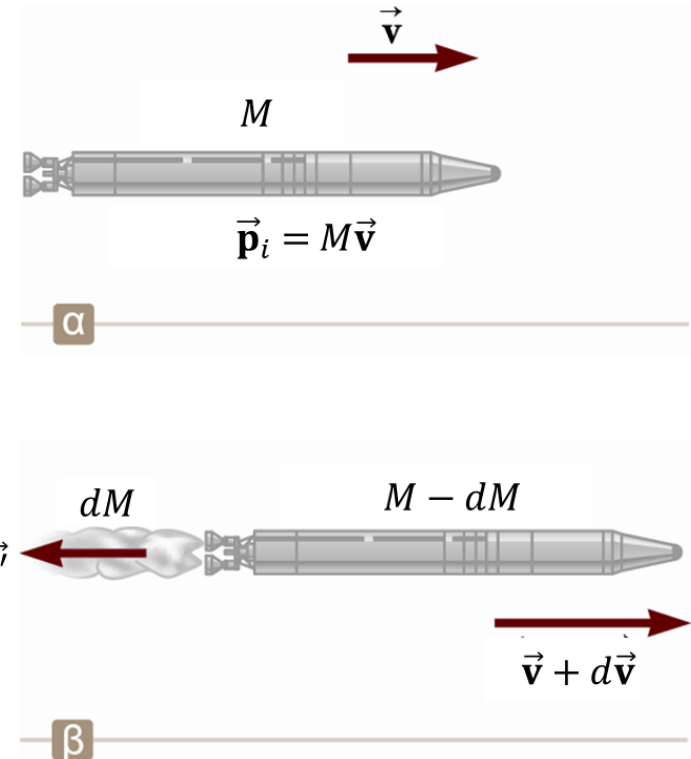
Τη χρονική στιγμή $t + dt$ (εικ. β), η μάζα του πυραύλου έχει μειωθεί σε $M - dM$ καθώς έχει εκτοξεύσει προς τα πίσω ποσότητα καυσίμων μάζας dM με ταχύτητα $\vec{v}'$.

με αποτέλεσμα το μέτρο της ταχύτητας του πυραύλου να έχει μεταβληθεί σε $\vec{v} + d\vec{v}$.

Κατά την κίνηση στο διάστημα (έλλειψη δύναμης βαρύτητας και τριβής), το σύστημα πύραυλος-καύσιμα θεωρείται απομονωμένο

συνεπώς η συνολική ορμή του συστήματος πύραυλος-καύσιμα διατηρείται

$$M\vec{v} = (M - dM)(\vec{v} + d\vec{v}) + dM\vec{v}'$$



Πρόωση πυραύλων (συνέχεια)

$$M\vec{v} = (M - dM)(\vec{v} + d\vec{v}) + dM\vec{v}'$$

$$M\vec{v} = M\vec{v} + Md\vec{v} - \vec{v}dM - \cancel{dMd\vec{v}}^0 + \vec{v}'dM$$

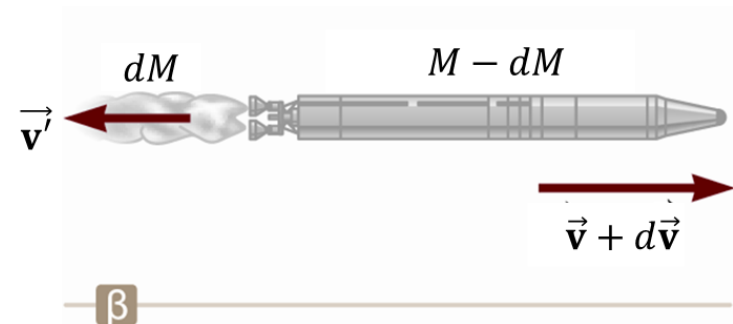
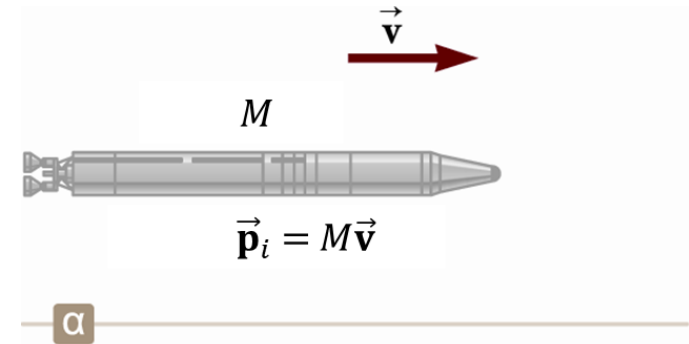
$$0 = Md\vec{v} - \vec{v}dM + \vec{v}'dM$$

$$0 = Md\vec{v} + (\vec{v}' - \vec{v})dM$$

$\vec{v}' - \vec{v}$ είναι η σχετική ταχύτητα εκτόξευσης των καυσαερίων ως προς τον πύραυλο (αποκαλείται ταχύτητα καυσαερίων, συμβολίζεται $\vec{v}_e$, $e = \text{exhausted}$)

$$0 = Md\vec{v} + \vec{v}_e dM$$

$$\text{ή} \quad 0 = Mdv - v_e dM \Rightarrow dv = v_e \frac{dM}{M}$$



Πρόωση πυραύλων (συνέχεια)

$$dv = v_e \frac{dM}{M} \quad (1)$$

Αν M_i, v_i είναι η αρχική μάζα και η ταχύτητα του πυραύλου και

M_f, v_f είναι η τελική μάζα και η ταχύτητά του

ολοκληρώνοντας τη σχέση (1) έχουμε

$$v_f - v_i = v_e \ln \left(\frac{M_f}{M_i} \right)$$

Αυτή είναι η **εξίσωση πρόωσης πυραύλων**

Παρατηρήσεις στην εξίσωση πρόωσης πυραύλων

$$v_f - v_i = v_e \ln \left(\frac{M_f}{M_i} \right)$$

Η αύξηση $\Delta v = v_f - v_i$ του μέτρου της ταχύτητας του πυραύλου

- I. είναι ανάλογη προς το μέτρο της ταχύτητας v_e των καυσαερίων του. Επομένως, η ταχύτητα των καυσαερίων v_e θα πρέπει να έχει πολύ μεγάλη τιμή.
- II. είναι ανάλογη προς τον φυσικό λογάριθμο του λόγου M_f/M_i . Συνεπώς, ο λόγος αυτός θα πρέπει να έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερη τιμή. Δηλαδή, η μάζα του πυραύλου χωρίς τα καύσιμα (η τελική μάζα, M_f) πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη και ο πύραυλος πρέπει να μεταφέρει όσο το δυνατόν περισσότερα καύσιμα (μεγάλη αρχική μάζα M_i).

Ώση

Η **ώση** (thrust) ή **προωστική δύναμη** που δέχεται ο πύραυλος είναι η δύναμη που ασκούν σε αυτόν τα καυσαέρια.

$$\text{Ώση} = M \frac{dv}{dt} = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right|$$

Από τη σχέση (1) $dv = v_e \frac{dM}{M}$ έχουμε $M dv = v_e dM \Rightarrow M \frac{dv}{dt} = v_e \frac{dM}{dt}$

Παρατηρήσεις

- Η ώση αυξάνεται όσο αυξάνεται η ταχύτητα των καυσαερίων.
- Η ώση αυξάνεται όσο αυξάνεται ο ρυθμός μεταβολής της μάζας.
- Ο ρυθμός μεταβολής της μάζας $\frac{dM}{dt}$ ονομάζεται **ρυθμός καύσης**.