

Κεφάλαιο 3

Κίνηση σε δύο διαστάσεις (επίπεδο)

Κινηματική σε δύο διαστάσεις

Θα περιγράψουμε τη διανυσματική φύση της θέσης, της ταχύτητας, και της επιτάχυνσης με περισσότερες λεπτομέρειες.

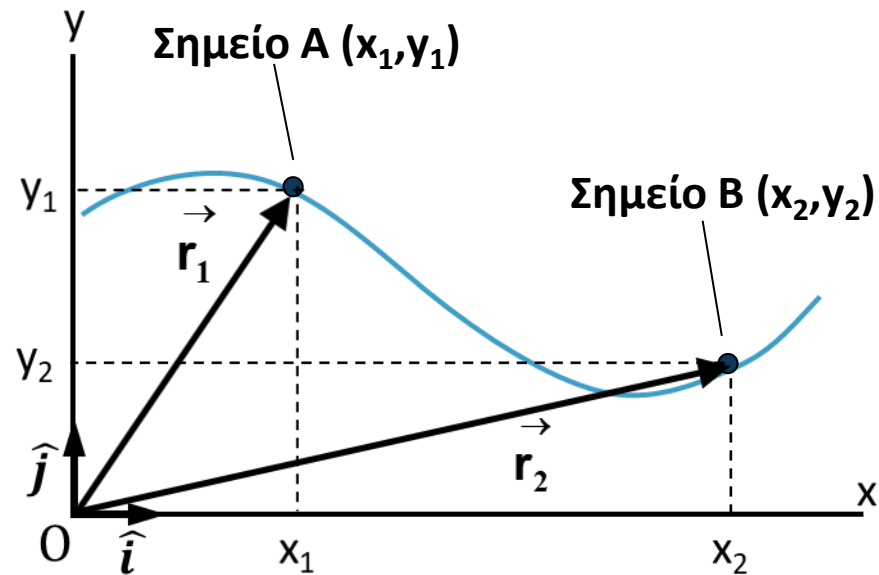
Σαν ειδικές περιπτώσεις, θα μελετήσουμε:

- την κίνηση των βλημάτων και
- την ομαλή κυκλική κίνηση

Θέση και μετατόπιση

Η **θέση** ενός σώματος περιγράφεται με το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$.

- Έστω Oxy καρτεσιανό (ορθογώνιο) σύστημα συντεταγμένων.
- $\hat{i}, \hat{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων x, y, αντίστοιχα.
- Την αρχική χρονική στιγμή t_1 το σώμα βρίσκεται στη σημείο A(x_1, y_1) με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_1 = x_1\hat{i} + y_1\hat{j}$
- Την τελική χρονική στιγμή t_2 το σώμα βρίσκεται στη σημείο B(x_2, y_2) με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_2 = x_2\hat{i} + y_2\hat{j}$



Μετατόπιση

Η **μετατόπιση** του σώματος ορίζεται ως η **μεταβολή της θέσης του**

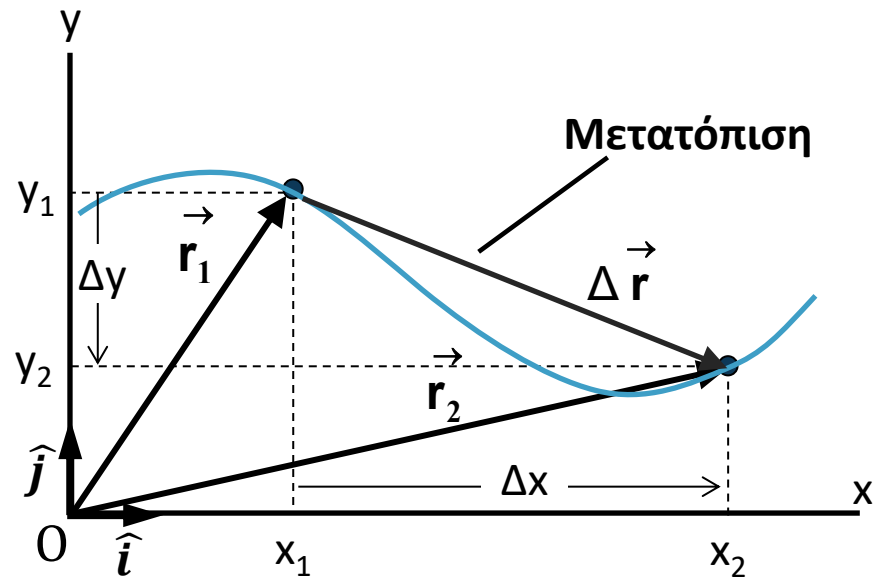
$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

ή, σε αλγεβρική μορφή

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j}$$

όπου, $\Delta x = x_2 - x_1$ είναι η οριζόντια μετατόπιση και

$\Delta y = y_2 - y_1$ είναι η κατακόρυφη μετατόπιση



Μέση ταχύτητα

Η **μέση ταχύτητα** είναι ο λόγος της μετατόπισης προς το χρονικό διάστημα στο οποίο συμβαίνει η μετατόπιση.

$$\vec{v}_{\text{avg}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Η κατεύθυνση του διανύσματος της μέσης ταχύτητας είναι η κατεύθυνση του διανύσματος της μετατόπισης $\Delta \vec{r}$.

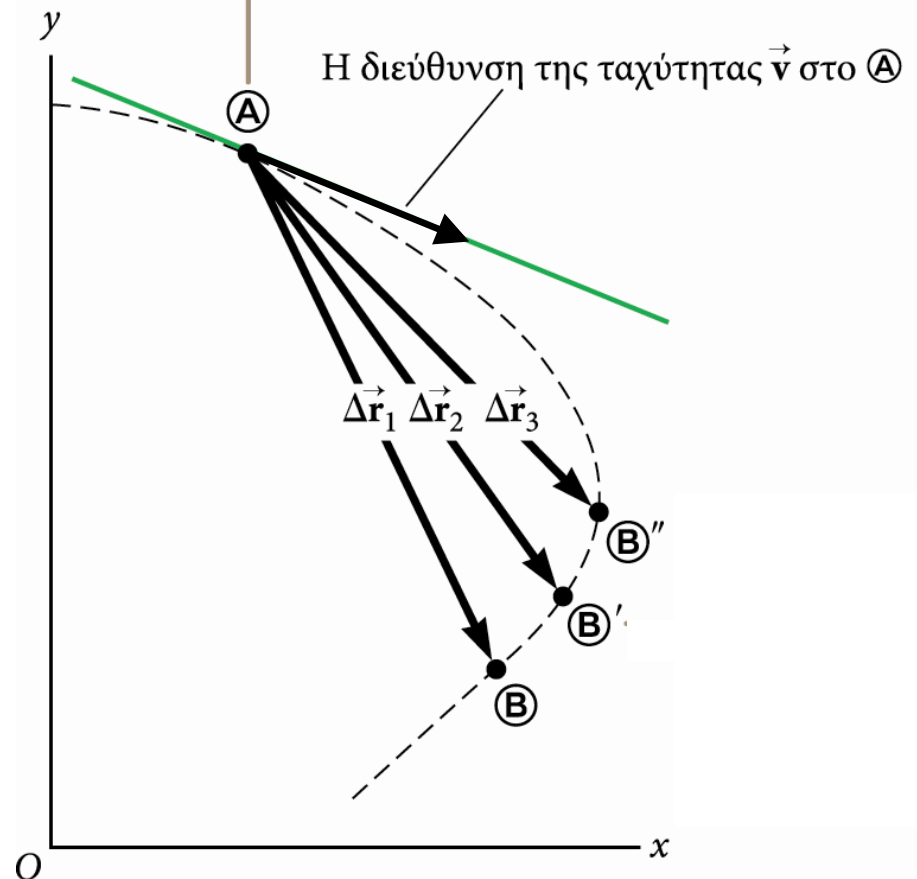
Στιγμιαία ταχύτητα

Η **στιγμιαία ταχύτητα** είναι το όριο της μέσης ταχύτητας καθώς $\Delta t \rightarrow 0$.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- Καθώς το χρονικό διάστημα γίνεται μικρότερο, η κατεύθυνση του διανύσματος της μετατόπισης προσεγγίζει την κατεύθυνση της εφαπτομένης της καμπύλης.

Καθώς το άκρο της διαδρομής πλησιάζει το σημείο **Α**, το Δt προσεγγίζει το μηδέν και η διεύθυνση του $\Delta \vec{r}$ προσεγγίζει τη διεύθυνση της πράσινης εφαπτομένης της καμπύλης στο **Α**.



Στιγμιαία ταχύτητα : Ανάλυση σε ορθογώνιες συνιστώσες

Η **στιγμιαία ταχύτητα** μπορεί να εκφραστεί σε αλγεβρική μορφή με τη βοήθεια των x και y συνιστωσών της

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$$

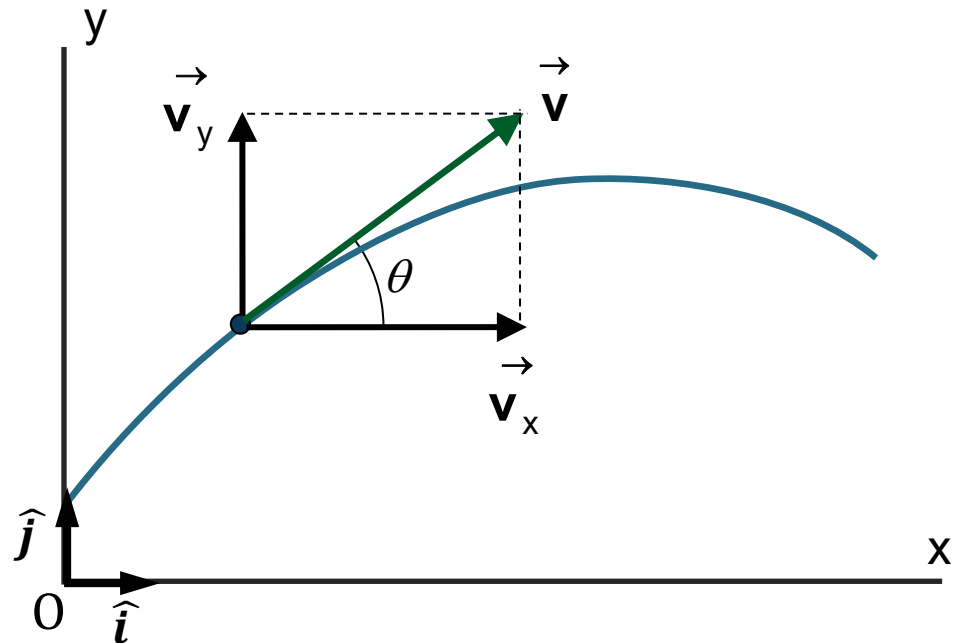
Αν v είναι το μέτρο της ταχύτητας και θ η γωνία που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα (x),

οι x και y συνιστώσες της ταχύτητας είναι

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v \cos \theta$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v \sin \theta$$

$$\text{όπου, } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{και} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x}$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.1 Περιγραφή της κίνησης με γραφήματα

Η κίνηση ενός σωματιδίου περιγράφεται από τις δύο εξισώσεις $x = 2t^2$ (m) και $y = (5t + 5)$ (m), όπου ο χρόνος t μετριέται σε s.

α. Να σχεδιάσετε ένα **γράφημα της τροχιάς** του σωματιδίου

ΛΥΣΗ

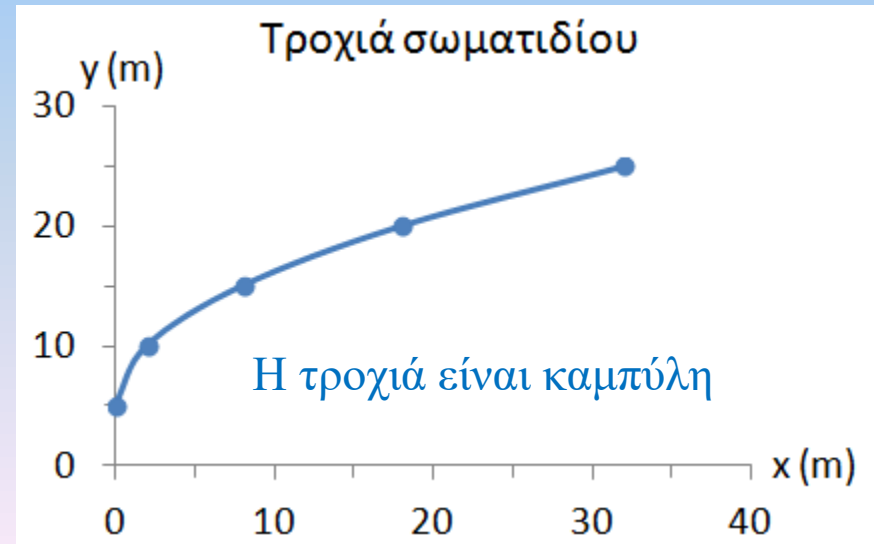
α. Υπολογίζουμε τις τιμές των συντεταγμένων x και y σε διάφορες χρονικές στιγμές

[π.χ.: για $t = 3$ s έχουμε $x = 2(3)^2$ m = 18 m και $y = (5 \cdot 3 + 5)$ m = 20 m]

και φτιάχνουμε τον πίνακα

και με τις τιμές από τον πίνακα φτιάχνουμε το γράφημα.

t (s)	x (m)	y (m)
0	0	5
1	2	10
2	8	15
3	18	20
4	32	25



β. Να σχεδιάσετε ένα **γράφημα του μέτρου της ταχύτητας** του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου.

ΛΥΣΗ

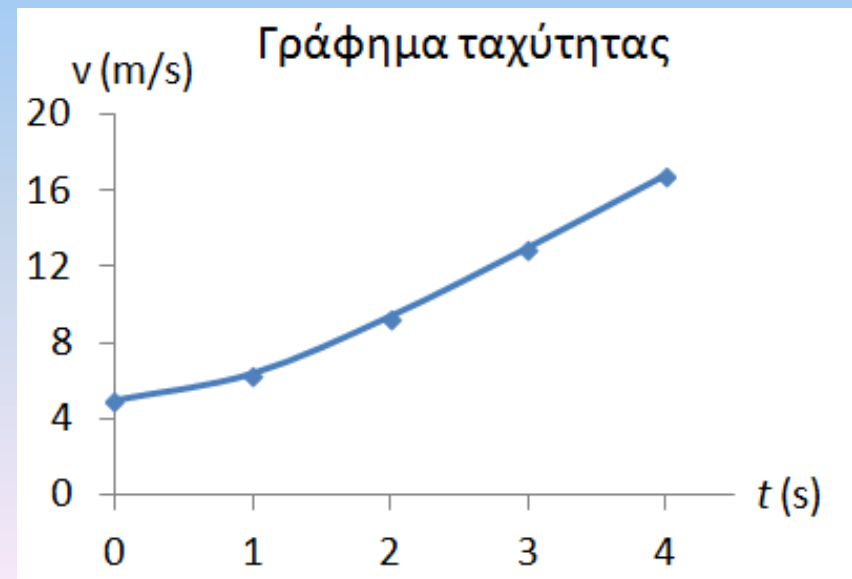
Το μέτρο της ταχύτητας δίνεται από την εξίσωση $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ όπου

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^2) = 2 \frac{d}{dt}(t^2) = 2(2t) = 4t \text{ m/s}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(5t + 5) = \frac{d}{dt}(5t) + \frac{d}{dt}(5) = 5 \text{ m/s}$$

$$\text{Επομένως: } v = \sqrt{(4t)^2 + (5)^2} = \sqrt{16t^2 + 25} \text{ m/s}$$

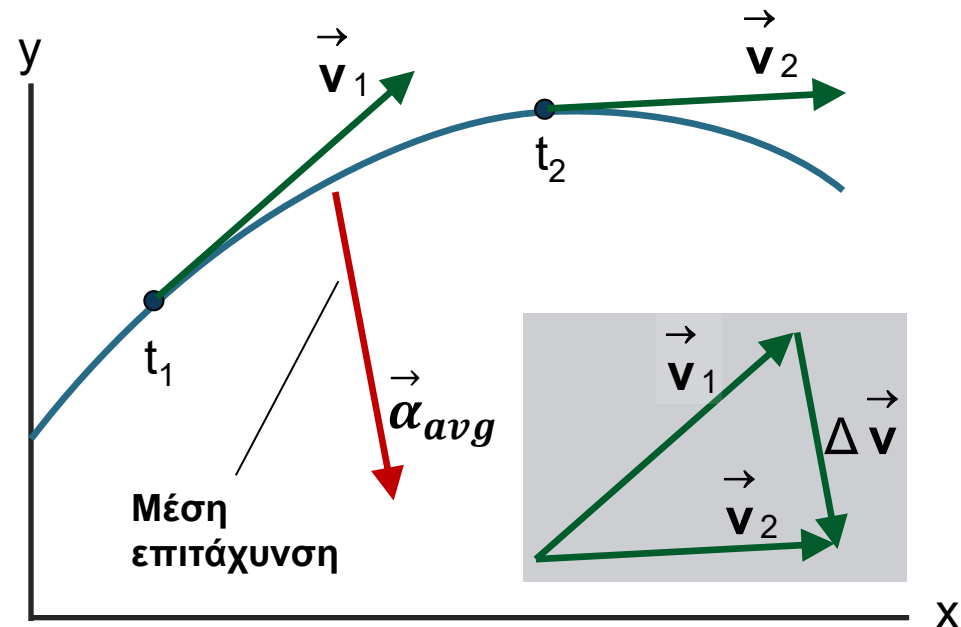
t (s)	v (m/s)
0	5.0
1	6.4
2	9.4
3	13.0
4	16.8



Μέση επιτάχυνση

Η **μέση επιτάχυνση** ενός σωματιδίου ορίζεται ως το πηλίκο της μεταβολής του διανύσματος της στιγμιαίας ταχύτητας προς το χρονικό διάστημα στο οποίο συμβαίνει η μεταβολή αυτή.

$$\vec{\alpha}_{avg} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$



Στιγμιαία επιτάχυνση

Η **στιγμιαία επιτάχυνση** είναι το όριο του της μέσης επιτάχυνσης καθώς $\Delta t \rightarrow 0$.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

- Η στιγμιαία επιτάχυνση ισούται με την παράγωγο του διανύσματος της ταχύτητας ως προς τον χρόνο.
- Το διάνυσμα $\vec{a}$ της επιτάχυνσης είναι ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η ταχύτητα $\vec{v}$ ενός κινητού σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Στιγμιαία επιτάχυνση: Ανάλυση σε $\alpha_{\parallel}$ και $\alpha_{\perp}$

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης μπορεί να αναλυθεί σε **εφαπτομενική** (ή **επιτρόχια** ή **παράλληλη**) $\vec{\alpha}_{\parallel}$ και **κάθετη** (ή **κεντρομόλο**) συνιστώσα $\vec{\alpha}_{\perp}$.

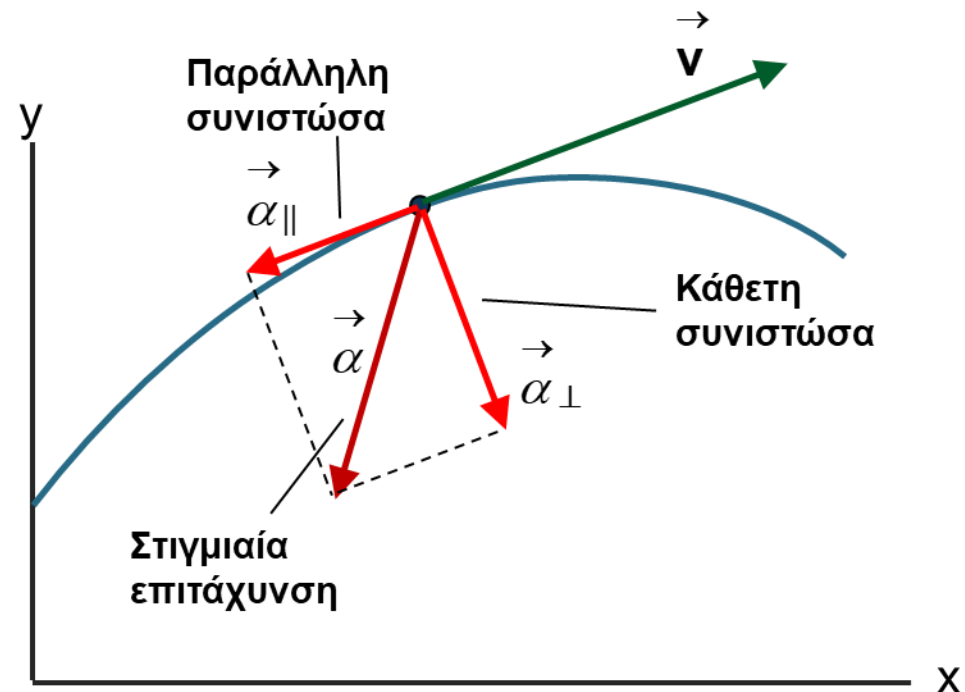
- Η **παράλληλη** συνιστώσα $\vec{\alpha}_{\parallel}$ σχετίζεται με τη μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας.

$$\alpha_{\parallel} = \frac{dv}{dt}$$

- Η **κάθετη** συνιστώσα $\vec{\alpha}_{\perp}$ σχετίζεται με τη μεταβολή της διεύθυνσης της ταχύτητας.

$$\alpha = \sqrt{\alpha_{\parallel}^2 + \alpha_{\perp}^2}$$

- Οι συνιστώσες $\vec{\alpha}_{\parallel}$ και $\vec{\alpha}_{\perp}$ μεταφέρουν χρήσιμες πληροφορίες αλλά η χρήση τους είναι δύσκολη διότι οι διευθύνσεις του αλλάζουν συνεχώς.



Στιγμιαία επιτάχυνση: Ανάλυση σε ορθογώνιες συνιστώσες α_x, α_y .

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες $\vec{\alpha}_x$ και $\vec{\alpha}_y$ παράλληλες στους άξονες x, y , αντίστοιχα.

Επειδή $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$

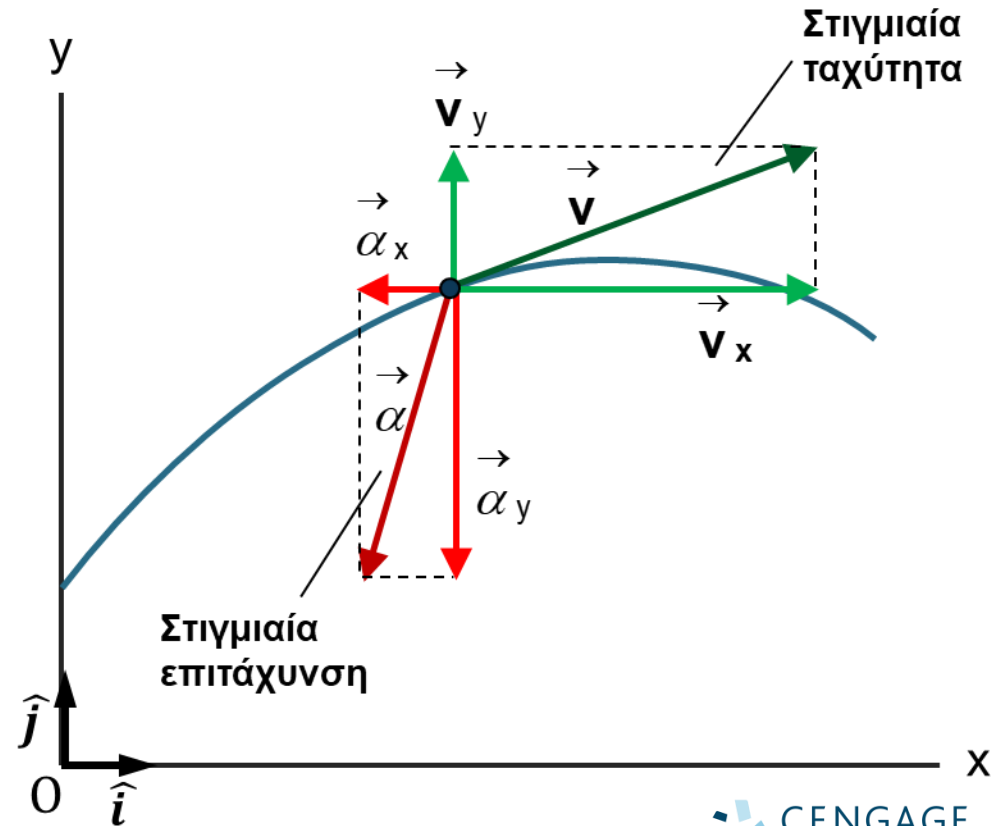
και $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

βρίσκουμε

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j}$$

$$\vec{a} = \alpha_x \hat{i} + \alpha_y \hat{j}$$

όπου $\alpha_x = \frac{dv_x}{dt}$ και $\alpha_y = \frac{dv_y}{dt}$



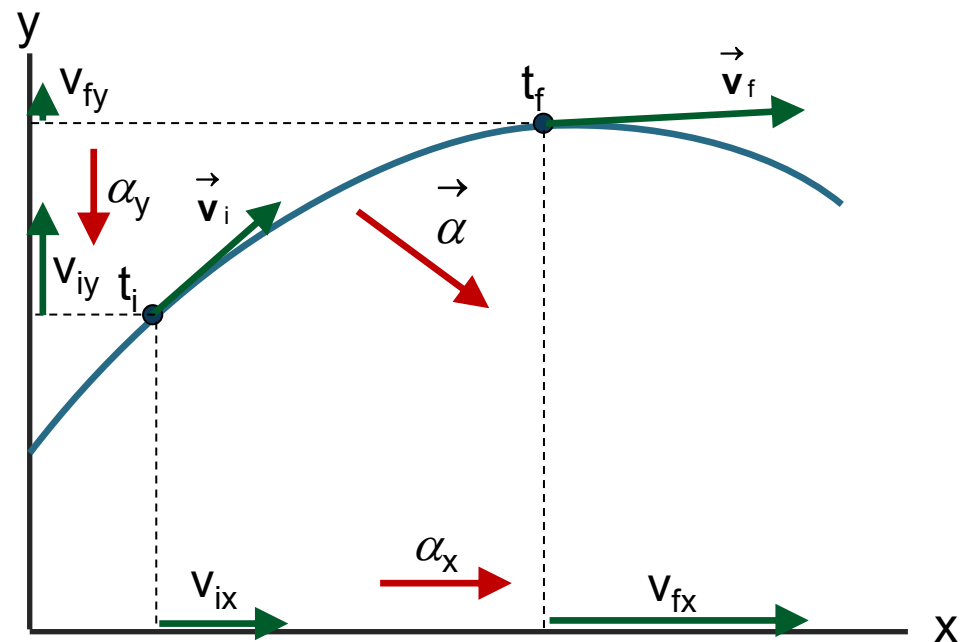
Εξισώσεις της κινηματικής σε δύο διαστάσεις με σταθερή επιτάχυνση

Όταν η επιτάχυνση $\vec{a}$ είναι σταθερή, η σχέση της ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου είναι

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$$

και μπορεί να αναλυθεί σε δύο ανεξάρτητες κινήσεις κατά τους άξονες x και y

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{fx} = v_{ix} + a_x t \\ v_{fy} = v_{iy} + a_y t \end{array} \right.$$



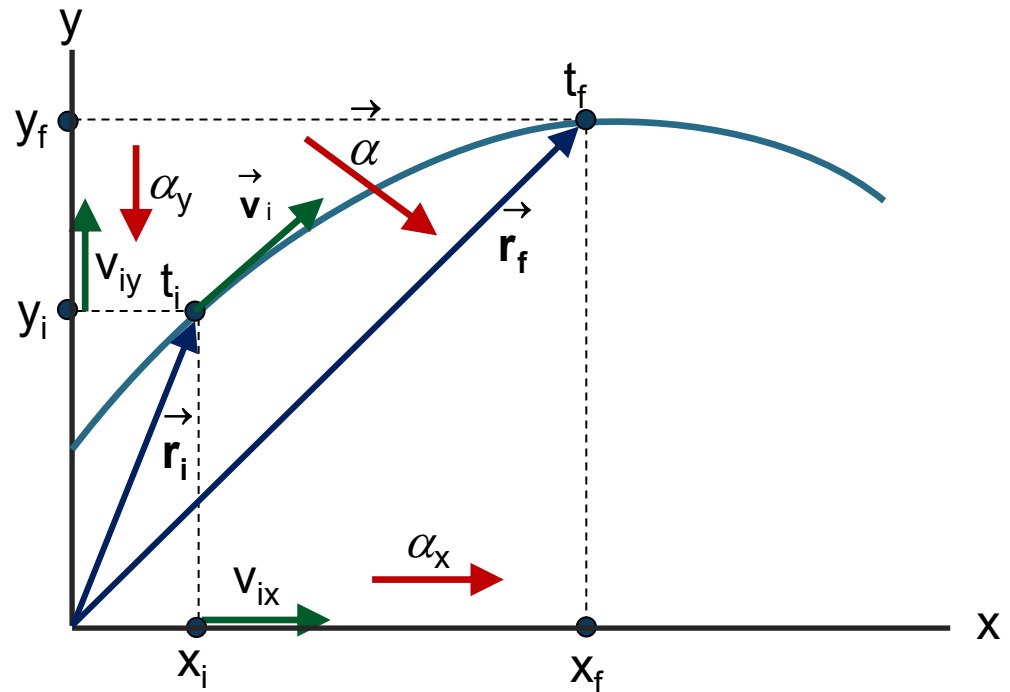
Εξισώσεις της κινηματικής σε δύο διαστάσεις με σταθερή επιτάχυνση (3)

Το διάνυσμα θέσης μπορεί επίσης να εκφραστεί ως συνάρτηση του χρόνου:

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a} (\Delta t)^2$$

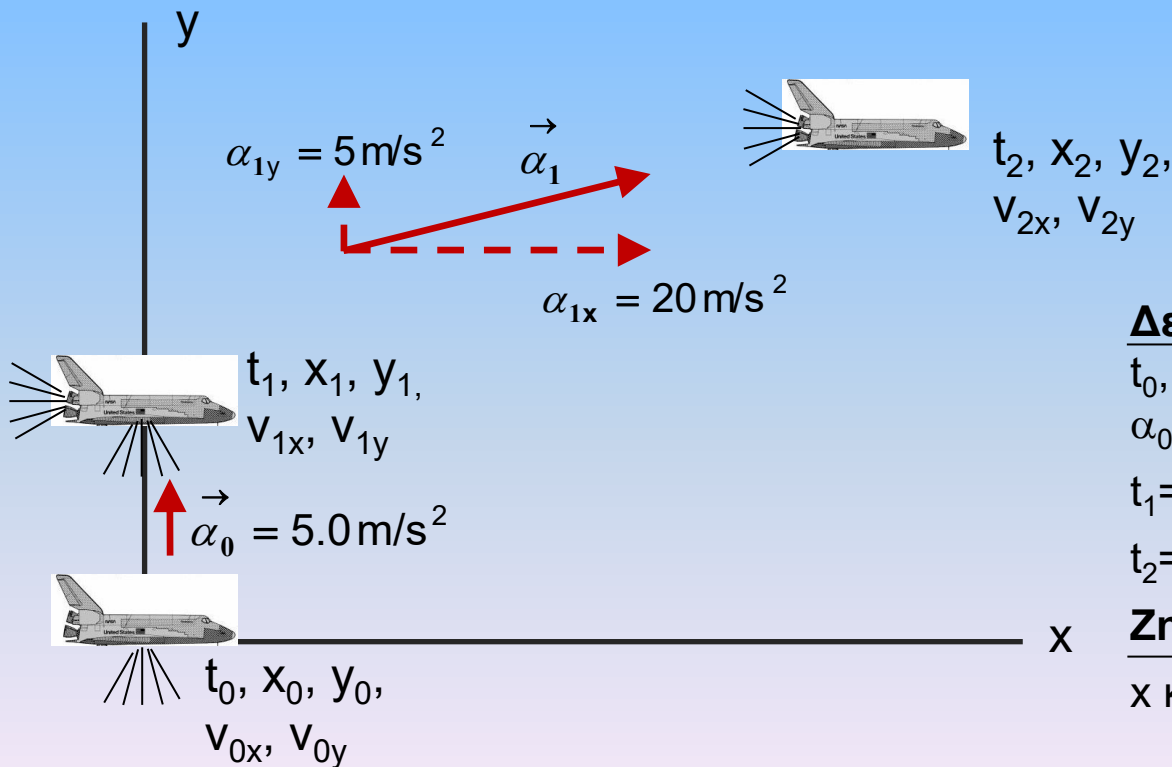
και μπορεί να αναλυθεί σε δύο ανεξάρτητες συνιστώσες κατά τους άξονες x και y

$$\begin{cases} x_f = x_i + v_{ix} \Delta t + \frac{1}{2} a_x (\Delta t)^2 \\ y_f = y_i + v_{iy} \Delta t + \frac{1}{2} a_y (\Delta t)^2 \end{cases}$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.2 Σχεδιασμός της τροχιάς μιας διαστημικής ακάτου

Οι κατακόρυφοι προωθητήρες της διαστημικής ακάτου του διαστημοπλοίου Enterprise, της δίνουν επιτάχυνση 5.0 m/s^2 προς τα πάνω. Οι οριζόντιοι προωθητήρες δίνουν επιτάχυνση 20 m/s^2 προς τα εμπρός. Καθώς ξεκινά την κίνησή του το Enterprise, η άκατος ανάβει μόνο τους κατακόρυφους προωθητήρες. Σε χρόνο $t_1 = 3 \text{ s}$ μετά την εκτόξευση, η άκατος θέτει σε λειτουργία και τους οριζόντιους προωθητήρες. Να σχεδιάσετε την τροχιά της ακάτου για τα πρώτα 6 s της πτήσης της.



Δεδομένα

$$t_0, x_0, y_0, v_{0x}, v_{0y} = 0$$

$$a_{0x} = 0, a_{0y} = 5.0 \text{ m/s}^2$$

$$t_1 = 3.0 \text{ s}, a_{1x} = 20 \text{ m/s}^2, a_{1y} = 5.0 \text{ m/s}^2$$

$$t_2 = 6.0 \text{ s}$$

Ζητούνται

x και y κάθε χρονική στιγμή t

ΛΥΣΗ

Κατά τη διάρκεια της πρώτης φάσης της κίνησης, από $t_0 = 0$ έως $t_1 = 3.0$ s, έχουμε:

στον x-άξονα: $x = x_0 = 0$

στον y-άξονα: $y = y_0 + v_{0y}\Delta t + \frac{1}{2}\alpha_{0y}(\Delta t)^2$

$$y = 0 + 0(t-t_0) + \frac{1}{2}\alpha_{0y}(t-t_0)^2$$

$$y = 2.5t^2 \text{ (m)}$$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 3.0$ s η άκατος έχει φτάσει σε ύψος

$$y_1 = 2.5t^2(\text{m}) = 2.5(3)^2(\text{m}) = 22.5\text{m}$$

και έχει πιάσει ταχύτητα

$$v_{1y} = v_{0y} + \alpha_{0y}\Delta t = 0 + 5.0(3.0 - 0)$$

$$v_{1y} = 15 \text{ m/s}$$

Δεδομένα

$$t_0, x_0, y_0, v_{0x}, v_{0y} = 0$$

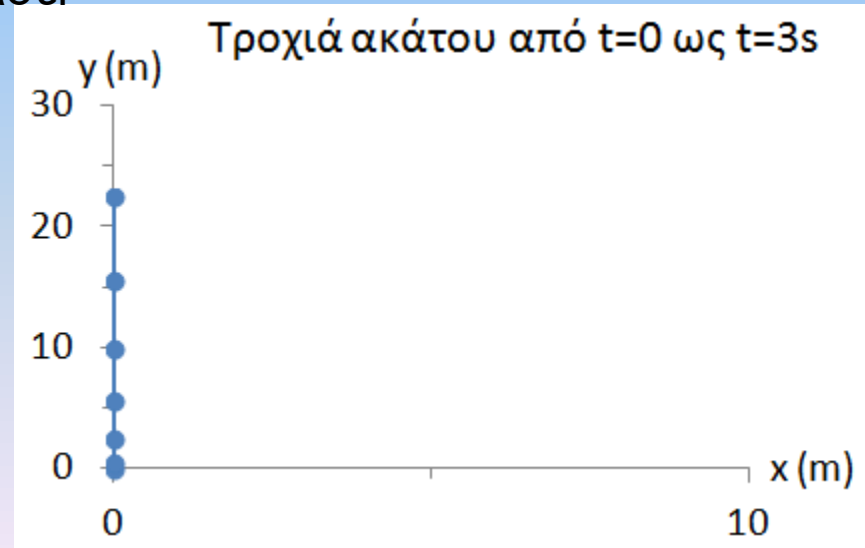
$$\alpha_{0x} = 0, \alpha_{0y} = 5.0 \text{ m/s}^2$$

$$t_1 = 3.0 \text{ s}, \alpha_{1x} = 20 \text{ m/s}^2, \alpha_{1y} = 5.0 \text{ m/s}^2$$

$$t_2 = 6.0 \text{ s}$$

Ζητούνται

x και y κάθε χρονική στιγμή t



ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Κατά τη διάρκεια των επόμενων 3 s, δηλαδή, από $t_1 = 3.0$ s έως $t_2 = 6.0$ s, έχουμε:

στον x-άξονα:

$$x = x_1 + v_{1x}\Delta t + \frac{1}{2}a_{1x}(\Delta t)^2$$

$$x = 0 + 0(t-t_1) + \frac{1}{2}20(t-t_1)^2$$

$$x = 10(t-3.0)^2 \text{ (m)}$$

και στον y-άξονα:

$$y = y_1 + v_{1y}\Delta t + \frac{1}{2}a_{1y}(\Delta t)^2 \Rightarrow$$

$$y = y_1 + v_{1y}(t-t_1) + \frac{1}{2}a_{1y}(t-t_1)^2$$

$$y = 22.5 + 15(t-3.0) + 2.5(t-3.0)^2 \text{ (m)}$$

Δεδομένα

$$t_0, x_0, y_0, v_{0x}, v_{0y} = 0$$

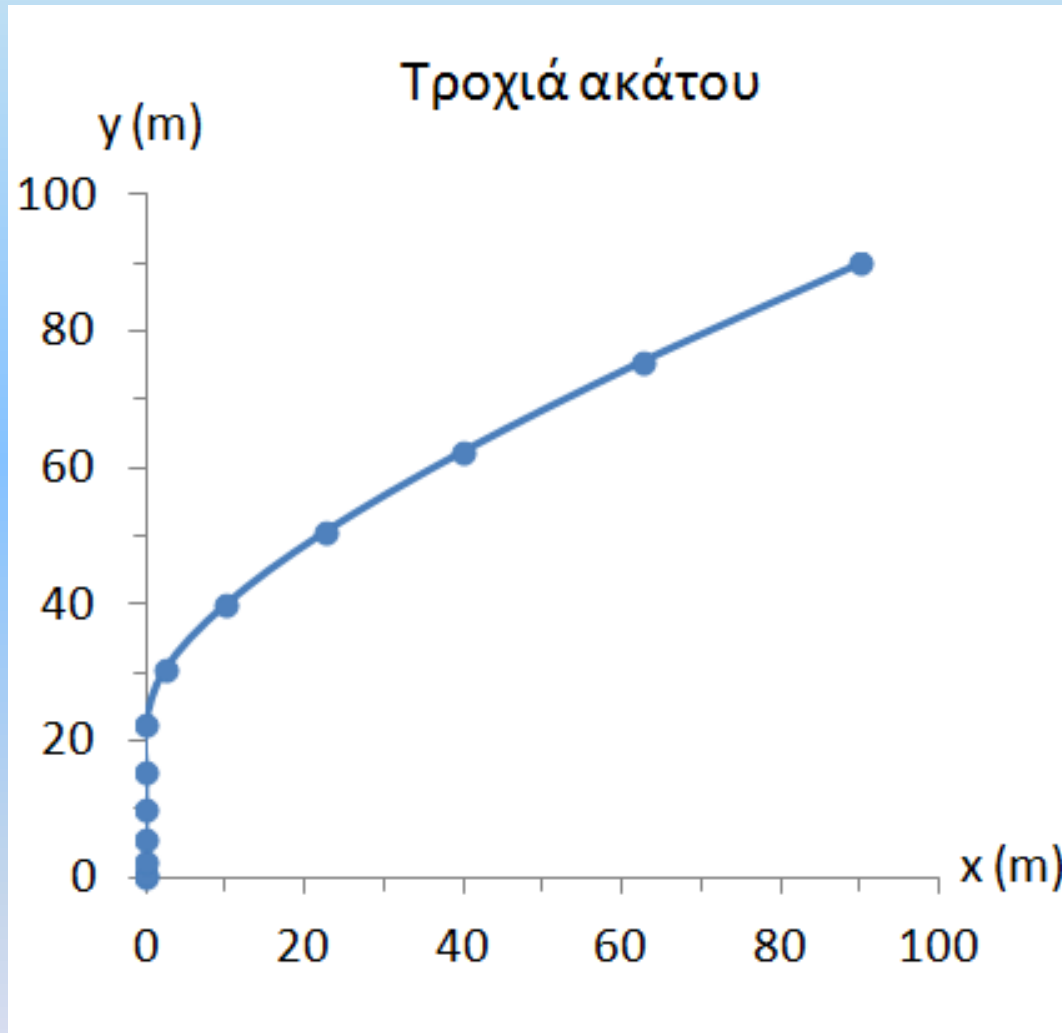
$$a_{0x} = 0, a_{0y} = 5.0 \text{ m/s}^2$$

$$t_1 = 3.0 \text{ s}, \mathbf{y_1 = 22,5 m}, \mathbf{v_{1y} = 15 m/s}$$

$$a_{1x} = 20 \text{ m/s}^2, a_{1y} = 5.0 \text{ m/s}^2$$

$$t_2 = 6.0 \text{ s}$$

ΛΥΣΗ (συνέχεια)



Ερώτηση: ποιά είναι η ταχύτητα της ακάτου τη χρονική στιγμή $t_2 = 6.0$ s ;

Κίνηση βλημάτων

Το είδος της κίνησης σε δύο διαστάσεις, που θα περιγράψουμε στη συνέχεια, ονομάζεται **κίνηση βλημάτων**.

Υποθέσεις στην κίνηση βλημάτων

1. Η κατακόρυφη επιτάχυνση είναι σταθερή ($g = 9.80 \text{ m/s}^2$) κατά τη διάρκεια της κίνησης.
 - Κάτι τέτοιο ισοδυναμεί με το να υποθέσουμε ότι η Γη είναι επίπεδη .
 - Η υπόθεση είναι λογική υπό την προϋπόθεση ότι το ύψος της τροχιάς του βλήματος είναι μικρό σε σύγκριση με την ακτίνα της Γης.
2. Η επίδραση της αντίστασης του αέρα είναι αμελητέα.

Με βάση αυτές τις υποθέσεις, η διαδρομή ενός βλήματος θα είναι παραβολή.

- Η διαδρομή ονομάζεται **τροχιά**.

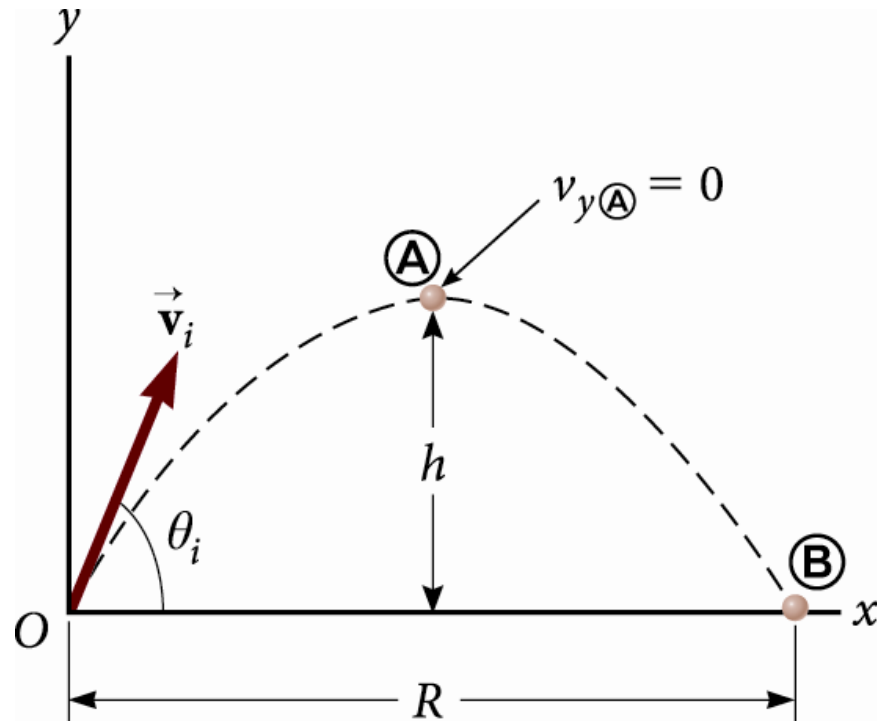
Βεληνεκές και μέγιστο ύψος βλήματος

Όταν αναλύουμε την κίνηση βλημάτων, δύο χαρακτηριστικά παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον:

Το **βεληνεκές (range) R** που είναι η οριζόντια απόσταση την οποία καλύπτει η τροχιά του βλήματος.

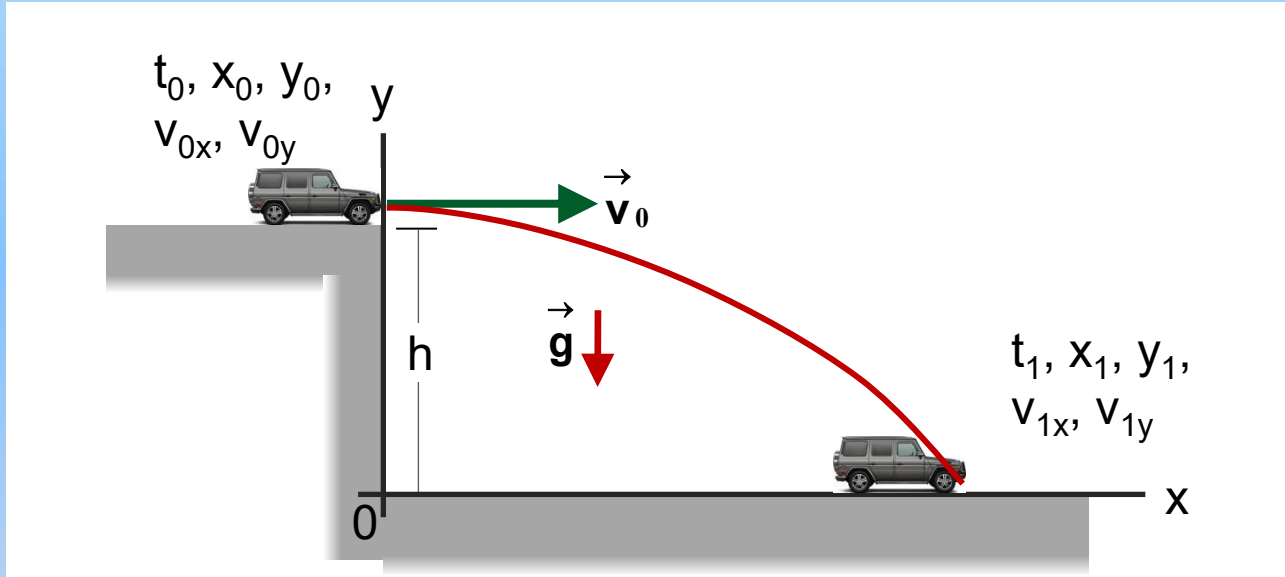
Το **μέγιστο ύψος (height) h** στο οποίο φτάνει το βλήμα

- στο ψηλότερο σημείο, η κατακόρυφη ταχύτητα v_y είναι μηδενική).



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.4 Μην το δοκιμάσετε αυτό

Ένας κασκαντέρ ρίχνει ένα αυτοκίνητο από ένα γκρεμό ύψους $h = 10 \text{ m}$ με ταχύτητα $v = 20 \text{ m/s}$ (72 km/h). Πόσο μακριά από τη βάση του γκρεμού προσγειώνεται το αυτοκίνητο;



ΛΥΣΗ

Δεδομένα

$$x_0 = 0, \quad y_0 = h = 10 \text{ m}$$

$$v_{0x} = v_0 = 20 \text{ m/s}, \quad v_{0y} = 0$$

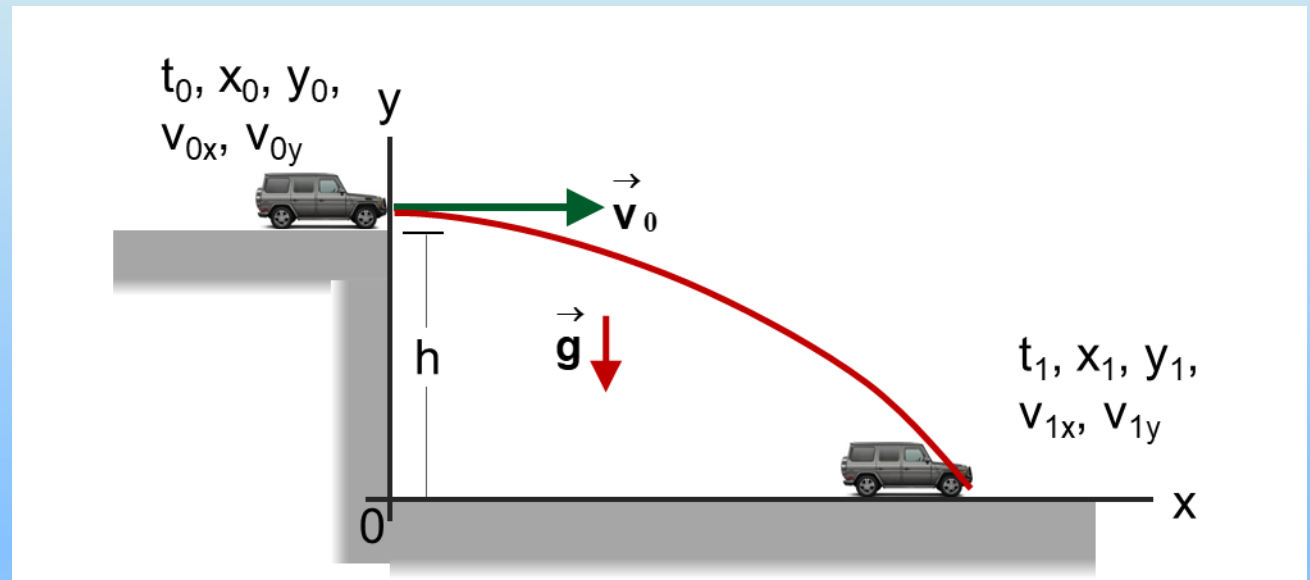
$$\alpha_x = 0, \quad \alpha_y = -g$$

$$\text{Τελικό ύψος } y_1 = 0 \text{ m}$$

Ζητούνται

$$\text{Τελική οριζόντια απόσταση } x_1$$

ΛΥΣΗ (συνέχεια)



Στον άξονα x έχουμε: $x_1 = x_0 + v_{0x}(\Delta t) = x_0 + v_{0x}(t_1 - t_0) = 0 + v_0(t_1 - 0) \Rightarrow \mathbf{x_1 = v_0 t_1}$

Στον άξονα y : $y_1 = y_0 + v_{0y}(\Delta t) + \frac{1}{2} \alpha_y (\Delta t)^2$

$$\Rightarrow 0 = h + 0(t_1 - t_0) - \frac{1}{2} g(t_1 - t_0)^2 \Rightarrow 0 = h - \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$\Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(10\text{m})}{9.80\text{m/s}^2}} = 1.43\text{s}$$

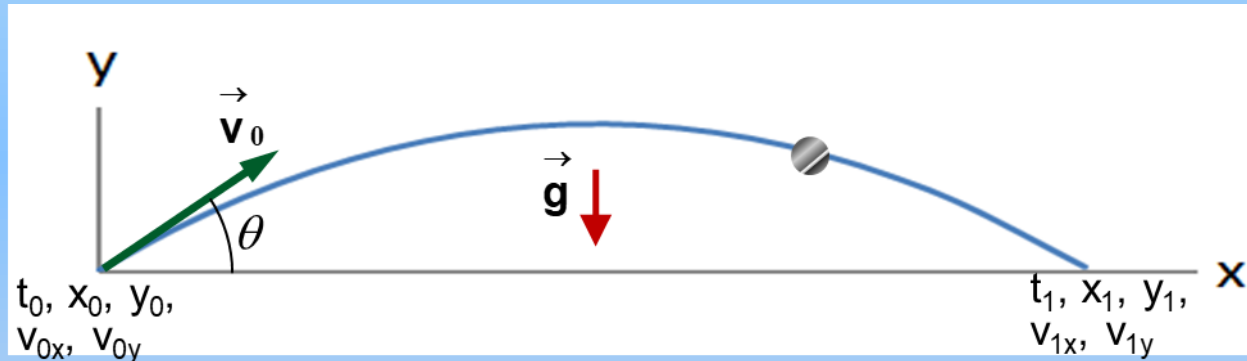
Και αντικαθιστώντας στη σχέση $x_1 = v_0 t_1$ βρίσκουμε:

$$x_1 = (20 \text{ m/s})(1.43 \text{ s}) = \mathbf{28.6 \text{ m}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.5 Το διάστημα που διανύει μια μπαλιά

Μια μπάλα του ποδοσφαίρου ρίχνεται υπό γωνία θ , κάνει την παραβολική τροχιά της και πέφτει στο έδαφος.

(α) Αν η μπάλα ρίχνεται υπό γωνία $\theta = 30^\circ$, με ποια ταχύτητα v_0 πρέπει να φύγει από το πόδι του ποδοσφαιριστή για να φτάσει σε απόσταση 100m;



ΛΥΣΗ

Δεδομένα

$$t_0 = x_0 = y_0 = 0$$

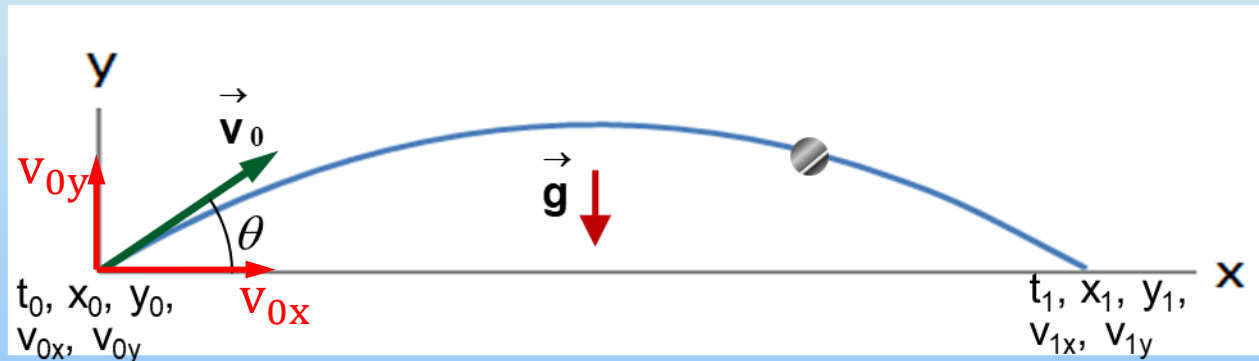
$$\theta = 30^\circ$$

$$x_1 = 100 \text{ m}, y_1 = 0 \text{ m}$$

Ζητούνται

$$v_0$$

ΛΥΣΗ (συνέχεια)



Οι x και y συνιστώσες της αρχικής ταχύτητας $\vec{v}_0$ είναι: $v_{0x} = v_0 \cos\theta$ και $v_{0y} = v_0 \sin\theta$

Στον άξονα x έχουμε: $x_1 = x_0 + v_{0x}(\Delta t) = x_0 + v_{0x}(t_1 - t_0) \Rightarrow \mathbf{x_1 = (v_0 \cos\theta)t_1}$

Στον άξονα y : $y_1 = y_0 + v_{0y}(\Delta t) + \frac{1}{2}a_y(\Delta t)^2 \Rightarrow y_1 = y_0 + v_{0y}(t_1 - t_0) - \frac{1}{2}g(t_1 - t_0)^2$

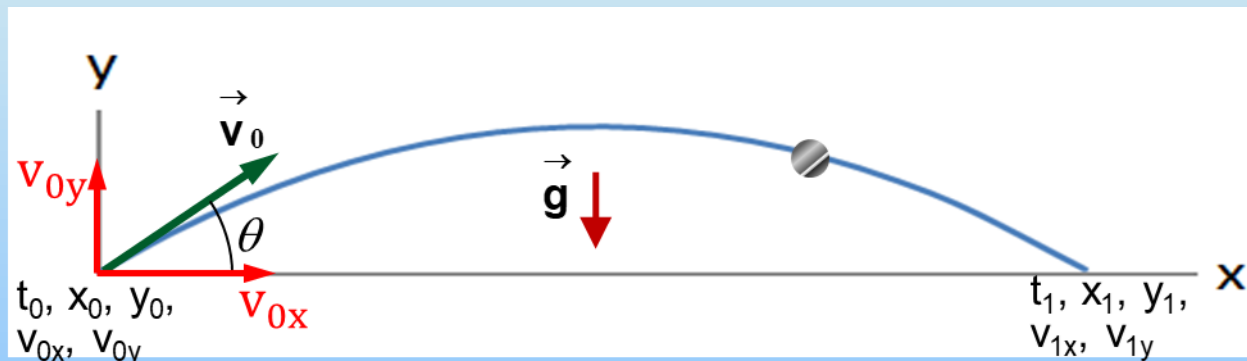
$$0 = 0 + v_0 \sin\theta(t_1 - 0) - \frac{1}{2}g(t_1 - 0)^2$$

$$0 = (v_0 \sin\theta)t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$

$$\frac{1}{2}gt_1^2 = (v_0 \sin\theta)t_1$$

$$t_1 = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

ΛΥΣΗ (συνέχεια)



Ο χρόνος $t_1 = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$ είναι ο χρόνος “πτήσης” της μπάλας

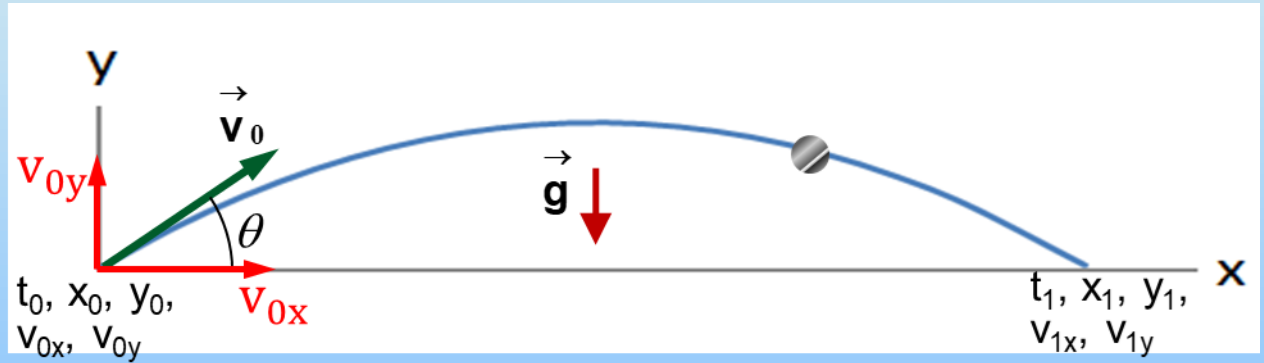
Αντικαθιστώντας το χρόνο t_1 στη σχέση $x_1 = (v_0 \cos\theta)t_1$, βρίσκουμε

$$x_1 = (v_0 \cos\theta) \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

Μπορούμε να απλοποιήσουμε το αποτέλεσμα αν χρησιμοποιήσουμε την τριγωνομετρική σχέση $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ (βλ. Παράρτημα Α, σελ 618)

$$x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

ΛΥΣΗ (συνέχεια)



Λύνοντας τη σχέση $x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$ ως προς v_0 , έχουμε:

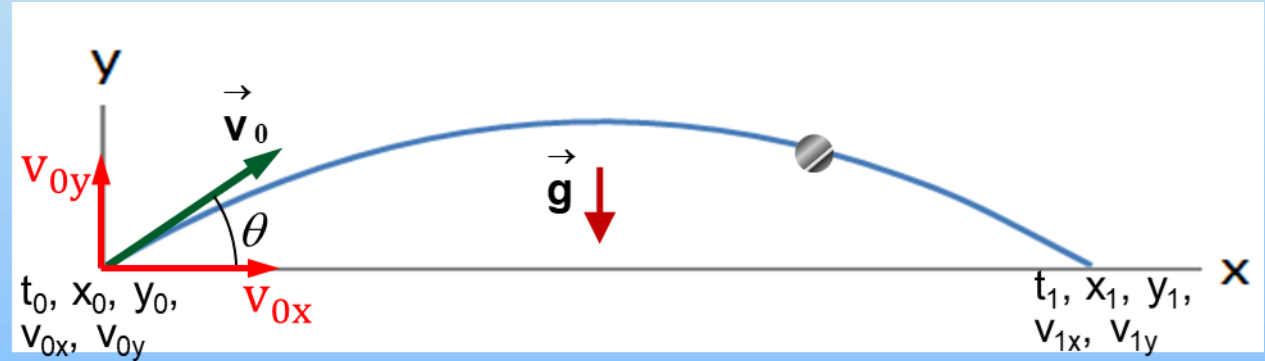
$$g x_1 = v_0^2 \sin 2\theta$$

$$\frac{g x_1}{\sin 2\theta} = v_0^2$$

$$\sqrt{\frac{g x_1}{\sin 2\theta}} = v_0 \quad \text{και αντικαθιστώντας τις τιμές, βρίσκουμε:}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{(9.80 \text{ m/s}^2)(100 \text{ m})}{\sin 60^\circ}} = 33.6 \text{ m}$$

(β) Με ποια γωνία ($\theta_{\max}$) πρέπει να ριχτεί η μπάλα ώστε να φτάσει στη μέγιστη απόσταση ($x_{1,\max}$);



ΛΥΣΗ

Από τη σχέση $x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$ παρατηρούμε ότι το x_1 είναι μέγιστο όταν είναι μέγιστο το $\sin 2\theta$, δηλαδή, όταν $\sin 2\theta = 1$

Όμως, $\sin 2\theta = 1$, όταν $2\theta = 90^\circ$, δηλαδή, όταν $\theta = 45^\circ$

Επομένως,

$$x_{1,\max} = \frac{v_0^2 \sin 90^\circ}{g} = \frac{(33.6 \text{ m/s})^2 \cdot 1}{9.80 \text{ m/s}^2} = 115 \text{ m}$$

Ομαλή κυκλική κίνηση

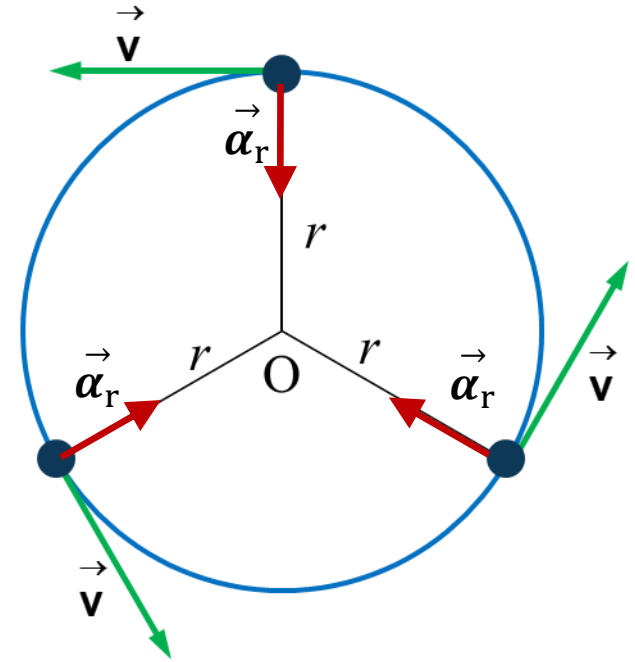
Ένα σώμα το οποίο κινείται σε κυκλική τροχιά με ταχύτητα σταθερού μέτρου, εκτελεί **ομαλή κυκλική κίνηση**.

Η ταχύτητα $\vec{v}$ είναι (όπως πάντα) εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά.

Το διάνυσμα της ταχύτητας σε όλα τα σημεία της τροχιάς έχει το ίδιο μήκος (σταθερό μέτρο).

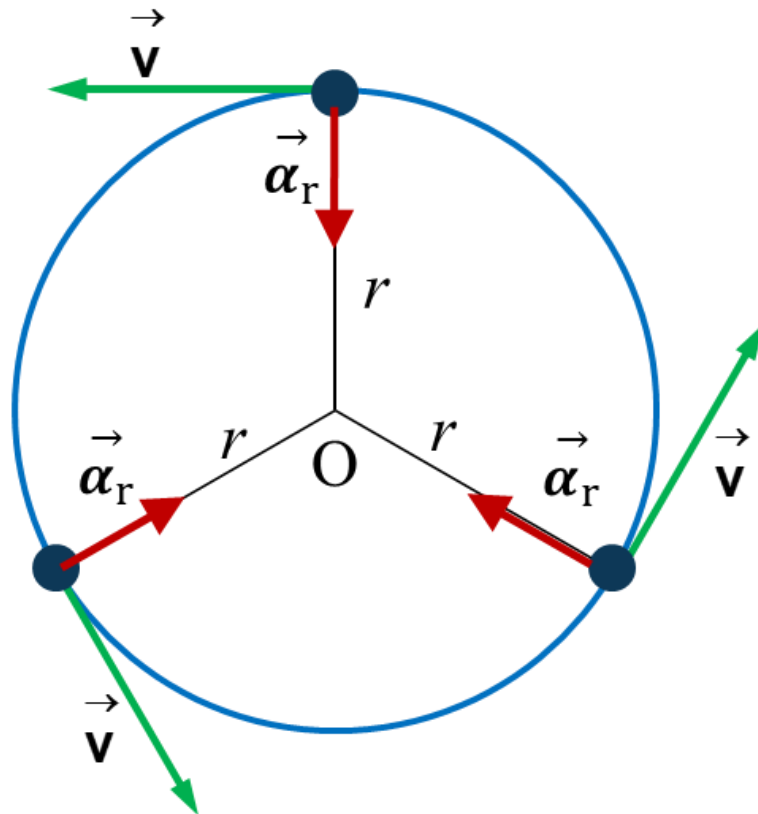
Εφόσον, όμως, μεταβάλλεται η *κατεύθυνση* της κίνησης (της ταχύτητας), υπάρχει επιτάχυνση.

Η επιτάχυνση αυτή, $\vec{a}_r$, είναι κάθετη στην ταχύτητα και ονομάζεται **κεντρομόλος επιτάχυνση**.



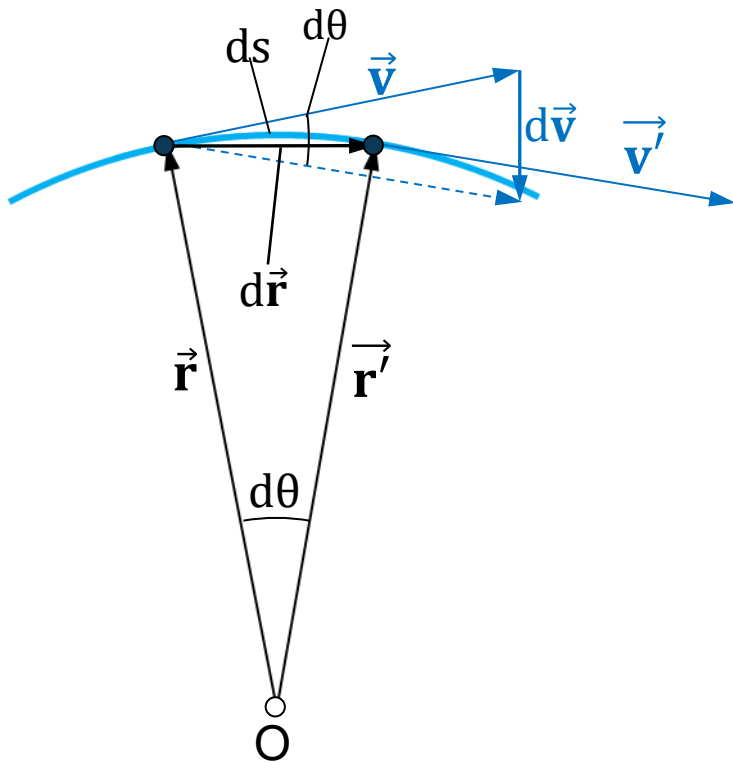
Κεντρομόλος επιτάχυνση

Το μέτρο του διανύσματος της κεντρομόλου επιτάχυνσης δίνεται από τη σχέση



$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

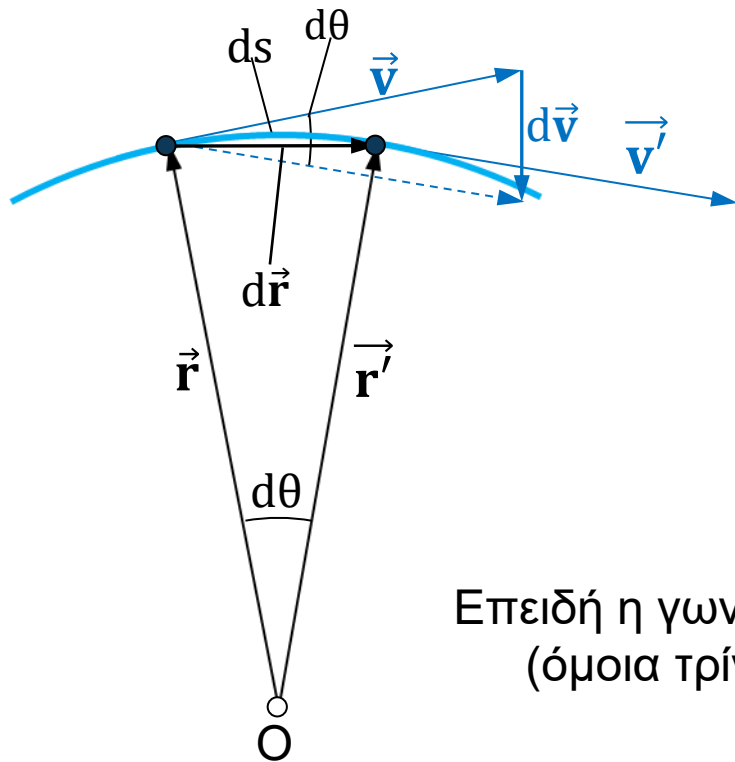
Κεντρομόλος επιτάχυνση (συνέχεια)



- Έστω $\vec{r}$ η θέση και $\vec{v}$ η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t
- και $\vec{r}'$ η θέση και $\vec{v}'$ η ταχύτητά του μετά από dt (τη χρονική στιγμή $t + dt$)
- Η μετατόπιση του σώματος είναι $d\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$
- ενώ το διάστημα που διάνυσε είναι το απειροστό τόξο ds , όπου $ds = |d\vec{r}|$
- και $ds = r d\theta$, $d\theta$ η απειροστή γωνία που διαγράφει το κινητό στο χρόνο dt
- Η μεταβολή της ταχύτητάς του είναι

$$d\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$$

Κεντρομόλος επιτάχυνση (συνέχεια)



Η επιτάχυνση είναι

$$\vec{a}_r = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

και η κατεύθυνσή της είναι ακτινική προς το κέντρο O της τροχιάς (κεντρομόλος)

ενώ το μέτρο της είναι

$$a_r = \frac{dv}{dt}$$

Επειδή η γωνία μεταξύ $\vec{v}'$, $\vec{v}$ είναι $d\theta$ (γιατί;), είναι $\frac{dv}{v} = \frac{dr}{r}$
(όμοια τρίγωνα)

$$\text{Οπότε, } a_r = \frac{dv}{dt} = \frac{v \frac{dr}{r}}{\frac{dr}{dt}} = \frac{v}{r} \frac{dr}{dt} = \frac{v}{r} v = \frac{v^2}{r}$$

Περίοδος

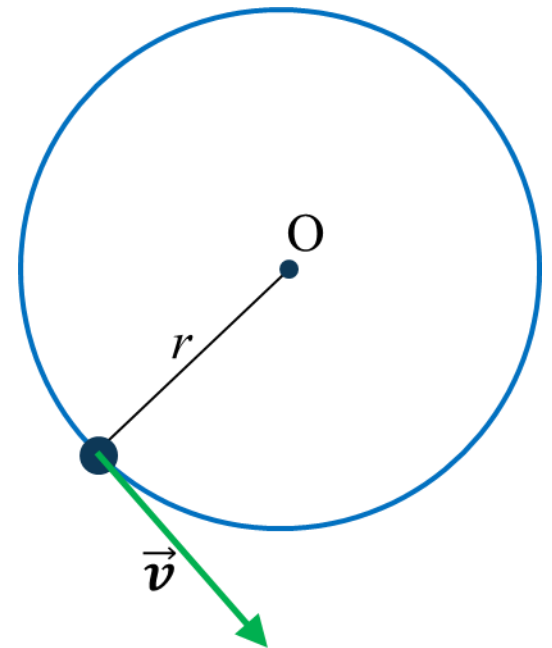
Η **περίοδος** T είναι το χρονικό διάστημα που απαιτείται για μία πλήρη περιστροφή.

- Η περίοδος μετρείται σε s.

Στην ομαλή κυκλική κίνηση, σε μια περίοδο T το σωματίδιο διανύει διάστημα μιας περιφέρειας ακτίνας r , δηλαδή $2\pi r$.

Επομένως, το μέτρο v της ταχύτητάς του είναι

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v}$$



Συχνότητα

Η **συχνότητα** f είναι ο αριθμός των περιστροφών ανά δευτερόλεπτο

- Η συχνότητα είναι το αντίστροφο της περιόδου

$$f = \frac{1}{T}$$

- Η συχνότητα μετριέται σε μετριέται σε Hertz: $1 \text{ Hz} = 1/\text{s} = \text{s}^{-1}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.1 Περιστρεφόμενος δίσκος

Ένας περιστρεφόμενος δίσκος ακτίνας 4.0 m εκτελεί 2400 στροφές το λεπτό (revolutions per minute ή rpm). Ποιά είναι η ταχύτητα ενός σημείου στην περιφέρειά του;

ΛΥΣΗ

Έχουμε για τη σχέση ταχύτητας - περιόδου $v = \frac{2\pi r}{T}$

και για τη σχέση περιόδου – συχνότητας $T = \frac{1}{f}$

Επομένως, $v = \frac{2\pi r}{\frac{1}{f}} = 2\pi r f$

Μετατρέπουμε τη συχνότητα από 2400 rpm σε rps

$$f = 2400 \text{ στροφές/min} = (2400 \text{ στροφές}) / (60 \text{ s}) = 40 \text{ rps}$$

και αντικαθιστώντας, βρίσκουμε:

$$v = 2 (3.14)(4.0\text{m})(40\text{s}^{-1}) = 5.0 \text{ m/s}$$

Ενότητα 7.2 – Ασκήση 3

Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς της γης γύρω από τον ήλιο είναι 1.5×10^{11} km. Να βρείτε (α) το μέτρο της ταχύτητας με την οποία η γη περιστρέφεται γύρω από τον ήλιο και (β) το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσής της.

ΛΥΣΗ

(α) Η ταχύτητα είναι $v = \frac{2\pi r}{T}$

Η περίοδος περιστροφής της γης γύρω από τον ήλιο είναι 365 μέρες ή

$$(365 \text{ μέρες}) \cdot (24 \text{ h/μέρα}) = 8760 \text{ h}$$

$$\begin{aligned} \text{Επομένως, } v &= \frac{2\pi r}{T} = \frac{2 \cdot 3.14 \cdot (1.5 \times 10^{11} \text{ km})}{8760 \text{ h}} \\ &= 108000000 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad \text{ή} \quad 1.08 \times 10^8 \frac{\text{km}}{\text{h}} \end{aligned}$$

(β) Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι

$$\alpha = \frac{v^2}{r} = \frac{(1.08 \times 10^8 \text{ km/h})^2}{1.5 \times 10^{11} \text{ km}} = 77200 \frac{\text{km}}{\text{h}^2}$$

Ενότητα 7.2 – Άσκηση 5

Για να αντέξουν τις «δυνάμεις g», δηλαδή σε επιταχύνσεις μέχρι και 10g, που οφείλονται στην έξοδο του αεροπλάνου από μια απότομη βουτιά, οι πιλότοι των μαχητικών αεροσκαφών εκπαιδεύονται σε έναν «ανθρώπινο φυγοκεντρητή». Τα 10g είναι επιτάχυνση $10 \cdot (9.80 \text{ m/s}^2) = 98 \text{ m/s}^2$. Αν το μήκος του βραχίοντα του φυγοκεντρητή είναι 12 m, με τι ταχύτητα κινείται ο εκπαιδευόμενος πιλότος όταν υφίσταται τα 10g;

ΛΥΣΗ

$$\alpha = \frac{v^2}{r} \Rightarrow \alpha r = v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\alpha r}$$

$$v = \sqrt{(98 \text{ m/s}^2)(12 \text{ m})} = 34.3 \text{ m/s} \quad \text{ή} \quad 123 \text{ km/h}$$

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ