

Κεφάλαιο 9

Ταλαντώσεις

Ταλαντώσεις και μηχανικά κύματα

Περιοδική κίνηση (periodic motion) είναι η κίνηση ενός σώματος, το οποίο κανονικά επιστρέφει σε μια δεδομένη θέση μετά από ένα σταθερό χρονικό διάστημα.

- Αν χτυπήσουμε έναν πολυέλαιο, αυτός ταλαντεύεται μπρος-πίσω επιστρέφοντας στην ίδια θέση με κανονικό ρυθμό.
- Η Γη επιστρέφει στην ίδια θέση στην τροχιά της γύρω από τον Ήλιο κάθε χρόνο.

Οι επαναλαμβανόμενες κινήσεις ενός τέτοιου σώματος ονομάζονται **ταλαντώσεις** (oscillations).

Μια ειδική περίπτωση περιοδικής κίνησης εμφανίζεται στα μηχανικά συστήματα όταν η δύναμη που ασκείται σε ένα αντικείμενο είναι ανάλογη της απόστασής του από κάποιο σημείο ισορροπίας.

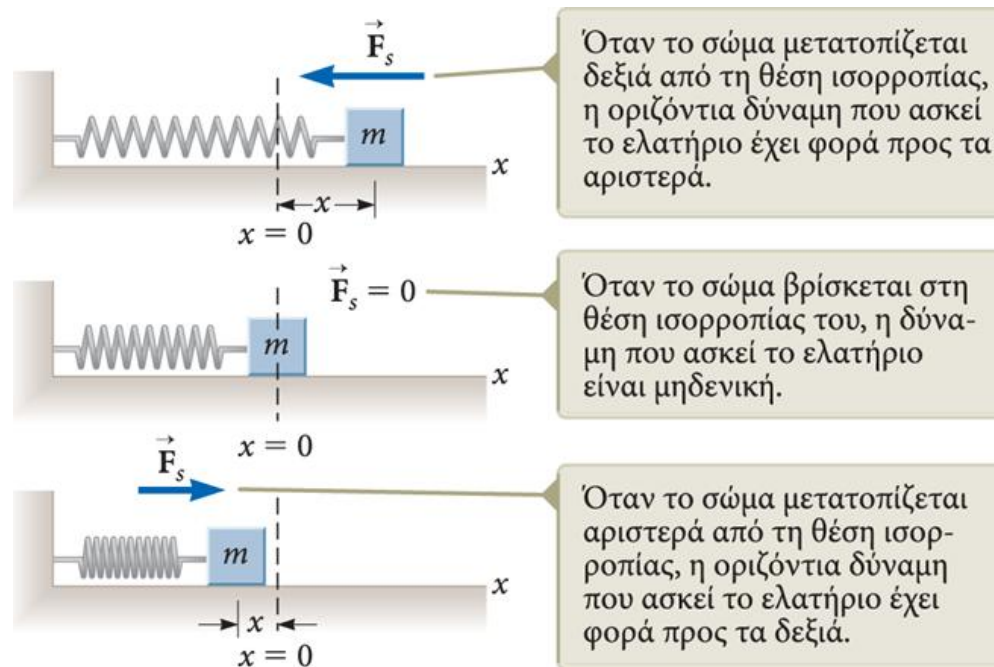
Εάν αυτή η δύναμη κατευθύνεται πάντα προς τη θέση ισορροπίας, η κίνηση ονομάζεται **απλή αρμονική κίνηση** (simple harmonic motion) και είναι το αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου.

Κίνηση ενός αντικειμένου προσαρτημένου σε ένα ελατήριο

Ένας κύβος μάζας m είναι συνδεδεμένος στο άκρο ενός ελατηρίου και μπορεί και κινείται ελεύθερα επάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές.

Όταν το ελατήριο δεν είναι ούτε εκτεταμένο ούτε συμπιεσμένο, ο κύβος βρίσκεται στη **θέση ισορροπίας** (equilibrium position) στην οποία αντιστοιχούμε την τιμή $x = 0$

Αν ένα τέτοιο σύστημα απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας του, θα αρχίσει να ταλαντώνεται.

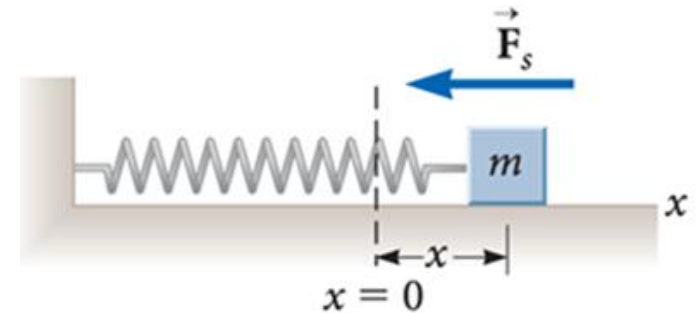


Ο νόμος του Hooke

Όταν ο κύβος μετατοπίζεται σε μια θέση x , το ελατήριο ασκεί στο μπλοκ μια δύναμη $\vec{F}_s$ που είναι ανάλογη της θέσης του x και δίνεται από το νόμο του Hooke

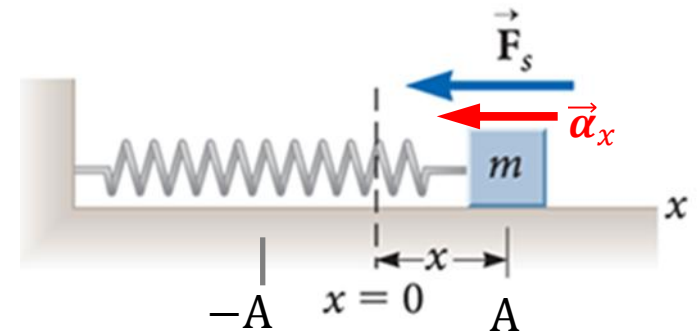
$$F_s = -kx$$

- F_s είναι η **δύναμη επαναφοράς** (restoring force).
 - Έχει κατεύθυνση πάντα προς τη θέση ισορροπίας
 - Άρα, είναι πάντα αντίθετη με τη μετατόπιση του σώματος από τη θέση ισορροπίας.
- k είναι η σταθερά ελατηρίου.
- x είναι η μετατόπιση.



Επιτάχυνση

Μόλις ο κύβος μετατοπιστεί κατά x από τη θέση ισορροπίας του ($x = 0$) στη θέση A και αφεθεί ελεύθερος, θα κινηθεί με επιτάχυνση $\vec{\alpha}_x$



$$\left. \begin{array}{l} \text{Από το 2}^\circ \text{ νόμο του Νεύτωνα } F_s = m\alpha_x \\ \text{Από νόμο Hook } F_s = -kx \end{array} \right\} \Rightarrow -kx = m\alpha_x \Rightarrow \alpha_x = -\frac{k}{m}x$$

- Αν ο κύβος μετατοπιστεί στη θέση $x = A$, η αρχική του επιτάχυνση είναι $\alpha_x = -\frac{k}{m}A$
- Τη στιγμή που ο κύβος διέρχεται από τη θέση ισορροπίας, $\alpha_x = 0$.
- Ο κύβος θα συνεχίσει να κινείται μέχρι τη θέση $x = -A$ όπου η επιτάχυνσή του είναι $\alpha_x = +\frac{k}{m}A$

Κίνηση του σώματος

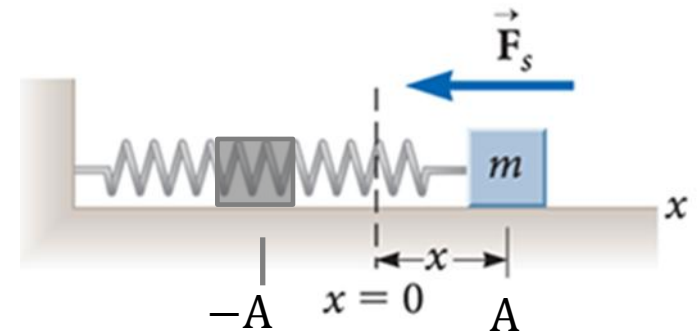
Ο κύβος συνεχίζει να ταλαντώνεται μεταξύ των σημείων $-A$ και $+A$.

- Στα σημεία αυτά αλλάζει η κατεύθυνση της κίνησης.

Η δύναμη είναι συντηρητική.

Αν δεν υπάρχουν τριβές, η κίνηση δεν θα σταματήσει ποτέ.

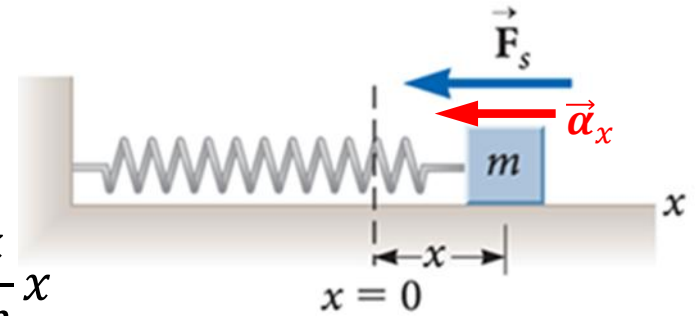
- Στα πραγματικά συστήματα υπάρχουν τριβές, οπότε αυτά δεν ταλαντώνονται επ' άπειρον.



Μοντέλο ανάλυσης: Σωματίδιο που εκτελεί απλή αρμονική κίνηση

Θεωρούμε ότι η ταλάντωση γίνεται στον άξονα x .

$$\begin{aligned} \text{Η επιτάχυνση είναι } a_x &= -\frac{k}{m}x \\ \text{όμως } a_x &= \frac{d^2x}{dt^2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$



$$\text{Θέτοντας } \frac{k}{m} = \omega^2$$

παίρνουμε τη (διαφορική) εξίσωση για τη συνάρτηση $x(t)$ θέσης με το χρόνο

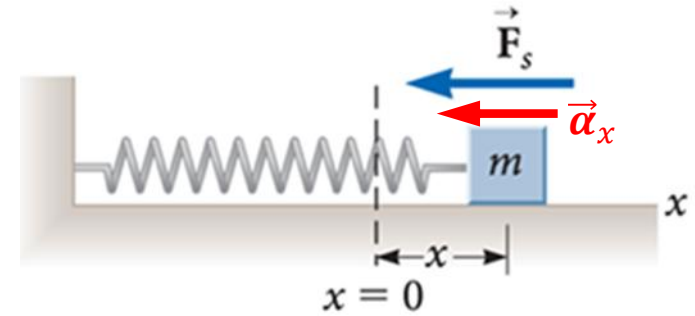
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Για τη μαθηματική λύση της εξίσωσης, πρέπει να βρούμε μια συνάρτηση $x(t)$ που ικανοποιεί αυτή τη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

Μοντέλο ανάλυσης: Σωματίδιο που εκτελεί απλή αρμονική κίνηση

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Αναζητούμε μια συνάρτηση $x(t)$ της οποίας η δεύτερη παράγωγος d^2x/dt^2 είναι ίδια με την αρχική συνάρτηση x με αρνητικό πρόσημο και πολλαπλασιασμένη επί ω^2



Τέτοια συνάρτηση είναι η $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ (2)

όπου, A , ω και ϕ είναι σταθερές

$$\text{Είναι } \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [A \cos(\omega t + \phi)] = A \frac{d}{dt} \cos(\omega t + \phi) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [-\omega A \sin(\omega t + \phi)] = -\omega A \frac{d}{dt} \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \quad (3)$$

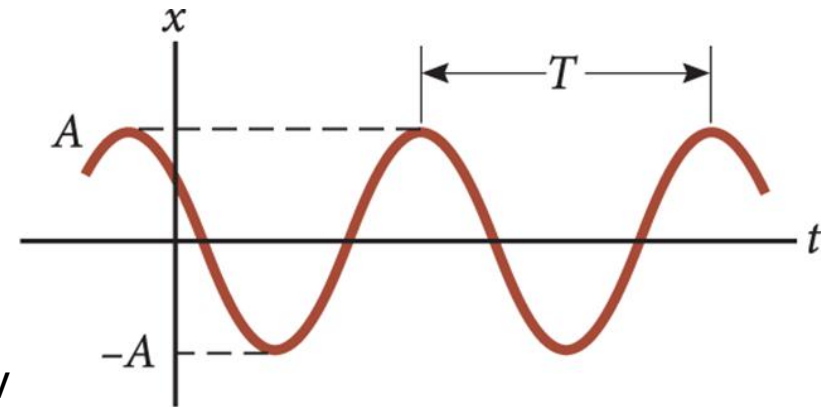
Συγκρίνοντας (2) και (3) βλέπουμε ότι $\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$

Απλή αρμονική κίνηση – Γραφική αναπαράσταση της $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

Η φυσική σημασία των παραμέτρων A, ω, ϕ φαίνεται χρησιμοποιώντας την καμπύλη του συνημιτόνου

A είναι το **πλάτος** της κίνησης.

- Είναι η μέγιστη τιμή της θέσης του σωματιδίου είτε προς τη θετική είτε προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x .



Η σταθερά ω ονομάζεται **κυκλική συχνότητα** ή **γωνιακή συχνότητα**.

- Μετριέται σε ακτίνια ανά δευτερόλεπτο (rad/s)
- $\omega = \sqrt{k/m}$

Η σταθερή γωνία ϕ ονομάζεται **σταθερά φάσης** ή **αρχική φάση** και είναι η τιμή της **φάσης**, δηλαδή, της γωνίας $\omega t + \phi$ για $t = 0$

Περίοδος

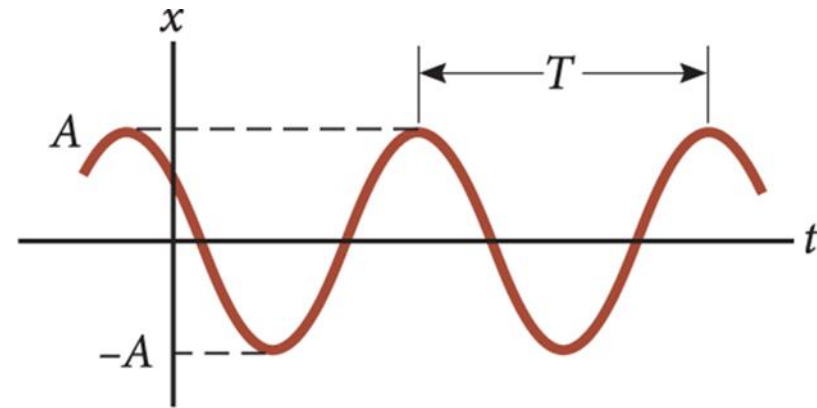
Η **περίοδος** T της κίνησης είναι το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το σωματίδιο για να πραγματοποιήσει έναν πλήρη κύκλο κίνησης.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- Οι τιμές των x και v για το σωματίδιο τη χρονική στιγμή t είναι ίσες με τις τιμές των x και v τη χρονική στιγμή $t + T$.

$$x(t) = x(t + T)$$

$$v(t) = v(t + T)$$



Συχνότητα

Το αντίστροφο της περιόδου T είναι η **συχνότητα** (frequency), f .

Η συχνότητα είναι ο αριθμός των ταλαντώσεων που εκτελεί το σωματίδιο ανά μονάδα χρόνου.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Μετριέται σε κύκλους ανά δευτερόλεπτο ή **hertz** (Hz).

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της κυκλικής συχνότητας $\omega = \sqrt{k/m}$ παίρνουμε

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{και} \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Οι εξισώσεις της απλής αρμονικής κίνησης

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

- Μέγιστη τιμή (ή πλάτος) της ταχύτητας $v_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} A$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

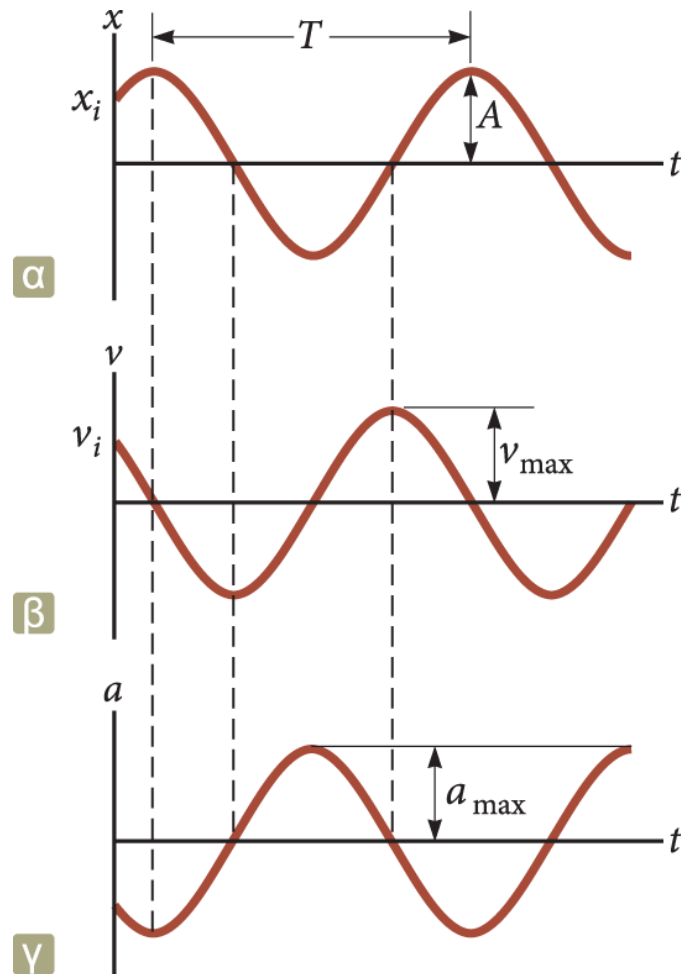
- Μέγιστη τιμή (ή πλάτος) της επιτάχυνσης $a_{max} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A$

Γραφήματα

Δεξιά φαίνονται τα γραφήματα:

- (α) θέσης-χρόνου
- (β) ταχύτητας-χρόνου
- (γ) επιτάχυνσης-χρόνου

Η ταχύτητα και η επιτάχυνση είναι εκτός φάσης από τη θέση κατά 90° και 180° , αντίστοιχα.



Απλή αρμονική κίνηση – Παράδειγμα 1

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

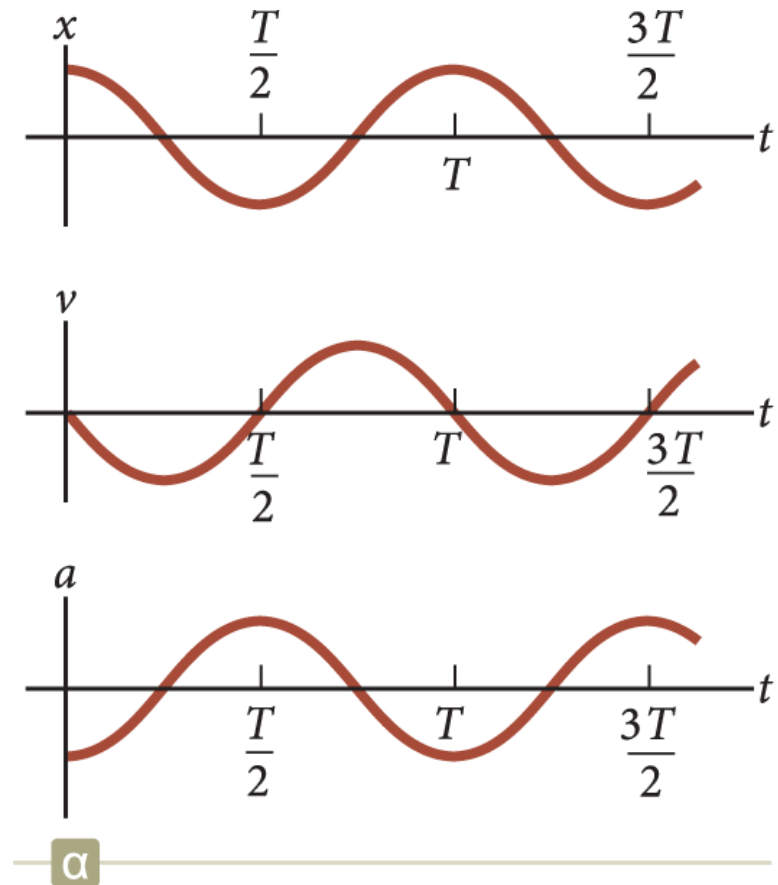
Οι αρχικές συνθήκες τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι

- $x(0) = A$
- $v(0) = 0$ pothole

Αυτό σημαίνει ότι $\phi = 0$.

Οι ακραίες τιμές της επιτάχυνσης είναι $\pm \omega^2 A$ και προκύπτουν στις θέσεις $\pm A$.

Οι ακραίες τιμές της ταχύτητας είναι $\pm \omega A$ και προκύπτουν στη θέση $x = 0$.



Απλή αρμονική κίνηση – Παράδειγμα 2

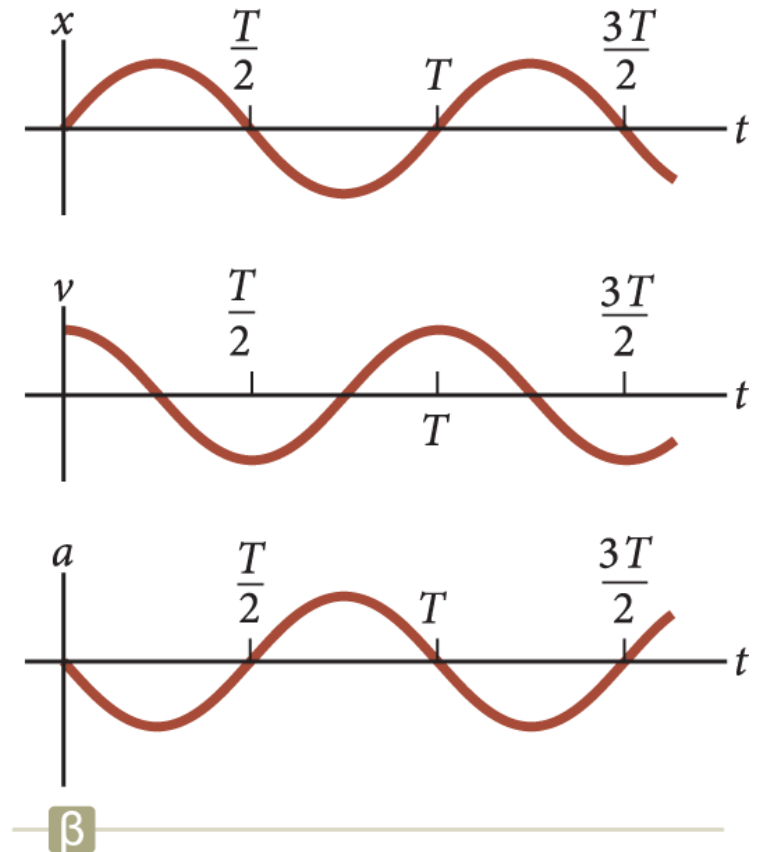
$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Οι αρχικές συνθήκες τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι

- $x(0) = 0$
- $v(0) = v_i$

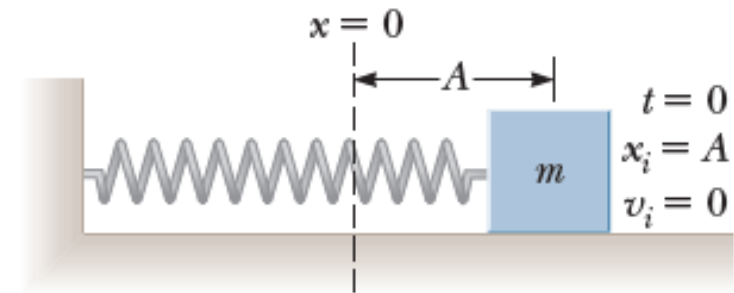
Αυτό σημαίνει ότι $\phi = -\pi/2$.

Το γράφημα έχει μετατεθεί προς τα δεξιά κατά ένα τέταρτο του κύκλου ταλάντωσης ως προς το γράφημα $x(0) = A$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ M15.1 Ένα σύστημα κύβου-ελατηρίου

Ένας κύβος μάζας 200 g συνδεδεμένος με ένα ελαφρύ ελατήριο σταθεράς δύναμης 5.00 N/m είναι ελεύθερο να ταλαντώνεται σε μια οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Το μπλοκ μετατοπίζεται 5.00 cm από την ισορροπία και απελευθερώνεται από την ηρεμία όπως.



(A) Βρείτε την περίοδο της κίνησής του.

ΛΥΣΗ

Η γωνιακή συχνότητα ω του συστήματος μάζας-ελατηρίου, είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5.00 \text{ N/m}}{0.2 \text{ kg}}} = 5.00 \text{ rad/s}$$

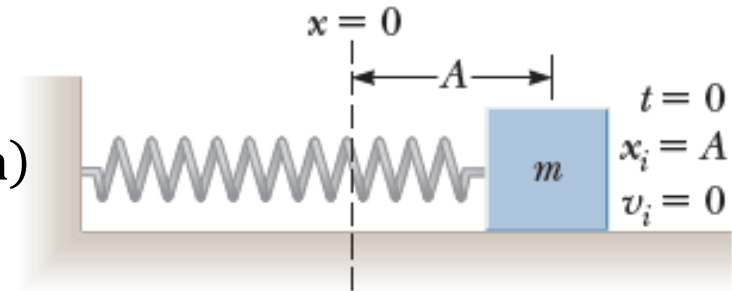
Οπότε η περίοδος είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5.00 \text{ rad/s}} = 1.26 \text{ s}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ M15.1 (Συνέχεια)

(Β) Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα του κύβου.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} v_{max} &= \omega A = (5.00 \text{ rad/s})(5.00 \times 10^{-2} \text{ m}) \\ &= 0.250 \text{ m/s} \end{aligned}$$



(Γ) Πόση είναι η μέγιστη επιτάχυνση του κύβου;

ΛΥΣΗ

$$\alpha_{max} = \omega^2 A = (5.00 \text{ rad/s})^2 (5.00 \times 10^{-2} \text{ m}) = 1.25 \text{ m/s}^2$$

(Δ) Εκφράστε τη θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση ως συναρτήσεις του χρόνου σε μονάδες SI;

ΛΥΣΗ

$$x = A \cos(\omega t + \phi) = 0.05 \cos 5.00t \text{ m}$$

$$v = -v_{max} \sin(\omega t + \phi) = -0.250 \sin 5.00t \text{ m/s}$$

$$\alpha = -\alpha_{max} \cos(\omega t + \phi) = -1.25 \cos 5.00t \text{ m/s}^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ M15.1 (Συνέχεια)

Τι θα γινόταν αν ο κύβος απελευθερωνόταν από την ίδια αρχική θέση, $x_i = 5.00 \text{ cm}$, αλλά με αρχική ταχύτητα $v_i = 0.100 \text{ m/s}$; Ποια μέρη της λύσης αλλάζουν και ποιες είναι οι νέες απαντήσεις για αυτά που αλλάζουν;

ΛΥΣΗ

Το μέρος (Α) δεν αλλάζει.

Η περίοδος $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ δεν εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες της κίνησης.

Τα μέρη (Β) – (Δ) αλλάζουν

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow x(0) = A \cos \phi = x_i \quad (1)$$

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow v(0) = -\omega A \sin \phi = v_i \quad (2)$$

Διαιρώντας (2)/(1) υπολογίζουμε την αρχική φάση ϕ

$$\frac{-\omega A \sin \phi}{A \cos \phi} = \frac{v_i}{x_i} \Rightarrow \tan \phi = -\frac{v_i}{\omega x_i} = -\frac{0.100 \text{ m/s}}{(5.00 \text{ rad/s})(0.050 \text{ m})} = 0.400$$

$$\Rightarrow \phi = \tan^{-1}(0.400) = 0.121\pi$$

ΛΥΣΗ (συνέχεια)

Για αρχική φάση $\phi = 0.121\pi$ rad

το νέο πλάτος της ταλάντωσης γίνεται (από την (1)) $A \cos \phi = x_i \Rightarrow A = \frac{x_i}{\cos \phi}$

$$\Rightarrow A = \frac{0.0500 \text{ m}}{\cos(0.121\pi)} = 0.0539 \text{ m}$$

Επομένως, $v_{max} = \omega A = (5.00 \text{ rad/s})(5.39 \times 10^{-2} \text{ m}) = 0.269 \text{ m/s}$

και $a_{max} = \omega^2 A = (5.00 \text{ rad/s})^2 (5.39 \times 10^{-2} \text{ m}) = 1.35 \text{ m/s}^2$

Οι νέες εκφράσεις των x, v, a με το χρόνο γίνονται

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) = 0.0539 \cos(5.00t + 0.121\pi) \text{ m}$$

$$v(t) = -v_{max} \sin(\omega t + \phi) = -0.269 \sin(5.00t + 0.121\pi) \text{ m/s}$$

$$a = -a_{max} \cos(\omega t + \phi) = -1.35 \cos(5.00t + 0.121\pi) \text{ m/s}^2$$

Ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή

Ένα σύστημα στο οποίο ένα σωματίδιο εκτελεί απλή αρμονική κίνηση έχει μηχανική ενέργεια.

Εφόσον η επιφάνεια δεν έχει τριβές, το σύστημα είναι απομονωμένο. Άρα, η συνολική ενέργειά του είναι σταθερή.

Μπορούμε να βρούμε την κινητική ενέργειά του από τη σχέση

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

- Υποθέτουμε ότι το ελατήριο δεν έχει μάζα, οπότε η μάζα του συστήματος είναι η μάζα του σώματος.

Μπορούμε να βρούμε την ελαστική δυναμική ενέργεια από τη σχέση

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

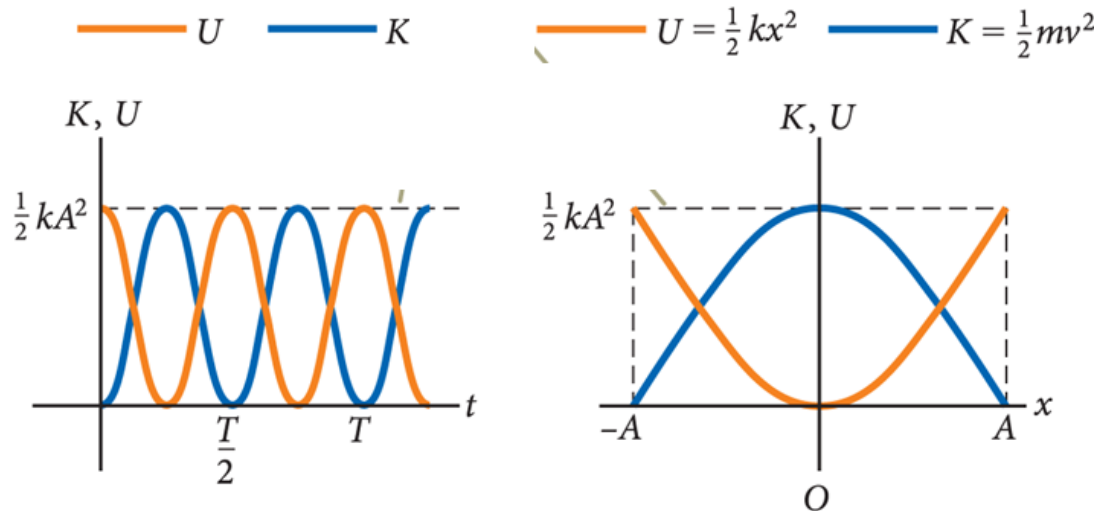
Ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή (συνέχεια)

Η συνολική ενέργεια είναι

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2$$

Η συνολική μηχανική ενέργεια είναι σταθερή, ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους.

Η αποθηκευμένη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μετατρέπεται συνεχώς σε κινητική ενέργεια του σώματος και αντιστρόφως.



Στο διάγραμμα, $\varphi = 0$.

Ταχύτητα σε μια συγκεκριμένη θέση

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ενέργεια για να βρούμε την ταχύτητα:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\Rightarrow mv^2 + kx^2 = kA^2$$

$$\Rightarrow mv^2 = k(A^2 - x^2)$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2)$$

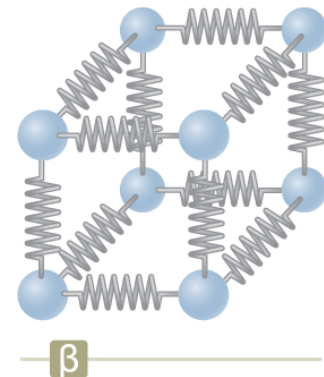
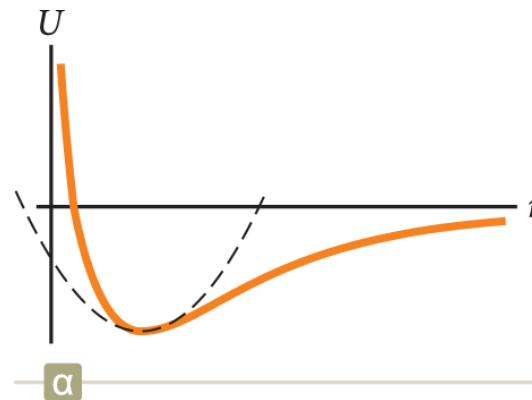
$$\Rightarrow v = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

Σπουδαιότητα των απλών αρμονικών ταλαντωτών

Οι απλοί αρμονικοί ταλαντωτές αποτελούν καλά μοντέλα για διάφορα φυσικά φαινόμενα.

Το παράδειγμα των μορίων

- Αν τα άτομα μέσα στα μόρια δεν απομακρύνονται πολύ μεταξύ τους, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε τις δυνάμεις μεταξύ τους ως δυνάμεις που προκαλούνται από μικροσκοπικά ελατήρια.
- Η δυναμική ενέργεια συμπεριφέρεται όπως στην περίπτωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ M15.3 Ταλαντώσεις σε οριζόντια επιφάνεια

Ένα σώμα 0.500 kg συνδεδεμένο με ένα ελαφρύ ελατήριο, για το οποίο η σταθερά δύναμης είναι 20.0 N/m, ταλαντώνεται σε μια οριζόντια τροχιά χωρίς τριβές.

(Α) Υπολογίστε τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος εάν το πλάτος της κίνησης είναι 3.00 cm.

ΛΥΣΗ

Εξισώνουμε τη συνολική ενέργεια του συστήματος ταλαντωτή με την κινητική ενέργεια του συστήματος όταν το σώμα είναι στο $x = 0$ (όπου έχει τη μέγιστη ταχύτητα)

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

και λύνουμε ως προς την ταχύτητα

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow mv_{\max}^2 = kA^2 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}}A$$

$$\Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{20.0 \text{ N/m}}{0.500 \text{ kg}}} (0.0300 \text{ m}) = 0.190 \text{ m/s}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ M15.1 (συνέχεια)

(B) Πόση είναι η ταχύτητα του σώματος όταν περνάει από τα 2.00 cm;

ΛΥΣΗ

Είναι

$$\begin{aligned} v &= \pm \sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - x^2)} \\ &= \pm \sqrt{\frac{20.0 \text{ N/m}}{0.500 \text{ kg}} [(0.0300 \text{ m})^2 - (0.0200 \text{ m})^2]} = \pm 0.141 \text{ m/s} \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ M15.1 (συνέχεια)

(Γ) Υπολογίστε κινητική και δυναμική ενέργεια του συστήματος όταν το σώμα περνάει από τα 2.00 cm;

ΛΥΣΗ

Στη θέση 2.00 cm η ταχύτητα είναι 0.141 m/s
οπότε

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.500 \text{ kg})(0.141 \text{ m/s})^2 = 5.00 \times 10^{-3} \text{ J}$$

και

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(20.0 \text{ N/m})(0.0200 \text{ m})^2 = 4.00 \times 10^{-3} \text{ J}$$

Απλό εκκρεμές

Το απλό εκκρεμές αποτελείται από ένα σφαιρίδιο μάζας m , το οποίο είναι αναρτημένο από ένα αβαρές νήμα μήκους L .

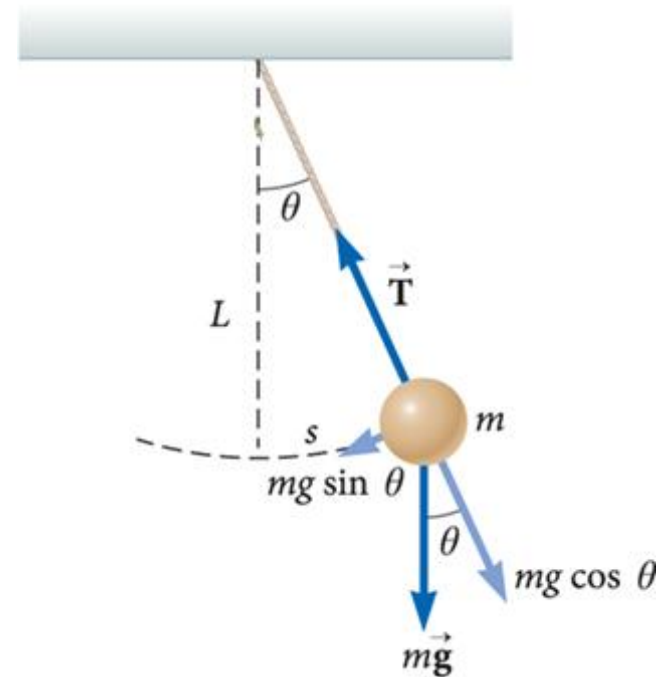
Εάν απομακρύνουμε το σφαιρίδιο κατά γωνία θ από την κατακόρυφο και το αφήσουμε αυτό εκτελεί περιοδική κίνηση.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σφαιρίδιο είναι

η τάση $\vec{T}$ από το νήμα και

το βάρος του $m\vec{g}$.

Η εφαπτομενική συνιστώσα της βαρυτικής δύναμης $mg \sin \theta$ είναι μια δύναμη επαναφοράς.



Απλό εκκρεμές (συνέχεια)

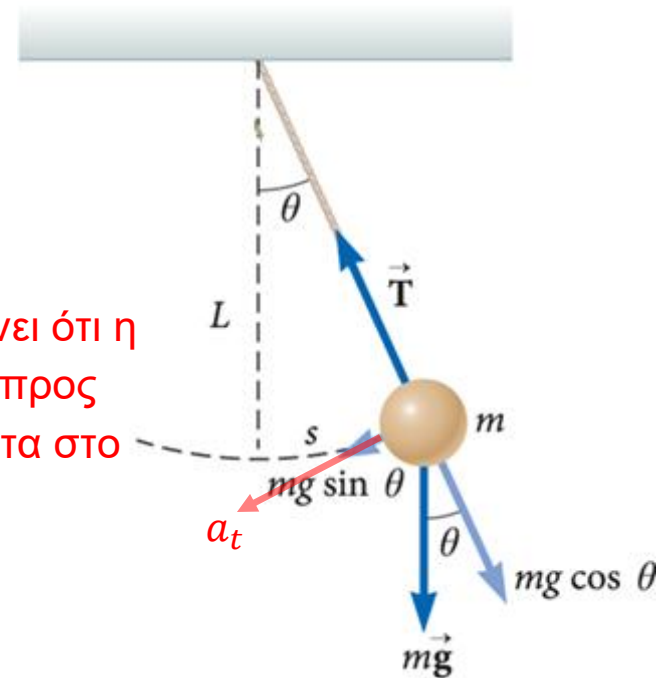
Αν a_t είναι η επιτάχυνση του σφαιριδίου στην εφαπτομενική διεύθυνση (επιτροχία επιτάχυνση), ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα γράφεται

$$-mg \sin \theta = ma_t$$

$$-mg \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$-g \sin \theta = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι η εφαπτομενική δύναμη δρα προς τη θέση ισορροπίας, αντίθετα στο τόξο μετατόπισης s



Επειδή $s = L\theta$ παίρνουμε $-g \sin \theta = \frac{d^2(L\theta)}{dt^2} = L \frac{d^2 \theta}{dt^2}$

Για μικρές γωνίες $\theta < 10^\circ$, $\sin \theta \cong \theta$, οπότε η εξίσωση κίνησης του εκκρεμούς είναι

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta$$

Απλό εκκρεμές (συνέχεια)

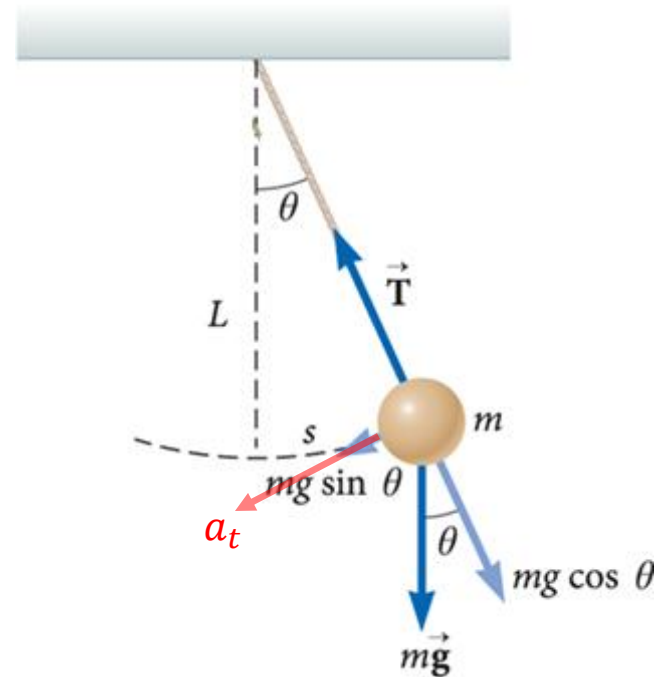
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

Επιτάχυνση $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ (άρα και δύναμη) είναι αντίθετη της μετατόπισης θ

Αυτό επιβεβαιώνει ότι η κίνηση του εκκρεμούς έχει την ίδια μαθηματική μορφή με την απλή αρμονική κίνηση.

με γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

και περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$



Απλό εκκρεμές – Σύνοψη

- Η περίοδος του απλού εκκρεμούς $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ εξαρτάται μόνο από το μήκος L του νήματος και την επιτάχυνση της βαρύτητας g .
- Η περίοδος είναι ανεξάρτητη της μάζας m .
- Επομένως, όλα τα απλά εκκρεμή που έχουν ίσο μήκος νήματος L και βρίσκονται στην ίδια γεωγραφική τοποθεσία (ίδιο g) έχουν την ίδια περίοδο ταλάντωσης.

Φυσικό εκκρεμές

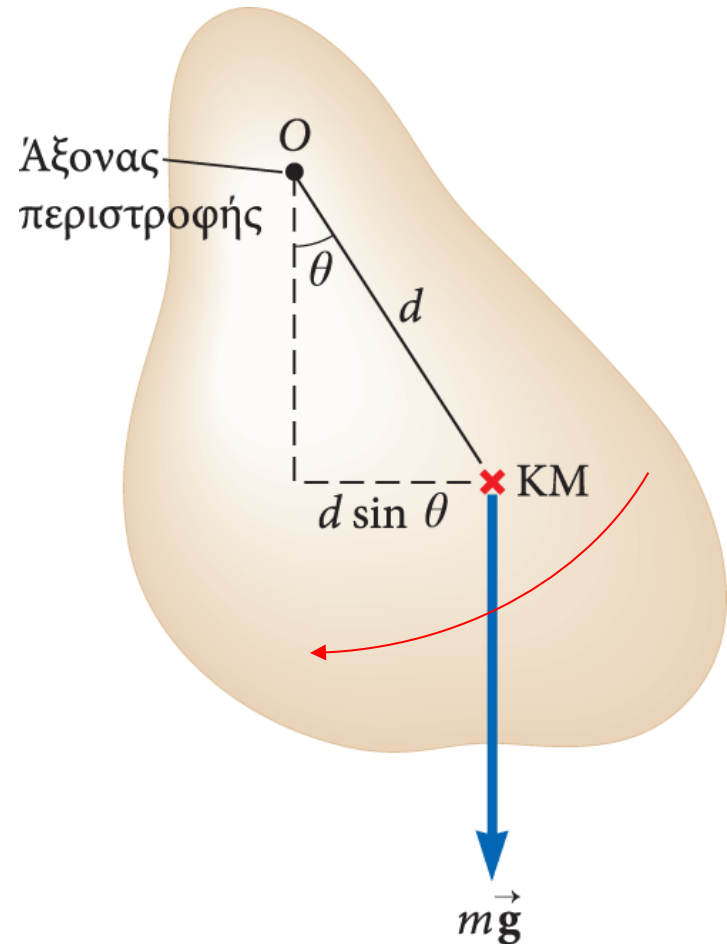
Φυσικό εκκρεμές ονομάζεται ένα σύστημα το οποίο αποτελείται από ένα αναρτημένο σώμα, που δεν μπορεί να μοντελοποιηθεί ως σημειακή μάζα, και το οποίο ταλαντώνεται γύρω από έναν σταθερό άξονα O που δεν διέρχεται από το κέντρο μάζας του KM .

Η βαρυτική δύναμη $m\vec{g}$ προκαλεί ροπή τ ως προς έναν άξονα που διέρχεται από το σημείο O .

Η ροπή είναι

$$\tau = -mgd \sin \theta$$

Ροπή αρνητική ως δεξιόστροφη



Φυσικό εκκρεμές (συνέχεια)

$$\left. \begin{array}{l} \tau = -mgd \sin \theta \\ \text{από 2ο νόμο Νεύτωνα } \tau = I a_{\omega} = I \frac{d^2 \theta}{dt^2} \end{array} \right\} \Rightarrow -mgd \sin \theta = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

I είναι η ροπή αδράνειας ως προς O

Αν υποθέσουμε ότι η γωνία θ είναι μικρή ($\sin \theta \cong \theta$), η εξίσωση γίνεται

$$-(mgd)\theta = I \frac{d^2 \theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\right)\theta \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \text{ η κυκλική συχνότητα}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} \text{ η περίοδος}$$

$\frac{d^2 \theta}{dt^2} \propto -\theta$ εξίσωση απλού
αρμονικού ταλαντωτή

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ M15.6 Μια αιωρούμενη ράβδος

Μια ομοιόμορφη ράβδος μάζας M και μήκους L περιστρέφεται γύρω από το ένα άκρο και ταλαντώνεται σε κατακόρυφο επίπεδο. Βρείτε την περίοδο ταλάντωσης εάν το πλάτος της κίνησης είναι μικρό.

ΛΥΣΗ

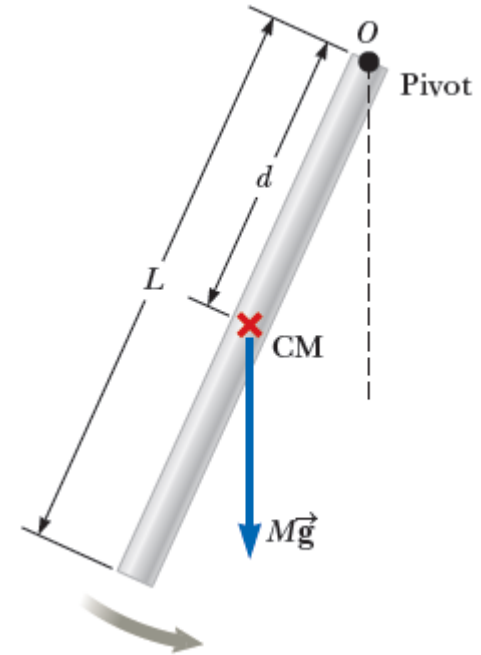
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Η ροπή αδράνειας ομοιόμορφης ράβδου γύρω από έναν άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο είναι

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$

Αντικαθιστώντας

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg \frac{L}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{g3}}$$



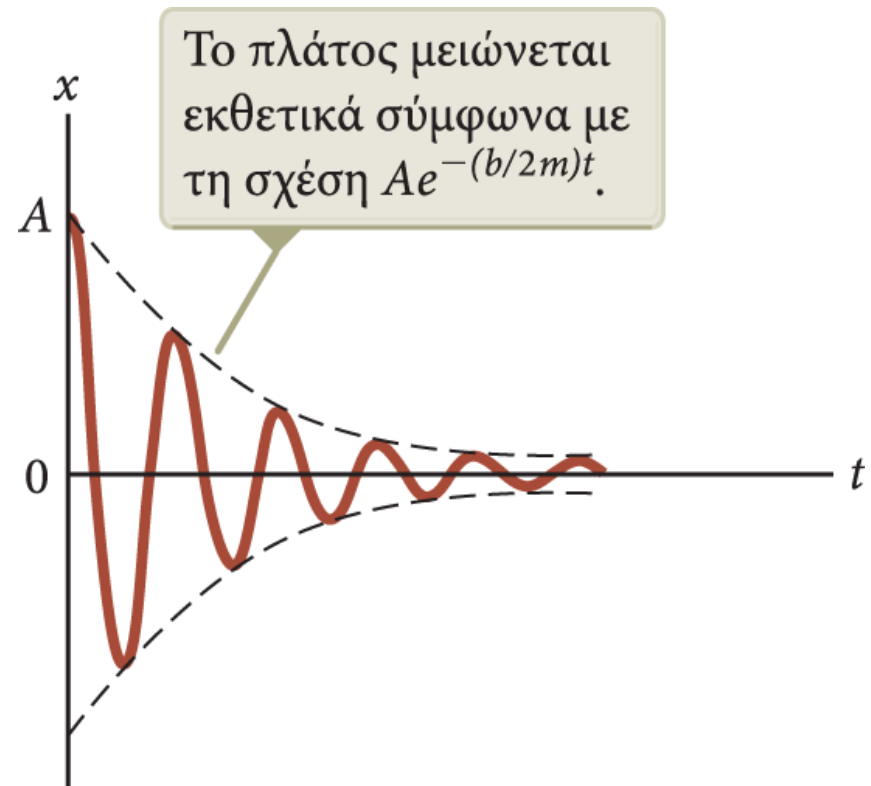
Φθίνουσες ταλαντώσεις

Με τον όρο «φθίνουσα ταλάντωση» εννοούμε μια ταλάντωση της οποίας το πλάτος (άρα και η ενέργεια) μειώνεται με το χρόνο (φθίνει).

Το γράφημα μιας φθίνουσας ταλάντωσης είναι μια ημιτονοειδής καμπύλη μειούμενου πλάτους.

Θα δούμε ότι το πλάτος μειώνεται εκθετικά με το χρόνο .

Οι διακεκομμένες γραμμές ορίζουν την **περιβάλλουσα** της καμπύλης της κίνησης.



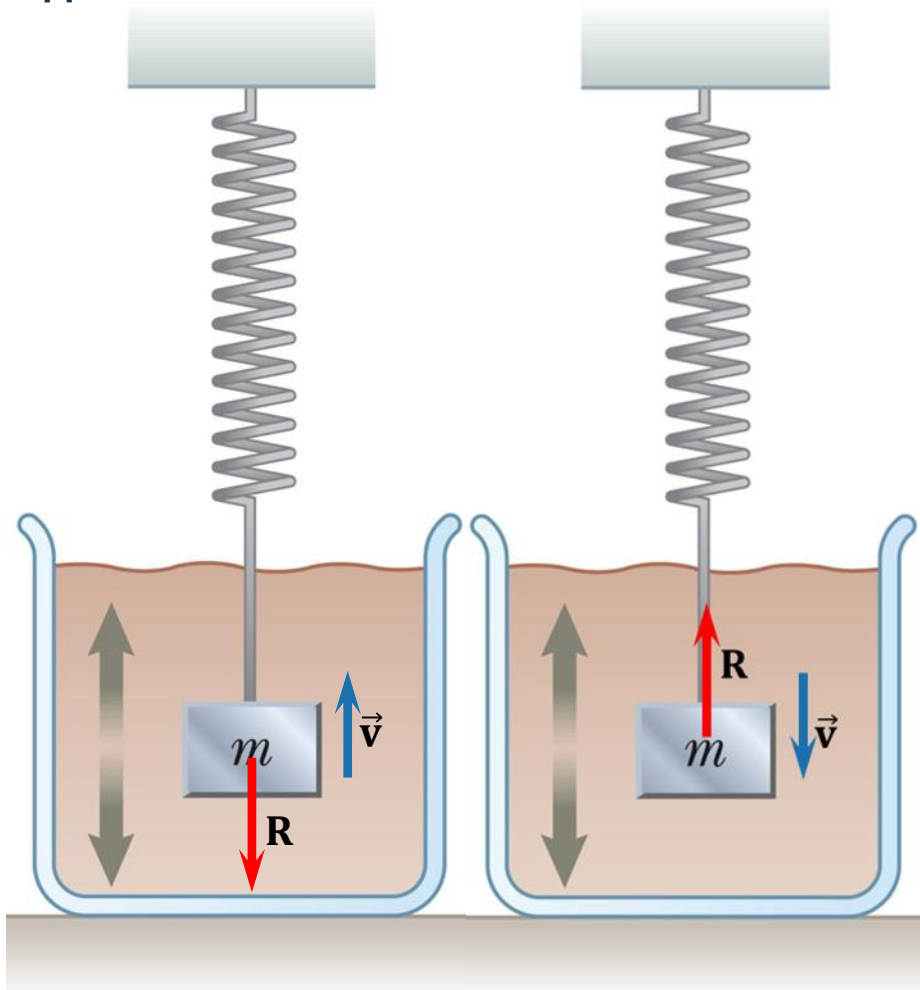
Φθίνουσες ταλαντώσεις – Παράδειγμα

Ένα παράδειγμα φθίνουσας κίνησης είναι η κίνηση ενός σώματος το οποίο είναι προσαρτημένο σε ένα ελατήριο και βυθισμένο σε ένα παχύρρευστο υγρό.

Το παχύρρευστο υγρό ασκεί μια δύναμη τριβής (επιβράδυνσης) στο σώμα που συνήθως είναι αντίθετη στην ταχύτητα της κίνησής του

$$\vec{R} = -b\vec{v}$$

Η σταθερά b ονομάζεται **συντελεστής απόσβεσης**.



Φθίνουσες ταλαντώσεις – Η εξίσωση κίνησης

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε $\sum F_x = -kx - bv_x = ma_x$

$$\text{ή } m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx$$

Αυτή είναι η (διαφορική) εξίσωση για τη συνάρτηση $x(t)$ με το χρόνο

Συγκρίνετέ τη με την εξίσωση του ταλαντωτή χωρίς απόσβεση

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

Λείπει ο όρος $-b \frac{dx}{dt}$ της απόσβεσης

Όταν η δύναμη τριβής είναι μικρή συγκριτικά με τη μέγιστη δύναμη επαναφοράς (δηλαδή, ο συντελεστής b είναι μικρός), μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση που δίνει το x .

$$x = Ae^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t} \cos(\omega t + \varphi)$$

και η κυκλική συχνότητα είναι $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$

Φθίνουσες ταλαντώσεις – Ιδιοσυχνότητα

Όταν η δύναμη τριβής είναι μικρή, η κίνηση εξακολουθεί να είναι ταλάντωση, αλλά το πλάτος μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο.

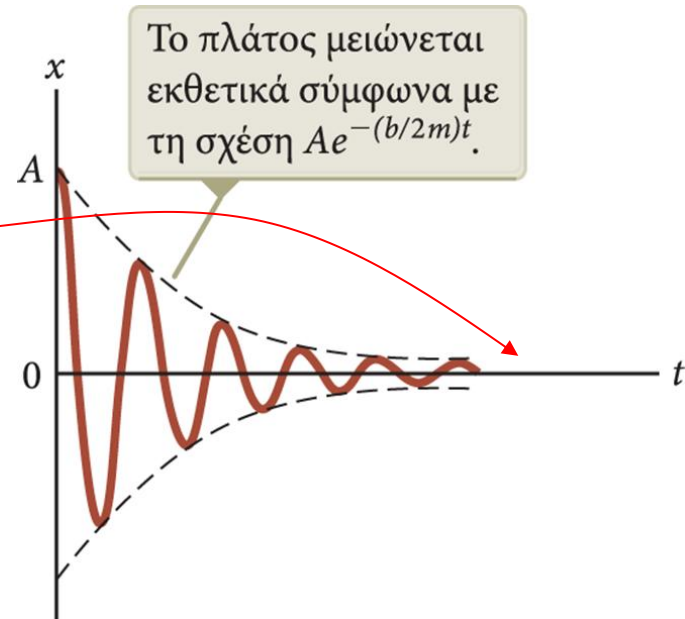
και τελικά η κίνηση σταματά.

Η κυκλική συχνότητα μπορεί να εκφραστεί και στη μορφή:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

όπου ω_0 είναι η κυκλική συχνότητα όταν δεν υπάρχει δύναμη τριβής, η οποία ονομάζεται **ιδιοσυχνότητα** (ή **φυσική συχνότητα**) του συστήματος.

$$\omega_0 = \frac{k}{m}$$



Είδη απόσβεσης

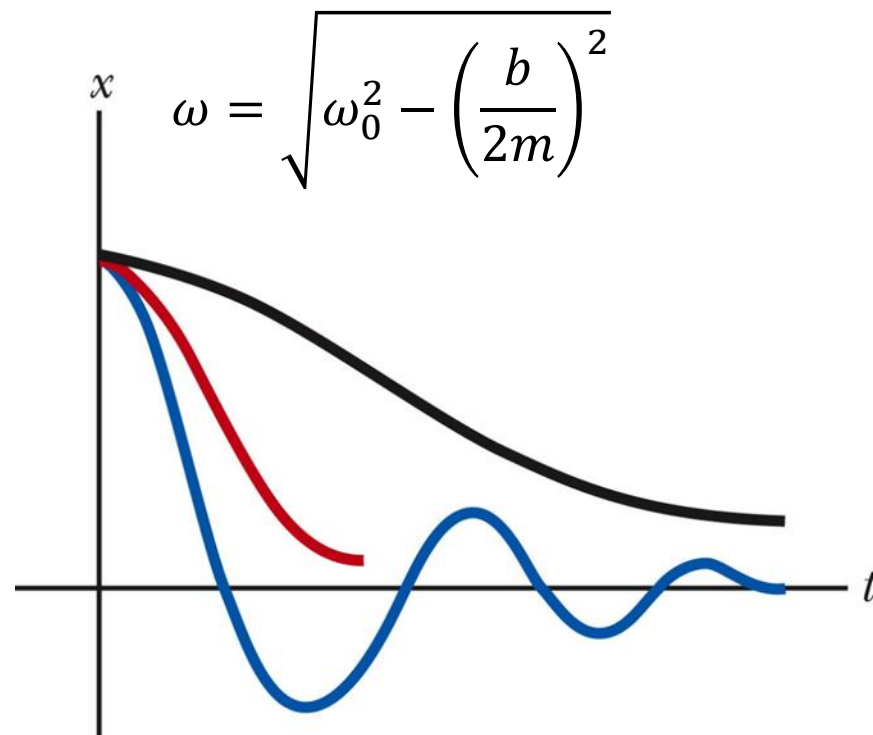
- Όταν η δύναμη τριβής είναι μικρή ώστε $\frac{b}{2m} < \omega_0$ τότε λέμε ότι το σύστημα

παρουσιάζει **υποαπόσβεση** (μπλε καμπύλη)

- Αν, αντιθέτως, η δύναμη τριβής είναι μεγάλη ώστε $\frac{b}{2m} > \omega_0$ τότε λέμε ότι το σύστημα παρουσιάζει **υπεραπόσβεση** (μαύρη καμπύλη)

- Όταν ο συντελεστής b πάρει μια οριακή τιμή b_c τέτοια ώστε $\frac{b_c}{2m} = \omega_0$

το σύστημα δεν ταλαντώνεται. Τότε λέμε ότι έχουμε **κρίσιμη απόσβεση** (κόκκινη καμπύλη).



Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

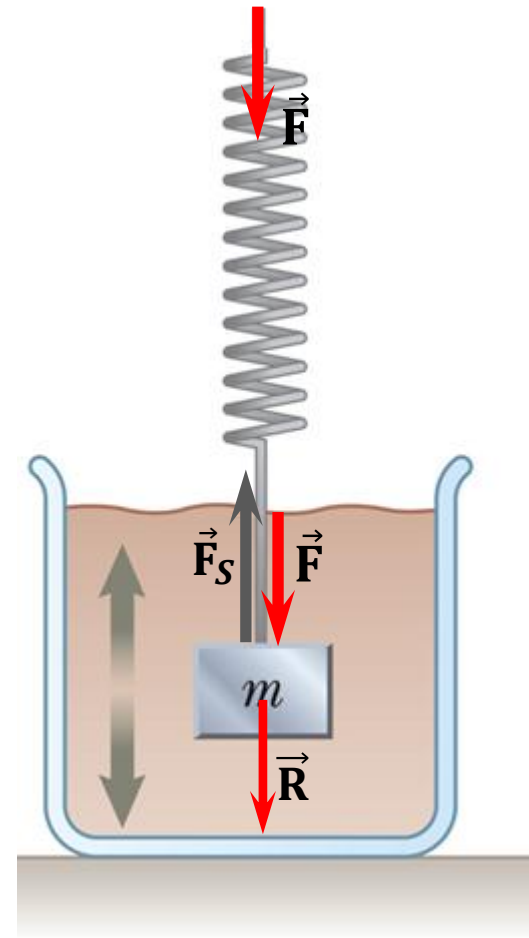
Μπορούμε να αντισταθμίσουμε την απώλεια ενέργειας σε μια φθίνουσα ταλάντωση ασκώντας μια περιοδική εξωτερική δύναμη $F(t) = F_0 \sin \omega t$

Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα $\sum F_x = ma_x$ σε αυτήν την περίπτωση δίνει

$$F + F_S + R = ma_x$$

$$\Rightarrow F_0 \sin \omega t - kx - bv_x = ma_x$$

$$\Rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - kx + F_0 \sin \omega t$$



Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις (συνέχεια)

Όταν στο αρχικά ακίνητο σώμα αρχίσει να ασκείται η εξωτερική περιοδική δύναμη διέγερσης F , το σώμα αρχίζει να ταλαντώνεται με ολοένα μεγαλύτερο πλάτος ταλάντωσης A .

Μετά από ένα αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα, όταν η εισροή ενέργειας ανά κύκλο (περίοδο ταλάντωσης T) από την εξωτερική δύναμη F γίνει ίση

- με την ποσότητα της ενέργειας που καταναλώνεται από τη δύναμη τριβής R σε κάθε κύκλο,

+

- την εσωτερική ενέργεια (κινητική συν δυναμική ελατηρίου) του ταλαντωτή,

επιτυγχάνονται συνθήκες ισορροπίας, δηλαδή, μια **μόνιμη κατάσταση** (steady-state)

Στη μόνιμη κατάσταση, το σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση $x = A \cos \omega t$

- με συχνότητα τη συχνότητα ω της εξωτερικής περιοδικής κίνησης

- και σταθερό πλάτος $A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (b\omega/m)^2}}$

ω_0 η ιδιοσυχνότητα
του ταλαντωτή $\sqrt{k/m}$

Συντονισμός

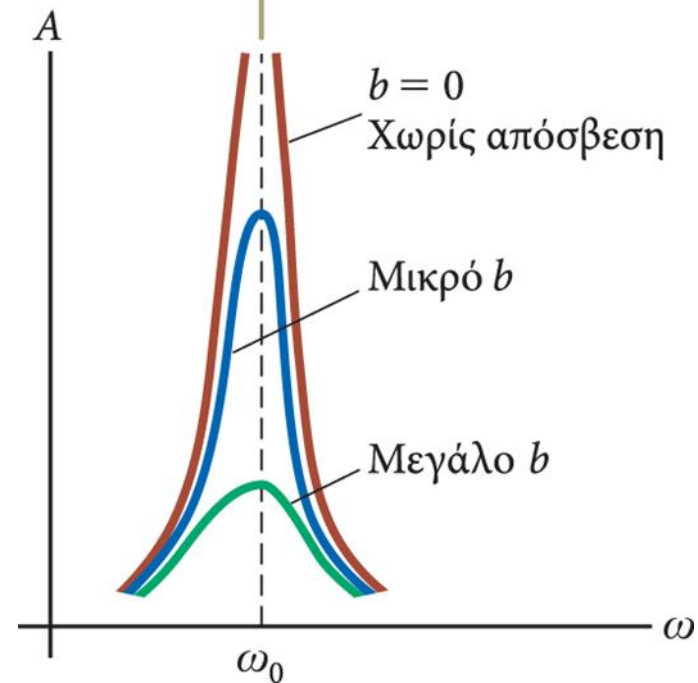
Όταν η συχνότητα της δύναμης διέγερσης πλησιάζει την ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης ($\omega \approx \omega_0$), παρατηρείται αύξηση του πλάτους.

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (b\omega/m)^2}} \xrightarrow{\omega \approx \omega_0} A = \frac{F_0}{b\omega}$$

Αυτή η θεαματική αύξηση του πλάτους ονομάζεται **συντονισμός** (resonance)

Η ιδιοσυχνότητα ω_0 είναι γνωστή και ως **συχνότητα συντονισμού** του συστήματος (resonance frequency).

Όταν η συχνότητα ω της δύναμης διέγερσης είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα ω_0 του ταλαντωτή, παρατηρείται συντονισμός.



Συντονισμός (συνέχεια)

Η εξωτερική δύναμη διέγερσης είναι $F(t) = F_0 \sin \omega t$

και, κατά τον συντονισμό, η θέση είναι $x = A \cos \omega t$ οπότε η ταχύτητα είναι

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(A \cos \omega t)}{dt} = -\omega A F_0 \sin \omega t$$

Δηλαδή, κατά το συντονισμό ($\omega \approx \omega_0$) η εξωτερική δύναμη F και η ταχύτητα v του σώματος έχουν την ίδια φάση (ωt)

Τότε, η ισχύς $p = \vec{F} \cdot \vec{v}$ που μεταφέρει η εξωτερική δύναμη στον ταλαντωτή παίρνει τη μέγιστη τιμή της γι' αυτό και η το πλάτος ταλάντωσης μεγιστοποιείται

ΤΕΛΟΣ