ΣΥΛΛΟΓΗ ΛΥΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2

Σύγκρουση αυτοκινήτου με μεγάλο σκύλο

Μάζα αυτοκινήτου M = 1000 kg
Μάζα σκύλου m =20 kg
Πλάτος σκύλου d = 0,25 m
Ταχύτητα αυτοκινήτου υ= 54 km/h = 15 m/s
Η κρούση είναι πλαστική.

$$V_{\sigma\upsilon\sigma} = \frac{M\upsilon}{M+m} \approx \upsilon$$

Επειδή η διαφορά των μαζών είναι πολύ μεγάλη το αυτοκίνητο δεν θα αλλάξει πρακτικά ταχύτητα και ο σκύλος θα κινείται μετά την σύγκρουση με την αρχική ταχύτητα του αυτοκινήτου.
Η κρούση θα διαρκέσει περίπου όσο χρειάζεται να διανύσει το αυτοκίνητο τα 0,25 m που είναι το πλάτος του σκύλου

$$\Delta t = \frac{d}{\upsilon}$$

Η μέση δύναμη στο σκύλο (και άρα και στο αυτοκίνητο από τον σκύλο) θα είναι

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m\upsilon - 0}{d/\upsilon} = \frac{m\upsilon^2}{d} = \frac{30\cdot\ 15^2}{0,25} = 27.000\ \text{N}$$

Δηλαδή περίπου ίση με το βάρος 2,7 τόνων.

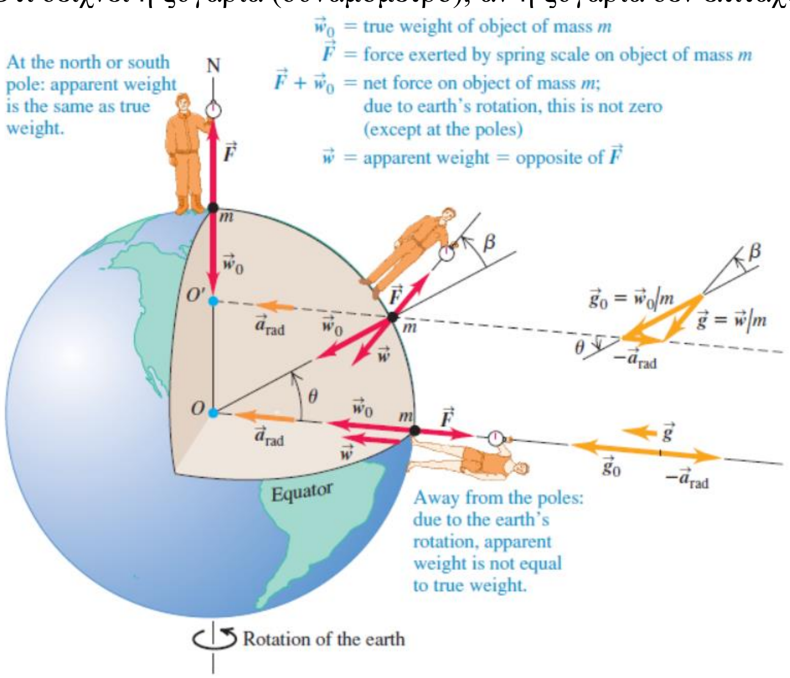
Αν το σκυλί ήταν Chihuahua (τσιουάουα) m= 2,5 kg d=0,1 m

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m\upsilon - 0}{d/\upsilon} = \frac{m\upsilon^2}{d} = \frac{2,5\cdot\ 15^2}{0,1} = 5.625\ \text{N}$$

Φαινόμενο βάρος λόγω περιστροφής της Γης

Πραγματικό βάρος w_0 : $w_0 = G\dfrac{M_E m}{R_E^2} = mg$

Ότι δείχνει η ζυγαριά (δυναμόμετρο), αν η ζυγαριά δεν επιταχύνεται.



Στους πόλους : $\sum F_y = 0 \Rightarrow F - w_0 = 0 \Rightarrow F = w_0$

η ένδειξη F της ζυγαριάς είναι το πραγματικό βάρος

Στον Ισημερινό όμως το σώμα περιστρέφεται :

$$\sum F_y = ma_c \Rightarrow w_0 - F = m\frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow F = w_0 - m\frac{\upsilon^2}{r}$$

άρα το ¨βάρος¨ F που θα μετράει η ζυγαριά θα είναι μικρότερο.
Αυτό ισοδυναμεί σε μείωση της έντασης του πεδίου βαρύτητας από $g_0 = w_0/m$ σε $g = F/m$ για έναν παρατηρητή στον Ισημερινό :

$$g = g_0 - \frac{\upsilon^2}{r}$$

Ακτίνα στον Ισημερινό : $r = R_{Ee} = 6.378 \text{ km}$

Αστρική μέρα : $T = 86.164 \text{ s}$

Ταχύτητα : $\upsilon = \frac{2\pi R_{Ee}}{T} = \frac{2\pi \cdot \ 6.378 \ \times 10^3 \text{m}}{86.164 \text{ s}} = 465 \text{ m/s}$

$$\frac{\upsilon^2}{r} = \frac{465^2}{6.378 \times 10^3} = 0,0339 \text{ m/s}^2$$

Μεταβολή περίπου ίση με 3,4%. Π.χ. ένα σώμα μάζας 100 kg στους πόλους θα φαινόταν σαν 100(1-0,0339)=96,61 kg στον Ισημερινό

Τι περίοδο έπρεπε να έχει η Γη ώστε στον Ισημερινό το φαινόμενο βάρος μας να ήταν μηδέν ?

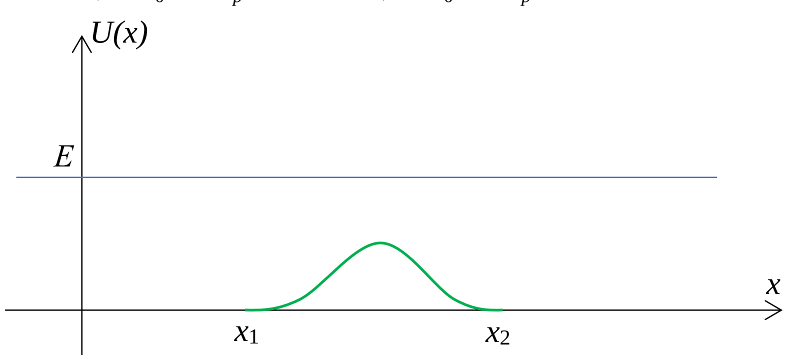
$$g = 0 \Rightarrow g_0 = \frac{\upsilon^2}{r} = \omega^2 r \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g_0}{R_{Ee}}} = 0,001240 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 5.069 \text{ s} = 1,408 \text{ h} = 1 \text{ h } 24,5 \text{ min}$$

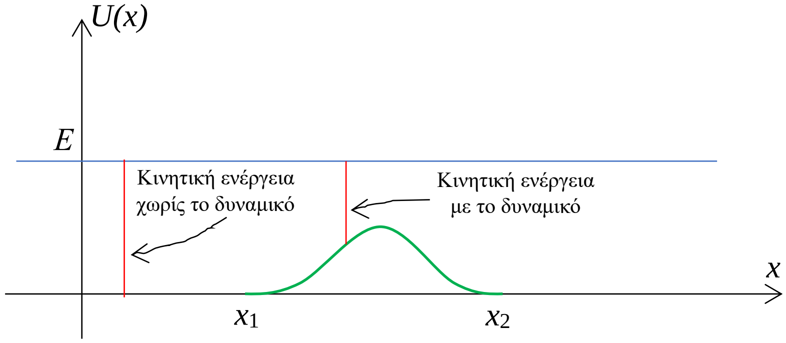
Κίνηση σε δυναμικό 1

Υλικό σημείο ενέργειας E κινείται ευθύγραμμα και ομαλά μέχρι να συναντήσει το φράγμα δυναμικού του σχήματος το οποίο εκτείνεται από τη θέση x_1 έως τη θέση x_2. Αν Δt_0 και Δt_p είναι τα αντίστοιχα χρονικά διαστήματα για την μετατόπιση $\Delta x = x_2 - x_1$ όταν το σωματίδιο κινείται ελεύθερο και όταν κινείται παρουσία του δυναμικού, τότε ισχύει

Α) $\Delta t_0 = \Delta t_p$ Β) $\Delta t_0 > \Delta t_p$ Γ) $\Delta t_0 < \Delta t_p$



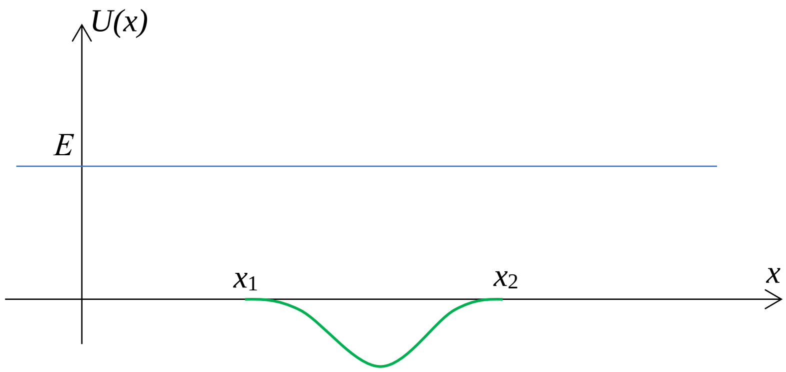
Γ) Σε κάθε σημείο της περιοχής [x_1, x_2] του φράγματος δυναμικού το σωματίδιο θα έχει μικρότερη κινητική ενέργεια από αυτήν που θα είχε απουσία του δυναμικού $K_p < K_0 \Rightarrow \upsilon_p < \upsilon_0$. Άρα θα κινείται με μικρότερη ταχύτητα και θα χρειαστεί περισσότερο χρόνο να διατρέξει το διάστημα $x_2 - x_1$ όταν υπάρχει το φράγμα δυναμικού από το χρόνο που θα χρειαζόταν αν κινούνταν ελεύθερο.



Κίνηση σε δυναμικό 2

Υλικό σημείο ενέργειας E κινείται ευθύγραμμα και ομαλά μέχρι να συναντήσει το φρεάτιο δυναμικού του σχήματος το οποίο εκτείνεται από τη θέση x_1 έως τη θέση x_2. Αν Δt_0 και Δt_p είναι τα αντίστοιχα χρονικά διαστήματα για την μετατόπιση $\Delta x = x_2 - x_1$ όταν το σωματίδιο κινείται ελεύθερο και όταν κινείται παρουσία του δυναμικού, τότε ισχύει

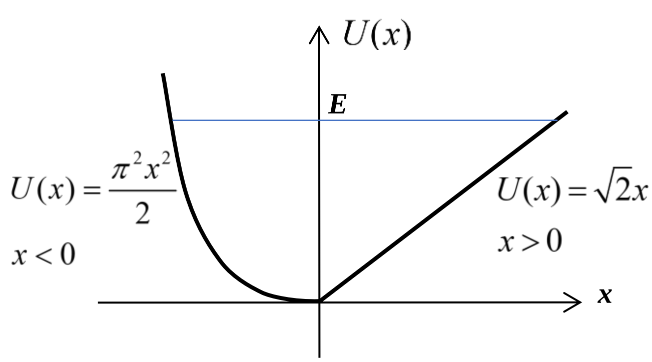
Α) $\Delta t_0 = \Delta t_p$ Β) $\Delta t_0 > \Delta t_p$ Γ) $\Delta t_0 < \Delta t_p$



Β) Σε κάθε σημείο της περιοχής [x_1, x_2] του φρεατίου δυναμικού το σωματίδιο θα έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια από αυτήν που θα είχε απουσία του δυναμικού $K_p > K_0 \Rightarrow \upsilon_p > \upsilon_0$. Άρα θα κινείται με μεγαλύτερη ταχύτητα και θα χρειαστεί λιγότερο χρόνο να διατρέξει το διάστημα $x_2 - x_1$ του φρεατίου δυναμικού από το χρόνο που θα χρειαζόταν αν κινούνταν ελεύθερο.

Κίνηση σε δυναμικό 3

Σώμα μάζας m=0,25 kg κινείται με συνολική ενέργεια E=4 J και δυναμική ενέργεια που δίνεται στην παραπάνω γραφική παράσταση. Η περίοδος της ταλάντωσης είναι :



Α) 0,5 s Β) 1 s Γ) 1,5 s Δ) 2 s Ε) 2,5 s

Ε) $T = \dfrac{T_{\alpha\alpha\tau}}{2} + 2t_{\alpha\nu o\delta} = 0,5 + 2 = 2,5 \text{ s}$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = E \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 4\sqrt{2} \text{ m/s}$$

$$U(x) = \frac{\pi^2 x^2}{2} \Rightarrow F = -\pi^2 x \Rightarrow \frac{T_{\alpha\alpha\tau}}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{\pi^2}} = 0,5 \text{ s}$$

$$U(x) = \sqrt{2}x \Rightarrow F = -\sqrt{2} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow t_{\alpha\nu o\delta} = \frac{\sqrt{2}}{m\upsilon_0} = \frac{\sqrt{2}}{0,25\cdot\ 4\sqrt{2}} = 1 \text{ s}$$

Κίνηση σε δυναμικό 4

Ένα σωματίδιο μάζας *m* κινείται στην περιοχή της διατηρητικού πεδίου που περιγράφεται από τη δυναμική ενέργεια $U(x,y,z) = b(yz + x^2 e^{-y})$ (SI), όπου *b* θετική σταθερά. Στο σωματίδιο αυτό ασκείται επιπλέον μια δύναμη της μορφής $\vec{f} = a(\vec{k} \times \vec{\upsilon})$ (SI), όπου *a* θετική σταθερά, $\vec{k}$ μια σταθερή διανυσματική ποσότητα με μονάδες ταχύτητας και $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα του σωματιδίου. Τη χρονική στιγμή t_0 το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $\vec{r}_0 = 1\hat{x}$ και τη χρονική στιγμή t_1 στη θέση $\vec{r}_1 = 1\hat{y} + 1\hat{z}$, όπου $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα της x, y, z κατευθύνσεις αντίστοιχα. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου $K_1 - K_0$ έχει αριθμητική τιμή ίση με :

Α) $2b$ Β) 0 Γ) $2ak+b$ Δ) $a+b$

Β) Η θέση $\vec{r}_0 = 1\hat{x}$ είναι το σημείο $\vec{r}_0 = (1,0,0)$ και η θέση $\vec{r}_1 = 1\hat{y} + 1\hat{z}$ το σημείο $\vec{r}_1 = (0,1,1)$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Για τη λύση χρησιμοποιούμε απλώς το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας : $\Delta K = \sum_i W_i \Rightarrow K_1 - K_0 = W_U + W_f$

Η μία δύναμη, η f, δεν παράγει έργο γιατί είναι διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα και άρα στη μετατόπιση (θυμηθείτε ότι το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ένα διάνυσμα κάθετο και στα δύο διανύσματα από τα οποία ορίζεται). Όσο για τη δεύτερη αφού είναι διατηρητική το έργο της θα είναι απλά η διαφορά της δυναμικής της ενέργειας, από το αρχικό στο τελικό σημείο, η οποία της δίνεται. Αντικαθιστούμε λοιπόν απλά στον τύπο της συντεταγμένες *x,y,z,* κάθε σημείου και παίρνουμε :

$$K_1 - K_0 = U_0 - U_1 + 0 = U(1,0,0) - U(0,1,1) = b(0\cdot 0 + 1^2 \cdot e^0) - b(1\cdot 1 + 0^2 \cdot e^{-1}) = b - b = 0$$

Κεντρική δύναμη

Για δυναμική ενέργεια του τύπου $U = kr^n$, όπου *k* θετική σταθερά, το διάνυσμα της δύναμης είναι:

α) $\vec{F} = -knr^{n-2}\vec{r}$ β) $\vec{F} = -knr^{n-1}\vec{r}$ γ) $\vec{F} = knr^{n-2}\vec{r}$ δ) $\vec{F} = knr^{n-1}\vec{r}$

Α) Απλή άσκηση εφαρμογής του ορισμού της δύναμης μέσω της δυναμικής ενέργειας από τον τύπο $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$. Προσοχή : της απαντήσεις η δύναμη δεν έχει γραφτεί συναρτήσει του μοναδιαίου ακτινικού διανύσματος $\hat{r}$ αλλά του διανύσματος θέσης $\vec{r}$ το οποίο περιέχει μια πρόσθετη δύναμη του *r* : $\vec{r} = r\hat{r}$. Επειδή η δυναμική ενέργεια εξαρτάται μόνο από το *r,* $U(r,\theta,\varphi) = U(r)$, οι παράγωγοι ως της *θ* και *φ*, σε σφαιρικές συντεταγμένες θα δώσουν μηδέν. Έτσι δεν χρειάζεται καν να γνωρίζετε τον πλήρη τύπο της απόκλισης $\vec{\nabla}$ σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

η οποία καταλήγει σε μια απλή παραγώγιση ως της r. Έτσι η δύναμη δίνεται της σε μια απλή μονοδιάστατη περίπτωση :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(r) = -\frac{dU(r)}{dr}\hat{r} = -\frac{d(kr^n)}{dr}\hat{r} = -nkr^{n-1}\hat{r} = -nkr^{n-2}\vec{r}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Κυκλική τροχιά

Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r γύρω από ένα σταθερό σημείο υπό την επίδραση μιας ελκτικής δύναμης μέτρου $F = \frac{k}{r^3}$, όπου $k > 0$. Αν η δυναμική ενέργεια του σωματιδίου είναι μηδέν για $r \to \infty$, τότε η ολική ενέργεια του σωματιδίου στην κυκλική τροχιά είναι :

Α) $-\frac{k}{r^2}$ Β) $-\frac{k}{2r^2}$ Γ) 0 Δ) $\frac{k}{r^2}$

Γ) Στην κυκλική τροχιά η ταχύτητα και άρα η κινητική ενέργεια συναρτήσει της ακτίνας r βρίσκεται από το 2$^{\text{ο}}$ νόμο του Νεύτωνα :

$$F_{ολ} = ma_c \Rightarrow \frac{k}{r^3} = m\frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{k}{2r^2}$$

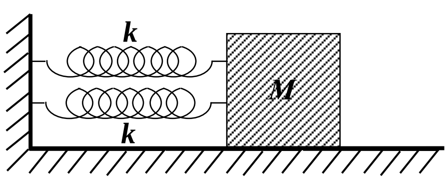
Η δυναμική ενέργεια προκύπτει, από τον ορισμό της, με ολοκλήρωση από τη δύναμη (έργο):

$$U_r - U_\infty = W_{r\to\infty} \Rightarrow U_r = \int_r^\infty F dr' = \int_r^\infty \frac{k}{r'^3}dr' = k\int_r^\infty r'^{-3}dr = k\left.\frac{r'^{-3+1}}{-3+1}\right|_r^\infty = -\frac{k}{2r^2}$$

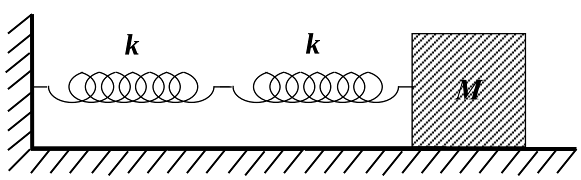
Οπότε η ολική ενέργεια σε μια κυκλική τροχιά θα είναι μηδέν :

$$E = K + U = \frac{k}{2r^2} - \frac{k}{2r^2} = 0$$

Συνδυασμός ελατηρίων



Εικόνα 1



Εικόνα 2

Δύο όμοια ελατήρια σταθεράς k συνδέονται σε όμοια σώματα μάζας M, της φαίνεται στην παραπάνω εικόνα. Ο λόγος της περιόδου της ταλάντωσης όταν τα ελατήρια είναι συνδεδεμένα παράλληλα (Εικόνα 1) της την περίοδο της ταλάντωσης όταν τα ελατήρια είναι συνδεδεμένα σε σειρά (Εικόνα 2) είναι :

Α) $\frac{1}{2}$ Β) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ Γ) 1 Δ) $\sqrt{2}$ Ε) 2

Α) $$\frac{T_p}{T_s} = \frac{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{M}{k_p}}}{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{M}{k_s}}} = \sqrt{\frac{k_s}{k_p}} = \sqrt{\frac{kk/(k+k)}{k+k}} = \sqrt{\frac{k^2}{2k\cdot 2k}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Όταν τα ελατήρια είναι παράλληλα υφίστανται την ίδια παραμόρφωση αλλά ασκούν διαφορετικές δυνάμεις. Την ίδια παραμόρφωση θα πρέπει να υφίσταται και το ισοδύναμο ελατήριο και να ασκεί δύναμη ίση με τη συνολική δύναμη που ασκούν τα δύο ελατήρια:

$$x_1 = x_2 = x$$

$$F = F_1 + F_2 \Rightarrow -kx = -k_1x_1 - k_2x_2 = -(k_1+k_2)x \Rightarrow k = k_1 + k_2$$

Όταν τα ελατήρια είναι σε σειρά δεν παραμορφώνονται το ίδιο, όμως βρίσκονται υπό την ίδια τάση και ασκούν την ίδια δύναμη. Το ισοδύναμο ελατήριο πρέπει να ασκεί την ίδια δύναμη για παραμόρφωση ίση με το άθροισμα των παραμορφώσεων των δυο ελατηρίων:

$$F = F_1 = F_2$$

$$x_1 + x_2 = x \Rightarrow -\frac{F_1}{k_1} - \frac{F_2}{k_2} = -\frac{F}{k} \Rightarrow F\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right) = \frac{F}{k} \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2} \Rightarrow k = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$$

Έργο έκρηξης

Άνθρωπος μάζας *m* που βρισκόταν σε μια ακίνητη βάρκα μάζας *M* βγαίνει από αυτήν πηδώντας προς τα αριστερά με οριζόντια ταχύτητα. Αμέσως μετά το άλμα παρατηρούμε ότι η βάρκα κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα υ. Πόσο έργο έκανε ο άνθρωπος κατά το άλμα (και στο σώμα του και στη βάρκα);

Α) $\frac{1}{2}M\upsilon^2$ Β) $\frac{1}{2}m\upsilon^2$ Γ) $\frac{1}{2}(M+m)\upsilon^2$ Δ) $\frac{1}{2}\left(M+\frac{M^2}{m}\right)\upsilon^2$

Ε) $\frac{1}{2}\left(\frac{Mm}{M+m}\right)\upsilon^2$

Δ) $m\upsilon_{\alpha\nu\theta\rho} = M\upsilon \Rightarrow \upsilon_{\alpha\nu\theta\rho} = \frac{M}{m}\upsilon$

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}m\upsilon_{\alpha\nu\theta\rho}^2 + \frac{1}{2}M\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\frac{M^2}{m^2}\upsilon^2 + \frac{1}{2}M\upsilon^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{M^2}{m}+M\right)\upsilon^2$$

Κλάσμα απώλειας ενέργειας στην πλαστική κρούση με ακίνητο στόχο

Σώμα μάζας 2*m* συγκρούεται κεντρικά με ακίνητο σώμα μάζας *m*. Αν η κρούση είναι πλαστική, τι κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας χάνεται κατά την κρούση;

Α) 0 Β) $\frac{1}{4}$ Γ) $\frac{1}{3}$ Δ) $\frac{1}{2}$ Ε) $\frac{2}{3}$

Γ)

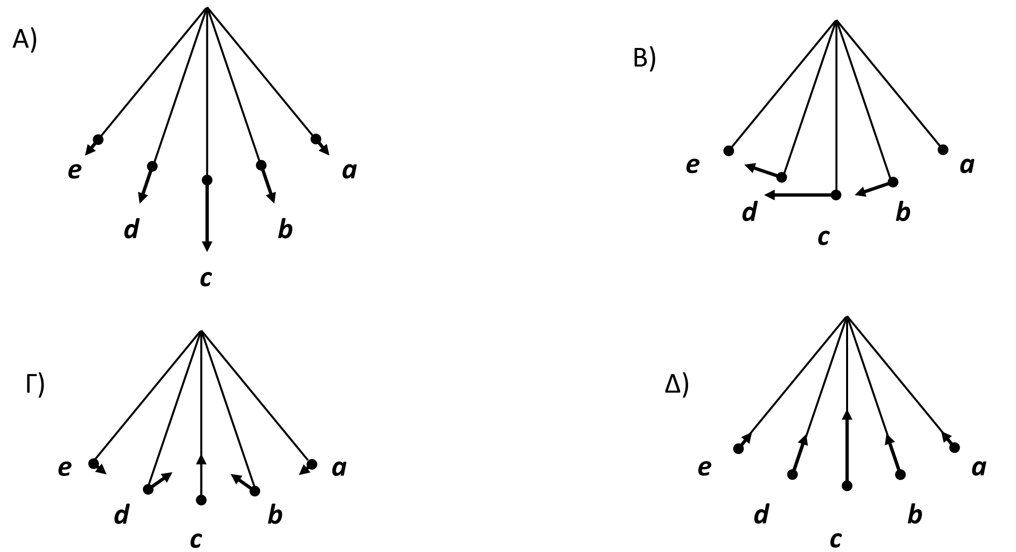
Αν το θυμάστε, για πλαστική κρούση σε ακίνητο στόχο ισχύει : $\frac{|\Delta K|}{K_{\alpha\rho\chi}} = \frac{M_{\alpha\kappa\iota\nu}}{M_{o\lambda}} = \frac{m}{2m+m} = \frac{1}{3}$

Αλλιώς, το δείχνετε: $2m\upsilon = (2m+m)V \Rightarrow V = \frac{2\upsilon}{3}$

$$|\Delta K| = K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}2m\upsilon^2 - \frac{1}{2}3m\left(\frac{2\upsilon}{3}\right)^2 = \frac{1}{2}2m\upsilon^2\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}K_{\alpha\rho\chi}$$

Κατακόρυφος κύκλος πάλι

Ποια από της παρακάτω εικόνες αντιπροσωπεύει καλύτερα την επιτάχυνση της μαθηματικού εκκρεμούς που κινείται από το σημείο ***a*** στο σημείο ***e;***



Γ) Δεν είναι η Δ) γιατί η κίνηση μπορεί να είναι κυκλική αλλά δεν είναι ομαλή κυκλική. Υπάρχει επιτρόχια επιτάχυνση (και επιβράδυνση) και άρα η επιτάχυνση δείχνει προς τα κοίλα της τροχιάς. Η Δ) είναι η τάση του νήματος η οποία μαζί με το βάρος δίνει την Γ) για τη συνολική δύναμη. Η Β) είναι η ταχύτητα του εκκρεμούς (εφαπτόμενη στην τροχιά).

Κεντρομόλος και επιτρόχια επιτάχυνση

Ένα υλικό σημείο κινείται στην περιφέρεια της κύκλου ακτίνας R. Η ταχύτητά του δίνεται από τη σχέση $\upsilon = ks^{3/2}$, όπου s είναι το διανυόμενο τόξο πάνω στον κύκλο και k είναι μια σταθερά. Ο λόγος της κεντρομόλου, α_κ , της την επιτρόχιο, α_ε , επιτάχυνση είναι :

Α) $\dfrac{\alpha_\kappa}{\alpha_\varepsilon} = \dfrac{2s}{R}$ Β) $\dfrac{\alpha_\kappa}{\alpha_\varepsilon} = \dfrac{3s}{R}$ Γ) $\dfrac{\alpha_\kappa}{\alpha_\varepsilon} = \dfrac{s}{2R}$ Δ) $\dfrac{\alpha_\kappa}{\alpha_\varepsilon} = \dfrac{2s}{3R}$

Δ) $a_\varepsilon = \dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{d\upsilon}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{3}{2}ks^{1/2} \cdot ks^{3/2} = \dfrac{3k^2}{2}s^2$

$$a_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{k^2 s^3}{R}$$

Επιτάχυνση ως προς τη θέση

Ένα σωματίδιο μοναδιαίας μάζας κινείται σε μία διάσταση έτσι ώστε η ταχύτητα του να δίνεται από τη σχέση $\upsilon(x) = ax^{-n}$, όπου a, n είναι σταθερές και x η θέση του σωματιδίου. Ποια είναι η επιτάχυνση του σωματιδίου ως συνάρτηση της θέσης x ;

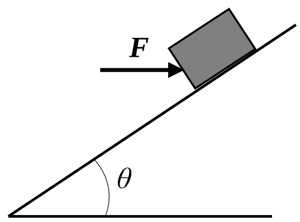
Α) $-na^2x^{-2n-1}$ Β) $-na^2x^{-n-1}$ Γ) $-ax^{-n+1}$ Δ) $-ax^{-2n+1}$

Α) Απλή άσκηση εφαρμογής του ορισμού της επιτάχυνσης που απαιτεί μόνο γνώση παραγώγισης και κανόνα αλυσίδας

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\upsilon = \frac{d}{dt}(ax^{-n}) \cdot ax^{-n} = -nax^{-n-1} \cdot ax^{-n} = -na^2x^{-2n-1}$$

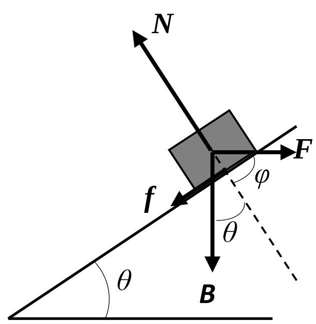
Τριβή σε κεκλιμένο επίπεδο

Μια οριζόντια δύναμη σπρώχνει σώμα μάζας *m*, σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας *θ* ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ του σώματος και του κεκλιμένου επιπέδου είναι *μ*. Το μέτρο της δύναμης της τριβής που ασκείται στο σώμα είναι :



A) $\mu mg\cos\theta$ B) $\frac{\mu mg}{\cos\theta}$ Γ) $\mu(mg\cos\theta + F\sin\theta)$ Δ) $\mu(mg\cos\theta - F\sin\theta)$

Γ) Απλή άσκηση ορισμών. Η τριβή είναι ανάλογη της κάθετης αντίδρασης της προσέξτε ότι η κάθετη στο επίπεδο δεν ταυτίζεται με την κατακόρυφη αφού αυτό είναι κεκλιμένο. Η τροχιά του σώματος είναι πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο άρα δεν επιταχύνεται στην κάθετη όπου πρέπει οι δυνάμεις να ισορροπούν. Σχεδιάζουμε της δυνάμεις



και έχουμε

$$\theta + \varphi = 90^{\circ} \Rightarrow \sin\theta = \cos\varphi$$

$$N = B_{\perp} + F_{\perp} = B\cos\theta + F\cos\varphi = mg\cos\theta + F\sin\theta$$

$$f = \mu N = \mu(mg\cos\theta + F\sin\theta)$$

Υπολογισμός ροπής

Έστω ότι εφαρμόζουμε τη δύναμη $\vec{F}$ = (5, 3, -2) N στη θέση $\vec{r}$ = (-2, 1, -3) m. Η ροπή, $\vec{\tau}$, της δύναμης ως της την αρχή των αξόνων είναι:

A) $\vec{\tau}$ = (7, -19, -11) Nm B) $\vec{\tau}$ = (11, 11, 1) Nm

Γ) $\vec{\tau}$ = (-11, -11, -1) Nm Δ) $\vec{\tau}$ = (-7, 19, 11) Nm

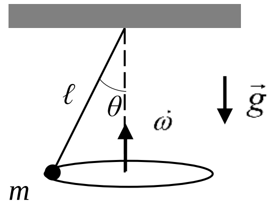
A) Απλή εφαρμογή του ορισμού της ροπής ως εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 5 & 3 & -2 \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \end{vmatrix} = \hat{x}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + \hat{y}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + \hat{z}(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{x}[1\cdot(-2) - (-3)\cdot 3] - \hat{y}[(-2)\cdot(-2) - (-3)\cdot 5] + \hat{z}[(-2)\cdot 3 - 1\cdot 5] = 7\hat{x} - 19\hat{y} - 11\hat{z} = (7,-19,-11)$$

Κωνικό εκκρεμές πάλι

Στο κωνικό εκκρεμές του σχήματος μια μάζα m που κρέμεται από αβαρές νήμα μήκους ℓ, εκτελεί μέσα στο πεδίο βαρύτητας μια ομοιόμορφη κυκλική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$. Για τη γωνία, θ, που σχηματίζει το νήμα με τον κατακόρυφο άξονα ισχύει:



Α) $\cos\theta = \dfrac{g}{\ell\omega^2}$ Β) $\sin\theta = \dfrac{g}{\ell\omega^2}$ Γ) $\tan\theta = \dfrac{g}{\ell\omega^2}$ Δ) $\cot\theta = \dfrac{g}{\ell\omega^2}$

Α)

Κατακόρυφα : $F_{o\lambda,y} = 0 \Rightarrow T\cos\theta - B = 0 \Rightarrow T\cos\theta = mg$

Οριζόντια : $F_{o\lambda,x} = ma_x \Rightarrow T\sin\theta = ma_\kappa \Rightarrow T\sin\theta = m\dfrac{\upsilon^2}{R}$

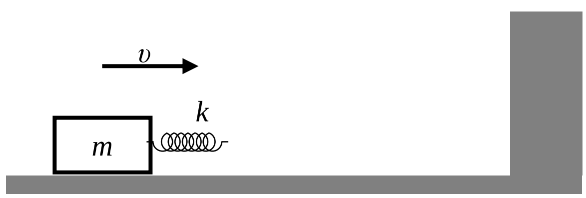
Διαιρώντας κατά μέλη καταλήγουμε στην εξίσωση :

$$\tan\theta = \frac{\upsilon^2}{gR}$$

Οπότε αντικαθιστώντας $R = \ell\sin\theta$ και $\upsilon = \omega R$ οδηγεί στην απάντηση Α): $\tan\theta = \dfrac{\upsilon^2}{gR} \Rightarrow \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\omega^2 R}{g} \Rightarrow \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\omega^2\ell\sin\theta}{g} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{g}{\ell\omega^2}$.

Θέμα διαστατικής ανάλυσης

Ένα σώμα μάζας m φέρει ένα ελατήριο σταθεράς k και αμελητέας μάζας της φαίνεται στο σχήμα και κινείται με σταθερή ταχύτητα υ πάνω σ' ένα οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές. Στο τέλος της διαδρομής του υπάρχει της σταθερός τοίχος. Η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου είναι:



Α) $\upsilon\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ Β) $\sqrt{\dfrac{k}{\upsilon m}}$ Γ) $\sqrt{\dfrac{\upsilon k}{m}}$ Δ) $\upsilon\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

Δ) Μόνο αυτή η απάντηση έχει διαστάσεις μήκους. Θυμάστε από την περίοδο του απλού αρμονικού ταλαντωτή ότι ο συνδυασμός $\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ έχει διαστάσεις χρόνου $\left[\sqrt{\dfrac{m}{k}}\right] = \mathrm{s}$ και άρα ο $\upsilon\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ θα έχει διαστάσεις μήκους $\left[\upsilon\sqrt{\dfrac{m}{k}}\right] = [\upsilon]\left[\sqrt{\dfrac{m}{k}}\right] = \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\mathrm{s} = \mathrm{m}$

Αλλιώς χρησιμοποιείται την αρχή διατήρησης της ενέργειας καθώς η μόνη δύναμη που ενεργεί οριζόντια, αυτή του ελατηρίου, είναι διατηρητική :

$$E_A = E_B \Rightarrow K_A + U_{sA} = K_B + U_{sB} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow x = \upsilon\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Απόσταση ακινητοποίησης με φρενάρισμα

Δύο πανομοιότυπα σώματα (1 και 2) μάζας m και σχήματος παραλληλεπιπέδου ολισθαίνουν πάνω σε δύο διαφορετικά οριζόντια επίπεδα με συντελεστές τριβής ολίσθησης μ_1 και μ_2 αντίστοιχα, για της οποίους ισχύει $\mu_1 = 2\mu_2$. Αν την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$ τα σώματα αυτά ξεκινούν με αρχικές ταχύτητες υ_{01} και υ_{02} αντίστοιχα, και ισχύει $\upsilon_{01} = 2\upsilon_{02}$, τότε ο λόγος των αποστάσεων s_1 και s_2 που διανύουν τα σώματα 1 και 2, αντίστοιχα, έως ότου σταματήσουν είναι:

Α) $\frac{s_1}{s_2} = 2$ Β) $\frac{s_1}{s_2} = \frac{1}{2}$ Γ) $\frac{s_1}{s_2} = 4$ Δ) $\frac{s_1}{s_2} = \frac{1}{4}$

Α) Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας βρίσκουμε την απόσταση που χρειάζεται να ενεργήσει η τριβή για να σταματήσει το σώμα

$$\Delta K = W_f \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -\mu N s = -\mu m g s \Rightarrow s = \frac{\upsilon_0^2}{2\mu g}$$

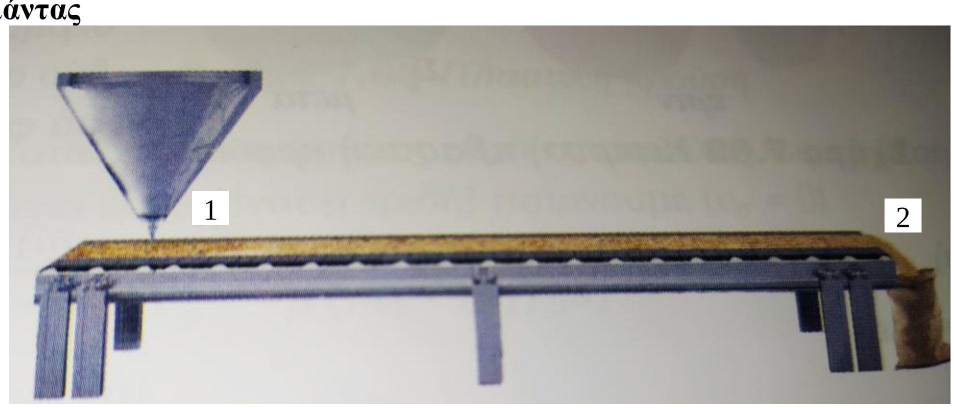
Το ίδιο τύπο θα παίρναμε και από κινηματική $s = \frac{\upsilon_0^2}{2a}$ αφού :

$$a = F_{o\lambda}/m = f/m = \mu N/m = \mu m g/m = \mu g$$

Άρα :

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\upsilon_{01}^2/2\mu_1 g}{\upsilon_{02}^2/2\mu_2 g} = \left(\frac{\upsilon_{01}}{\upsilon_{02}}\right)^2 \frac{\mu_2}{\mu_1} = 2^2 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

Ιμάντας



Ο ιμάντας δέχεται μάζα με ρυθμό $\frac{dm_1}{dt}$ και ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1' = 0$ στο σημείο 1 και την αδειάζει με ρυθμό $\frac{dm_2}{dt}$ και ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2' = \vec{\upsilon}$ στο σημείο 2. Έστω ότι οι ρυθμοί αυτοί είναι ίσοι, άρα η μάζα του ιμάντα θα παραμένει σταθερή.

$\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt} = \mu$, εφόσον γεμίσει ο ιμάντας $m = \sigma\tau\alpha\theta$

1) Τι δύναμη χρειάζεται να ασκείται στον ιμάντα ώστε να κινείται με σταθερή ταχύτητα υ ?
2) Αν σταματήσουμε να ασκούμε την παραπάνω δύναμη σε πόσο χρονικό διάστημα η ταχύτητα του ιμάντα θα πέσει στο 1/100 της τιμής της ?

1) Ό τύπος που εφαρμόζεται σε σύστημα μεταβλητής μάζας γενικεύεται σε :

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}+\frac{dm_1}{dt}(\vec{\upsilon}_1'-\vec{\upsilon})+\frac{dm_2}{dt}(\vec{\upsilon}_2'-\vec{\upsilon})$$

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=F+\mu(0-\upsilon)+\mu(\upsilon-\upsilon)\Rightarrow m\frac{d\upsilon}{dt}=F-\mu\upsilon$$

Για να κινείται με σταθερή ταχύτητα ο ιμάντας πρέπει να του ασκείται δύναμη

$$0=F-\mu\upsilon\Rightarrow F=\mu\upsilon$$

2) Αν σταματήσει να ασκείται αυτή η δύναμη

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=0-\mu\upsilon\Rightarrow\frac{d\upsilon}{\upsilon}=-\frac{\mu}{m}dt\Rightarrow\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon}=-\int_0^t\frac{\mu}{m}dt\Rightarrow\ln\upsilon\Big|_{\upsilon_0}^{\upsilon}=-\frac{\mu}{m}t\Rightarrow$$

$$\upsilon(t)=\upsilon_0e^{-\frac{\mu}{m}t}$$

ο ιμάντας θα σταματήσει εκθετικά

Αριθμητική εφαρμογή.

Τι δύναμη χρειάζεται για να κινείται ο ιμάντας με ταχύτητα υ=2 m/s όταν η μάζα του μαζί με το φορτίο είναι 500 kg και τον φορτώνουμε με ρυθμό $\frac{dm_1}{dt}=\mu=50\text{ kg/s}$.

Αν η παραπάνω δύναμη σταματήσει να ασκείται σε πόσο χρονικό διάστημα η ταχύτητα του ιμάντα θα πέσει στο ένα εκατοστό της?

$$F=\mu\upsilon=50\cdot\ 2=100\text{ N}$$

$$\upsilon(t)=\upsilon_0e^{-\frac{\mu}{m}t}\Rightarrow\frac{\upsilon_0}{100}=\upsilon_0e^{-\frac{5}{500}t}\Rightarrow100=e^{0,01t}\Rightarrow\ln100=0,01t\Rightarrow$$

$$t=\frac{2\ln10}{0,01}=469,5\text{ s}=7\text{ min }40,5\text{ s}$$

Σφαιρική κατανομή μάζας

Μια σφαίρα μάζας M φτιάχνεται από σφαιρικά κελύφη μαζών M_R, άρα αρκεί αρχικά να υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκεί ένα σφαιρικό κέλυφος και μετά να τα προσθέσουμε όλα.

Υπολογίζουμε το δυναμικό που είναι βαθμωτό για να μην έχουμε να κάνουμε με διανύσματα και μετά βρίσκουμε τη δύναμη από $\vec{F}=-\vec{\nabla}U$

Ένα σφαιρικό κέλυφος φτιάχνεται από κυκλικούς δακτυλίους, οπότε βρίσκουμε τη δυναμική ενέργεια μεταξύ μιας μάζας m και ενός κυκλικού δακτυλίου μάζας dM και μετά προσθέτουμε (ολοκληρώνουμε) τις δυναμικές ενέργειες όλων των δακτυλίων που φτιάχνουν το σφαιρικό κέλυφος.

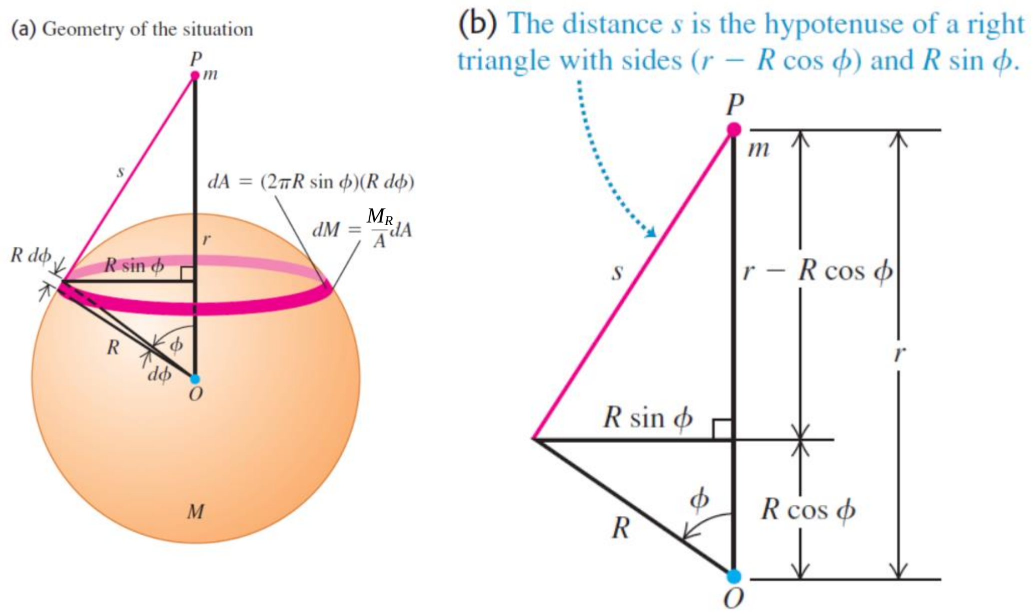
Ένας δακτύλιος αποτελείται από υλικά σημεία μάζας m_i : $dM=\sum_{i=1}^{\infty}m_i$ (1)

Οι δακτύλιοι βρίσκονται σε επίπεδο κάθετο στην ευθεία που ενώνει τη μάζα m με το κέντρο του σφαιρικού κελύφους.

Όλα τα σημεία του δακτυλίου απέχουν την ίδια απόσταση s από τη μάζα m.

Η δυναμική ενέργεια μεταξύ ενός σημείου m_i του δακτυλίου και της μάζας m είναι :

$$U_i=-\frac{Gmm_i}{s}\qquad(2)$$



Η δυναμική ενέργεια dU μεταξύ της μάζας m και ολόκληρου του δακτυλίου μάζας dM βρίσκεται από τον κανόνα της υπέρθεσης, προσθέτοντας όλες τις U_i

$$dU = \sum_{i=1}^{\infty} U_i = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{Gmm_i}{s} = -\frac{Gm}{s}\sum_{i=1}^{\infty} m_i = -\frac{GmdM}{s} \qquad (3)$$

Για να βρούμε τη μάζα dM του δακτυλίου χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το σφαιρικό κέλυφος είναι ομογενές και άρα η μάζα του δακτυλίου θα είναι ανάλογη με το εμβαδόν του :

$$dM = \sigma dA = \frac{M_R}{A} dA \qquad (4)$$

όπου $\sigma = M_R/A$ η επιφανειακή πυκνότητα μάζας του κελύφους [kg/m^2] με M_R τη συνολική μάζα του κελύφους και $A = 4\pi R^2$ το εμβαδόν του.

Η ακτίνα του δακτυλίου είναι $R\sin\varphi$ και άρα η περίμετρός του είναι $2\pi R\sin\varphi$. Αυτό είναι το μήκος του. Το πλάτος του δακτυλίου είναι $Rd\varphi$. Το εμβαδόν του δακτυλίου είναι (μήκος x πλάτος) :

$$dA = (2\pi R\sin\varphi)(Rd\varphi) = 2\pi R^2 \sin\varphi d\varphi \qquad (5)$$

Άρα η μάζα του δακτυλίου είναι

$$dM = \frac{M_R}{4\pi R^2} 2\pi R^2 \sin\varphi d\varphi = \frac{M_R}{2}\sin\varphi d\varphi \qquad (6)$$

Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση στην δυναμική ενέργεια dU έχουμε τελικά :

$$dU = -\frac{GmM_R}{2}\frac{\sin\varphi d\varphi}{s} \qquad (7)$$

Για να ολοκληρώσουμε αυτή την έκφραση πρέπει να βρούμε πως συνδέονται οι μεταβλητές s και φ. Από γεωμετρία (Πυθαγόρειο θεώρημα) :

$$s^2 = (r - R\cos\varphi)^2 + (R\sin\varphi)^2 = r^2 - 2rR\cos\varphi + R^2\cos^2\varphi + R^2\sin^2\varphi \Rightarrow$$

$$s^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\varphi \qquad (8)$$

Όταν η γωνία φ μεταβάλλεται από 0 έως π, η απόσταση s μεταβάλλεται από $r - R$ έως $r + R$. Το πως συνδέονται οι μεταβολές τους το βρίσκουμε παραγωγίζοντας. Έτσι παίρνουμε

$$\frac{d}{d\varphi}(s^2) = \frac{d}{d\varphi}(r^2 + R^2 - 2rR\cos\varphi) \Rightarrow 2s\frac{ds}{d\varphi} = 2rR\sin\varphi$$

$$\sin\varphi d\varphi = \frac{sds}{rR} \qquad (9)$$

το οποίο αντικαθιστούμε στην (7) για να πάρουμε

$$dU = -\frac{GmM_R}{2}\frac{1}{s}\frac{sds}{rR} \Rightarrow dU = -\frac{GmM_R}{2rR}ds \qquad (10)$$

Αυτή η έκφραση μπορεί τώρα να ολοκληρωθεί εύκολα για μας δώσει τη δυναμική ενέργεια μεταξύ της μάζας *m* που βρίσκεται σε απόσταση *r* από το κέντρο ομογενούς σφαιρικού κελύφους μάζας M_R και ακτίνας *R*:

$$U(m,r,M_R,R) = \int_{r-R}^{r+R} dU = -\frac{GmM_R}{2rR}\int_{r-R}^{r+R} ds \qquad (11)$$

Κάνοντας το απλό ολοκλήρωμα παίρνουμε

$$U(m,r,M_R,R) = -\frac{GmM_R}{2rR}\int_{r-R}^{r+R} ds = -\frac{GmM_R}{2rR}\left[\left(r+R\right)-\left(r-R\right)\right] = -\frac{GmM_R}{2rR}2R$$

$$U_{\varepsilon\xi\ \sigma\varphi\ \kappa\varepsilon\lambda}(m,r,M_R,R) = -\frac{GmM_R}{r} \qquad (12)$$

Παρατηρούμε ότι η δυναμική ενέργεια δεν εξαρτάται από την ακτίνα *R* του κελύφους και είναι ίση με τη δυναμική ενέργεια δύο υλικών σημείων μάζας *m* και *M*.

Για να βρούμε την δυναμική ενέργεια της μάζας *m* με όλη τη σφαίρα προσθέτουμε τις δυναμικές ενέργειες με όλα τα κελύφη μάζας M_R που φτιάχνουν τη σφαίρα ακτίνας $R_{\sigma\varphi}$ και μάζας $M = \sum_R M_R$

$$U_{\sigma\varphi\alpha\iota\rho\alpha}(m,r,M,R_{\sigma\varphi}) = \sum_{R=0}^{R=R_{\sigma\varphi}} U_{\varepsilon\xi\ \sigma\varphi\ \kappa\varepsilon\lambda}(m,r,M_R,R) = -\frac{Gm}{r}\sum_{R=0}^{R=R_{\sigma\varphi}} M_R \Rightarrow \qquad (13)$$

$$U_{\sigma\varphi\alpha\iota\rho\alpha}(m,r,M,R_{\sigma\varphi}) = -\frac{GmM}{r} \qquad (14)$$

Η δυναμική ενέργεια μεταξύ υλικού σημείου *m* που βρίσκεται σε απόσταση *r* από το κέντρο σφαίρας *M* είναι ίδια με τη δυναμική ενέργεια δύο υλικών σημείων *m* και *M* σε απόσταση *r*.

Άρα και η δύναμη μεταξύ τους θα είναι ίδια. Πράγματι αν την υπολογίσουμε παίρνουμε

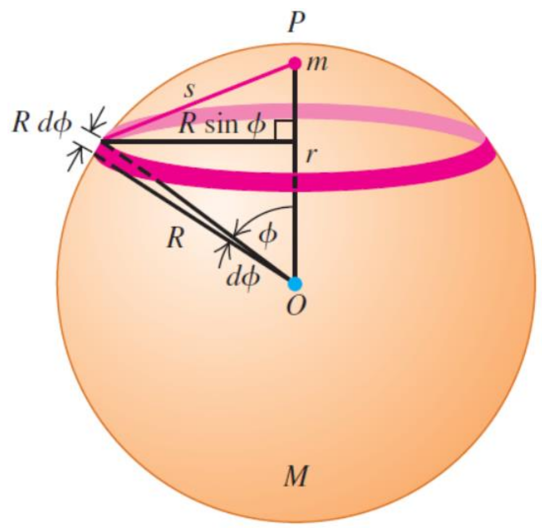
$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(-\frac{GmM}{r}\right) = GmM\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\hat{r} \Rightarrow$$

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\hat{r}$$

Δύναμη στο εσωτερικό σφαιρικού κελύφους

Έχοντας όλη την παραπάνω ανάλυση έτοιμη μπορούμε να εξάγουμε πάλι το γνωστό αποτέλεσμα ότι η δύναμη που ασκεί ένα σφαιρικό κέλυφος σε μια μάζα στο εσωτερικό του είναι ίση με μηδέν. Αρκεί να δείξουμε ότι η δυναμική ενέργεια στο εσωτερικό του κελύφους είναι σταθερή. Αφού η δύναμη είναι η βαθμίδα (παράγωγος) της δυναμικής ενέργειας τότε η δύναμη θα είναι μηδέν.

Όταν βρισκόμαστε στο εσωτερικό του κελύφους η παραπάνω ανάλυση ακολουθεί την ίδια ακριβώς πορεία και όλες οι εξισώσεις είναι ακριβώς ίδιες μέχρι και την εξίσωση (10). Η μόνη αλλαγή γίνεται στα όρια της ολοκλήρωσης στην εξίσωση (11). Επειδή τώρα βρισκόμαστε στο εσωτερικό του κελύφους τα όρια του *s* είναι από $R - r$ (όταν η γωνία φ είναι ίση με 0) έως $R + r$ (όταν η γωνία φ είναι ίση με π).



$$U(m,r,M,R) = \int_{R-r}^{R+r} dU = -\frac{GmM}{2rR}\int_{R-r}^{R+r} ds = -\frac{GmM}{2rR}\Big[\,(R+r)-(R-r)\Big] = -\frac{GmM}{2rR}2r$$

$$U_{\varepsilon\sigma\ \ \sigma\varphi\ \kappa\varepsilon\lambda}(m,r,M,R) = -\frac{GmM}{R} = \sigma\tau\alpha\theta$$

Νόμος Gauss για βαρυτικό πεδίο

Πεδίο

Ένταση πεδίου = Δύναμη ανά μονάδα φορτίου : $\vec{g} = \dfrac{\vec{F}}{m}$

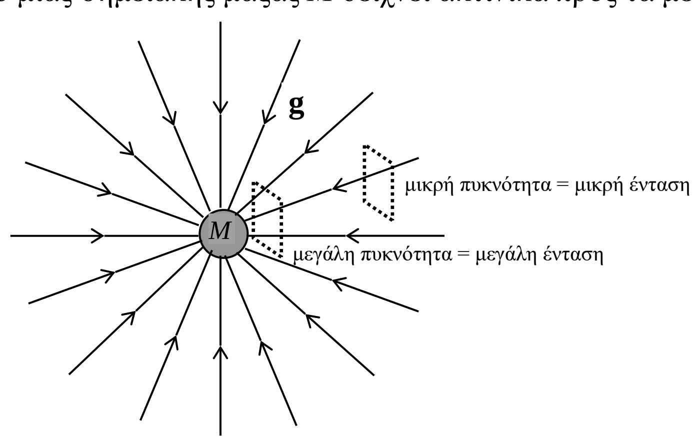
Για υλικό σημείο μάζας *m* στο πεδίο υλικού σημείου μάζας:

$$\vec{g}(r) = \frac{1}{m}\left(-G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}\right) \Rightarrow \vec{g}(r) = -G\frac{M}{r^2}\hat{r}$$

Το βαρυτικό πεδίο χαρακτηρίζεται από τις λεγόμενες δυναμικές γραμμές. Οι γραμμές αυτές είναι τέτοιες ώστε :

1. η κατεύθυνση της έντασης του πεδίου ***g*** (και άρα της δύναμης) να είναι σε κάθε σημείο εφαπτόμενη της δυναμικής γραμμής που περνάει από εκείνο το σημείο
2. η επιφανειακή πυκνότητα των γραμμών σε ένα σημείο ως προς μια επιφάνεια κάθετη σε αυτές να είναι ίση με την ένταση του πεδίου στο σημείο εκείνο

Π.χ. το βαρυτικό πεδίο μίας σημειακής μάζας *M* δείχνει ακτινικά προς τα μέσα και παρουσιάζεται παρακάτω:

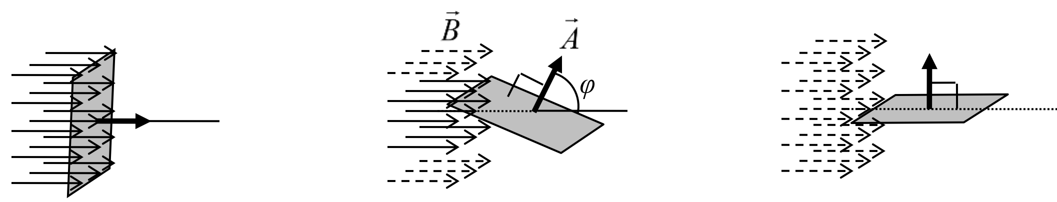


Ροή

Αφού η ένταση του βαρυτικού πεδίου $\vec{g}(r) = -G\dfrac{M}{r^2}\hat{r}$, ερμηνεύεται ως η επιφανειακή πυκνότητα των δυναμικών γραμμών τότε το μέγεθος : *ένταση πεδίου* επί *επιφάνεια* θα ισούται με τον αριθμό των δυναμικών γραμμών που διαπερνούν την επιφάνεια.

ένταση πεδίου επί *επιφάνεια = πλήθος δυναμικών γραμμών διαμέσου της επιφάνειας*

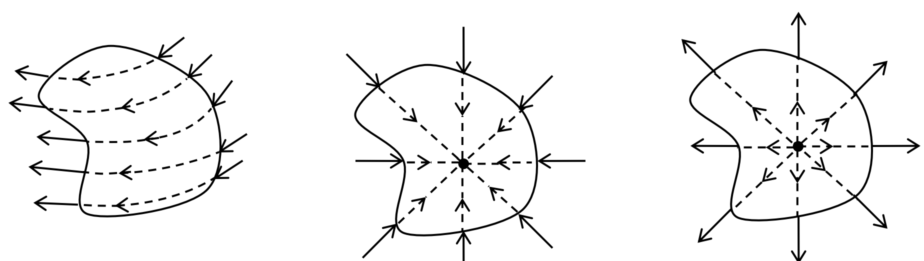
Το μέγεθος αυτό ονομάζεται **ροή**. Γενικά, για ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{B}$ η ροή του μέσω μιας στοιχειώδους επιφάνειας $d\vec{A}$ ορίζεται ως : $d\Phi = \vec{B}\cdot d\vec{A} = B\cos\varphi dA$. Το διάνυσμα $d\vec{A}$ έχει μέτρο όσο το εμβαδό του στοιχείου της επιφάνειας και προσανατολισμό κάθετα στην επιφάνεια προς την έξω μεριά της (όταν είναι κλειστή, αλλιώς επιλέγουμε τη φορά). Η στοιχειώδης επιφάνεια $d\vec{A}$ είναι τόσο μικρή ώστε να θεωρείται επίπεδη και το πεδίο $\vec{B}$ να είναι σταθερό παντού πάνω της. Για επίπεδη επιφάνεια και σταθερό πεδίο η ροή εξαρτάται μόνο από τον προσανατολισμό τους:



$\Phi = BA\cdot 1 = BA$ $\Phi = BA\cos\varphi$ $\Phi = BA\cdot 0 = 0$

Η συνολική ροή μέσω μιας επιφάνειας θα ορίζεται ως το ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου πάνω στην επιφάνεια: $\Phi = \int_A \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int_A B\cos\varphi dA$.

Όταν η επιφάνεια είναι **κλειστή** τότε θετική ροή σημαίνει ότι οι γραμμές του πεδίου βγαίνουν προς τα έξω ενώ αρνητική ότι κατευθύνονται προς το εσωτερικό της επιφάνειας. Τέλος, μηδέν ροή σημαίνει ότι όσες γραμμές μπαίνουν στην επιφάνεια τόσες και βγαίνουν από αυτήν.



Φ=0 *Φ*<0 καταβόθρα *Φ*>0 πηγή

Για το πεδίο έντασης της βαρύτητας, οι γραμμές του οποίου καταλήγουν πάντα σε μάζες, η ροή μέσω μιας κλειστής επιφάνειας θα είναι είτε ίση με το μηδέν αν η επιφάνεια δεν περικλείει μάζες είτε αρνητική αν περιέχει μάζες στο εσωτερικό της.

Θεώρημα απόκλισης

Απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου $\vec{B}$ σε κάποιο σημείο του χώρου (*x*,*y*,*z*,) ορίζεται ως:

το όριο του λόγου της ροής του $\vec{B}$ μέσα από μια κλειστή επιφάνεια A γύρω από το σημείο $(x,y,z,)$ προς τον όγκο V_A που περικλείει η επιφάνεια, όταν η επιφάνεια συρρικνώνεται στο σημείο $(x,y,z,)$ και άρα ο περικλειόμενος όγκος της τείνει στο μηδέν

$$\mathrm{div}\vec{B} = \lim_{V_A\to 0}\left(\frac{\Phi_B}{V_A}\right) = \lim_{V_A\to 0}\left(\frac{\int_A \vec{B}\cdot\, d\vec{A}}{V_A}\right)$$

Η απόκλιση είναι βαθμωτή συνάρτηση.

Αποδεικνύεται (θεώρημα απόκλισης) ότι :

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\ \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}}$$

Θεώρημα απόκλισης : $\int_A \vec{B}\cdot\ d\vec{A} = \int_{V_A} \vec{\nabla}\cdot\ \vec{B}\ dV$

Νόμος Gauss

Επειδή η **βαρυτική ένταση** ακολουθεί **νόμο αντιστρόφου τετραγώνου**, η **ροή** της μέσω μιας **κλειστής επιφάνειας είναι ανάλογη της περικλειόμενης** από την επιφάνεια **μάζας** ανεξάρτητα από το σχήμα της επιφάνειας. Αυτός είναι ο **νόμος του Gauss** :

$$\boxed{\Phi_g = -4\pi G M_{\pi\varepsilon\rho\iota\kappa\lambda}}$$

όπου $M_{\pi\varepsilon\rho\iota\kappa\lambda}$ είναι η μάζα που περικλείεται στην κλειστή επιφάνεια A και $\Phi_g = \int_A \vec{g}\cdot d\vec{A}$ η βαρυτική ροή από την κλειστή επιφάνεια. Η παραπάνω είναι η ***ολοκληρωτική*** μορφή του νόμου.

Επειδή η περικλειόμενη μάζα είναι $M_{\pi\varepsilon\rho\iota\kappa\lambda} = \int_V \rho dV$, όπου ρ η πυκνότητα μάζας μέσα στον όγκο V που περικλείει η επιφάνεια A, συνδυάζοντας με το θεώρημα της απόκλισης $\int_A \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{B}dV$ που ισχύει για κάθε διανυσματικό πεδίο $\vec{B}$ (ουσιαστικά είναι ο ορισμός της απόκλισης) παίρνουμε :

$$\Phi_g = -4\pi G M_{\pi\varepsilon\rho\iota\kappa\lambda} \Rightarrow \int_A \vec{g}\cdot\ d\vec{A} = -4\pi G\int_{V_A}\rho dV \Rightarrow \int_{V_A}\vec{\nabla}\cdot\ \vec{g}dV = -4\pi G\int_{V_A}\rho dV \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{g} = -4\pi G\rho}$$

Αυτή είναι η ***διαφορική*** μορφή του νόμου του Gauss για το βαρυτικό πεδίο και ισχύει σε κάθε σημείο του χώρου.

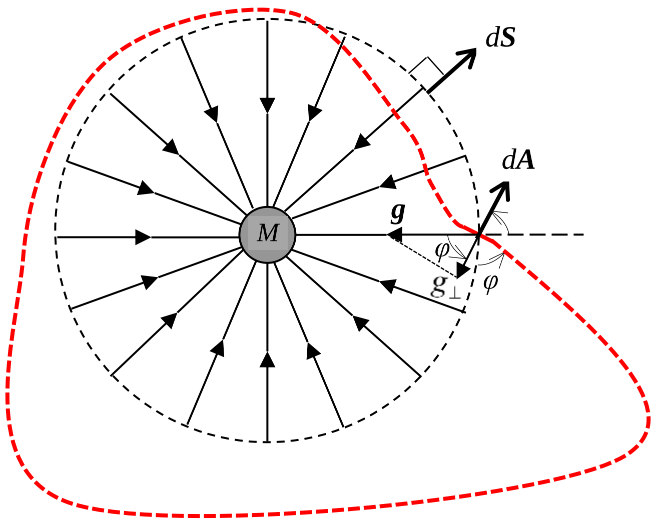
Ο ίδιος νόμος ισχύει και για το ηλεκτροστατικό πεδίο του οποίου η ένταση ακολουθεί επίσης νόμο αντίστροφου τετραγώνου : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$.

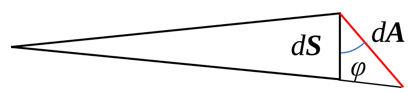
Αντικαθιστώντας $G \to -1/4\pi\varepsilon_0$ και $M \to Q$ παίρνουμε :

$$\int_{A} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{περικλ}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad ,$$

που είναι η 1η εξίσωση του Maxwell. Βλέπουμε ότι το βαρυτικό πεδίο μιας μάζας μοιάζει με το ηλεκτρικό πεδίο ενός αρνητικού φορτίου $M \to -|Q|$: δυναμικές γραμμές προς το φορτίο.

Ο νόμος του Gauss αποδεικνύεται εύκολα για το βαρυτικό πεδίο μιας σημειακής μάζας θεωρώντας μια τυχαία σφαιρική επιφάνεια S που την περικλείει





Για μια σφαίρα S ακτίνας R, το κάθε στοιχείο της επιφάνειάς της είναι στη διεύθυνση του μοναδιαίου ακτινικού διανύσματος $\hat{r}$ με εμβαδό $dS = R^2 d\Omega$. Η ένταση του πεδίου βαρύτητας $\vec{g} = g\hat{r}$ είναι στην ακτινική διεύθυνση $\hat{r}$ και έχει σταθερή τιμή $g = -G\dfrac{M}{R^2}$ παντού πάνω στη σφαίρα. Έτσι το g βγαίνει έξω από το ολοκλήρωμα και το ολοκλήρωμα δίνει απλώς το εμβαδόν της σφαίρας:

$$\int_S \vec{g}\cdot d\vec{S} = \int_S g\hat{r}\cdot\hat{r}dS = g\int_S dS = -G\frac{M}{R^2}4\pi R^2 = -4\pi GM$$

Αν η επιφάνεια A δεν είναι σφαιρική, κάθε στοιχείο της θα σχηματίζει γωνία φ με την σφαιρική επιφάνεια S που περνάει από το αντίστοιχο σημείο r. Επειδή η δύναμη είναι κεντρική η γωνία αυτή θα είναι ίση με τη γωνία μεταξύ της g και της προβολής της, $g_\perp$, κάθετα στην επιφάνεια: $\cos\varphi = \dfrac{g_\perp}{g} = \dfrac{dS}{dA} \Rightarrow \vec{g}\cdot d\vec{A} = g_\perp dA = gdS$. Τέλος επειδή $g(r) = -GM/r^2$ ενώ $dS(r) = r^2 d\Omega$ η εξάρτηση από την ακτίνα απαλείφεται $g(r)dS = -\dfrac{GM}{r^2}r^2 d\Omega = -GMd\Omega$ και μένει μόνο το ολοκλήρωμα της στερεάς γωνίας που δίνει το 4π :

$$\Phi_A = \int_A \vec{g}\cdot\, d\vec{A} = \int_A g\cos\varphi dA = \int_A g\frac{dS}{dA}dA =$$

$$= \int_A g(r)dS(r) = -GM\int_A \frac{1}{r^2}r^2 d\Omega = -GM\int_A d\Omega \Rightarrow$$

Αν η μάζα δεν είναι σημειακή τότε τη γράφουμε σαν άθροισμα (ή ολοκλήρωμα) σημειακών μαζών $M=\sum_i m_i$. Το βαρυτικό πεδίο που δημιουργούν αυτές οι στοιχειώδεις σημειακές μάζες είναι το άθροισμα των πεδίων που δημιουργεί η καθεμία ξεχωριστά : $\vec{g}=\sum_i \vec{g}_i$. Αυτό λέγεται αρχή της επαλληλίας, είναι επιβεβαιωμένο πειραματικά και ισχύει και για τις ηλεκτρικές δυνάμεις. Οπότε πάλι :

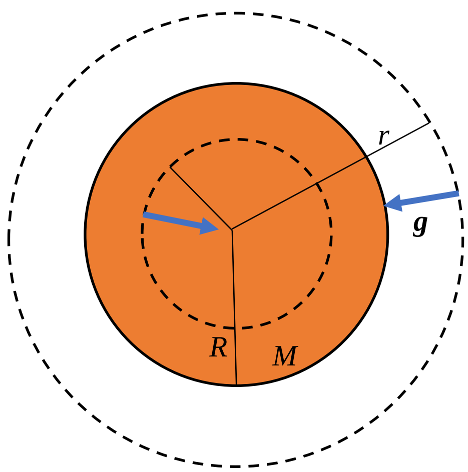
$$\int_A \vec{g}\cdot d\vec{A}=\int_A \sum_i \vec{g}_i\cdot d\vec{A}=\sum_i \int_A \vec{g}\cdot d\vec{A}=-4\pi G\sum_i m_i=-4\pi GM$$

Σφαιρική κατανομή πάλι, με νόμο Gauss

Χρησιμοποιώντας το **νόμο του Gauss** και τη **συμμετρία** παίρνουμε εύκολα τα αποτελέσματα που εξαγάγαμε ως τώρα για σφαιρικές κατανομές μάζας : μηδέν πεδίο στο εσωτερικό ομογενούς σφαιρικού φλοιού, ισοδύναμο με σημειακής μάζας στο εξωτερικό ομογενούς σφαιρικής κατανομής, ανάλογο με την απόσταση από το κέντρο στο εσωτερικό ομογενούς σφαιρικής κατανομής

Από τη σφαιρική συμμετρία της κατανομής μάζας, το βαρυτικό πεδίο θα είναι αναγκαστικά στην ακτινική διεύθυνση και το μέτρο του θα εξαρτάται μόνο από την απόσταση *r* από το κέντρο της σφαίρας

$$\vec{g}=g(r)\hat{r}$$



Νόμος Gauss στο εξωτερικό της σφαίρας: $r>R \qquad M_{\pi\varepsilon\rho\iota\kappa\lambda}=M$

$$\Phi_g=-4\pi GM_{\pi\varepsilon\rho\iota\kappa\lambda}\Rightarrow \int_S \vec{g}_{out}\cdot\, d\vec{S}=-4\pi GM\Rightarrow \int_S g_{out}(r)\hat{r}\cdot\, d\vec{S}=-4\pi GM\Rightarrow$$

$$g_{out}(r)\int_S dS=-4\pi GM\Rightarrow g_{out}(r)4\pi r^2=-4\pi GM\Rightarrow g_{out}(r)=-\frac{GM}{r^2}$$

Νόμος Gauss στο εσωτερικό της σφαίρας:

$$r<R \qquad M_{\pi\varepsilon\rho\iota\kappa\lambda}=\rho V(r)=\frac{M}{4\pi R^3/3}4\pi r^3/3=M\frac{r^3}{R^3}$$

$$\Phi_g=-4\pi GM_{\pi\varepsilon\rho\iota\kappa\lambda}\Rightarrow \int_S \vec{g}_{in}\cdot\, d\vec{S}=-4\pi GM\frac{r^3}{R^3}\Rightarrow \int_S g_{in}(r)\hat{r}\cdot\, d\vec{S}=-4\pi GM\frac{r^3}{R^3}\Rightarrow$$

$$g_{in}(r)\int_S dS=-4\pi GM\frac{r^3}{R^3}\Rightarrow g_{in}(r)4\pi r^2=-4\pi GM\frac{r^3}{R^3}\Rightarrow g_{in}(r)=-\frac{GM}{R^3}r$$

Επαλήθευση συνέχειας πάνω στη σφαίρα

$$g_{out}(R) = g_{in}(R) \Rightarrow -\frac{GM}{R^2} = -\frac{GM}{R^3}R \quad \textbf{ισχύει}$$

Επαναλάβετε μόνοι σας για σφαιρικό φλοιό