

ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ
ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ Ι
Κεφάλαιο 6

Απόκριση
κυκλωμάτων RL
και RC

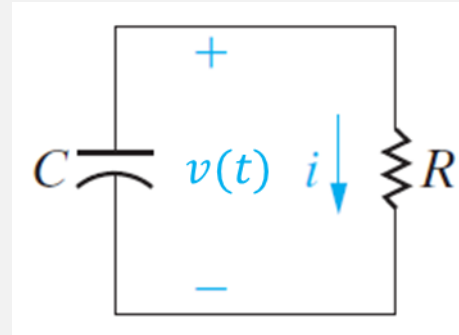
Μέρος Β'

Πυκνωτής

- Αποφόρτιση πυκνωτή μέσω αντίστασης - Φυσική απόκριση κυκλώματος RC
- Απόκριση πυκνωτή σε βηματική διέγερση τάσης

Φυσική απόκριση κυκλώματος RC

(Natural response of
 RC circuit)



- Πως αποφορτίζεται ένας πυκνωτής χωρητικότητας C όταν συνδεθεί με εξωτερική αντίσταση R
- Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος RC

Αποφόρτιση πυκνωτή χωρητικότητας C μέσω αντίστασης R

Εικ. (α): Ο διακόπτης τη χρονική στιγμή $t = 0$ μετατίθεται στη θέση b αφού έχει μείνει στη θέση a για μεγάλο χρονικό διάστημα.

Για $t = 0^-$, ο πυκνωτής ισοδυναμεί με ανοικτό κύκλωμα ($i = 0$), *εικ. (β)*

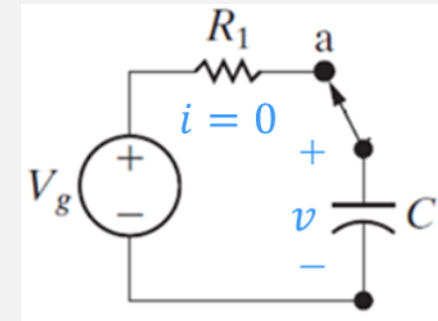
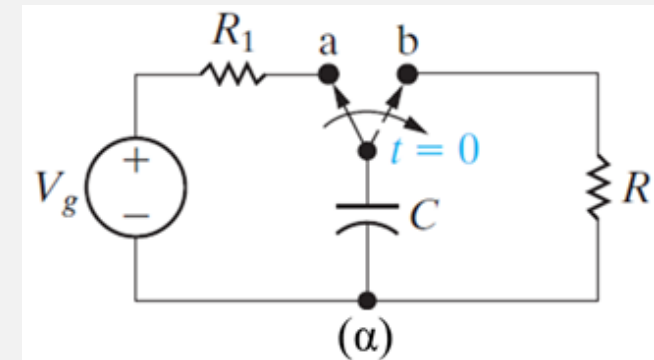
- Η τάση στους οπλισμούς του πυκνωτή ισούται με την τάση V_g της πηγής

$$v(0) = V_g$$

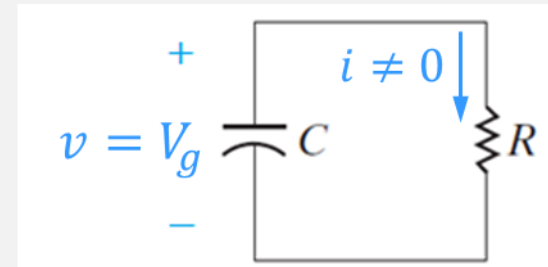
Κατά τη μετάθεση του διακόπτη από τη θέση a στη θέση b, δεν μπορεί να υπάρξει καμία στιγμιαία αλλαγή στην τάση στους ακροδέκτες ενός πυκνωτή

Για $t = 0^+$, το κύκλωμα ισοδυναμεί με της *εικ. (γ)*

- Η τάση του πυκνωτή παραμένει V_g
- Ο πυκνωτής αποφορτίζεται μέσω της αντίστασης (ρεύμα $i \neq 0$)



(β) Κύκλωμα $t = 0^-$



(γ) Κύκλωμα $t = 0^+$

Αποφόρτιση πυκνωτή χωρητικότητας C μέσω αντίστασης R

– Η εξίσωση

Έστω i_C, i_R τα ρεύματα πυκνωτή, αντίστασης, αντίστοιχα, Εικ. (α). Προφανώς

$$i_C + i_R = 0$$

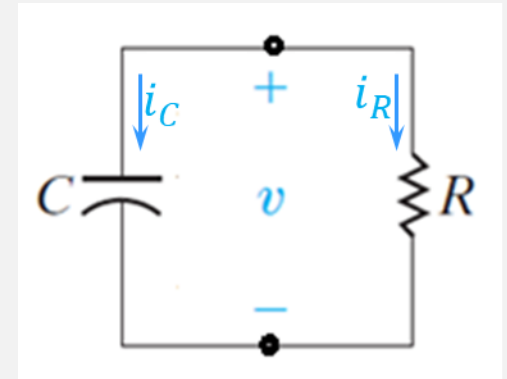
$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0 \quad (1)$$

Εναλλακτικά, έστω v, i τάση και ρεύμα κυκλώματος, αντίστοιχα, Εικ. (β). Αν v_C, v_R οι πτώσεις τάσης σε πυκνωτή, αντίσταση, αντίστοιχα, έχουμε

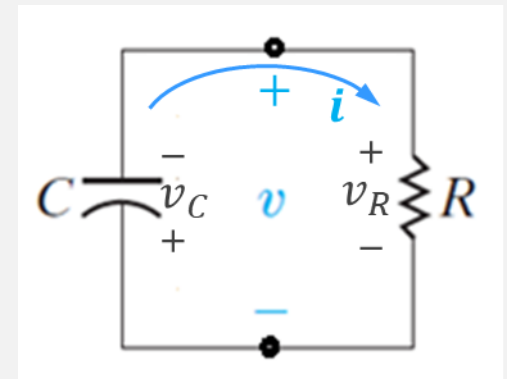
$$i = C \frac{dv_C}{dt} \quad \text{και} \quad v_R = iR \quad \Rightarrow \quad i = \frac{v_R}{R}$$

$$C \frac{dv_C}{dt} = \frac{v_R}{R}$$

Αντικαθιστώντας, $v_C = -v$ και $v_R = v$ παίρνουμε την (1)



Κύκλωμα για $t \geq 0$
(α)



Κύκλωμα για $t \geq 0$
(β)

Η λύση της εξίσωσης $C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$

Χωρίζοντας τις μεταβλητές v και t , έχουμε

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dt}{RC}$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε $\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$

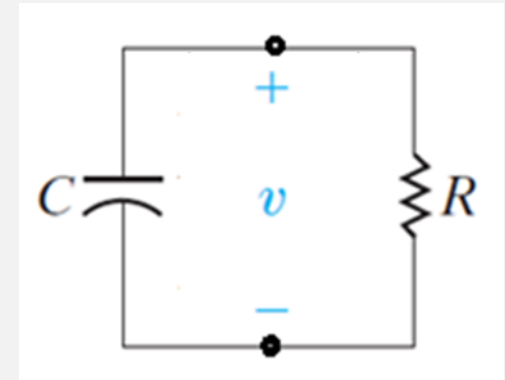
$$\Rightarrow \ln v \Big|_{v(0)}^{v(t)} = -\frac{t}{RC}$$

$$\Rightarrow \ln v(t) - \ln v(0) = -\frac{t}{RC}$$

$$\Rightarrow \ln \frac{v(t)}{v(0)} = -\frac{t}{RC}$$

$$\Rightarrow \frac{v(t)}{v(0)} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v(t) = v(0)e^{-t/RC} \quad \text{Φυσική απόκριση κυκλώματος } RC$$



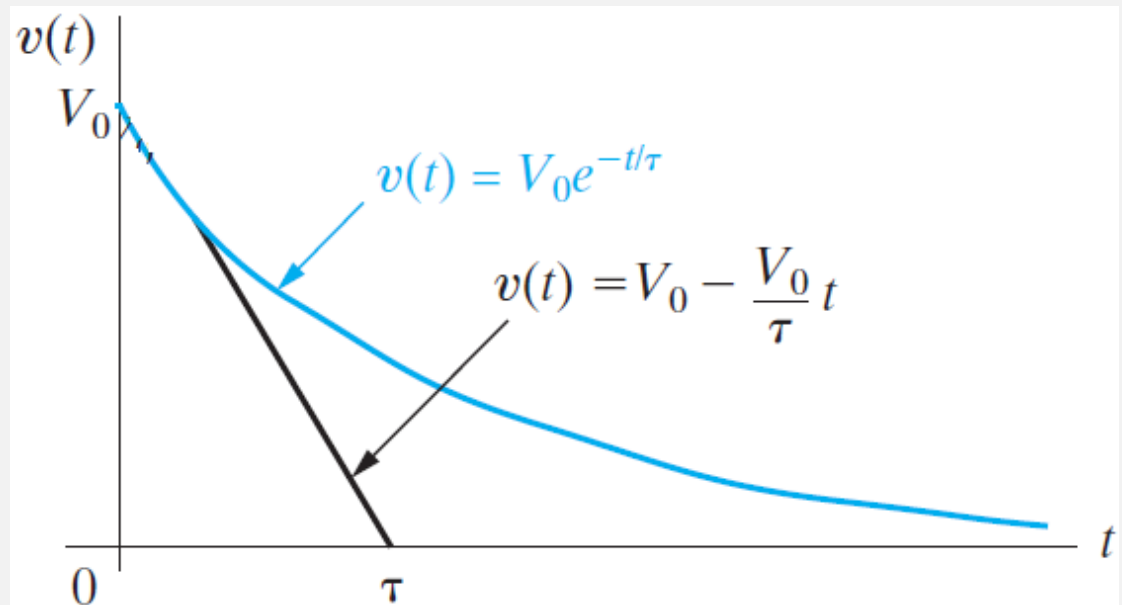
Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος RC - Γραφική αναπαράσταση αποφόρτισης

Σταθερά χρόνου (time constant)
κυκλώματος RC :

$$\tau = RC$$

Χρησιμοποιώντας τη σταθερά
χρόνου, η εξίσωση της
αποφόρτισης γράφεται

$$v(t) = V_0 e^{-t/\tau}, \quad t \geq 0$$



Φυσική απόκριση κυκλώματος RC (αποφόρτιση του πυκνωτή)

Για τον υπολογισμό της φυσικής απόκρισης κυκλώματος RC

Βήμα 1: Βρίσκουμε την αρχική τάση V_0 στα άκρα του πυκνωτή.

Βήμα 2: Βρίσκουμε τη σταθερά χρόνου $\tau = RC$ του κυκλώματος.

Βήμα 3: Χρησιμοποιούμε την εξίσωση $v(t) = V_0 e^{-t/\tau}$

Παράδειγμα 6.3

Ο διακόπτης στο κύκλωμα της εικ. (α) έχει μείνει στη θέση x για μεγάλο χρονικό διάστημα. Για $t = 0$ μετατίθεται στιγμιαία στη θέση y .

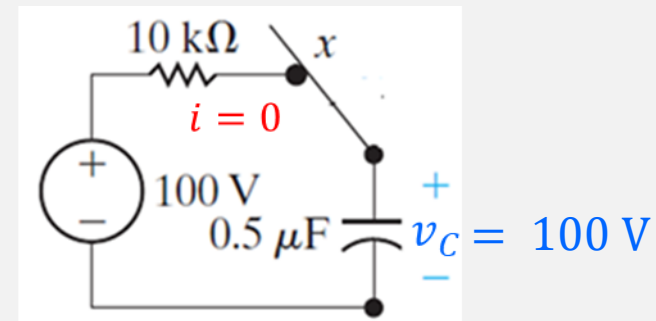
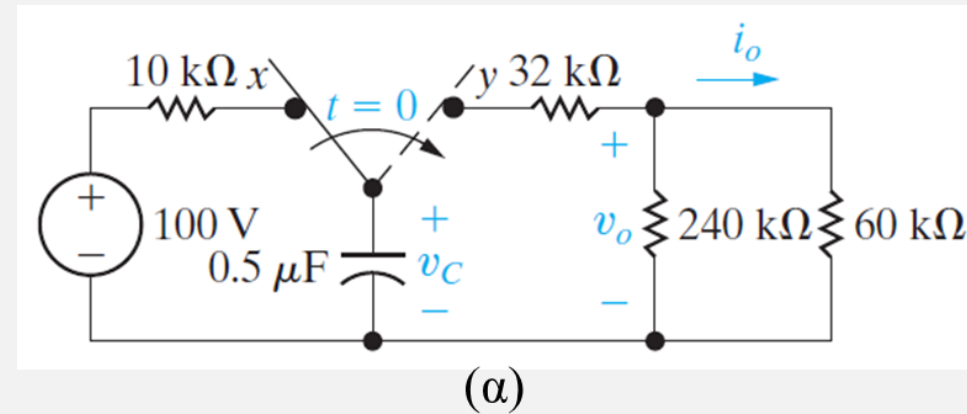
α) Βρείτε τη $v_C(t)$ για $t \geq 0$

Λύση

Ακριβώς πριν τη μεταγωγή ($t = 0^-$) και αφού έχει μείνει στη θέση x για μεγάλο χρονικό διάστημα, ο πυκνωτής ισοδυναμεί με ανοικτό κύκλωμα, $i = 0$, εικ. (β).

$$v_C(0^-) = 100 \text{ V}$$

με θετικό τον επάνω οπλισμό λόγω πηγής.



(συνεχίζεται ...)

Λύση (... συνέχεια)

Αμέσως μετά τη μεταγωγή του διακόπτη στο y ($t = 0^+$), το κύκλωμα ισοδυναμεί με της *εικ. (γ)*

$$v_C(0^+) = V_0 = 100 \text{ V}$$

Η ισοδύναμη αντίσταση που ‘βλέπει’ ο πυκνωτής για $t \geq 0$ είναι

$$R_T = 32\text{k} + (240\text{k} \parallel 60\text{k}) = 80\text{k}$$

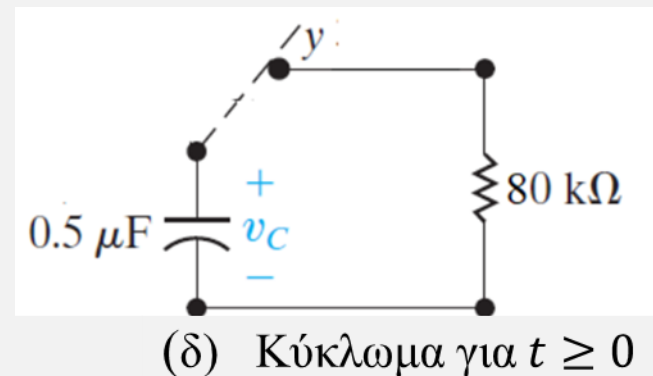
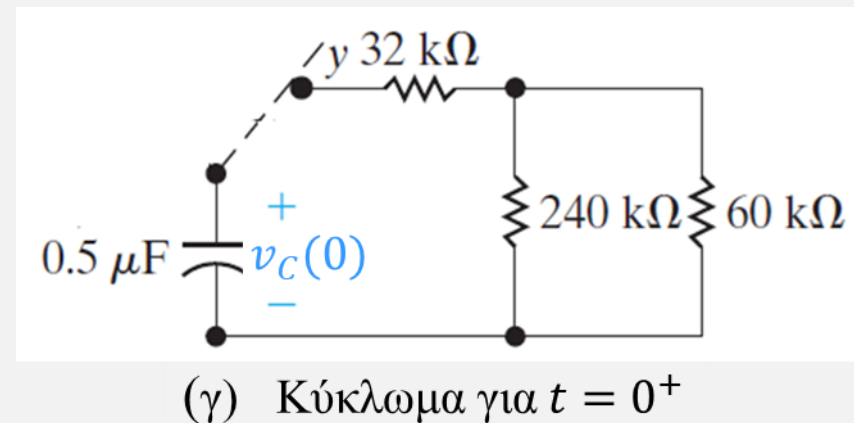
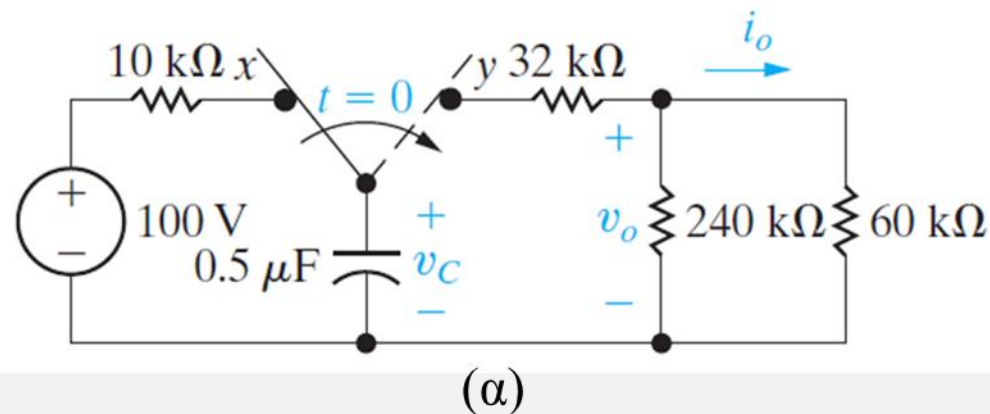
και το κύκλωμα ισοδυναμεί με της *εικ. (δ)*

Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι

$$RC = (80 \times 10^3)(0.5 \times 10^{-6}) = 40 \text{ ms}$$

Επομένως, $v_C(t) = V_0 e^{-t/\tau} = 100 e^{-t/0.04} \text{ V}$

$$v_C(t) = 100 e^{-25t} \text{ V}, \quad t \geq 0$$



Παράδειγμα 6.3 (... συνέχεια)

(β) Βρείτε την τάση $v_o(t)$ για $t \geq 0^+$

Λύση (... συνέχεια)

Για $t \geq 0^+$ το κύκλωμα ισοδυναμεί με της εικ. (ε)

Εφαρμόζοντας απλά διαιρέτη τάσης, η τάση v_o στο σύστημα των δύο παράλληλων αντιστάσεων

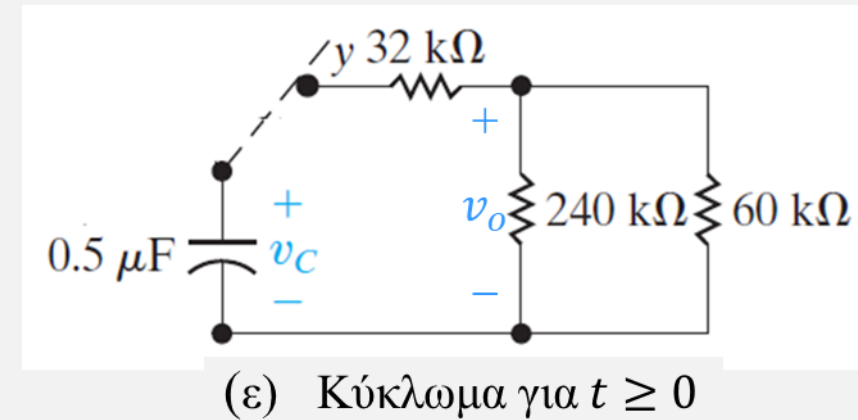
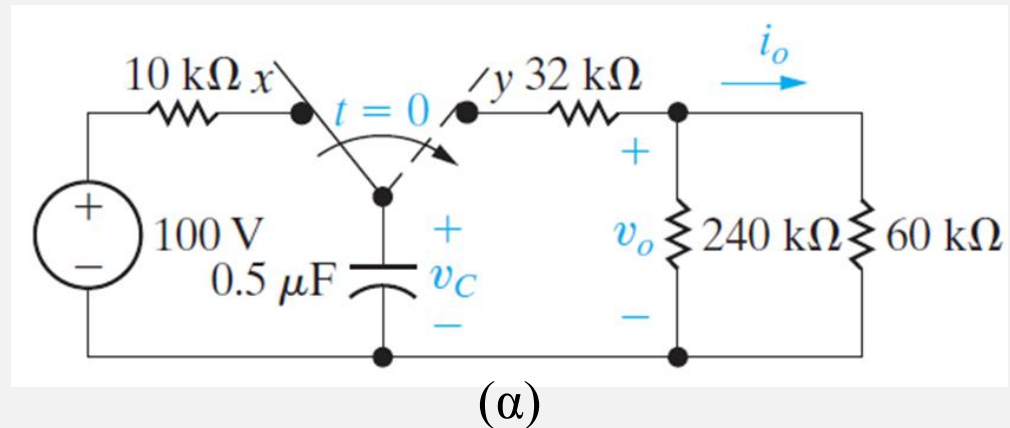
$$240k \parallel 60k = 48k$$

βρίσκεται

$$v_o(t) = \frac{48k}{48k + 32k} v_C(t)$$

Επομένως,

$$v_o(t) = 60e^{-25t} V, \quad t \geq 0^+$$



Παράδειγμα 6.3 (... συνέχεια)

(γ) Βρείτε το $i_o(t)$ για $t \geq 0^+$

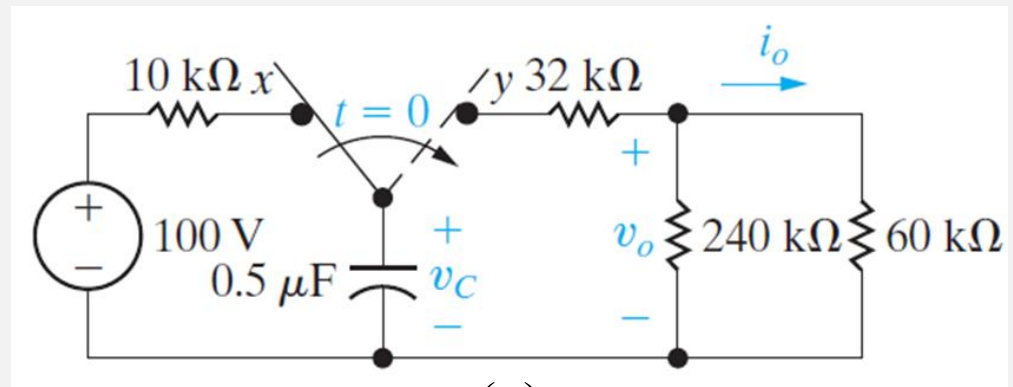
Λύση (... συνέχεια)

Από το νόμο του Ohm στην $60 \text{ k}\Omega$

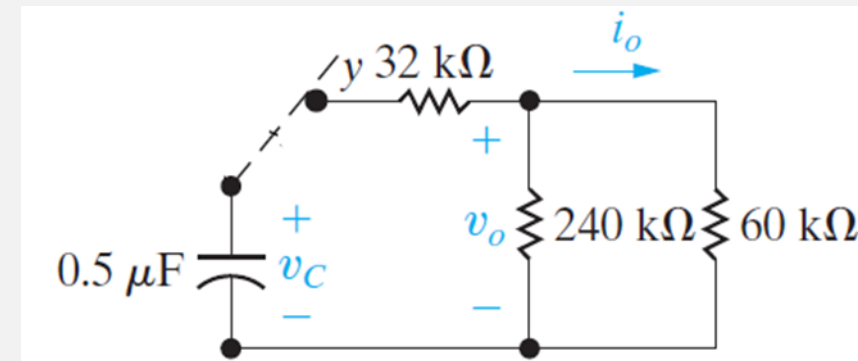
$$i_o(t) = \frac{v_o(t)}{60 \text{ k}\Omega}$$

$$i_o(t) = \frac{60e^{-25t}}{60 \times 10^3}$$

$$i_o(t) = e^{-25t} \text{ mA}, \quad t \geq 0^+$$



(α)



(γ) Κύκλωμα για $t \geq 0$

(συνεχίζεται ...)

Παράδειγμα 6.3 (... συνέχεια)

(δ) Βρείτε την ολική ενέργεια που καταναλώνεται στην αντίσταση 60k

Λύση (... συνέχεια)

Η ισχύς στην 60k είναι

$$p_{60k}(t) = i_o^2(t)(60 \times 10^3)$$

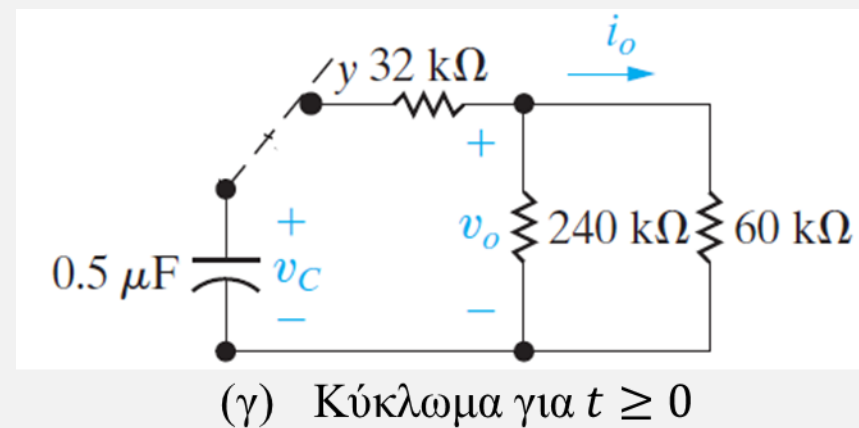
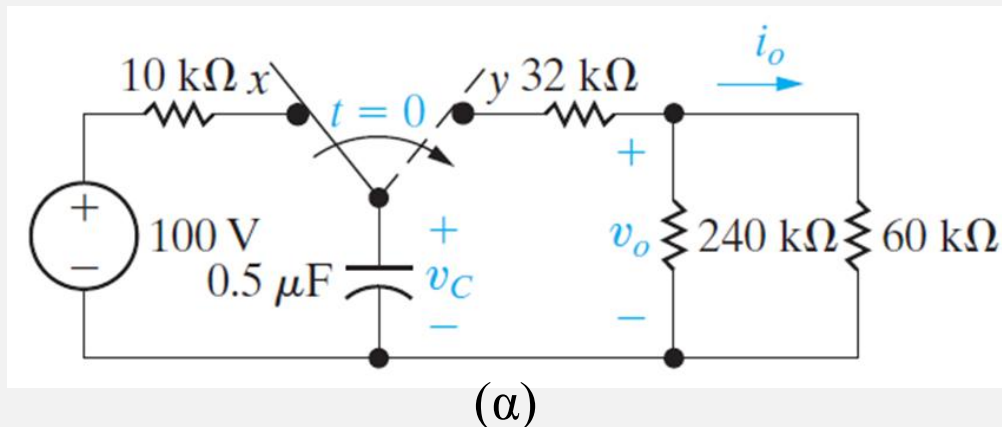
$$p_{60k}(t) = 60e^{-50t} \text{ mW}$$

Επομένως, η ολική ενέργεια που καταναλώνεται είναι

$$w_{60k} = \int_0^{\infty} p_{60k}(t) dt$$

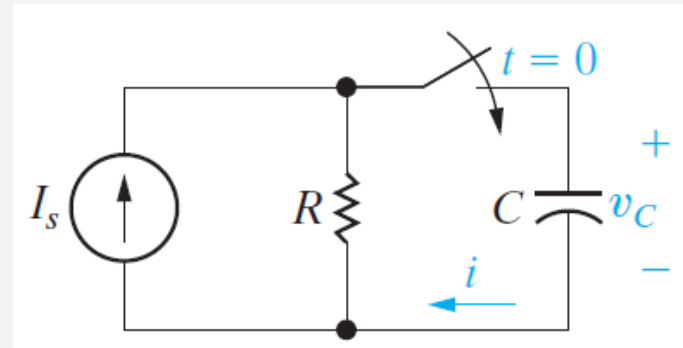
$$w_{60k} = \int_0^{\infty} 60e^{-50t} dt$$

$$w_{60k} = 1.2 \text{ mJ}$$



Απόκριση κυκλώματος RC σε βηματική διέγερση

(Step response of RC
circuit)



- Πως αναπτύσσεται το ρεύμα και η τάση σε ένα κύκλωμα RC όταν εφαρμοστεί ξαφνικά πηγή τάσης ή ρεύματος (βηματική διέγερση)

Απόκριση πυκνωτή σε βηματική διέγερση

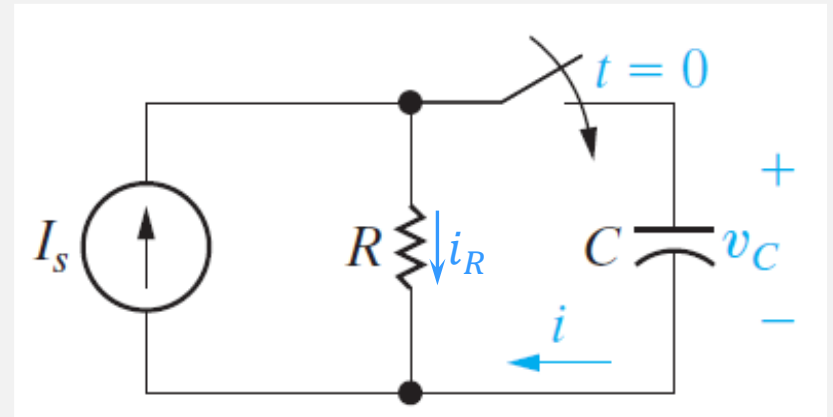
Εικ. (α): Πηγή ρεύματος I_s , εσωτερικής αντίστασης R , εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ στα άκρα πυκνωτή C

Έχουμε

$$i + i_R = I_s$$

που οδηγεί στην εξίσωση απόκρισης πυκνωτή σε βηματική διέγερση

$$C \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} = I_s$$



(α)

Επίλυση εξίσωσης πυκνωτή σε βηματική διέγερση

$$C \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} = I_s$$

Κατ'αναλογία προς την εξίσωση

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V_s$$

της βηματικής απόκρισης πηνίου (βλ. σελ. 14, 15), η οποία με χωρισμό μεταβλητών και ολοκλήρωση οδήγησε στη λύση

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R} \right) e^{-(R/L)t}$$

παίρνουμε

$$v_C = I_s R + (V_0 - I_s R) e^{-t/RC}, t \geq 0$$

Βηματική απόκριση κυκλώματος RC

Η σημασία των παραμέτρων της εξίσωσης πυκνωτή σε βηματική διέγερση

$$v_C = I_s R + (V_0 - I_s R) e^{-t/RC} \quad \text{για } t \geq 0$$

V_0 είναι η αρχική τάση του πυκνωτή,
δηλαδή, η τάση για $t = 0$

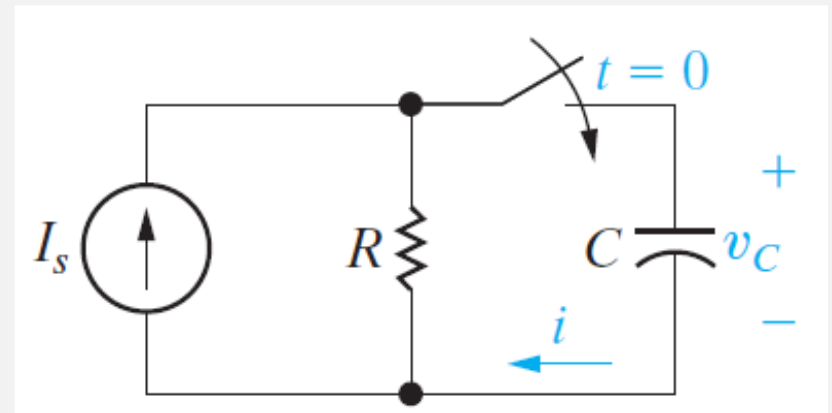
$$V_0 = v_C(0)$$

$I_s R$ είναι η τελική τάση του πυκνωτή,
δηλαδή, η τάση για $t = \infty$

$$I_s R = v_C(\infty)$$

RC η σταθερά χρόνου του κυκλώματος

$$RC = \tau$$



(α)

Παράδειγμα 6.4

Ο διακόπτης στο κύκλωμα της *εικ. (α)* έχει μείνει στη θέση 1 για μεγάλο χρονικό διάστημα. Για $t = 0$ μετατίθεται στη θέση 2.

α) Βρείτε τη $v_o(t)$ για $t \geq 0$

Λύση

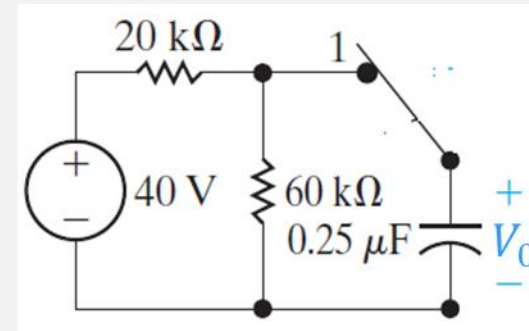
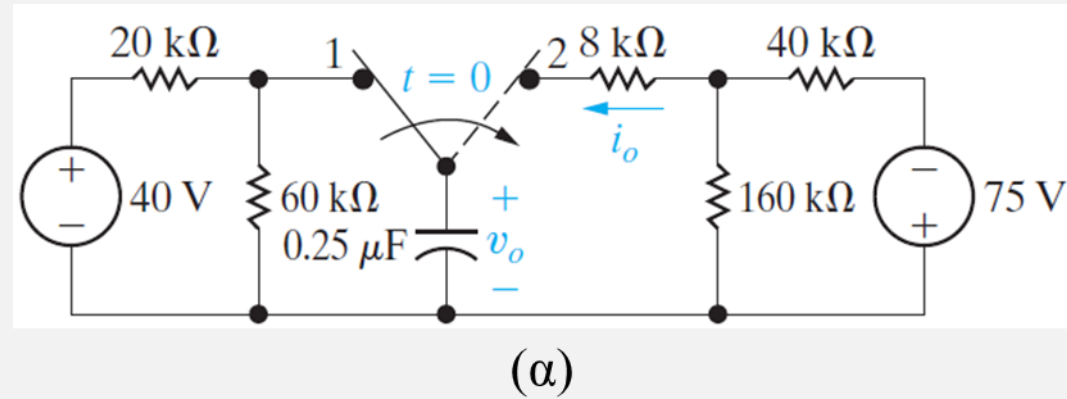
Ακριβώς πριν τη μεταγωγή του διακόπτη ($t = 0^-$, το κύκλωμα ισοδυναμεί με της *εικ. (β)*)

Ο πυκνωτής έχει φορτιστεί στην τάση της αντίστασης 60 k. Επομένως,

$$v_o(0) = V_0 = \frac{60 \text{ k}}{60 \text{ k} + 20 \text{ k}} 40 \text{ V} = 30 \text{ V}$$

$$V_0 = 30 \text{ V}$$

Αυτή είναι και η αρχική τάση της v_o για $t \geq 0$



Το κύκλωμα για $t = 0^-$

(συνεχίζεται ...)

Λύση (... συνέχεια)

Μετά τη μεταγωγή του διακόπτη στη θέση 2 ($t \geq 0$), το κύκλωμα ισοδυναμεί με της εικ. (γ)

Η γενική μορφή της ζητούμενης εξίσωσης της βηματικής διέγερσης του πυκνωτή είναι

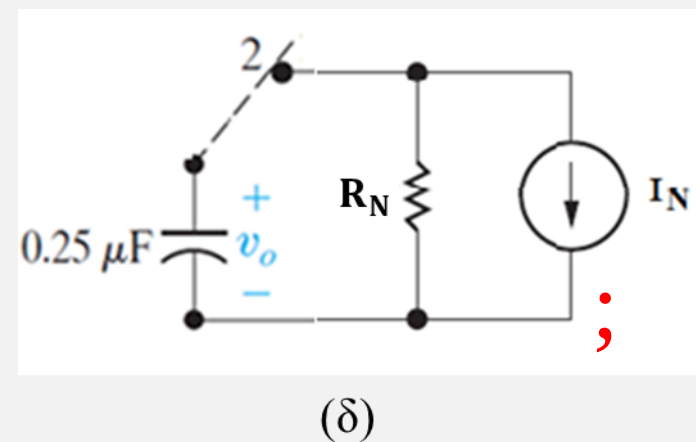
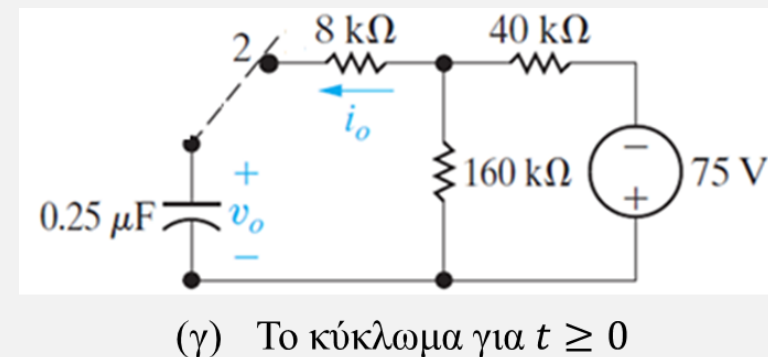
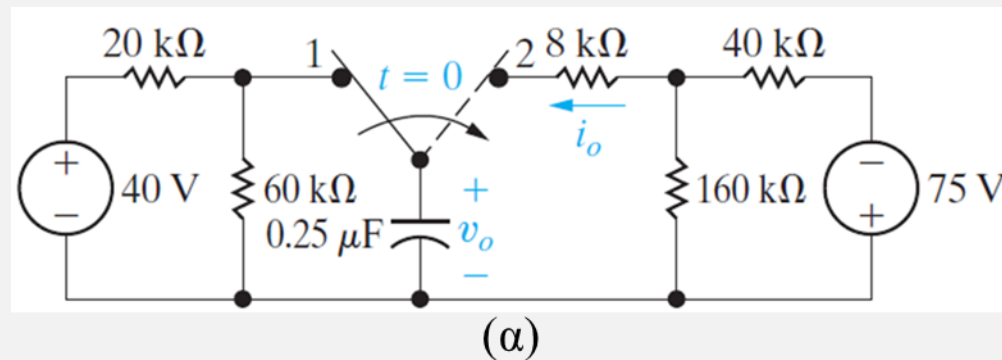
$$v(t) = I_s R + (V_0 - I_s R) e^{-t/RC}$$

με $V_0 = 30 \text{ V}$

Μένει να βρούμε I_s και R

που αντιστοιχούν στο κύκλωμα με το οποίο συνδέεται ο πυκνωτής

δηλαδή, με το ισοδύναμο Norton, εικ. (δ).



Λύση (... συνέχεια)

Το ισοδύναμο Norton

Ανοίγοντας τους ακροδέκτες (απομακρύνοντας τον πυκνωτή), *εικ. (δ)*, η τάση ανοικτού κυκλώματος V_{oc} μεταξύ a και b είναι

$$V_{oc} = \frac{160 \text{ k}}{160 \text{ k} + 40 \text{ k}} (-75) = -60 \text{ V}$$

Για την αντίσταση Norton (ή Thevenin), βραχυκυκλώνουμε την πηγή τάσης, *εικ. (ε)*

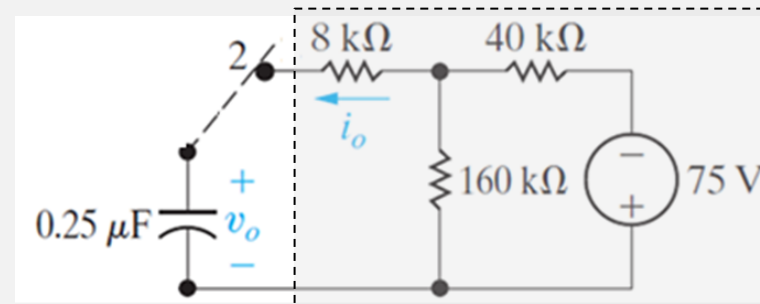
Βρίσκουμε

$$R_{th} = 8 \text{ k} + (40 \text{ k} \parallel 160 \text{ k}) = 40 \text{ k}\Omega$$

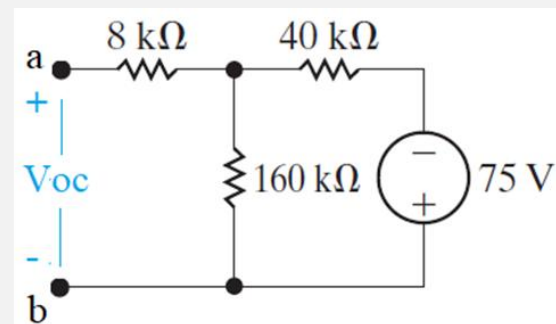
Επομένως, η ισοδύναμη πηγή Norton είναι

$$I_s = \frac{V_{oc}}{R_{th}} = \frac{-60}{40 \text{ k}} = -1.5 \text{ mA}$$

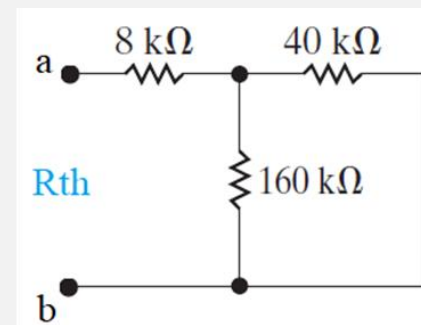
(συνεχίζεται ...)



(γ) Το κύκλωμα για $t \geq 0$



(δ) Εύρεση ισοδυνάμου Norton



(ε) Εύρεση ισοδυνάμου Norton

Λύση (... συνέχεια)

Το ισοδύναμο κύκλωμα του πυκνωτή για $t \geq 0$ είναι εικ. (στ)

Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι

$$\tau = RC = (40k\Omega)(0.25\mu F) = 0.01 s$$

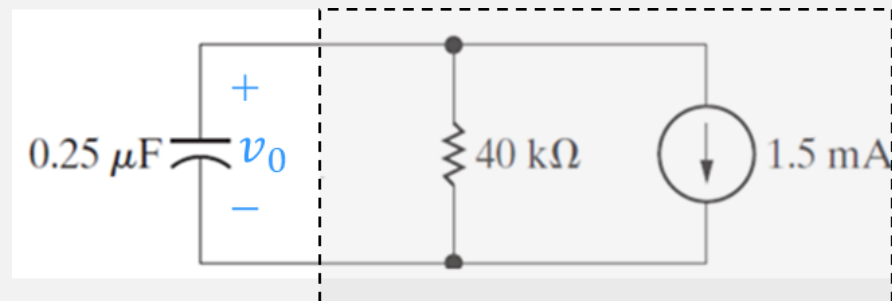
Εισάγοντας τις τιμές V_0 , I_s , R και C στη σχέση

$$v(t) = I_s R + (V_0 - I_s R)e^{-t/RC}$$

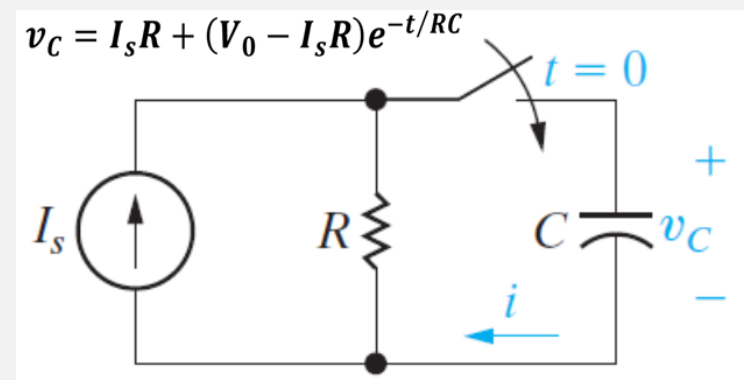
παίρνουμε

$$v_0(t) = -60 + [30 - (-60)]e^{-100t}$$

$$v_0(t) = -60 + 90e^{-100t} \text{ V}, \quad t \geq 0$$



(στ) Κύκλωμα για $t \geq 0$



(συνεχίζεται ...)

Παράδειγμα 6.4 (... συνέχεια)

β) Βρείτε το $i_o(t)$ για $t \geq 0^+$

Λύση Το ρεύμα στον πυκνωτή

$$i_o = C \frac{dv_o}{dt}$$

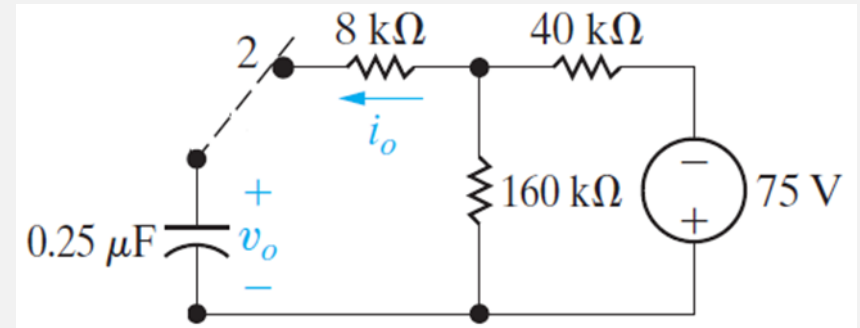
βρίσκεται απλά παραγωγίζοντας την έκφραση

$$v_o(t) = -60 + 90e^{-100t} \text{ V}$$

για την τάση του πυκνωτή

$$i_o = (0.25 \times 10^{-6}) \frac{d}{dt} (-60 + 90e^{-100t})$$

$$i_o = 2.25e^{-100t} \text{ mA}$$



(γ) Το κύκλωμα για $t \geq 0$