

ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ
ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ Ι
Κεφάλαιο 6

Α'

Απόκριση
κυκλωμάτων RL
και RC

Επαγωγός (πηνίο)

- Απόσβεση ρεύματος πηνίου μέσω αντίστασης
– Φυσική απόκριση κυκλώματος RL
- Απόκριση πηνίου σε βηματική διέγερση
ρεύματος

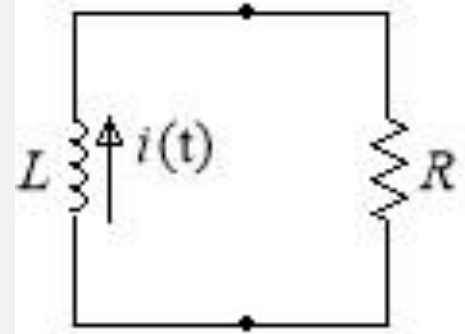
Πυκνωτής

- Αποφόρτιση πυκνωτή μέσω αντίστασης -
Φυσική απόκριση κυκλώματος RC
- Απόκριση πυκνωτή σε βηματική διέγερση
τάσης

Συμπεριφορά κυκλωμάτων RL και RC σε
συνεχόμενα άνοιγμα-κλείσιμο διακοπών

Φυσική απόκριση κυκλώματος RL

(Natural response of
 RL circuit)



- Πως “σβήνει” το ρεύμα i ενός πηνίου αυτεπαγωγής L όταν συνδεθεί με εξωτερική αντίσταση R
- Η σημασία της σταθεράς χρόνου

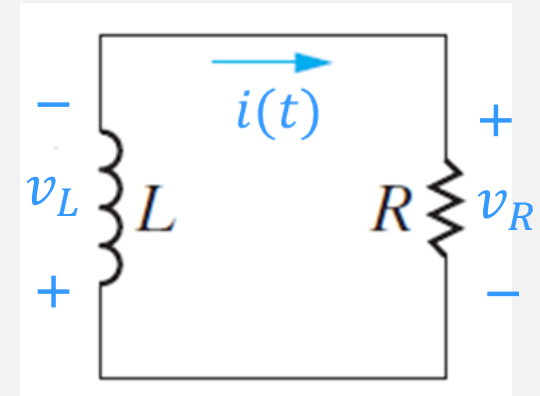
Πως “σβήνει” το ρεύμα ενός πηνίου αυτεπαγωγής L όταν συνδεθεί με εξωτερική αντίσταση R ;

A. Το κύκλωμα, εικ. (α)

- $i(t)$ η τιμή του ρεύματος τη χρονική στιγμή t
- Οι πτώσεις τάσης στα στοιχεία

$$v_R = iR$$

$$v_L = L \frac{di}{dt}$$



(α)

B. Η εξίσωση (από το νόμο των τάσεων του Kirchhoff)

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

Ορολογία: Συνήθης διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης (1st order ordinary differential equation): η μέγιστη εμφανιζόμενη τάξη παραγώγου είναι 1

Επίλυση της 1^{ης} τάξεως εξίσωσης κυκλώματος RL

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

Χωρισμός μεταβλητών (i , t)

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt$$

Ολοκληρώνοντας, έχουμε

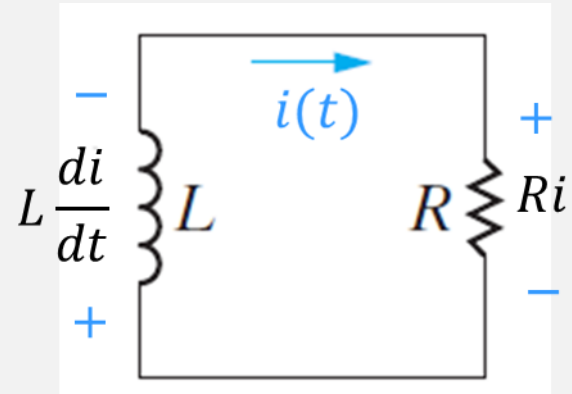
$$\int_{i(0)}^{i(t)} \frac{di}{i} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt$$

$$\ln i \Big|_{i(0)}^{i(t)} = -\frac{R}{L} t \Rightarrow \ln i(t) - \ln i(0) = -\frac{R}{L} t \Rightarrow \ln \frac{i(t)}{i(0)} = -\frac{R}{L} t \Rightarrow \frac{i(t)}{i(0)} = e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$i(t) = i(0) e^{-\frac{R}{L} t}$$

Φυσική απόκριση RL κυκλώματος

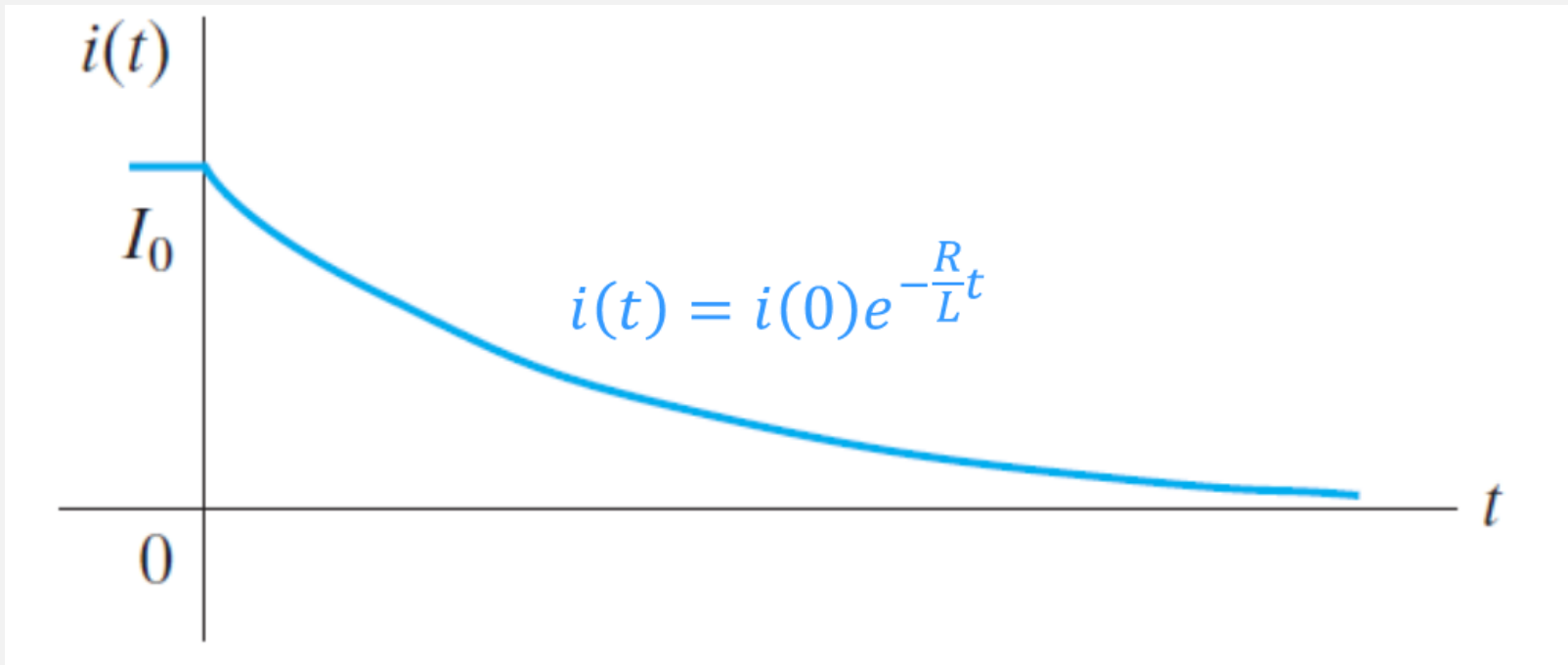
όπου, $i(t)$ και $i(0)$ το ρεύμα τις χρονικές στιγμές t και 0 , αντίστοιχα.



(α)

Γραφική αναπαράσταση απόκρισης ρεύματος κυκλώματος RL

$$i(t) = i(0)e^{-\frac{R}{L}t}, \quad t > 0$$



Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος RL

Σταθερά χρόνου (time constant)
κυκλώματος RL :

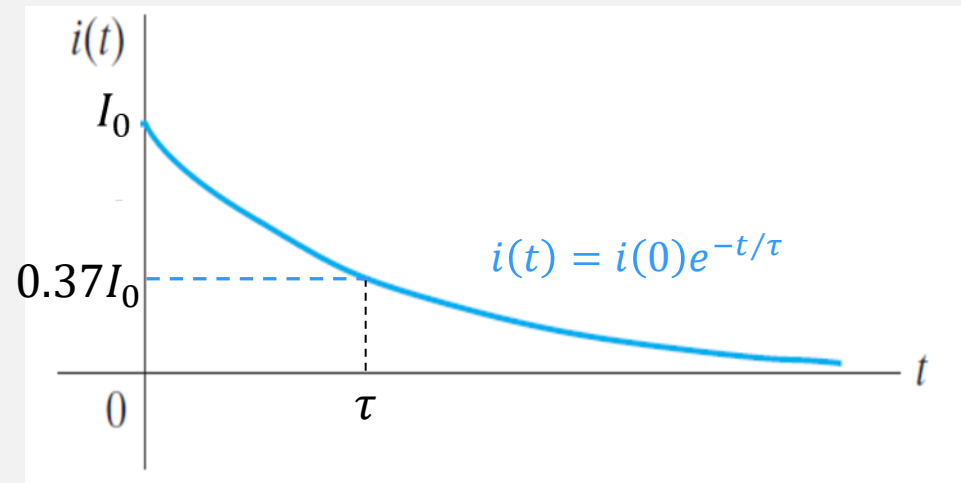
$$\tau = L/R$$

Χρησιμοποιώντας τη σταθερά χρόνου, η
χρονική εξάρτηση του ρεύματος
γράφεται

$$i(t) = i(0)e^{-t/\tau}$$

Η σημασία της σταθεράς χρόνου

- Προσδιορίζει το ρυθμό απόσβεσης του ρεύματος (πόσο γρήγορα πλησιάζει στο μηδέν)
- Είναι ο χρόνος που το ρεύμα έχει μειωθεί στο $e^{-1} \approx 0.37$ της αρχικής τιμής



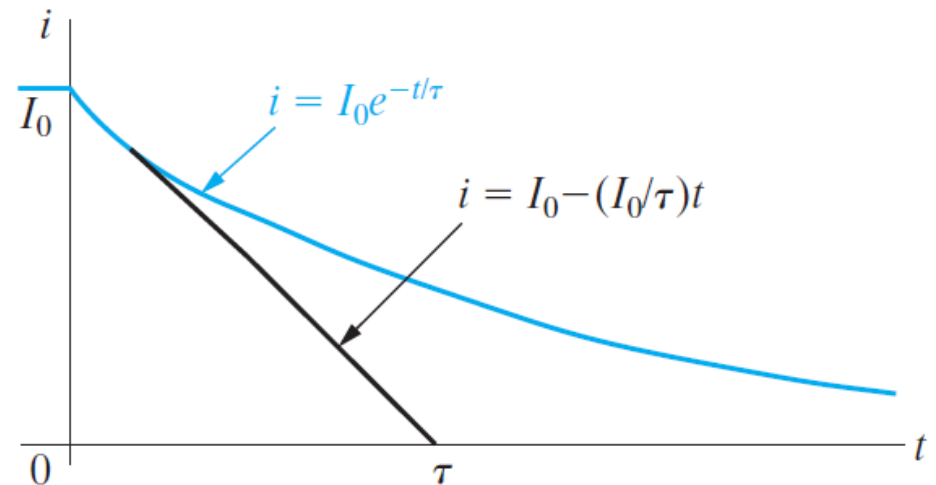
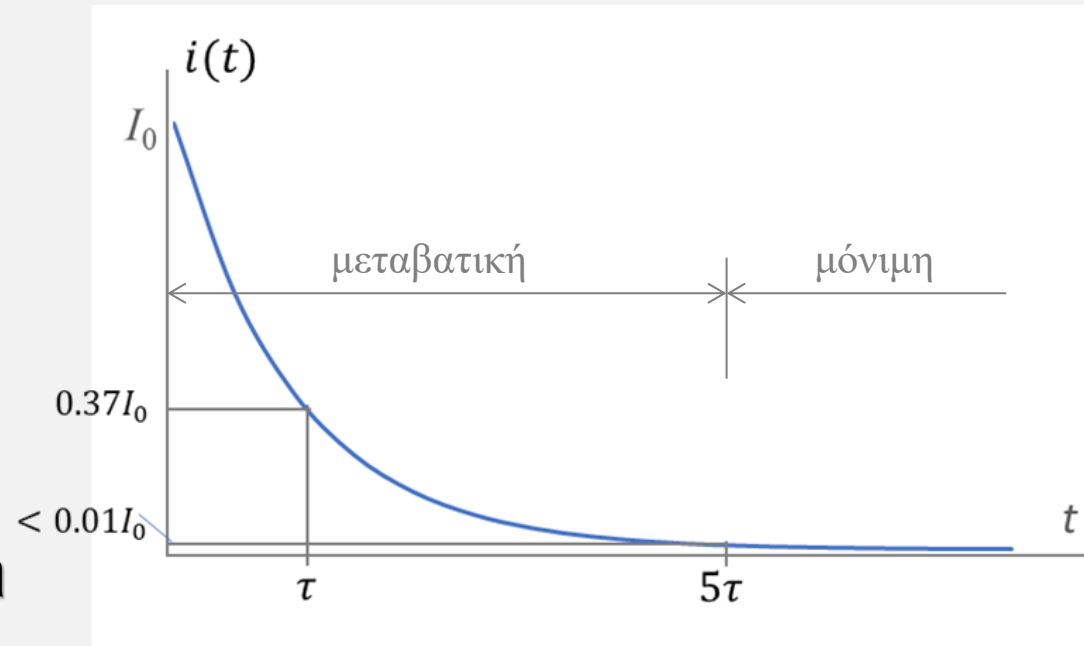
(συνεχίζεται ...)

(... συνέχεια)

Η σημασία της σταθεράς χρόνου

- 5τ μετά την έναρξη της απόσβεσης, το ρεύμα είναι λιγότερο από το 1% την αρχικής του τιμής.
- 5τ είναι το όριο που χωρίζει τη μεταβατική κατάσταση (transient response) από τη μόνιμη κατάσταση (steady-state response) του κυκλώματος.
- Γραφικός προσδιορισμός τ : είναι ο χρόνος μηδενισμού αν το ρεύμα διατηρούσε σταθερό τον αρχικό ρυθμό μεταβολής

$$di/dt_{t=0} = -\frac{I_0}{\tau}$$



Για τον υπολογισμό της φυσικής απόκρισης κυκλώματος *RL*

Βήμα 1: Βρίσκουμε το αρχικό ρεύμα I_0 μέσα από τον επαγωγό.

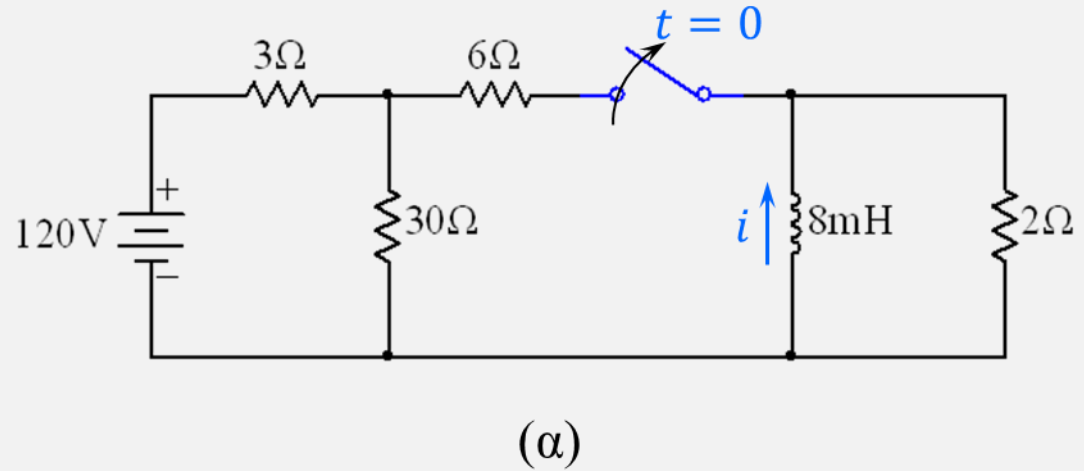
Βήμα 2: Βρίσκουμε τη σταθερά χρόνου $\tau = L/R$ του κυκλώματος.

Βήμα 3: Χρησιμοποιούμε την εξίσωση $i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$

Παράδειγμα 6.1

Ο διακόπτης στο κύκλωμα της εικ. (α) ανοίγει την $t = 0$ αφού έχει μείνει κλειστός για μεγάλο χρονικό διάστημα.

α) Υπολογίστε την αρχική τιμή του ρεύματος i .

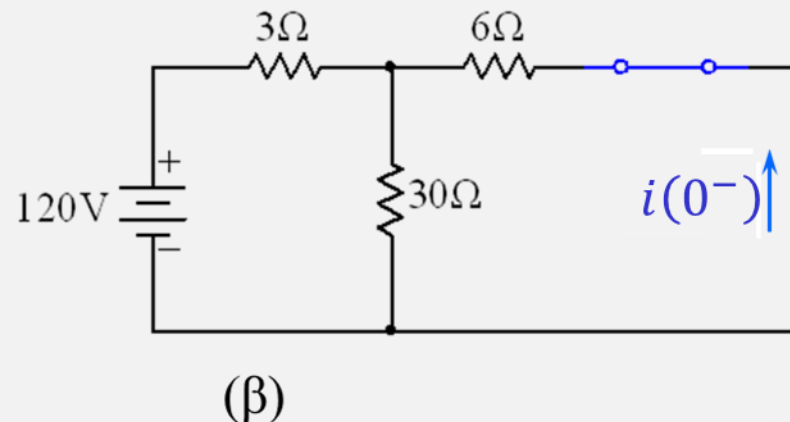


Λύση

(α) Ο διακόπτης έχει μείνει κλειστός για μεγάλο χρονικό διάστημα πριν από $t = 0$,

συνεπώς, τη χρονική στιγμή μόλις πριν το άνοιγμα του διακόπτη ($t = 0^-$) το πηνίο ισοδυναμεί με βραχυκύκλωμα, εικ. (β)

Ακριβώς πριν το άνοιγμα του διακόπτη
 $t = 0^-$



(συνεχίζεται ...)

Λύση (... συνέχεια)

Εικ. (β), $R_T = 3 + (30 \parallel 6) = 8 \Omega$

$$i_T = \frac{120}{8} = 15 \text{ A}$$

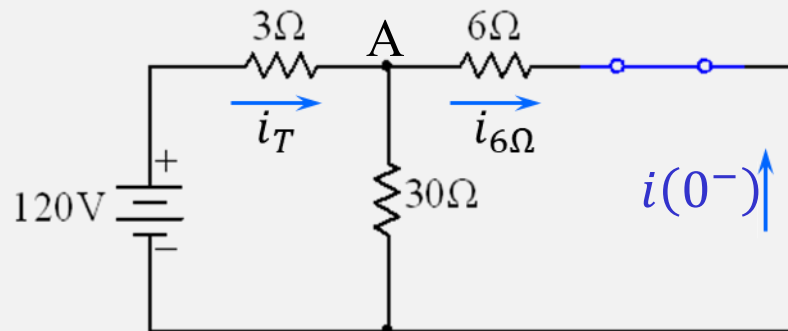
Στον κόμβο Α, με χρήση διαιρέτη ρεύματος

$$i_{6\Omega} = \frac{30}{36} 15 = 12.5 \text{ A}$$

Επομένως, το ρεύμα i για $t = 0^-$ είναι
 $i(0^-) = -12.5 \text{ A}$

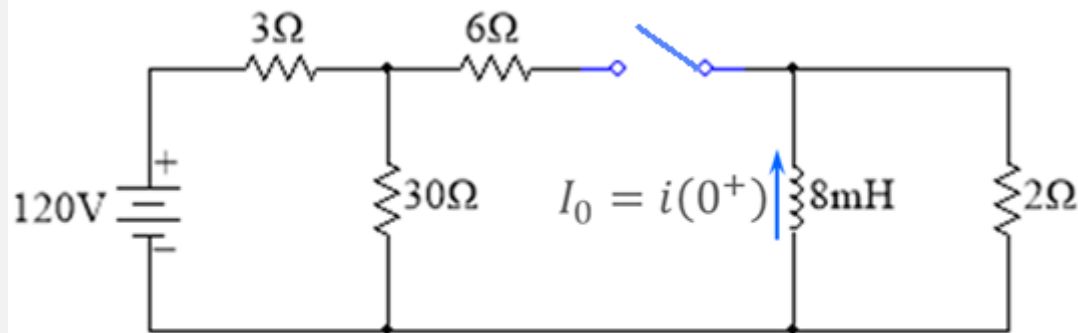
Ως εκ τούτου, τη χρονική στιγμή αμέσως μετά το άνοιγμα του διακόπτη ($t = 0^+$) το ρεύμα είναι επίσης -12.5 A , επειδή στιγμιαία αλλαγή ρεύματος στο πηνίο δεν μπορεί να γίνει, εικ. (γ)

Συνεπώς, η αρχική τιμή του ρεύματος i είναι $I_0 = -12.5 \text{ A}$



(β) Κύκλωμα για $t = 0^-$

Ακριβώς αμέσως μετά το άνοιγμα του διακόπτη, $t = 0^+$



(γ)

(β) Υπολογίστε την αρχική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο.

Λύση (... συνέχεια)

Εικ. (γ): Αρχική (μαγνητική) ενέργεια αποθηκευμένη στο πηνίο

$$w_0 = \frac{1}{2} L I_0^2$$

$$w_0 = \frac{1}{2} (8 \times 10^{-3}) (-12.5)^2$$

$$w_0 = 625 \text{ mJ}$$

(συνεχίζεται ...)

(γ) Ποια είναι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος για $t > 0$;

Λύση (... συνέχεια)

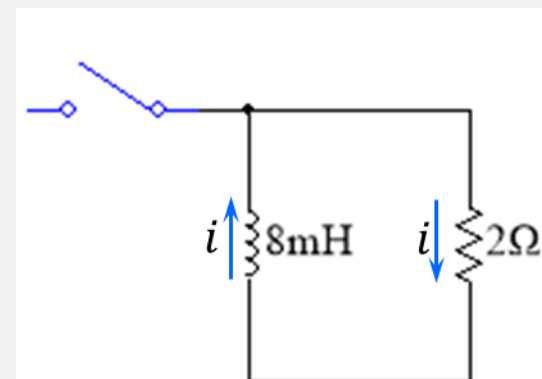
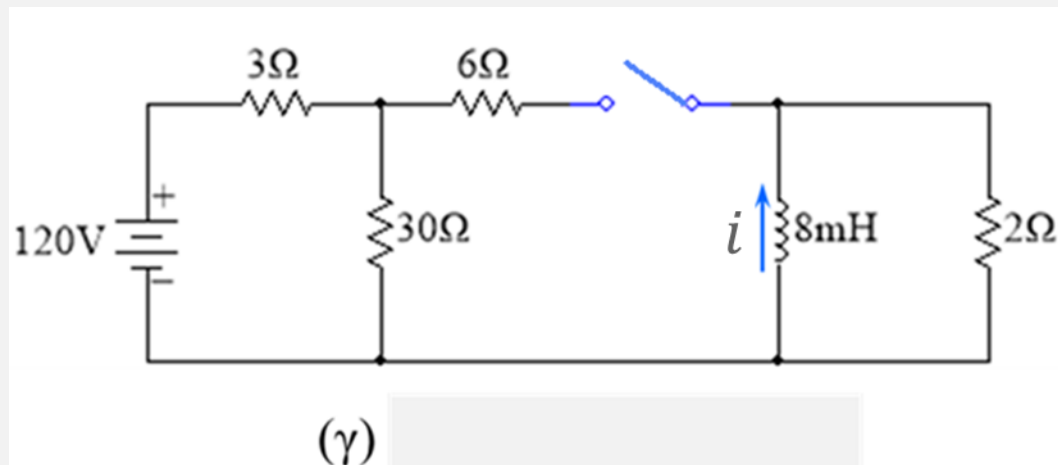
Μετά το άνοιγμα του διακόπτη ($t > 0$),
το κύκλωμα ισοδυναμεί με της εικ.
(δ)

Το πηνίο εκφορτίζεται μέσω της
αντίστασης 2Ω .

Η σταθερά χρόνου είναι

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{8 \times 10^{-3}}{2}$$

$$\tau = 4 \text{ ms}$$



(δ) Κύκλωμα για $t > 0$

(δ) Ποια είναι η αριθμητική έκφραση για το ρεύμα για $t \geq 0$;

Λύση (... συνέχεια)

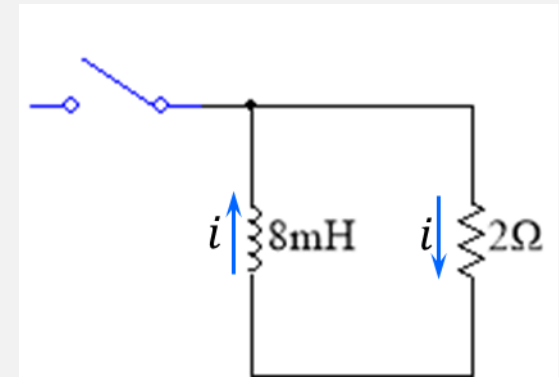
$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

με

$$\tau = 4 \text{ ms} \text{ και } I_0 = -12.5 \text{ A}$$

οπότε

$$i(t) = -12.5 e^{-250t} \text{ A}$$



(δ) Κύκλωμα για $t > 0$

ε) Τι ποσοστό της αρχικής αποθηκευμένης ενέργειας έχει καταναλωθεί στη $2\ \Omega$ αντίσταση 5 ms μετά το άνοιγμα του διακόπτη;

Λύση (... συνέχεια)

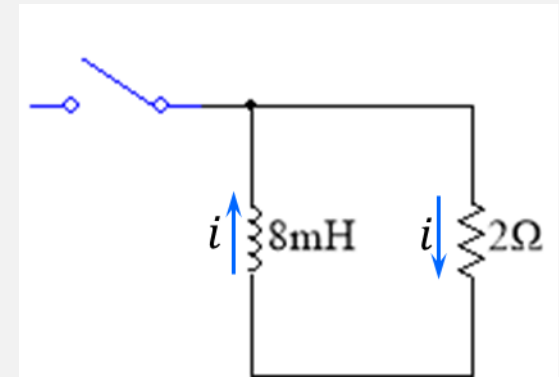
$t\text{ ms}$ μετά το άνοιγμα του διακόπτη, η ενέργεια που παραμένει αποθηκευμένη στο πηνίο είναι

$$w(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

και αυτή που έχει καταναλωθεί είναι $w_0 - w(t)$

Το ποσοστό της επί της αρχικής είναι

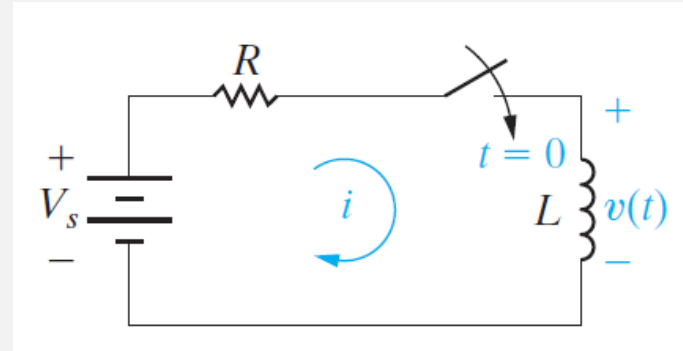
$$\begin{aligned} \frac{w_0 - w(t)}{w_0} &= 1 - \frac{w(t)}{w_0} \\ 1 - \frac{\frac{1}{2} L i^2(t)}{\frac{1}{2} L I_0^2} &= 1 - \frac{i^2(t)}{I_0^2} = 1 - \frac{(I_0 e^{-t/\tau})^2}{I_0^2} = 1 - e^{-2t/\tau} \quad \tau = 4\text{ ms} \quad 1 - e^{-2 \cdot 250t} \\ &= \mathbf{0.918 = 91.8\%} \end{aligned}$$



(δ) Κύκλωμα για $t > 0$

Απόκριση κυκλώματος RL σε βηματική διέγερση

(Step response of RL
circuit)



- Πως αναπτύσσεται το ρεύμα και η τάση σε ένα κύκλωμα RL όταν εφαρμοστεί ξαφνικά πηγή τάσης ή ρεύματος (βηματική διέγερση)

Βηματική διέγερση κυκλώματος RL

Το κύκλωμα, εικ. (α)

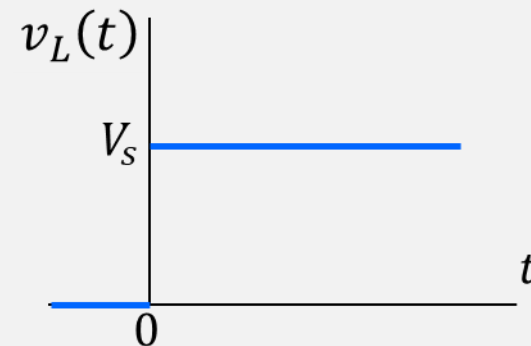
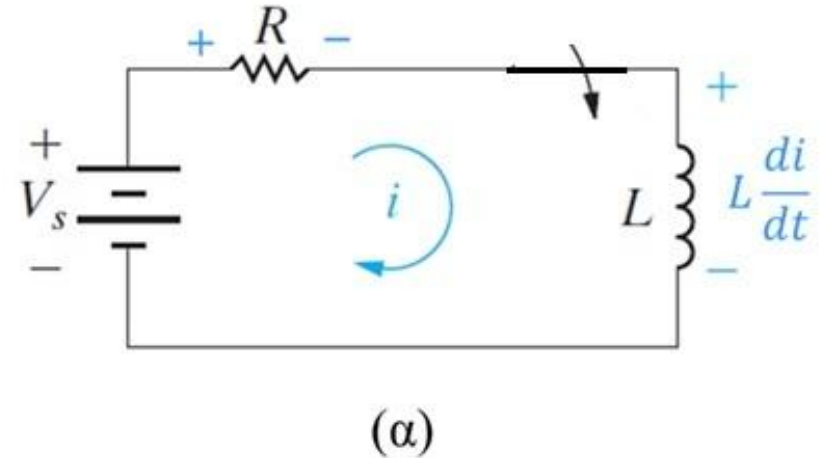
- Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κλείνει ο διακόπτης
- Έστω I_0 το ρεύμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ (αρχικό ρεύμα I_0)
- Η τάση που εφαρμόζεται στο πηνίο έχει βηματική μορφή, εικ. (β)

Η εξίσωση του κυκλώματος για $t \geq 0$ (από το νόμο των τάσεων του Kirchhoff)

$$V_s - Ri - L \frac{di}{dt} = 0$$

$$V_s = Ri + L \frac{di}{dt}$$

Ακριβώς μετά το άνοιγμα του διακόπτη, $t > 0$



(β) Βηματική διέγερση τάσης 16

Επίλυση κυκλώματος RL σε βηματική διέγερση

$$V_s = Ri + L \frac{di}{dt} \Rightarrow L \frac{di}{dt} = V_s - Ri \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{R}{L} \left(\frac{V_s}{R} - i \right)$$

Με χωρισμό μεταβλητών (i , t), έχουμε

$$\frac{di}{i - (V_s/R)} = -\frac{R}{L} dt$$

Ολοκληρώνοντας μεταξύ 0 και t παίρνουμε

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{di}{i - (V_s/R)} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt \Rightarrow \ln[i - (V_s/R)] \Big|_{I_0}^{i(t)} = -\frac{R}{L} t$$

$$\Rightarrow \ln[i(t) - (V_s/R)] - \ln[I_0 - (V_s/R)] = -\frac{R}{L} t \Rightarrow \ln \left[\frac{i(t) - (V_s/R)}{I_0 - (V_s/R)} \right] = -\frac{R}{L} t$$

$$\Rightarrow \frac{i(t) - (V_s/R)}{I_0 - (V_s/R)} = e^{-\frac{R}{L} t} \Rightarrow i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R} \right) e^{-(R/L)t}$$

Βηματική απόκριση RL κυκλώματος

Γραφική αναπαράσταση απόκρισης κυκλώματος RL σε βηματική διέγερση

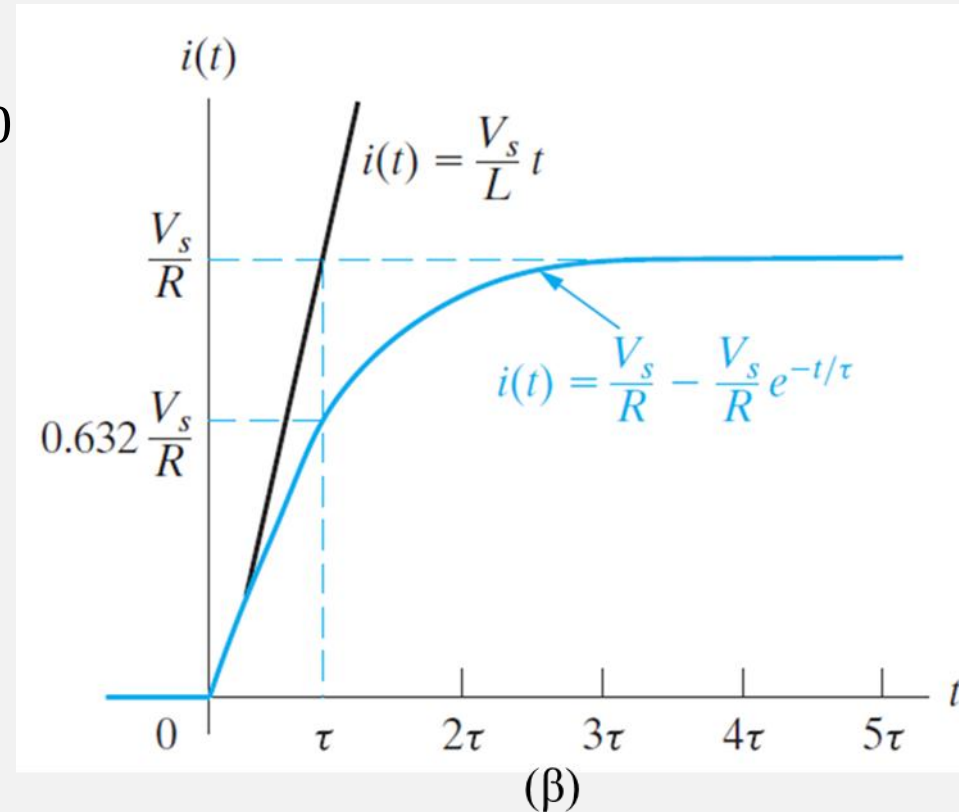
$$i(t) = \frac{V_s}{R} - \frac{V_s}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

Συναρτήσει της σταθεράς χρόνου $\tau = L/R$

$$i(t) = \frac{V_s}{R} - \frac{V_s}{R} e^{-t/\tau}$$

Εικ (β): Γραφική αναπαράσταση όταν $I_0 = 0$

- $\frac{V_s}{R}$ η τελική τιμή ρεύματος θεωρητικά μετά από άπειρο χρόνο
- Πρακτικά μετά από 5τ
- τ ο χρόνος στον οποίο το ρεύμα έχει ~ 0.63 της τελικής του τιμής



Παράδειγμα 6.2

Ο διακόπτης στο κύκλωμα της εικ. (α) έχει μείνει στη θέση a για μεγάλο χρονικό διάστημα. Στο $t = 0$ μετατίθεται από τη θέση a στη θέση b.

Ο διακόπτης είναι τύπου MBB (make-before-break), δηλαδή, η επαφή στη θέση b επέρχεται πριν διακοπεί η επαφή με τη θέση a. Με αυτόν τον τρόπο, δεν υπάρχει διακοπή του ρεύματος στο πηνίο.

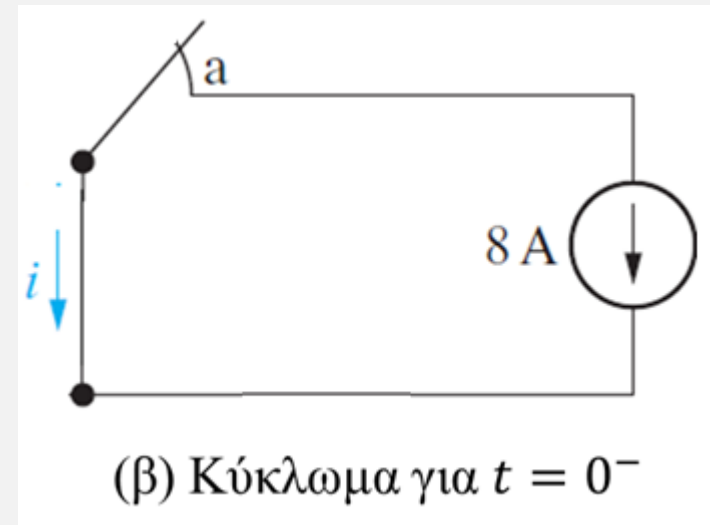
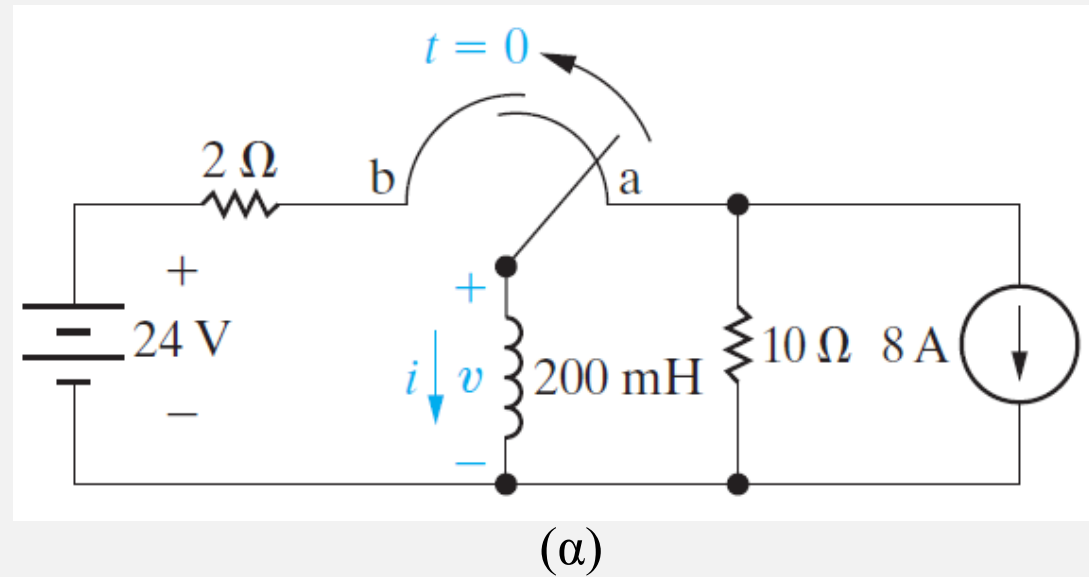
Βρείτε την έκφραση για το $i(t)$ για $t \geq 0$.

Λύση

Ο διακόπτης έχει μείνει στη θέση a για μεγάλο χρονικό διάστημα.

Το πηνίο είναι βραχυκύκλωμα για τη πηγή ρεύματος και το κύκλωμα ισοδυναμεί με της εικ. (β)

Επομένως, $i(t = 0^-) = -8 \text{ A}$



(συνεχίζεται ...)

Λύση (... συνέχεια)

Αμέσως μετά τη μεταγωγή του διακόπτη στη θέση b,

δηλαδή, το χρονική στιγμή $t = 0^+$,

το κύκλωμα ισοδυναμεί με της εικ. (γ) με

$$i(t = 0^+) = I_0 = -8 \text{ A}$$

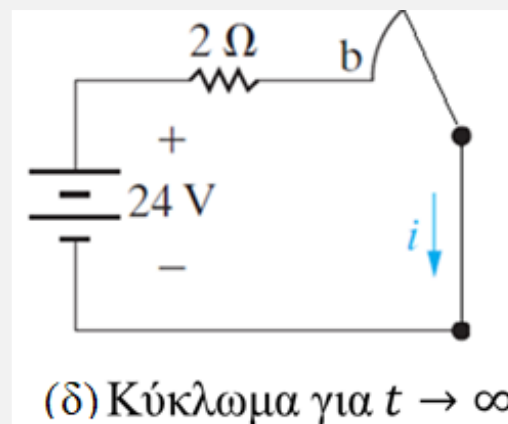
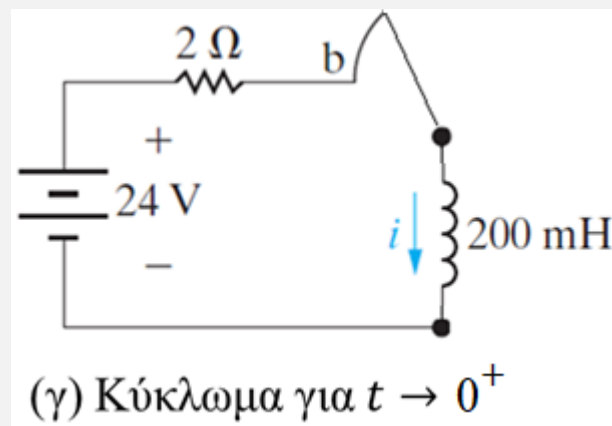
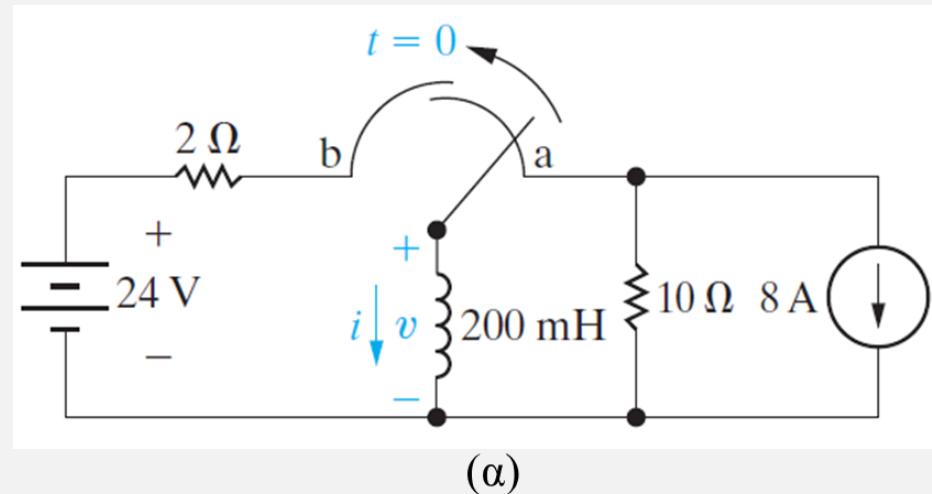
Μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα στη θέση b, το πηνίο ισοδυναμεί με βραχυκύκλωμα. Το κύκλωμα είναι εικ. (δ)

η τελική τιμή του ρεύματος στο πηνίο θα είναι

$$i(\infty) = \frac{24}{2} = 12 \text{ A}$$

Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος για $t > 0$, εικ. (γ), είναι

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{200 \times 10^{-3}}{2} = 100 \text{ ms}$$



(συνεχίζεται ...)

Λύση (... συνέχεια)

Η εξίσωση

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R} \right) e^{-t/\tau}$$

για

$$I_0 = -8 \text{ A}$$

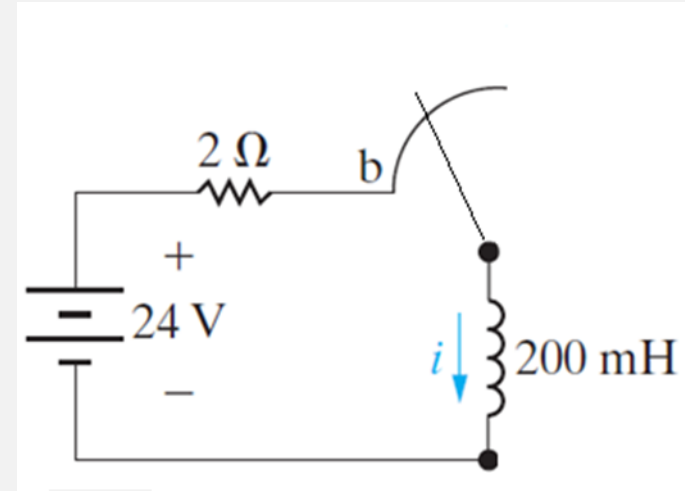
$$\frac{V_s}{R} = 12 \text{ A}$$

$$\tau = 100 \text{ ms}$$

γίνεται, εικ. (ε)

$$i(t) = 12 + (-8 - 12)e^{-10t} \text{ A}, \quad t \geq 0$$

$$i(t) = 12 - 20e^{-10t} \text{ A}, \quad t \geq 0$$



(ε) Κύκλωμα για $t \geq 0$