ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ Ι
Κεφάλαιο 6 Α′

Απόκριση κυκλωμάτων RL και RC

Επαγωγός (πηνίο)

- Απόσβεση ρεύματος πηνίου μέσω αντίστασης – Φυσική απόκριση κυκλώματος RL
- Απόκριση πηνίου σε βηματική διέγερση ρεύματος

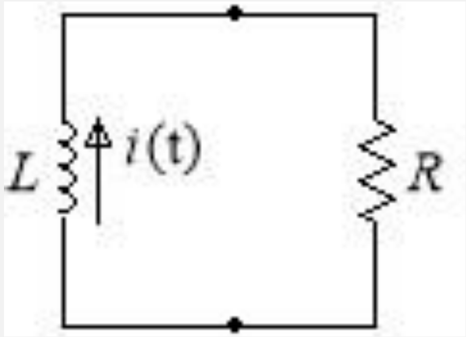
Πυκνωτής

- Αποφόρτιση πυκνωτή μέσω αντίστασης - Φυσική απόκριση κυκλώματος RC
- Απόκριση πυκνωτή σε βηματική διέγερση τάσης

Συμπεριφορά κυκλωμάτων RL και RC σε συνεχόμενα άνοιγμα-κλείσιμο διακοπτών

Φυσική απόκριση κυκλώματος *RL*

(Natural response of *RL* circuit)



- Πως “σβήνει” το ρεύμα *i* ενός πηνίου αυτεπαγωγής *L* όταν συνδεθεί με εξωτερική αντίσταση *R*
- Η σημασία της σταθεράς χρόνου

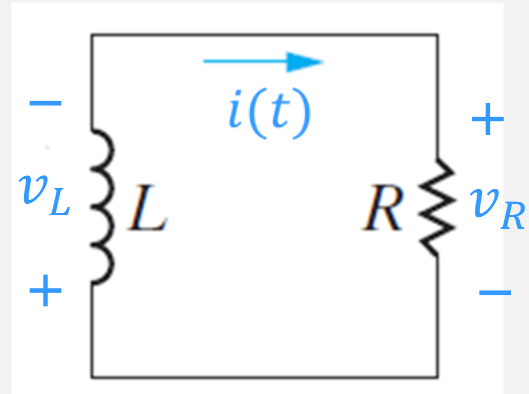
Πως "σβήνει" το ρεύμα ενός πηνίου αυτεπαγωγής L όταν συνδεθεί με εξωτερική αντίσταση R;

A. Το κύκλωμα, εικ. (α)

- $i(t)$ η τιμή του ρεύματος τη χρονική στιγμή t
- Οι πτώσεις τάσης στα στοιχεία

$$v_R = iR$$

$$v_L = L\frac{di}{dt}$$



(α)

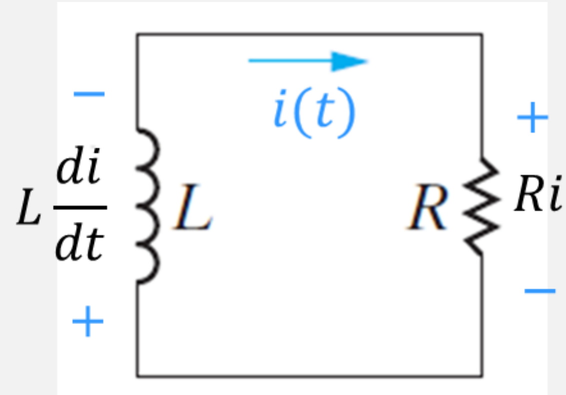
B. Η εξίσωση (από το νόμο των τάσεων του Kirchhoff)

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

Ορολογία: Συνήθης διαφορική εξίσωση 1ης τάξης (1st order ordinary differential equation): η μέγιστη εμφανιζόμενη τάξη παραγώγου είναι 1

Επίλυση της 1ης τάξεως εξίσωσης κυκλώματος RL

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$



(α)

Χωρισμός μεταβλητών (i, t)

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt$$

Ολοκληρώνοντας, έχουμε

$$\int_{i(0)}^{i(t)} \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt$$

$$\ln i\Big|_{i(0)}^{i(t)} = -\frac{R}{L}t \qquad \Rightarrow \ln i(t) - \ln i(0) = -\frac{R}{L}t \qquad \Rightarrow \ \ln\frac{i(t)}{i(0)} = e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\boldsymbol{i(t) = i(0)e^{-\frac{R}{L}t}}$$

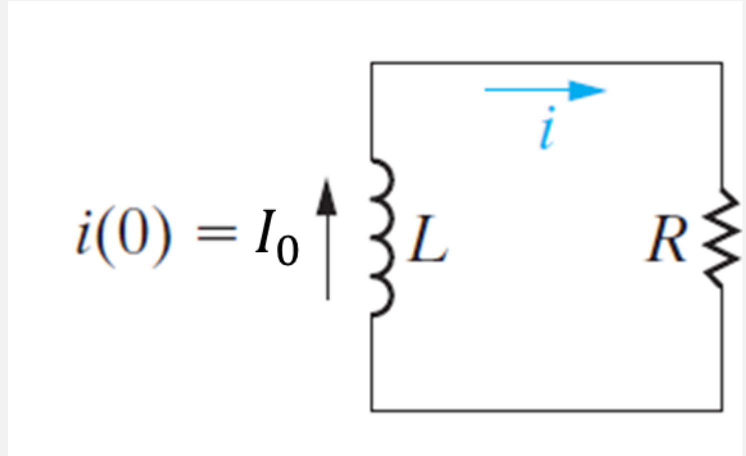
Φυσική απόκριση RL κυκλώματος

όπου, $i(t)$ και $i(0)$ το ρεύμα τις χρονικές στιγμές t και 0, αντίστοιχα.

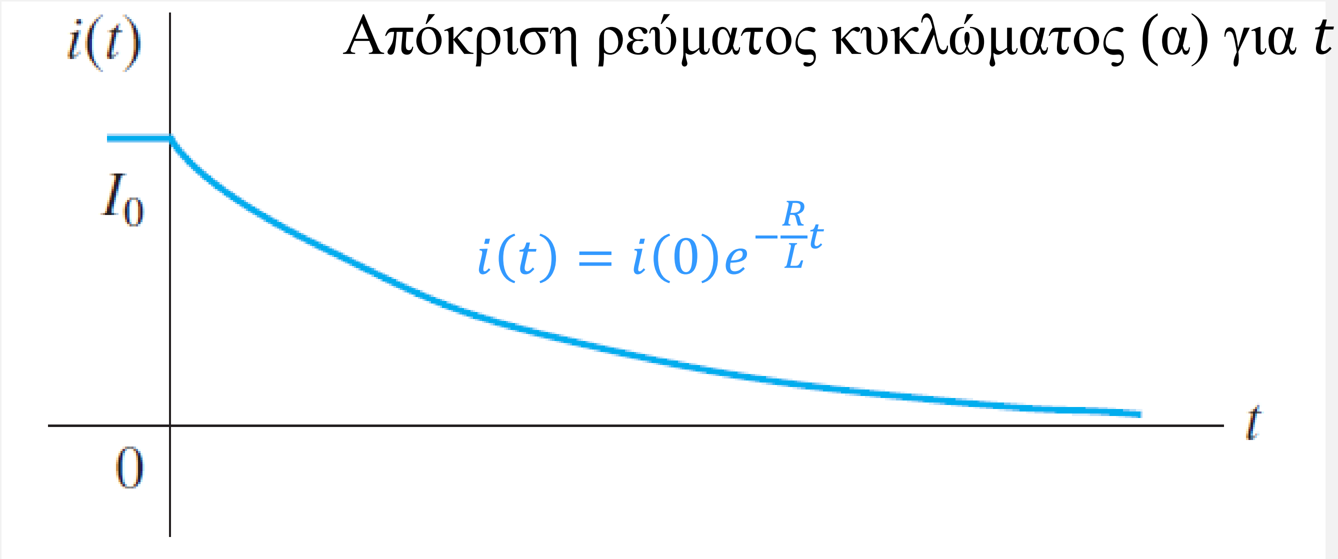
Γραφική αναπαράσταση απόκρισης ρεύματος κυκλώματος *RL*

Εικ. (α): Κύκλωμα *RL*

- $i(0)$ (ή I_0) η αρχική τιμή του ρεύματος, η τιμή του ρεύματος για $t = 0$



(α)



Απόκριση ρεύματος κυκλώματος (α) για $t > 0$

$$i(t) = i(0)e^{-\frac{R}{L}t}$$

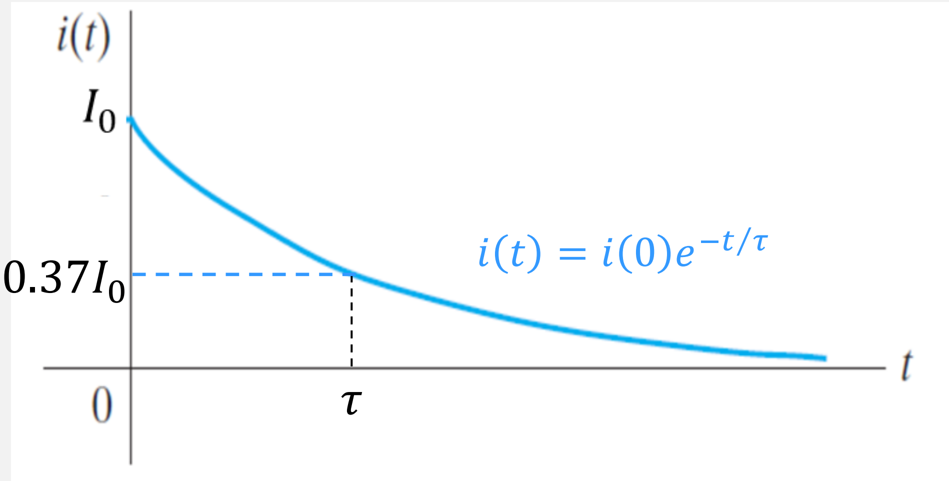
Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος *RL*

Σταθερά χρόνου (time constant) κυκλώματος *RL*:

$$\tau = L/R$$

Χρησιμοποιώντας τη σταθερά χρόνου, η χρονική εξάρτηση του ρεύματος γράφεται

$$\boldsymbol{i(t) = i(0)e^{-t/\tau}}$$



Η σημασία της σταθεράς χρόνου

- Προσδιορίζει το ρυθμό απόσβεσης του ρεύματος (πόσο γρήγορα πλησιάζει στο μηδέν)
- Είναι ο χρόνος που το ρεύμα έχει μειωθεί στο $e^{-1} \approx 0.37$ της αρχικής τιμής

(*συνεχίζεται …*)

(… *συνέχεια*)

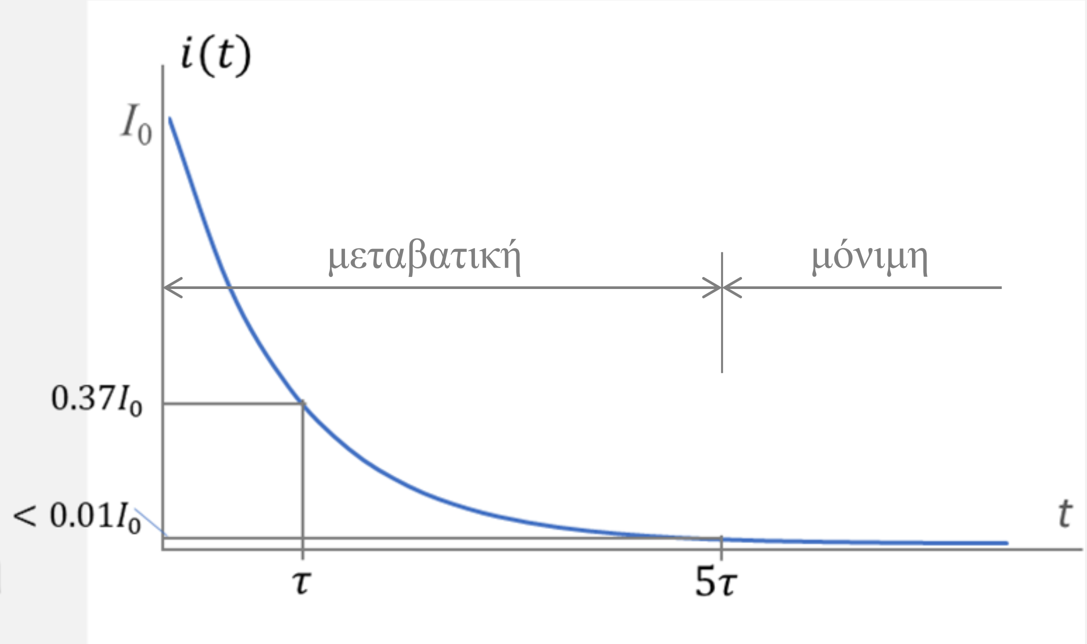
Η σημασία της σταθεράς χρόνου

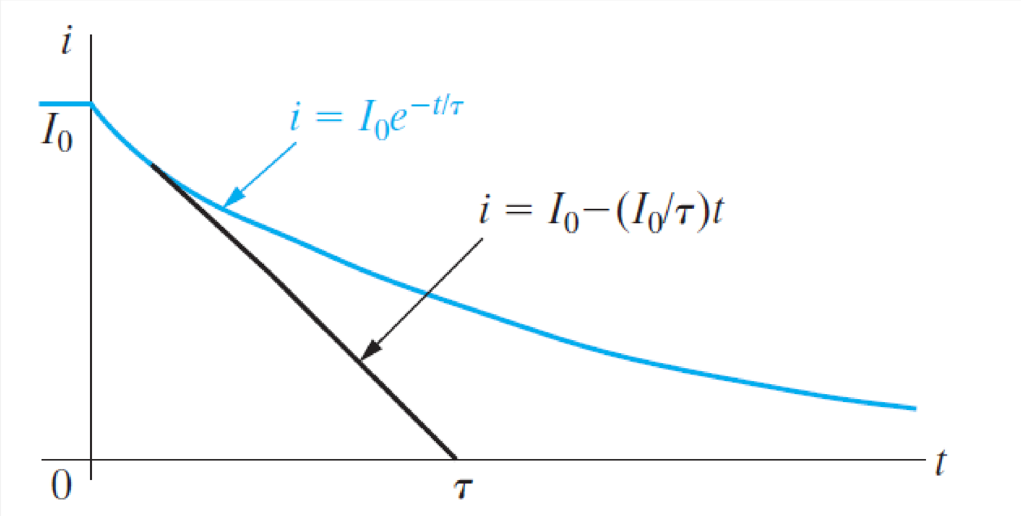
- 5τ μετά την έναρξη της απόσβεσης, το ρεύμα είναι λιγότερο από το 1% την αρχικής του τιμής.

- 5τ είναι το όριο που χωρίζει τη μεταβατική κατάσταση (transient response) από τη μόνιμη κατάσταση (steady-state response) του κυκλώματος.

- Γραφικός προσδιορισμός τ: είναι ο χρόνος μηδενισμού αν το ρεύμα διατηρούσε σταθερό τον αρχικό ρυθμό μεταβολής

$$di/dt_{t=0} = -\frac{I_0}{\tau}$$





Για τον υπολογισμό της φυσικής απόκρισης κυκλώματος *RL*

Βήμα 1: Βρίσκουμε το αρχικό ρεύμα I_0 μέσα από τον επαγωγό.

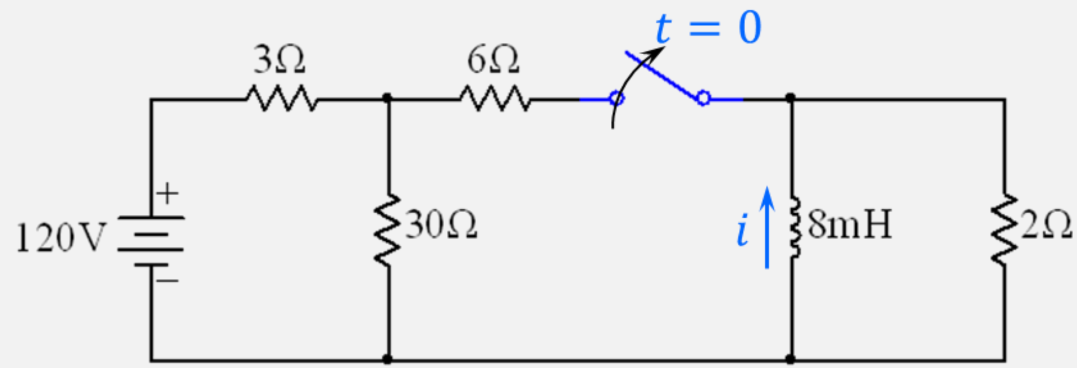
Βήμα 2: Βρίσκουμε τη σταθερά χρόνου $\tau = L/R$ του κυκλώματος.

Βήμα 3: Χρησιμοποιούμε την εξίσωση $i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$

Παράδειγμα 6.1

Ο διακόπτης στο κύκλωμα της εικ. (α) ανοίγει την $t = 0$ αφού έχει μείνει κλειστός για μεγάλο χρονικό διάστημα.

α) Υπολογίστε την αρχική τιμή του ρεύματος i.



(α)

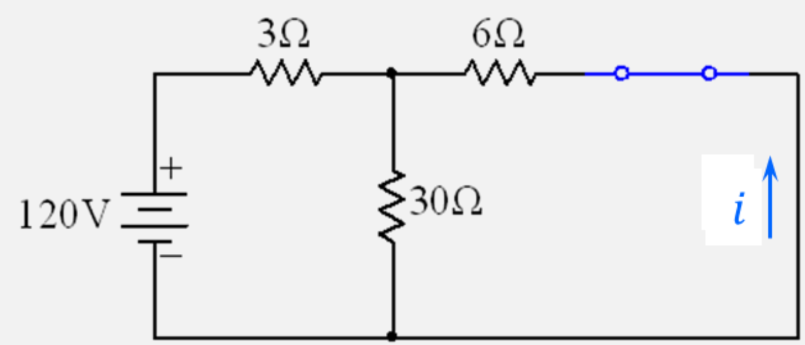
Λύση

(α) Ο διακόπτης έχει κλείσει για μεγάλο χρονικό διάστημα πριν από την $t = 0$,

συνεπώς, τη χρονική στιγμή μόλις πριν το άνοιγμα του διακόπτη ($t = 0^-$)

η τάση κατά μήκος του πηνίου πρέπει να είναι μηδέν διότι το πηνίο ισοδυναμεί με βραχυκύκλωμα

το κύκλωμα για $t = 0^-$ ισοδυναμεί με της εικ. (β)



(β) Κύκλωμα για $t = 0^-$

(συνεχίζεται …)

Λύση (… συνέχεια)

Εικ. (β), $R_T = 3 + (30 \parallel 6) = 8\ \Omega$

$$i_T = \frac{120}{8} = 15\ \text{A}$$

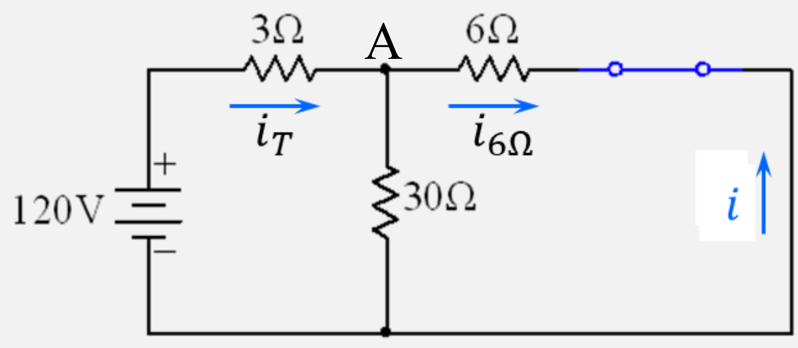
Στον κόμβο Α, με χρήση διαιρέτη ρεύματος

$$i_{6\Omega} = \frac{30}{36} 15 = 12.5\ \text{A}$$

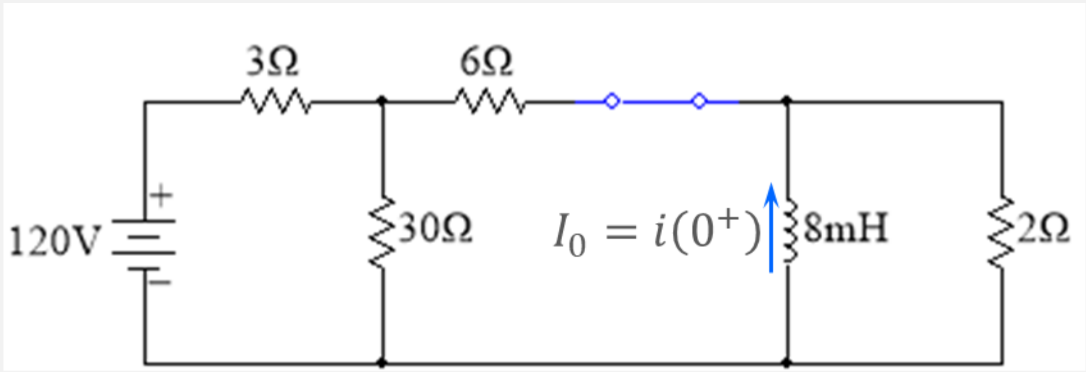
Επομένως, το ρεύμα i για $t = 0^-$ είναι

$$i(0^-) = -12.5\ \text{A}$$

Ως εκ τούτου, τη χρονική στιγμή αμέσως μετά το άνοιγμα του διακόπτη ($t = 0^+$) το ρεύμα είναι επίσης -12.5 A, επειδή στιγμιαία αλλαγή ρεύματος στο πηνίο δεν μπορεί να γίνει, εικ. (γ)



(β) Κύκλωμα για $t = 0^-$

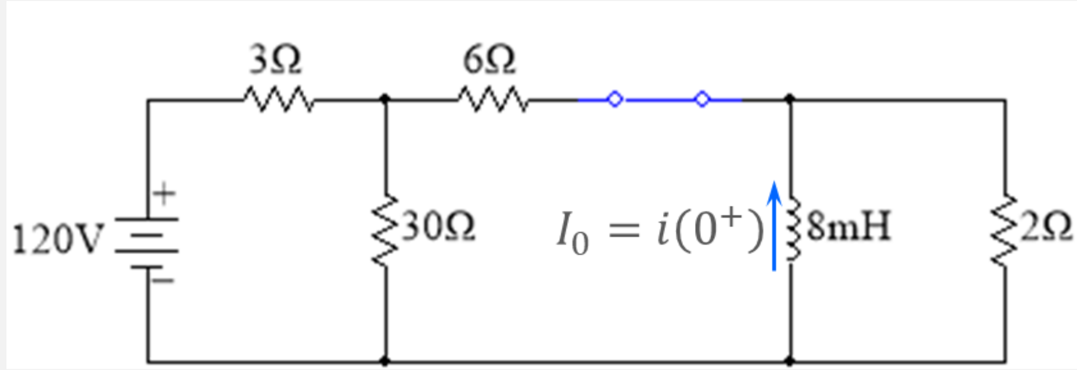


(γ) Κύκλωμα για $t = 0^+$

Συνεπώς, η αρχική τιμή του ρεύματος i είναι $\boldsymbol{I_0 = -12.5\ \text{A}}$

(*συνεχίζεται …*)

(β) Υπολογίστε την αρχική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο.



(γ)

Λύση *(… συνέχεια)*

Εικ. (γ): Αρχική (μαγνητική) ενέργεια αποθηκευμένη στο πηνίο

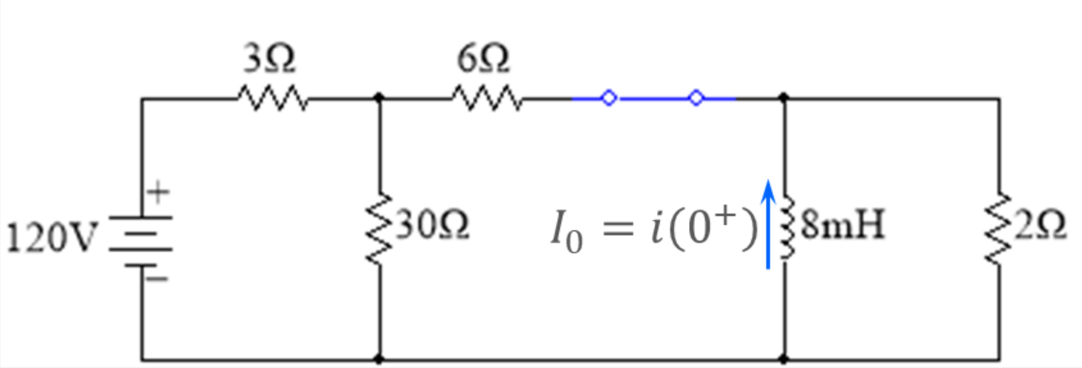
$$w_0 = \frac{1}{2} L I_0^2$$

$$w_0 = \frac{1}{2}(8 \times 10^{-3})(-12.5)^2$$

$$\boldsymbol{w_0 = 625\ \mathrm{mJ}}$$

(συνεχίζεται …)

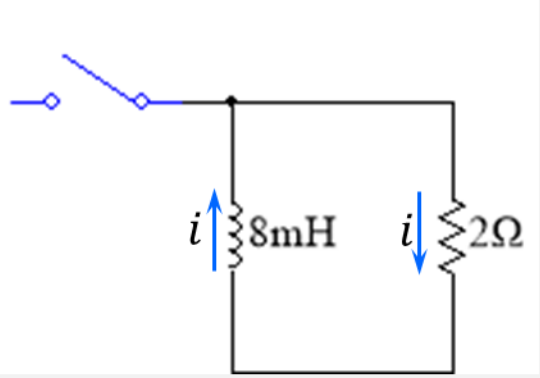
(γ) Ποια είναι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος για $t > 0$;



(γ)

Λύση *(… συνέχεια)*

Μετά το άνοιγμα του διακόπτη ($t > 0$), το κύκλωμα ισοδυναμεί με της εικ. (δ)



(δ) Κύκλωμα για $t > 0$

Το πηνίο εκφορτίζεται μέσω της αντίστασης 2 Ω.

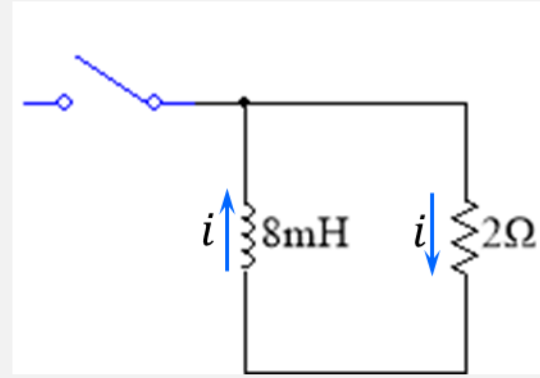
Η σταθερά χρόνου είναι

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{8 \times 10^{-3}}{2}$$

$$\boldsymbol{\tau = 4\ \mathrm{ms}}$$

(συνεχίζεται …)

(δ) Ποια είναι η αριθμητική έκφραση για το ρεύμα για $t \geq 0$;



(δ) Κύκλωμα για $t > 0$

Λύση *(… συνέχεια)*

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

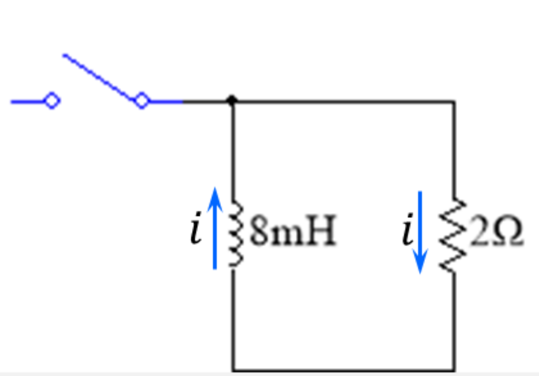
με

$$\tau = 4 \text{ ms} \;\; \text{και} \;\; I_0 = -12.5\, A$$

οπότε

$$\boldsymbol{i(t) = -12.5 e^{-250t}}\ \textbf{A}$$

ε) Τι ποσοστό της αρχικής αποθηκευμένης ενέργειας έχει καταναλωθεί στη 2 Ω αντίσταση 5 ms μετά το άνοιγμα του διακόπτη;



(δ) Κύκλωμα για $t > 0$

Λύση *(… συνέχεια)*

t ms μετά το άνοιγμα του διακόπτη, η ενέργεια που παραμένει αποθηκευμένη στο πηνίο είναι

$$w(\mathrm{t}) = \frac{1}{2} L\, i^2(t)$$

και αυτή που έχει καταναλωθεί είναι $w_0 - w(\mathrm{t})$

Το ποσοστό της επί της αρχικής είναι

$$\frac{w_0 - w(\mathrm{t})}{w_0} = 1 - \frac{w(\mathrm{t})}{w_0}$$

$$1 - \frac{\frac{1}{2} L\, i^2(t)}{\frac{1}{2} L I_0^2} = 1 - \frac{i^2(t)}{I_0^2} = 1 - e^{-2\cdot 250t} = \mathbf{0.918} = \mathbf{91.2}\%$$

Προσομοιώστε τη λειτουργία του κυκλώματος του Παραδείγματος 6.1 με τη βοήθεια του κυκλώματος

Example 6_1

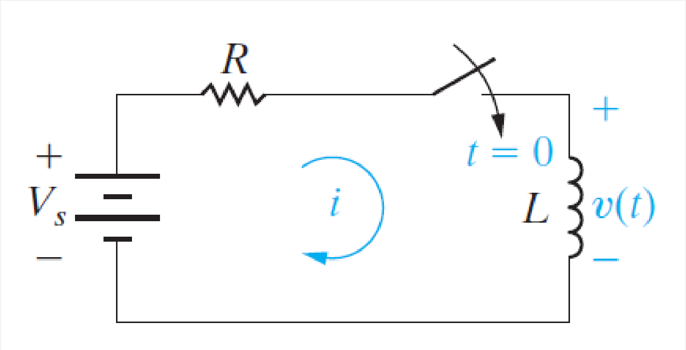
στην ομάδα

ECE-UOWM MK18

στο Multisim Live

Απόκριση κυκλώματος *RL* σε βηματική διέγερση

(Step response of *RL* circuit)



- Πως αναπτύσσεται το ρεύμα και η τάση σε ένα κύκλωμα *RL* όταν εφαρμοστεί ξαφνικά πηγή τάσης ή ρεύματος (βηματική διέγερση)

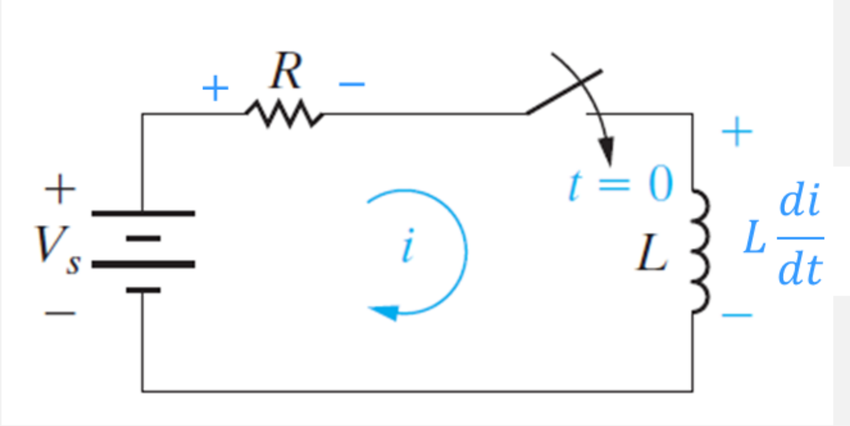
Βηματική διέγερση κυκλώματος RL

Το κύκλωμα, εικ. (α)

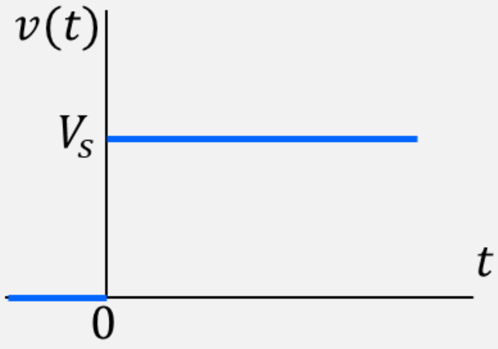
- Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κλείνει ο διακόπτης
- Η τάση που εφαρμόζεται στο κύκλωμα έχει βηματική μορφή, εικ. (β)
- Έστω I_0 το ρεύμα στο πηνίο εκείνη τη χρονική στιγμή (αρχικό ρεύμα)
- i η τιμή ρεύματος για $t > 0$

Η εξίσωση (από το νόμο των τάσεων του Kirchhoff)

$$V_s = Ri + L\frac{di}{dt}$$



(α)



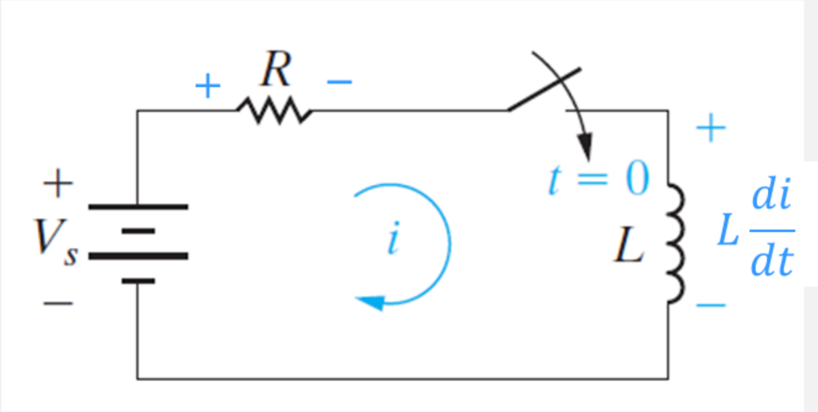
(β) Βηματική διέγερση τάσης

Επίλυση κυκλώματος *RL* σε βηματική διέγερση

$$V_s = Ri + L\frac{di}{dt}$$

$$L\frac{di}{dt} = V_s - Ri$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{R}{L}\left(\frac{V_s}{R} - i\right)$$



(α)

Με χωρισμό μεταβλητών (i, t), έχουμε

$$\frac{di}{i - (V_s/R)} = -\frac{R}{L}dt$$

Ολοκληρώνοντας μεταξύ 0 και t παίρνουμε $\int_{I_0}^{i(t)} \frac{di}{i-(V_s/R)} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt$

$$\boldsymbol{i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right)e^{-(R/L)t}}$$

Βηματική απόκριση *RL* κυκλώματος

Γραφική αναπαράσταση απόκρισης κυκλώματος *RL* σε βηματική διέγερση

Εικ (α): Κύκλωμα RL σε βηματική διέγερση τάσης όταν $I_0 = 0$

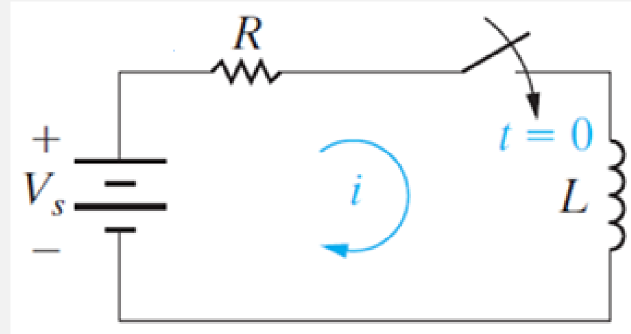
$$i(t) = \frac{V_s}{R} - \frac{V_s}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

Συναρτήσει της σταθεράς χρόνου $\tau = L/R$

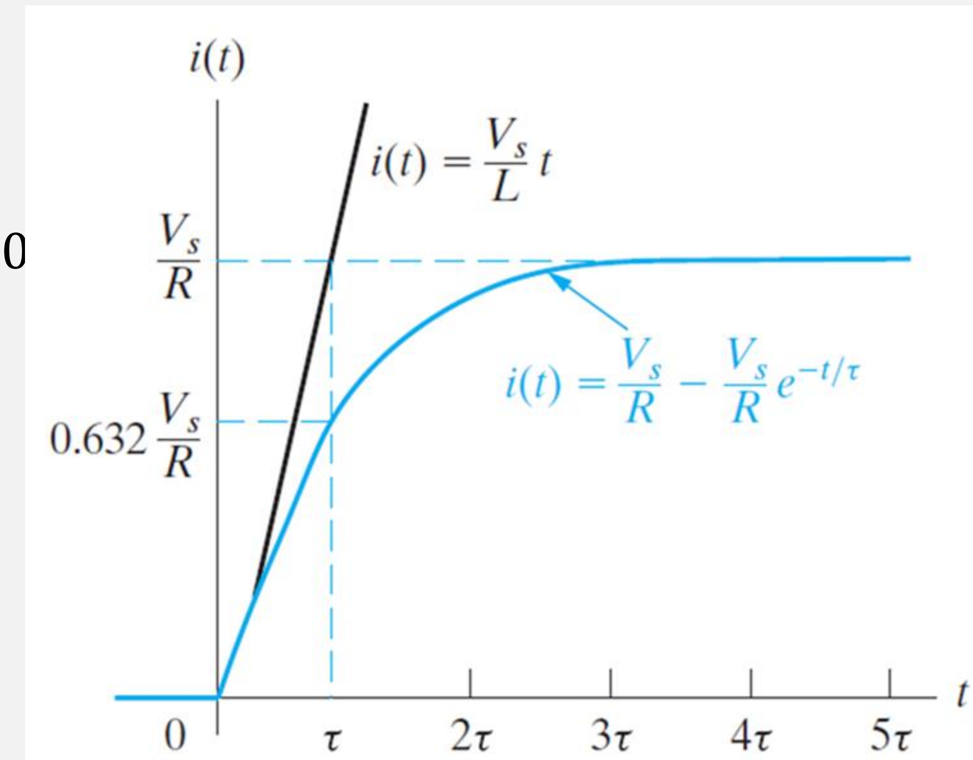
$$i(t) = \frac{V_s}{R} - \frac{V_s}{R} e^{-t/\tau}$$

Εικ (β): Γραφική αναπαράσταση όταν $I_0 = 0$

- $\frac{V_s}{R}$ η τελική τιμή ρεύματος θεωρητικά μετά από άπειρο χρόνο
- Πρακτικά μετά από 5τ
- τ ο χρόνος στον οποίο το ρεύμα έχει ~ 0.63 της τελικής του τιμής



(α)

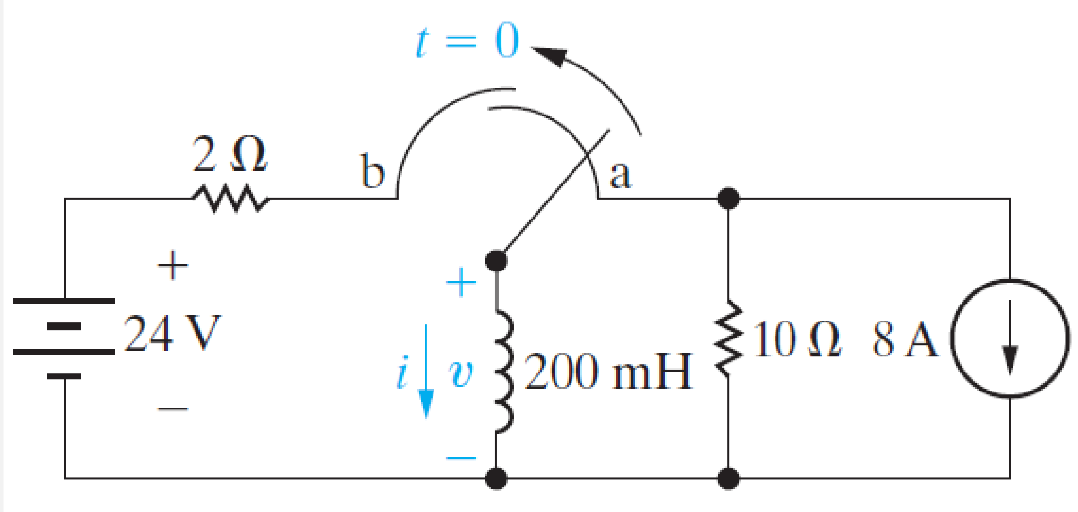


(β)

Παράδειγμα 6.2

Ο διακόπτης στο κύκλωμα της *εικ. (α)* έχει μείνει στη θέση a για μεγάλο χρονικό διάστημα. Στο $t = 0$ μετατίθεται από τη θέση a στη θέση b.

Ο διακόπτης είναι τύπου MBB (make-before-break), δηλαδή, η επαφή στη θέση b επέρχεται πριν διακοπεί η επαφή με τη θέση a. Με αυτόν τον τρόπο, δεν υπάρχει διακοπή του ρεύματος στο πηνίο.



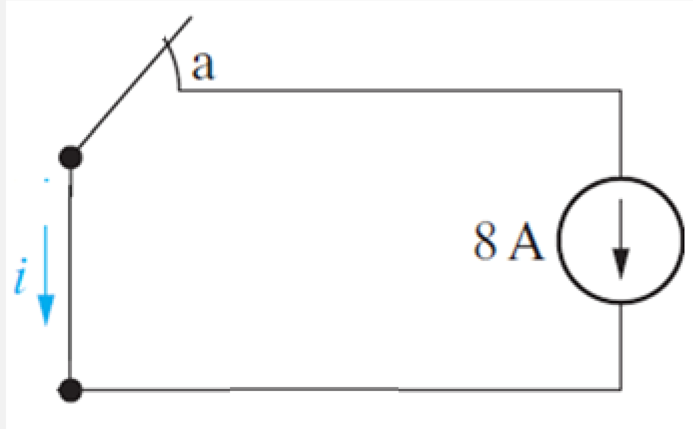
(α)

Βρείτε την έκφραση για το $i(t)$ για $t \geq 0$.

Λύση

Ο διακόπτης έχει μείνει στη θέση a για μεγάλο χρονικό διάστημα.

Το πηνίο είναι βραχυκύκλωμα για τη πηγή ρεύματος και το κύκλωμα ισοδυναμεί με της εικ. (β)



(β) Κύκλωμα για $t = 0^-$

Επομένως, $i(t = 0^-) = -8$ A

(συνεχίζεται …)

Λύση (… *συνέχεια*)

Αμέσως μετά τη μεταγωγή του διακόπτη στη θέση b,

δηλαδή, το χρονική στιγμή $t = 0^+$,

το κύκλωμα ισοδυναμεί με της εικ. (γ) με

$$i(t = 0^+) = I_0 = -8 \text{ A}$$

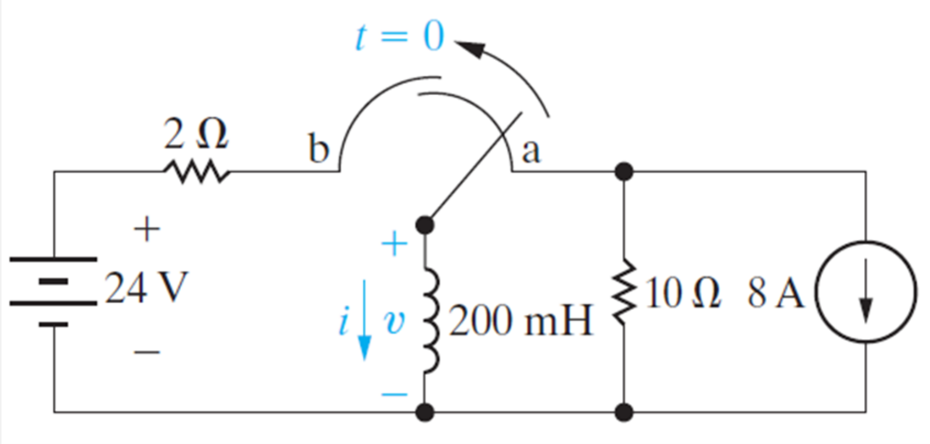
Μετά από μεγάλο (θεωρητικά άπειρο) χρονικό διάστημα στη θέση b, το κύκλωμα ισοδυναμεί με της *εικ. (δ)*

η τελική τιμή του ρεύματος στο πηνίο θα είναι

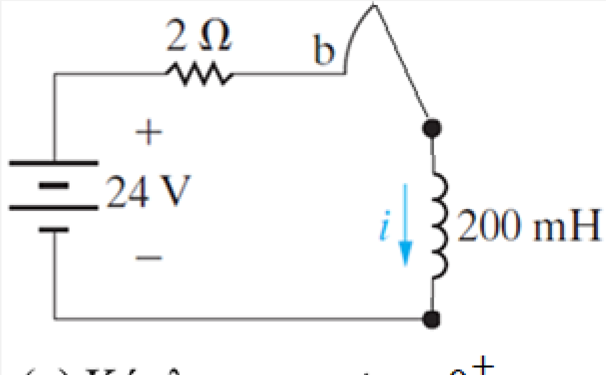
$$i(\infty) = \frac{24}{2} = 12 \text{ A}$$

Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος για $t > 0$, εικ. (γ), είναι

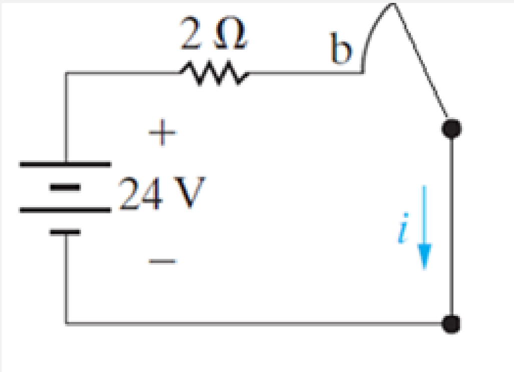
$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{200 \times 10^{-3}}{2} = 100 \text{ ms}$$



(α)



(γ) Κύκλωμα για $t \to 0^+$



(δ) Κύκλωμα για $t \to \infty$

(*συνεχίζεται …*)

Λύση (… *συνέχεια*)

Η εξίσωση

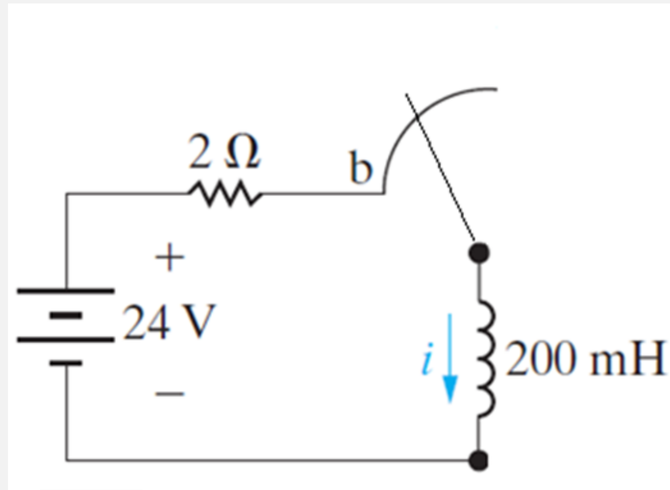
$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right)e^{-t/\tau}$$

για

$$I_0 = -8\text{ A}$$

$$\frac{V_s}{R} = 12\text{ A}$$

$$\tau = 100\text{ ms}$$



(ε) Κύκλωμα για $t \geq 0$

γίνεται, εικ. (ε)

$$\boldsymbol{i(t) = 12 + (-8 - 12)e^{-10t}\ \mathrm{A}, \qquad t \geq 0}$$

Προσομοιώστε τη λειτουργία του κυκλώματος του Παραδείγματος 6.2 με τη βοήθεια του κυκλώματος

Example 6_2

στην ομάδα

ECE-UOWM MK18

στο Multisim Live